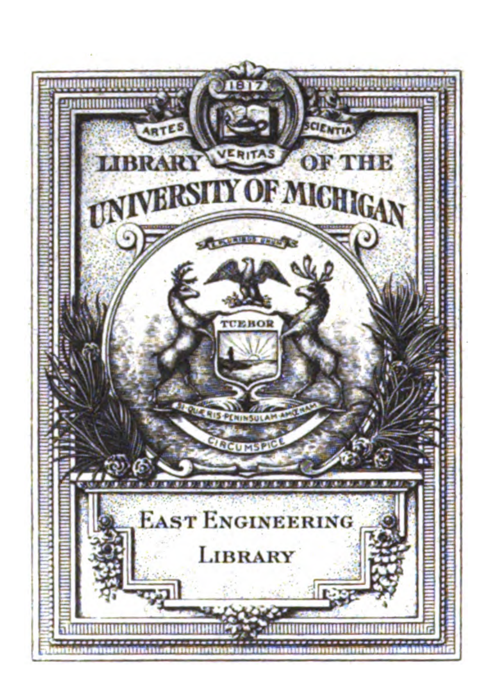



1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
EAST ENGINEERING
LIBRARY





BAND XVIII

1941

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

INHALTS-ÜBERSICHT

Verfasserverzeichnis.

Sachverzeichnis.



Festigkeit.

Werkstoffe.

Triebwerk und Brennstoffe.

Ausrüstung.

Allgemeines.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 1 SEITE 1 BIS 38 | MÜNCHEN, 28. 2. 1941

Mitarbeiter:
Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung • Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung E.V. • Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt E.V., Berlin-Adlershof, und ihre 12 Institute • Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig • Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen E.V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften • Deutsche Forschungsanstalt für Segelflug E.V., Flugplatz Darmstadt • Flugfunk-Forschungsinstitut E.V., Oberpfaffenhofen bei München, und viele weitere Forschungsinstitute und Einzelforscher.

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 | 28. Februar 1941 | Lfg. 1

Zusammenfassender Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie.

Von K. Wieghardt.

Bericht des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen.

Die Turbulenz spielt in der Luftfahrtforschung eine große Rolle, z. B. bei den Windkanalversuchen wegen der Übertragbarkeit der Versuchsergebnisse auf die wirklichen Verhältnisse, vor allem bei der Untersuchung des Umschlagpunktes in der Grenzschicht, bei Messungen des Reibungswiderstandes usw. Die neuere statistische Turbulenztheorie, die hauptsächlich in England und Amerika entwickelt wurde, hat wertvolle Aufschlüsse über diese Zusammenhänge geliefert. Dies läßt es angezeigt erscheinen, über die Ergebnisse dieser Theorie zusammenfassend zu berichten, zumal die verschiedenen Einzelarbeiten teilweise schwer zugänglich sind. Durch die statistische Turbulenztheorie ist auch eine umfangreiche Meßtechnik angeregt worden, doch soll im folgenden nur über theoretische Arbeiten berichtet werden.

Gliederung.

I. Einleitung.

Wenn man einen beliebigen festen Körper durch eine Flüssigkeit hindurchzieht, kann man schon äußerlich zwei wesentlich voneinander verschiedene Strömungsarten erkennen. Führt man nämlich den Versuch bei einer sehr kleinen *Re*-Zahl aus, zieht man etwa einen dünnen Stab langsam durch ein dickes Öl in einem Gefäß hindurch, so ist die Flüssigkeit nur in unmittelbarer Nähe des Stabes in Bewegung. Vor dem Stab werden die Flüssigkeitsteilchen auseinandergeschoben, um hinter ihm wieder zusammenzufließen; hat der Stab eine bestimmte Stelle gerade passiert, so ist die Flüssigkeit bei kleinen Gefäßdimensionen sofort wieder in Ruhe. Andererseits erfährt der Körper wegen der Zähigkeitskräfte auch bei gleichförmiger Geschwindigkeit einen Widerstand, so daß an dem Stab eine Arbeit geleistet wird. Diese Arbeit muß in der Flüssigkeit wiederzufinden sein, und zwar in Form von Wärme. Es wird also die an dem geschleppten Körper geleistete Arbeit durch die Wirkung der Zähigkeitskräfte in Wärme umgewandelt. Eine vollkommen anders geartete Strömung ergibt sich dagegen bei großer *Re*-Zahl, wenn man z. B. einen Stab schnell durch Wasser hindurchzieht. Die Zähigkeitskräfte, die hier viel kleiner sind als im ersten Fall, können die Arbeit, die am Stab geleistet wird, nicht schnell genug in Wärme umwandeln. Wenn der Stab schon weit weg ist oder etwa überhaupt aus der Flüssigkeit herausgezogen ist, ist erst ein Teil der Arbeit in Wärme umgewandelt. Wegen des Satzes von der Erhaltung der Energie muß daher der übrige Anteil in Form von Bewegungsenergie in der Flüssigkeit zurückbleiben. Im ganzen bleibt die Flüssigkeit zwar in Ruhe, da der Einfluß des Stabes nur in der Umgebung des Weges liegt, den er in der Flüssigkeit zurückgelegt hat; die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich folglich nur hin und her oder bilden kleine Wirbel. Dieses unregelmäßige Hin- und Herschwanken ist der turbulente Bewegungszustand. Die makroskopisch sichtbare Bewegung der Flüssigkeitsteilchen wird dann allmählich durch die Wirkung der Zähigkeit umgesetzt in Bewegungsenergie der Moleküle, d. h. also in Wärme.

II. Die Dissipationsfunktion.

Die Arbeit, die geleistet werden muß, um einen Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit durch eine Flüssigkeit hindurchzuziehen, und die in der Flüssigkeit zerstreut wird, ist die Dissipationsarbeit A. Sie entspricht der Arbeit, die die Flüssigkeitsspannungen in der Zeiteinheit durch Volumen- und Formänderung an einem Flüssigkeitselement leisten, bezogen auf die Volumeneinheit. Für inkompressible Flüssigkeiten ist der Ausdruck für A analog der Formänderungsenergie eines elastischen Körpers. Den Dehnungen entsprechen hier die Dehnungsgeschwindigkeiten; das Hookesche Gesetz, daß die Spannungen proportional den Dehnungen sind, ist hier ersetzt durch die lineare Beziehung zwischen den Schubspannungen und den Geschwindigkeitsgradienten. Man erhält also für A

»Dehnungen«

$$A = \mu \left\{ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

»Scherung«

$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right\}.$$

Um diesen und die folgenden Ausdrücke übersichtlicher schreiben zu können, wollen wir statt x, y, z schreiben x_1, x_2, x_3 und ebenso für die Geschwindigkeiten statt u, v, w u_1, u_2, u_3. In dieser Schreibweise lautet die obige Gleichung

$$A = \mu \left\{ \Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\}, \text{ mit } i, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

A ist die Dissipation bei einer ganz beliebigen Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Bei dieser gilt natürlich

$$\Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Außer der Kontinuitätsgleichung soll die Flüssigkeit auch noch die Navier-Stokes'sche Bewegungsgleichung erfüllen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \Sigma_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \text{ wobei } \Delta \equiv \Sigma_l \frac{\partial}{\partial x_l^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bildet man die Divergenz dieser Gleichung, d. h. also $\Sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Sigma_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \Delta X_i - \frac{1}{\varrho}\Delta p + \nu \Sigma_l \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Vorausgesetzt, daß die äußeren Kräfte ein Potential V besitzen, für das $\Delta V = 0$ ist, wird $\Delta X_1 = 0$, und wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\varrho}\Delta p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

und damit

$$A = \mu \left\{ \Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 - \frac{1}{\varrho}\Delta p \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Der turbulente Bewegungszustand soll später anschaulich durch kleine Wirbel erklärt werden. Um diesen Gedanken mathematisch zu formulieren, kann man schon jetzt den allgemeinen Ausdruck für die Dissipation durch den rot-Vektor ausdrücken. Die Rotation wird definiert durch die drei Komponenten

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$
$$\omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$
$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Bildet man

$$\Sigma_i \omega_i^2 = \Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 - \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \frac{1}{\varrho}\Delta p,$$

so wird damit

$$A = \mu \left\{ \Sigma_i \omega_i^2 - \frac{2}{\varrho}\Delta p \right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

Analog zum Satz vom Minimum der Formänderungsenergie gilt für die Dissipation ein Satz von Helmholtz [1]: Wenn die Trägheitsglieder vernachlässigt werden können, so ist die unter Einwirkung von konstanten Kräften mit eindeutigem Potential zustande kommende stationäre Bewegung einer Flüssigkeit durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre Dissipation für jedes Gebiet kleiner ist als die irgendeiner anderen Bewegung mit denselben Werten u, v, w an der Begrenzung. Diesen Satz hat Vogelpohl für die Theorie der Schmierung angewandt [2].

Ein analoges Prinzip erhält M. Wehrlé auch für das Turbulenzproblem [3]. Danach soll auf Grund von statistischen Wahrscheinlichkeitsüberlegungen derjenige turbulente Bewegungszustand der wahrscheinlichste sein, für den die Dissipationsenergie ein Minimum ist. Physikalisch erscheint es aber nicht sehr einleuchtend, daß für den turbulenten Bewegungszustand, bei dem gerade Trägheits- und Zähigkeitswirkungen von derselben Größenordnung sind, dasselbe Minimalprinzip gelten soll wie für die schleichende Bewegung.

III. Isotrope Turbulenz.

Um die obigen Formeln für die Dissipation auf den Fall der turbulenten Strömung zu spezialisieren, muß der turbulente Bewegungszustand noch näher gekennzeichnet werden. Das Hauptmerkmal der Turbulenz ist die Unregelmäßigkeit der Bewegung der einzelnen Teilchen. Es ist daher von vornherein unmöglich, etwa die Bahn eines einzelnen Teilchens zu berechnen, sondern man kann nur über gewisse statistische Mittelwerte theoretisch oder experimentell Aussagen gewinnen. Diese Einschränkung ist aber nicht wesentlich, da man auch praktisch nur an gewissen Mittelwerten interessiert ist.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der Hauptströmung mit U_i und die darüber gelagerten turbulenten Schwankungen mit u_i, so ist die momentane Geschwindigkeit in i-Richtung $U_i + u_i$. Da U_i die mittlere Bewegung darstellen soll, muß u_i im Mittel verschwinden: $\bar{u}_i = 0$, ganz unabhängig davon, wie stark die Schwankungen sind. Ein Maß für die Stärke der Turbulenz erhält man erst durch das quadratische Mittel $u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}}$. Die Mittelbildung ist immer als Mittel über eine genügend große Zeit T zu verstehen, also $u_i' = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_i^2 dt}$. So ist z. B. für eine sinusförmige Schwankung

$$u_i = A \sin 2\pi nt \qquad u_i' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,A.$$

Es ist nun naheliegend, zunächst das einfachste Feld von isotrop-turbulenten Schwankungen zu untersuchen, in dem der mittlere Betrag der Schwankungen nach allen Richtungen und an allen Punkten gleich groß ist, d. h. wenn für jeden Punkt $u_1' = u_2' = u_3'$. Dieser rechnerisch einfachste Fall hat auch praktische Bedeutung. So ist z. B. die Strömung hinter einem Gitter oder der Luftstrom eines Windkanals in einiger Entfernung vom Turbulenzerzeuger (Gitter, Siebe) isotrop turbulent; d. h. in einem mit der Hauptströmung mitbewegten Koordinatensystem sind alle Richtungen und Orte hinsichtlich der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen gleichwertig.

Für diese isotrope Turbulenz kann man eine Reihe von Beziehungen zwischen den verschiedenen Mittelwerten aufstellen. Wegen der Ortsunabhängigkeit ist überall $\overline{\Delta p} =$ const, so daß man über ein Volumen V mitteln: $\overline{\Delta p} = \frac{1}{V}\int \Delta p\, dv$ und nach dem Gaußschen Satz transformieren $\overline{\Delta p} = \frac{1}{V}\int \mathfrak{n}^0 \operatorname{grad} p\, df$ kann, wobei $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen ist. Integriert man z. B. über einem Kugelraum mit dem Radius R, so wächst f mit R^2, V mit R^3, und da im Mittel auch $p =$ const überall gelten soll, verschwindet $\overline{\Delta p}$ wie $1/R$ [4].

Infolge der Richtungsunabhängigkeit sind die Mittelwerte, die durch zyklische Koordinatentransformation auseinander hervorgehen, also folgende Gruppen, gleich groß

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega_3', \quad a_1 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)'^2, \quad a_2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2,$$
$$a_3 = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}, \quad a_4 = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}}$$

usw., wobei $i, k = 1, 2, 3$ aber $i \neq k$. Mittelwerte von der Form $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}}$ müssen bei isotroper Turbulenz verschwinden, da sie das Vorzeichen wechseln, wenn das Koordinatensystem um 180° gedreht wird. Aus kinematischen Gründen und weiterhin wegen der Symmetrie sind nun die Mittelwerte a_1 bis a_4 nicht unabhängig voneinander, sondern es bestehen noch folgende Beziehungen. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt durch Quadrieren und Mittelwertbildung sofort

$$a_1 + 2 a_4 = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

Wie oben abgeleitet, wird $\overline{\Delta p} = 0$; das ergibt mit $\Delta p = -\varrho \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$

$$a_1 + 2 a_3 = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5b)$$

Endlich erhält man eine dritte Beziehung durch Drehung des Koordinatensystems. Dreht man um 45°, was rechnerisch am bequemsten ist, so lautet die Transformation



$$\left|\begin{array}{l} 2x^* = x + y \\ 2y^* = -x + y \\ z^* = z \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left|\begin{array}{l} 2u^* = u + v \\ 2v^* = -u + v \\ w^* = w . \end{array}\right.$$

Damit wird z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right).$$

Wegen der Isotropie muß auch in dem neuen Koordinatensystem $a_1 = \overline{\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2}$ usw. gelten. Quadriert man daher die obige Gleichung und bildet die Mittelwerte, so erhält man schließlich

$$a_1 - a_2 - a_3 - a_4 = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5c)$$

Fassen wir jetzt (5a), (5b) und (5c) zusammen, so wird

$$a_1 = a_2/2 = -2a_3 = -2a_4 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die wichtigste dieser Beziehungen ist $a_1 = \frac{1}{2} a_2$, also

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2 \qquad \text{mit } k \neq i . \quad . \quad . \quad (5d)$$

Damit kann man jetzt (mit Gl. (4) und (4a)) für die mittlere Dissipation bei isotroper Turbulenz schreiben:

$$\bar{A} = \mu\, \Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2 = \mu\, \Sigma_i\, \omega_i'^2 = 3\mu\, \omega_i'^2 = 7{,}5\,\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2;$$

denn die Summe $\Sigma_k \Sigma_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2$ besteht aus drei Gliedern der Form $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2$ und aus sechs untereinander gleichen Gliedern $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2$ mit $k \neq i$, so daß also

$$\bar{A} = \mu\left(6 + 3\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2 = 7{,}5\,\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)'^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Beziehung stammt von G. I. Taylor [5].

IV. Die Korrelationsfunktion.

Wir haben gesehen, daß durch die Annahme der Isotropie der Turbulenz eine ganze Anzahl von Aussagen über die einzelnen Mittelwerte der Strömung erhalten werden konnte. Das lag daran, daß die Schwankungsbewegungen der Teilchen nicht vollkommen irregulär sein können, da sie jedem Zeitpunkt die Kontinuitätsgleichung und gewisse Symmetriebedingungen erfüllen sollten. Der Sachverhalt ist hier ein anderer als z. B. in der kinetischen Gastheorie. Dort beeinflussen sich nämlich die einzelnen Gasmoleküle gegenseitig erst dann, wenn sie zusammenstoßen. Ein Flüssigkeitsteilchen, das hin- und herschwankt, beeinflußt aber wegen der Kontinuität durch Trägheits- und Zähigkeitswirkungen dauernd seine ganze Umgebung. Um nun zur theoretischen und experimentellen Untersuchung ein Maß für die Reichweite dieser Beeinflussung zu bekommen, hat G. I. Taylor den statistischen Begriff der Korrelation auf das Turbulenzproblem angewandt [5, 6]. Der Korrelationskoeffizient gibt an, ob und in welchem Maß die gleichzeitigen Schwankungsgeschwindigkeiten an zwei verschiedenen Punkten voneinander abhängen. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte (s. Bild 1a), deren Verbindungslinie senkrecht zur x-Richtung liegt und deren Abstand y ist, so kann man z. B. die gleichzeitigen Schwankungen u und $u(y)$ in der x-Richtung durch den Korrelationskoeffizienten g in Beziehung zueinander setzen: $g(y) = \frac{\overline{u \cdot u(y)}}{u' \cdot u'(y)}$, oder bei isotroper Turbulenz mit $u' = \text{const}$: $g(y) = \frac{\overline{u \cdot u(y)}}{u'^2}$.

Der Verlauf von g als Funktion des Abstandes y ist folgender (s. Bild 2): für $y = 0$ hat g den maximalen Wert $g = 1$, dann fällt g nach beiden Seiten $\pm y$ monoton ab bis auf einen kleinen negativen Wert und steigt wieder allmählich auf Null. Von einem gewissen Abstand an besteht zwischen den Geschwindigkeiten kein praktischer Zusammenhang mehr, d. h. es ist ein negativer oder positiver

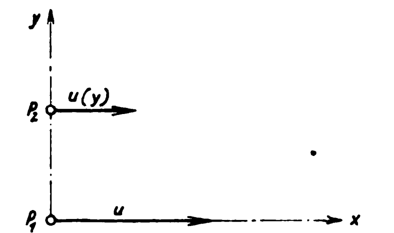


Bild 1a. Zur Definition des Korrelationskoeffizienten $g(y)$.

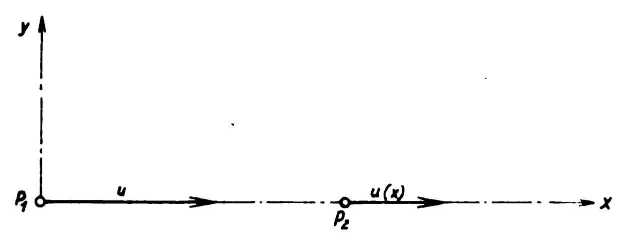


Bild 1b. Zur Definition des Korrelationskoeffizienten $f(x)$.

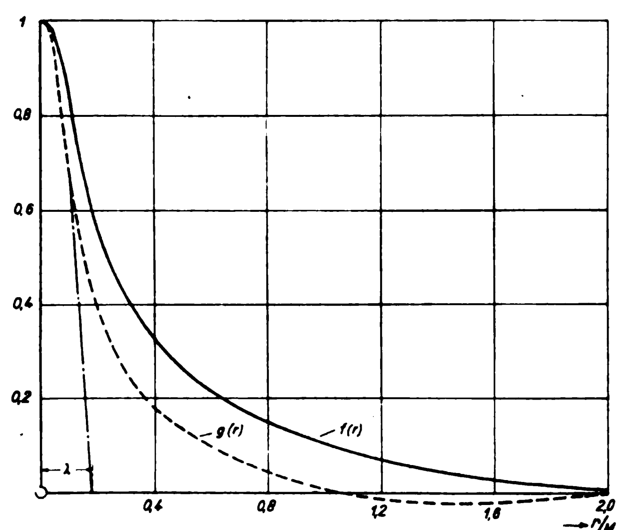


Bild 2. Verlauf der Korrelationsfunktionen hinter einem Gitter (Maschenweite M).

Schwankungswert von $u \cdot u(y)$ gleich wahrscheinlich, so daß im Mittel $\overline{u \cdot u(y)} = 0$ wird. Wenn man die ältere Mischungstheorie buchstäblich nehmen würde — sie war nie so gemeint —, so wäre die Korrelationskurve ein Rechteck, dessen Breite der Größe der einzelnen Flüssigkeitsballen bzw. dem Mischungsweg selbst entspräche. Je gröber die Turbulenz ist, desto weiter reicht die Beeinflussung und desto breiter verläuft die Korrelationskurve, so daß man ein exakt definierbares Maß für den Mischungsweg durch die Größe der Turbulenz L erhält:

$$L_2 = \int_0^\infty g(y)\,dy = \int_0^Y g(y)\,dy, \text{ wenn } Y \text{ so groß ist, daß } g(Y) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man kann nun beliebig viele solcher Korrelationskoeffizienten definieren, je nach der Lage der Verbindungslinie der zwei Punkte und der Richtung der untersuchten Geschwindigkeiten. Bei isotroper Turbulenz gibt es aber nur zwei Korrelationsfunktionen, die nicht verschwinden und auch nicht aus Symmetriegründen durch Koordinatentransformation aufeinander zurückgeführt werden können, die also zunächst unabhängig voneinander erscheinen. Ist die oben definierte Funktion g die eine dieser Funktionen, so ist die andere Korrelation $f(x) = \frac{\overline{u \cdot u(x)}}{u'^2}$ (s. Bild 1b). Dabei fällt also die Richtung der untersuchten Schwankungen mit der der Verbindungsgeraden der beiden Punkte zusammen. Auch

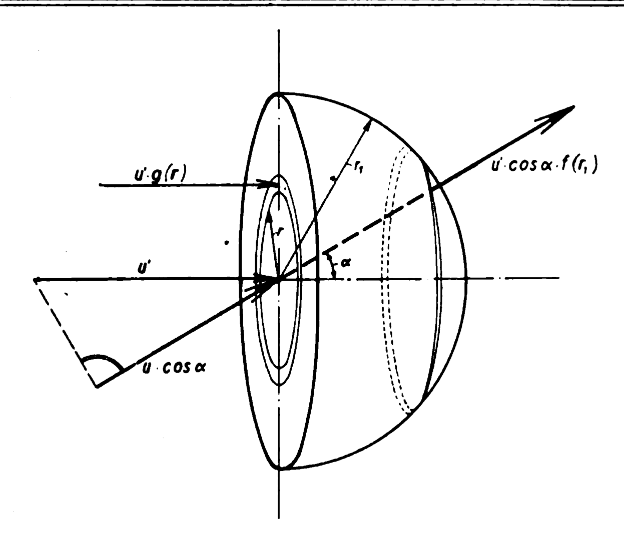


Bild 3. Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt in Korrelationsfunktionen bei isotroper Turbulenz.

mit dieser Korrelation kann die Größe der Turbulenz definiert werden:

$$L_1 = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^X f(x)\,dx\,. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Da die Geschwindigkeitsschwankungen für sich ebenfalls wie die Hauptströmung die Kontinuitätsgleichung erfüllen müssen, sind die beiden Korrelationen f und g durch eine Differentialgleichung miteinander verknüpft. Diese Differentialgleichung, die zuerst v. Kármán [7] aufgestellt hat, kann man nach L. Prandtl folgendermaßen ableiten. Man betrachtet die ein- und ausfließende Flüssigkeitsmenge durch eine Kontrollfläche, die sich mit der gleichförmigen Hauptströmung fortbewegt und aus einer Halbkugel und ihrer Durchmesserebene zusammensetzt (s. Bild 3). Infolge der turbulenten Schwankungen tritt durch die Durchmesserebene in der Zeiteinheit die Menge $\varrho \int_0^{r_1} u'\, g(r)\, 2\pi r\, dr$ hindurch; dabei ist $g(r)$ statt $g(y)$ geschrieben, um anzudeuten, daß die Lage des Koordinatensystems wegen der angenommenen Isotropie der Turbulenz beliebig sein kann. Aus der Halbkugel heraus fließt:

$$\varrho \int_0^{\pi/2} u' \cos\alpha\, f(r_1)\, 2\pi r_1 \sin\alpha\, r_1\, d\alpha = \pi\, u'\, f(r_1)\, r_1^2\,.$$

Die Kontinuität erfordert daher

$$\int_0^{r_1} u'\, g(r)\, 2\pi r\, dr = \pi\, u'\, f(r_1)\, r_1^2\,.$$

Differenziert man diese Gleichung nach r_1, so wird

$$r_1\, g(r_1) = r_1\, f(r_1) + \frac{r_1^2}{2} \frac{df(r)}{dr}\bigg|_{r=r_1},$$

oder, da der Radius der Halbkugel r_1 beliebig ist,

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2}\, r\, \frac{df(r)}{dr}\,. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Integriert man jetzt diese Gleichung über r von 0 nach ∞, so erhält man

$$L_2 = L_1 + \left[\frac{f(r)\cdot r}{2}\right]_0^\infty - \frac{1}{2} L_1 = \frac{1}{2} L_1\,.$$

Eine andere Gleichung (Verallgemeinerung von (5d)) verknüpft die Mittelwerte der Geschwindigkeits-Gradienten $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)'$ an einem Punkt nach einer beliebigen Richtung Θ gegen die y-Achse:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)' = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)' \sqrt{\cos^2\Theta + \frac{1}{2}\sin^2\Theta}\,. \quad \ldots \quad (10)$$

Die experimentelle Bestätigung dieser rein kinematischen Beziehungen (9) und (10) durch Hitzdrahtmessungen in Windkanälen hinter verschiedenen Gittern zeigt einerseits, daß die Strömung in einiger Entfernung hinter einem Gitter tatsächlich isotrop ist, und andererseits die Richtigkeit der Korrelationsmeßmethoden.

Aus dem Verlauf der Korrelationsfunktion $g(y)$ kann man den für die Dissipation wichtigen Wert $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'$ folgendermaßen ermitteln. Entwickelt man $g(y)$ in eine Taylor-Reihe, so ergibt sich:

$$g(y) = \frac{\overline{u\, u(y)}}{u'^2} = \frac{1}{u'^2}\left[u'^2 + y\, \overline{u \frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{y^2}{2!}\, \overline{u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \ldots\right].$$

Aus $\overline{u^2} = \text{const}$ folgt

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} = \overline{u \frac{\partial u}{\partial y}} = 0$$

und daraus durch nochmalige Differentiation

$$\overline{u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = 0\,.$$

Damit erhält man für kleine y:

$$g(y) = 1 - \frac{y^2}{2!\, u'^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'^2 + \ldots$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'^2 = 2\, u'^2 \lim_{y \to 0} \frac{1 - g(y)}{y^2} = 2\, u'^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \quad \ldots \quad (11)$$

Die so definierte Länge λ kann geometrisch gedeutet werden als der Abstand vom Nullpunkt, in dem die Schmiegungsparabel bei $y = 0$ die Abszisse $g = 0$ schneidet (s. Bild 2). Die Dissipation (6) lautet mit λ geschrieben:

$$\bar{A} = 15\, \mu\, \frac{u'^2}{\lambda^2}\,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Je kleiner λ ist, desto größer ist die Dissipation. G. I. Taylor betrachtet daher λ als den Durchmesser der kleinsten Wirbel, die durch die Zähigkeit verschluckt werden. Je kleiner diese Wirbel sind, desto spitzer ist der Verlauf von g bei $y = 0$, und desto schneller wird eine solche Turbulenz durch die Zähigkeit abgebremst, während Wirbel mit großem Durchmesser wesentlich langsamer verlöschen.

Eine Hauptaufgabe der statistischen Turbulenztheorie ist nun die Berechnung der Korrelationskurve, da durch diese der turbulente Bewegungszustand vollständig charakterisiert wird. Diese Aufgabe hat v. Kármán für den Fall der isotropen Turbulenz versucht zu lösen [7, 8, 9]. Die Ergebnisse sind jedoch, da eine wesentliche Aussage bisher fehlt, nicht befriedigend. Es möge daher dieser Hinweis genügen.

V. Das Spektrum der Turbulenz.

Bisher haben wir zum Beschreiben des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes die Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen an zwei verschiedenen Punkten zu denselben Zeiten benutzt. G. I. Taylor [10] hat gezeigt, daß auch der Begriff des »Spektrums der Turbulenz« dazu geeignet ist. Er denkt sich die Geschwindigkeitsschwankungen an einem Punkt harmonisch zerlegt in sinusförmige Schwankungen, jede von einer anderen Frequenz n, so daß $u'^2 F(n)\, dn$ der Beitrag der Schwankungen mit den Frequenzen zwischen n und $n + dn$ ist; wegen $u'^2 = \int_0^\infty u'^2 F(n)\, dn$ gilt definitionsgemäß $\int_0^\infty F(n)\, dn = 1$. Zwischen $F(n)$ und $f(x)$ besteht folgender Zusammenhang: $f(x) = \frac{\overline{u \cdot u(x)}}{u'^2}$ kann auch geschrieben werden $f(x) = \frac{\overline{u(t)\, u(t + x/U)}}{u'^2}$, wenn

$$U \gg u', \text{ da } t = \frac{x}{U + u} = \frac{x}{U}\left(1 - \frac{u}{U} \ldots\right).$$

Auf diese Weise ist f dargestellt als Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen an einem Punkt zu verschiedenen Zeiten. Wie G. I. Taylor gezeigt hat, sind nun f und

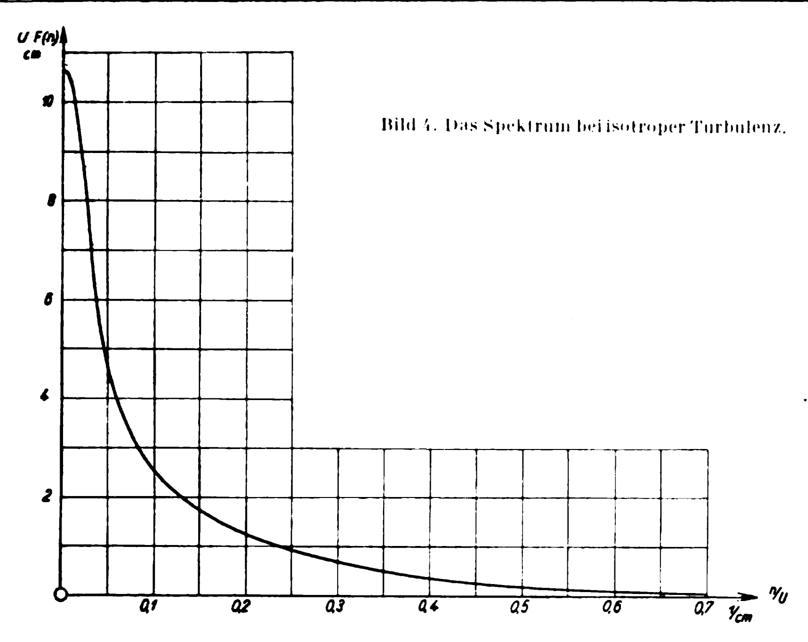


Bild 4. Das Spektrum bei isotroper Turbulenz.

$\frac{U F(n)}{2\sqrt{2\pi}}$ Fourier-Transformierte aufeinander, d. h. es gelten folgende Gleichungen

$$F(n) = \frac{4}{U}\int_0^\infty f(x) \cos \frac{2\pi n x}{U} dx \quad \ldots\ldots (13\text{a})$$

und

$$f(x) = \int_0^\infty F(n) \cos \frac{2\pi n x}{U} dn \quad \ldots\ldots\ldots (13\text{b})$$

Die Länge λ wird durch $F(n)$ ausgedrückt wie folgt:

$$\frac{1}{\lambda^2} = 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{n^2}{U^2} U F(n) \frac{dn}{U} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Bild 4 zeigt den Verlauf von $U \cdot F(n)$ über n/U nach Messungen von Simons und Salter hinter Gittern [10, 11]. In dieser Auftragung erweist sich das Spektrum unabhängig von der mittleren Geschwindigkeit U der Hauptströmung. Das steht in Übereinstimmung damit, daß auch die Korrelation $f(x)$ hinter Gittern nahezu unabhängig von U ist. Lediglich der Verlauf von $f(x)$ bei sehr kleinen Abständen und damit auch die Länge λ hängen von U ab. Nach Gleichung (14) müßte dann aber auch das Spektrum von U abhängen. Tatsächlich zeigten nun genaue Messungen, daß das Spektrum zwar für einen großen Frequenzbereich unabhängig von U ist, daß sich aber bei sehr hohen Frequenzen (etwa von $n/U = 0{,}6$ 1/cm ab) je nach der mittleren Geschwindigkeit U ein anderer Verlauf ergibt. Gerade die hohen Frequenzen sind aber für den Zusammenhang des Spektrums mit λ nach Gleichung (14) wesentlich.

Mit den Begriffen der Korrelationsfunktion oder des Spektrums hat man nun die Möglichkeit, die Vorgänge in turbulenten Strömungen vorläufig allerdings vor allem experimentell zu untersuchen.

VI. Das Abklingen der Turbulenz.

Der einfachste Vorgang in einer turbulenten Strömung, den man theoretisch untersuchen kann, ist das zeitliche Abklingen der isotropen Turbulenz durch die Zähigkeit. Diese Erscheinung ist von Interesse für den Turbulenzgrad von Windkanälen. Dort wird in den Luftstrom durch die vorgeschalteten Siebe und durch den Gleichrichter künstlich Turbulenz erzeugt, die im Kanal wieder abklingt. Die kinetische Energie der Turbulenz ist $E = \frac{\varrho}{2}\overline{\Sigma_i u_i^2} = \frac{3}{2}\varrho u'^2$.

Die zeitliche Abnahme $-\frac{dE}{dt}$ entspricht der dissipierten Energie

$$\dot{A} = 15\mu \frac{u'^2}{\lambda^2} = -\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{2}\varrho \frac{du'^2}{dt}.$$

Geht man von dem mitbewegten Koordinatensystem auf ein raumfestes über, so kann man bei stationärer Grundströmung $\frac{d}{dt}$ durch $U\frac{d}{dx}$ ersetzen und erhält

$$U \frac{du'^2}{dx} = -10\nu \frac{u'^2}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots (15)$$

Zur Integration der Gleichung (15) muß man noch λ in Abhängigkeit von u' und x kennen. Zu einem Ansatz für λ kann man entweder durch Mischungswegüberlegungen oder durch Dimensionsbetrachtungen kommen.

1. Mischungswegannahmen.

Vermischt sich ein Flüssigkeitsballen, der gegenüber der Hauptströmung eine Geschwindigkeit u' besitzt, so wird die kinetische Energie pro Volumeneinheit E um den Betrag $\Delta E \sim \frac{\varrho}{2} u'^2$ verringert. Die Zeit t, während der diese Energieänderung vor sich geht, ist von der Größenordnung $\frac{l}{u'}$, wobei l der Mischungsweg ist. Der Energieverlust pro Zeiteinheit $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ ist also $\sim \varrho \frac{u'^3}{l}$. Vergleicht man diesen Energieverlust mit der Dissipation, so erhält man $\frac{\varrho u'^3}{l} \sim \mu \frac{u'^2}{\lambda^2}$ oder $\frac{\lambda}{l} \sim \sqrt{\frac{\nu}{l u'}}$. Der Mischungsweg l kann proportional der Größe der Turbulenz $L_1 = \int_0^\infty f\,dy$ gesetzt werden, so daß

$$\frac{\lambda}{L_1} = A\sqrt{\frac{\nu}{L_1 u'}} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

wobei A eine Zahlenkonstante ist. L_1 hängt voraussetzungsgemäß nicht mehr von u' ab, sondern nur noch von t bzw. von x. Die einfachste Annahme ist $L_1 = \text{const}$ (proportional der Maschenweite). Dann ergibt sich aus (15) und (16) $\frac{U}{u'} = \frac{5}{A^2}\frac{x}{L_1}$, was durch Messungen oft bestätigt wurde [5]. Nach anderen Versuchen von Dryden wurde $L_1 = L_0 + cx$ gemessen, so daß $\frac{U}{u'} \sim \log\left(\frac{L_0}{M} + \frac{cx}{M}\right)$, wobei M die Maschenweite des Gitters bedeutet [12].

2. Dimensionsbetrachtungen.

Von Kármán erhält aus Dimensionsbetrachtungen ebenfalls Gleichung (15), nimmt aber an, daß die zeitliche Abnahme der Größe der Turbulenz L von u' abhängt, also $\frac{dL}{dt} \sim u'$. Daraus folgt dann mit $x = Ut$, $L \sim x^{1-n}$, $\lambda^2 = \frac{5}{n}\frac{\nu x}{U}$ und $\frac{U}{u'} \sim \left(\frac{x}{M}\right)^n$. Auch dieses Ergebnis wird durch einen Satz von Messungen bestätigt; n wurde dabei aus der Gleichung für λ^2 ermittelt und Übereinstimmung der letzten Gleichung für $\frac{U}{u'}$ mit den Messungen gefunden [7].

Die vorstehenden Überlegungen geben den Vorgang des Abklingens nur grob und summarisch wieder. Um die physikalischen Einzelheiten zu untersuchen, kann man sich die Turbulenz durch Wirbel erklären, was wegen der Gleichung $\dot{A} = \mu \overline{\Sigma_i \omega_i^2}$ naheliegt. Am Gitter werden Wirbel von der Größenordnung der Maschenweite M erzeugt, dann zerfallen diese Wirbel in immer kleinere, die durch die Zähigkeitswirkung verschluckt werden. Betrachtet man zwei Teilchen eines Wirbelfadens, dessen Winkelgeschwindigkeit ω_0 beträgt, mit dem mittleren Abstand d_0, so ist es, wie Taylor annimmt [13], infolge der diffusiven Wirkung der Turbulenz wahrscheinlicher, daß nach einiger Zeit der

Abstand d größer geworden ist. Wenn zunächst bei kleinem ω_0 und großem Durchmesser die Zähigkeit zu vernachlässigen ist, wird nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz ω größer: $\omega = \frac{\omega_0}{d_0} d$. Ist ω bis zu einem gewissen Betrag angewachsen, so ist die Wirkung der Zähigkeit nicht mehr zu vernachlässigen, so daß die obige Überlegung dann nicht mehr gilt. Es erscheint aber fraglich, ob man für so nahe Abstände wie d_0 einen statistischen Vorgang, nämlich Diffusion, annehmen kann; denn nicht-statistisch betrachtet entsteht an einem Wirbelfaden beim Vergrößern von d eine Reaktionskraft, die die Teilchen wieder zusammenzieht. Taylor und Green [13] versuchten den Vorgang rechnerisch zu verfolgen, indem sie einen Ansatz für u, v, w, der einer ungefähr isotrop turbulenten Strömung entspricht, in die Bewegungsgleichung einsetzen; sie erhalten für kleine Zeiten ein schwaches Anwachsen der Dissipation, was wegen $A = \mu \overline{\Sigma_i \omega_i^2}$ auch ein Anwachsen der mittleren Rotation bedeutet. Wegen der schlechten Konvergenz der sehr schwierigen Rechnung kann man aber über das Verhalten für größere Zeiten keine sicheren Schlüsse ziehen.

VII. Ähnlichkeitsgesetz für den Umschlagpunkt.

Nach dem Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz sind zwei Strömungen dann gleichwertig, wenn das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften dasselbe ist. In den meisten Fällen genügt dieses einfache Ähnlichkeitsgesetz auch bei turbulenter Strömung. Jedoch spielt bei manchen Strömungsvorgängen die Turbulenz eine so große Rolle, daß zur Kennzeichnung des Strömungszustandes die Re-Zahl allein nicht ausreicht. Man muß dann durch weitere Zustandsgrößen auch noch die Art der Turbulenz näher kennzeichnen. Bei isotroper Turbulenz hat man nach den vorausgehenden Darlegungen zwei weitere voneinander unabhängige Kenngrößen, nämlich den Turbulenzgrad $\frac{u'}{U}$ und die Größe der Turbulenz L_1 (vgl. Gl. (8)).

Einen besonders starken Einfluß hat die Turbulenz auf die Lage des Umschlagpunktes, d. h. auf die Lage der Stelle, wo die Reibungsschicht an einem angeströmten Körper beginnt, turbulent zu werden. Diese Abhängigkeit des Umschlagpunktes von der Turbulenz hat G. I. Taylor mit Hilfe seiner statistischen Turbulenztheorie untersucht [5]. Die Grundannahme, die er dabei macht, ist die, daß es die turbulenten Schwankungen des Druckgradienten sind, durch die die Lage des Umschlagpunktes durch die Turbulenz beeinflußt wird. Das ist insofern naheliegend, als auch die Ablösung der laminaren Grenzschicht wesentlich vom äußeren Druckgradienten bestimmt wird. Bei der Rechnung wird vorausgesetzt, daß sich der betrachtete Körper in einem isotrop-turbulenten Luftstrom befindet. Für die Druckschwankungen in Richtung der Grundströmung (Geschwindigkeit U), die den turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen u äquivalent sind, gilt $p \sim \frac{\varrho}{2} u^2$. Die Schwankungen des Druckgradienten sind daher $\frac{\partial p}{\partial x} \sim \varrho u \frac{\partial u}{\partial x}$, oder wegen der Richtungsunabhängigkeit der Schwankungsgrößen bei isotroper Turbulenz auch $\sim \varrho u \frac{\partial u}{\partial y}$ und der quadratische Mittelwert

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)' = \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2}} \sim \sqrt{\varrho^2 \overline{\left(u \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \sim \varrho u' \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)' . \quad . \quad . \quad (17)$$

Der Mittelwert $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'$ kann nun in Beziehung gesetzt werden zu u' und der Größe der Turbulenz L_1. Zusammen mit den Gleichungen (11) und (16) ergibt sich aus (17):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)' \sim \frac{\varrho u'^2}{L_1} \sqrt{\frac{u' L_1}{\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Jetzt kann man die obige Annahme dimensionalanalytisch folgendermaßen formulieren: Es wird vermutet, daß die Lage des Umschlagpunktes (Koordinate X, bei der Kugel z. B. die Bogenlänge vom vorderen Staupunkt bis zum Umschlagpunkt) außer von der Strömungsgeschwindigkeit U und der Zähigkeit ν noch von $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ abhängt. Danach muß dem Problem außer der Reynoldsschen Zahl $Re(X)$ noch eine zweite dimensionslose Zahl zugrunde liegen, die aus den Größen X, dem Staudruck $q = \frac{\varrho}{2} U^2$ und $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ zusammengesetzt ist. Mit diesen Ausdrücken läßt sich nur die folgende Dimensionslose bilden:

$$\Lambda' = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)' \frac{X}{q} \sim \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)' \frac{X}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Mit dem berechneten Ausdruck für $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)'$ wird

$$\Lambda' = \left(\frac{u'}{U}\right)^2 \frac{X}{L_1} \sqrt{\frac{u' L_1}{\nu}} = \sqrt{\frac{U X}{\nu}} \sqrt{\frac{X}{L_1}} \left(\frac{u'}{U}\right)^{5/2} . \quad (19a)$$

Nach der obigen Annahme muß nun die Re-Zahl des Umschlagpunktes $Re(X)$ eine Funktion dieser Kennzahl Λ' sein:

$$Re(X) = \frac{U X}{\nu} = f(\Lambda') = f_1 \left[\sqrt{Re(X)} \sqrt{\frac{X}{L_1} \left(\frac{u'}{U}\right)^5}\right],$$

oder anders geschrieben:

$$Re(X) = f_2 \left[\left(\frac{u'}{U}\right) \left(\frac{X}{L_1}\right)^{1{,}5}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wird die Turbulenz durch ein Gitter mit der Maschenweite M erzeugt, so kann man für größere Re-Zahlen der Turbulenz, nach Taylor etwa von $\frac{M u'}{\nu} = 60$ ab, einfach $L_1 \sim M$ setzen. Dann lautet die Beziehung (20) schließlich

$$Re(X) = F \left[\left(\frac{u'}{U}\right) \left(\frac{X}{M}\right)^{1{,}5}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

Diese Beziehung wurde an ebenen Platten [6] und an einem elliptischen Zylinder [14] gut bestätigt.

Besondere Bedeutung hat die Taylorsche Rechnung für die kritische Re-Zahl von Kugeln, da diese gerade als ein Maß für die Turbulenz eines Windkanals betrachtet wird. Re_{krit} ist definiert als diejenige Re-Zahl, bei der die Kugel den Widerstandsbeiwert $c_w = 0{,}3$ hat. Diesem c_w-Wert entspricht bei verschiedenen Kugeln und Turbulenzgraden ein bestimmter geometrisch ähnlicher Strömungszustand; folglich hat für $c_w = 0{,}3$ das Verhältnis $\frac{X}{D}$ (D Kugeldruckdurchmesser) einen bestimmten Wert C, so daß $Re_{krit}(D) = \frac{U D}{\nu} = \frac{1}{C} Re(X)$. Aus Gl. (20a) ergibt sich damit

$$Re_{krit}(D) = G \left[\left(\frac{u'}{U}\right) \left(\frac{D}{M}\right)^{1{,}5}\right] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Bild 5 zeigt die experimentelle Bestätigung dieser Berechnung nach Messungen von Dryden [12]; alle Meßpunkte bei verschiedenen Kugeln, Gittern und Turbulenzgraden liegen auf einer einzigen Kurve, wenn man die kritische Re-Zahl über $\left(\frac{u'}{U}\right) \left(\frac{D}{L_2}\right)^{1{,}5}$ aufträgt. $\left(L_2 = \frac{1}{2} L_1 \sim M\right)$.

VIII. Zusammenfassung.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die statistische Turbulenztheorie sich zur Darstellung der kinematischen Verhältnisse in einer turbulenten Strömung sehr gut eignet und auch ein gutes Hilfsmittel zur exakten experimentellen Untersuchung bildet. Zur Berechnung dynamischer Vorgänge ist sie aber vorläufig noch nicht ausreichend. Denn selbst im einfachsten Fall der isotropen Turbulenz kommt man bei der Berechnung der Korrelationskurve oder des Abklingens der Turbulenz stets an einen Punkt, wo man einschneidende Annahmen, z. B. Vernachlässigung der Trägheitsglieder oder wie früher Mischungsweganahmen oder auch nur allgemeine Dimensionsbetrachtungen machen muß. Da andererseits die Differentialgleichungen nur aus den Navier-Stokes'schen und der Kontinuitätsgleichung abge-

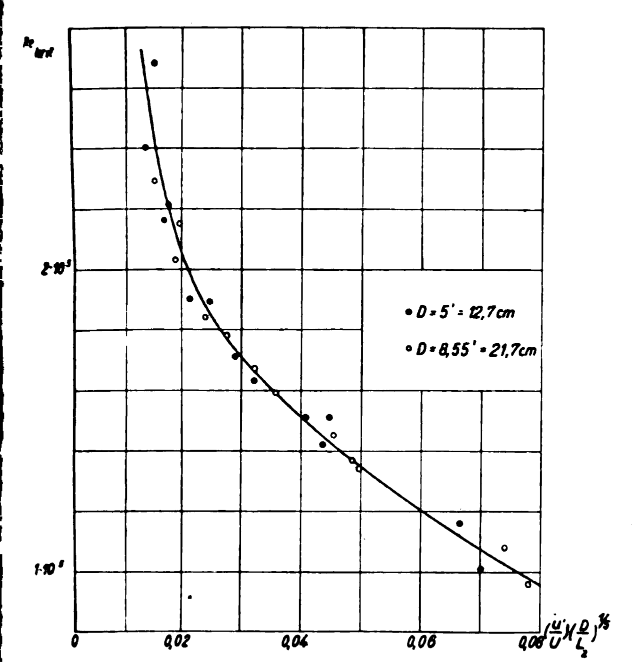


Bild 5. Abhängigkeit der kritischen *Re*-Zahl der Kugel von der Turbulenz [12].

leitet sind, ist sicher anzunehmen, daß in ihrer Lösungsschar die tatsächlich eintretenden Beziehungen auch mit enthalten sind; es fehlt aber noch immer ein physikalisches Prinzip, mit dessen Hilfe man die wirkliche Lösung aus der Schar der rechnerisch möglichen Lösungen herausfinden könnte.

IX. Schrifttum.

[1] H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. 2. Deutsche Ausgabe. 1931. S. 700.

[2] G. Vogelpohl, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forschungsheft 386 (1937).

[3] Kampé de Fériet, Les bases d'une Mecanique de la Turbulence. Sciences (1937) Nr. 16.

[4] S. Goldstein, Modern Developments in Fluid Mechanics. Oxford 1938. Bd. I.

[5] G. I. Taylor, Statistical Theory of Turbulence. Part I—IV. Proc. Roy. Soc. London A. 151 (1935) 421. Part V Proc. Roy. Soc. London A. 156 (1936) 307.

[6] G. I. Taylor, Some recent Developments in the Study of Turbulence. Proc. V. Intern. Congr. for Appl. Mechanics Cambridge 1938, S. 294 (Zusammenfassender Bericht).

[7] Th. v. Kármán, The Fundamentals of the Statistical Theory of Turbulence. J. Aer. Sc. Bd. 4 (1937) S. 131.

[8] Th. v. Kármán and L. Howarth, On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. Proc. Roy. Soc. London A. 164 (1938) 192.

[9] G. I. Taylor, The Statistical Theory of Isotropic Turbulence. J. Aer. Sc. Bd. 4 (1937) 311.

[10] G. I. Taylor, The Spectrum of Turbulence. Proc. Roy. Soc. London A. 164 (1938) 476.

[11] L. F. G. Simmons and C. Salter, An Experimental Determination of the Spectrum of Turbulence. Proc. Roy. Soc. London A. 165 (1938) 73.

[12] H. L. Dryden, G. B. Schubauer, W. C. Mock jr. and H. K. Skramstad, Measurements of Intensities and Scale of Windcanal-Turbulence and their Relations to the Critical *Re*-Number of Spheres. NACA-Techn. Rep. 581 (1937).

[13] G. I. Taylor and A. E. Green, Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. Proc. Roy. Soc. London A. 158 (1937) 499.

[14] G. B. Schubauer, The Effect of Turbulence on Transition in the Boundary Layer of an Elliptic Cylinder. Proc. V. Intern. Congr. for Appl. Mechanics Cambridge (1938) 321.

Abgeschlossen Oktober 1939.

Ein neues Verfahren zur Bestimmung des Gastemperaturverlaufes in Ottomotoren*).

Von H. Graff.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Um die Vorgänge bei der Verbrennung im Ottomotor vollständig zu durchschauen, ist die Messung der Gastemperaturen sehr wichtig. Bisher sind genaue Temperaturmessungen nur auf stroboskopischem Wege möglich gewesen, d. h. durch eine Unterteilung des Verbrennungsablaufes in viele möglichst kleine Abschnitte und durch Mittelwertsbildung über viele Verbrennungen. Für die Erfassung rasch und unregelmäßig verlaufender Erscheinungen, z. B. beim Klopfen des Motors, sind diese Methoden jedoch nicht mehr geeignet. Die folgenden Ausführungen zeigen die Entwicklung eines Meßgeräts, das die Temperaturen auf der Grundlage der Strahlungsmessung oszillographisch zu messen gestattet. Die Prüfung und Eichung dieses Geräts wird mit einer genauen stroboskopischen Methode durchgeführt. Gegenüber den bisherigen oszillographischen Verfahren hat dieses den Vorteil, daß es eine eindeutige Zuordnung des Oszillogramms zu einem Temperaturverlauf gestattet.

Gliederung.

A. Einleitung.

Kritische Übersicht über die bisher bekannten Meßverfahren.

Für die Messung der Gastemperatur in Verbrennungskraftmaschinen kommen folgende Verfahren in Frage:

1. Unmittelbare Messung unter Anwendung eines Thermoelements oder Widerstandsthermometers,
2. Messung des Ionisationsgrades mit einer Glimmstrecke und Berechnung der Temperatur aus dem Stromdiagramm,
3. die verschiedenen Strahlungsverfahren:
   a) Spektralanalytische Untersuchung der Strahlung,
   b) Messung der Gesamtstrahlung mit einem Thermoelement oder Radiometer,
   c) Spektrallinienumkehrmethode.

Die unmittelbare Messung der Temperatur mit einem Thermoelement oder Widerstandsthermometer versagt bei den neuzeitlichen schnellaufenden Motoren vollständig, weil die beiden Forderungen der mechanischen Festigkeit und der Trägheitslosigkeit des Elements nicht miteinander zu vereinbaren sind. Außerdem sind für derartige Elemente keine geeigneten Werkstoffe vorhanden, denn die hochschmelzenden Metalle reagieren bei hoher Temperatur entweder mit Sauerstoff oder lassen sich nicht zu sehr dünnen Drähten ziehen.

Die Temperaturbestimmung mit Hilfe des Ionisationsgrades, die eine fortlaufende Messung an einer Glimmstrecke gestattet, wurde von Schnauffer [1] vorgeschlagen. Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens liegen vor allem in der Auswertung des Stromdiagramms: Der Ionisationsgrad ist außer von der Temperatur auch von der Gaszusammensetzung und vom Druck abhängig. Zur Festlegung eines eindeutigen Zusammenhangs zwischen Temperatur und Ionisationsgrad ist also die Bestimmung weiterer Größen erforderlich. Selbst wenn es möglich wäre, den Einfluß dieser Größen festzulegen, ist die Zuordnung der Ionisationsgrade zu den Temperaturen sehr umständlich und unsicher. Dagegen hat das Verfahren den Vorteil, daß sich die Messung sehr gut auf ein bestimmtes Raumgebiet begrenzen läßt.

Mit dem Ionisationsmeßverfahren haben die Strahlungsverfahren den Umstand gemeinsam, daß die Eigenschaften der Atome bzw. der Moleküle zur Temperaturmessung herangezogen werden; nur gelangen bei den Strahlungsverfahren Atomzustände von niedrigerer Anregung zur Anwendung. Man kann die Ausstrahlung zunächst spektral zerlegen. Die Spektren zeigen bei den verschiedenen Arten von Verbrennungskraftmaschinen verschiedenen Charakter. Bestehen die strahlenden Stoffe zum größten Teil aus festen oder flüssigen Teilen, so erhält man ein kontinuierliches Spektrum, dessen Intensitätsverlauf annähernd dem des schwarzen Körpers, also dem Planckschen Gesetz, entspricht. Ist dagegen der Strahler ein reines Gas, so ergibt sich ein Linien- oder Bandenspektrum. Das erstere ist der Fall bei der dieselmotorischen Verbrennung; die Strahler dürften hier hauptsächlich aus unverbrannten festen Kohleteilchen bestehen. Diesen Umstand nützte Erichsen [2] aus, indem er an einem Dieselmotor mit einem Quarzspektrograph das Spektrum aufnahm und aus der kurzwelligen Grenze des Spektrums die Temperatur bestimmte. Dies ist ein Verfahren, das eine fortlaufende Messung der Temperaturen nicht gestattet, sondern eine Mittelwertsbildung über viele Verbrennungen ergibt.

Für den Ottomotor ist ein derartiges Verfahren nicht mehr allgemein anwendbar. Es ist wohl bei sehr reichem Gemisch ein kontinuierliches Spektrum festzustellen, doch ist diese Strahlung nicht schwarz.

Hershey [3] benützte am Ottomotor die Strahlung von 3000 bis 40000 Å, die vom Quarzfenster durchgelassen wird, und maß Absorption und Emission des Gases unter Zuhilfenahme einer Stroboskopscheibe mit einer Thermosäule. Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Kirchhoffschen Gesetzes und unter Anwendung des Boltzmannschen Strahlungsgesetzes, das jedoch nur für Strahlung aller Wellenlängen Gültigkeit hat und daher in diesem Fall nur angenähert bei den höchsten Temperaturen anwendbar ist, ließ sich die Temperatur berechnen.

Das meist angewandte Temperaturmeßverfahren ist das Natriumlinienumkehrverfahren [4, 5, 6, 7]. Es wird im nächsten Abschnitt besprochen werden.

*) Gekürzter Abdruck einer von der Techn. Hochschule Stuttgart angenommenen Dissertation (D 93).



B. Das Spektrallinienumkehrverfahren.

1. Bisherige Messungen.

Das Spektrallinienumkehrverfahren ist bis jetzt die einwandfreieste — wenn auch experimentell nicht einfache — Art, die Temperaturen von glühenden Gasen zu ermitteln. Die Meßanordnung ist, in groben Zügen beschrieben, folgende:

Der Motor ist mit zwei einander gegenüberliegenden Quarzfenstern versehen. Vor dem einen Quarzfenster ist eine Lichtquelle angebracht, deren Temperatur veränderlich ist (Glühbirne), vor dem anderen Fenster ist ein Spektroskop oder ein Spektrograph aufgestellt. Zwischen Motor und Spektrograph kann eine Stroboskopscheibe angebracht werden, die im Takte des Arbeitsspiels umläuft, also bei einem Viertaktmotor mit halber Kurbelwellendrehzahl, und nur für wenige Grade Kurbelwinkel den Lichtweg freigibt. In den Spalt des Spektralapparates fällt nun einmal das Licht, das der Motor aussendet, zum anderen das Licht, das von der Glühlampe ausgehend den Verbrennungsraum durchsetzt. Im allgemeinen wird man im Spektralapparat nur das kontinuierliche Spektrum der Lichtquelle außerhalb des Motors feststellen können. Fügt man nun zu dem Gemisch, das vom Motor angesaugt wird, ein Metallsalz hinzu, so werden im Spektralapparat die charakteristischen Linien dieses Metalls erscheinen. Gehorcht die Ausstrahlung dieser Linien dem Kirchhoffschen Gesetz, was bei Alkalien der Fall ist, so läßt sich folgendes feststellen:

Ist die Temperatur des glühenden Gases und damit der Metalldämpfe höher als die Temperatur der Lampe, so erscheinen die Alkali-Linien hell auf dem kontinuierlichen Spektrum der Glühlampe; ist die Temperatur des Gases tiefer als die der Glühlampe, so erscheinen dunkle Metalllinien (Absorptionslinien) auf dem hellen Grunde, der durch die Glühlampe erzeugt wird. Wird die Temperatur der Glühlampe so eingeregelt, daß die Linie ebenso hell wird wie die sie umgebenden Spektralgebiete, so ist Temperaturgleichheit von Lampe und Gas erreicht. Mit der leicht meßbaren Lampentemperatur ist dann also auch die Gastemperatur bestimmt.

Das Spektrallinienumkehrverfahren ist zur Temperaturmessung in Motoren, soweit bekannt, nur von Amerikanern und Japanern angewandt worden, und zwar haben diese Forscher ausschließlich die Natriumlinie benützt. Sie liegt im Bereich der maximalen Augenempfindlichkeit, was zwei Vorteile mit sich bringt:

1. Der Lichtweg kann ohne Mühe beobachtet werden, so daß die Justierung der Apparatur sich recht einfach gestaltet.

2. Bei langsam laufenden Motoren läßt sich die Linienumkehr bis zu Temperaturen von etwa 1800° K mit dem Auge feststellen, so daß der Umweg über den photographischen Prozeß entbehrlich wird. Es lassen sich dann sogar die Grenzen der Temperaturschwankungen unter den einzelnen Verbrennungen angeben, was von Withrow und Raßweiler [4, 5] ausgeführt worden ist. Bei Motoren höherer Umdrehungszahl ist dies wegen der Trägheit des Auges nicht mehr möglich. Man nimmt dann das Spektrum photographisch auf und erhält einen Mittelwert der Temperatur über eine größere Zahl von Verbrennungen.

An der offenen Flamme wurden von Griffith und Awbery [8] mit dem Spektrallinienumkehrverfahren Temperaturen gemessen. Diese Messungen wurden ergänzt durch Messungen mit elektrisch geheizten Platinwiderständen. Es ergab sich Übereinstimmung zwischen beiden Meßverfahren. Beim Spektrallinienumkehrverfahren wurde von den genannten Forschern mit verschiedenen Zusatzstoffen — Na-, Li- und K-Salzen — zur Verbrennungsluft gemessen, es ergab sich bei den verschiedenen Linien Übereinstimmung innerhalb der Meßgenauigkeit. Als Spektrallinie wurden die ersten Glieder der Hauptserie der Alkalien, die auch am intensivsten sind, benützt. Die Spektrallinienumkehrmethode scheint also durch die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen verschiedener Forscher und insbesondere durch die letztgenannten Messungen von Griffith und Awbery hinreichend zuverlässig zu sein.

Die Brauchbarkeit der Spektrallinienumkehrmethode ist an drei Bedingungen geknüpft, von denen zwei grundsätzlicher Art und eine experimenteller Art sind:

1. Das Gas muß an einer bestimmten schmalen Stelle des Spektrums absorbierend wirken;

2. die Ausstrahlung des Gases an dieserStelle muß dem Kirchhoffschen Gesetz genügen, d. h. sie darf nicht luminescent sein;

3. der Raumwinkel der vom Spektrographen aufgenommenen Strahlung muß bei der Strahlung des Gasraumes genau so groß sein wie bei der Glühlampenstrahlung.

Für die grundsätzliche Richtigkeit der Messung sind zwei Punkte unwichtig:

1. Die Menge und die chemische Bindung des Zusatzstoffes, der die absorbierende Spektrallinie liefert, sind beliebig.

2. Der Strahler, der das kontinuierliche Spektrum liefert, braucht nicht schwarz zu sein.

Die chemische Bindung des strahlenden Alkalimetalls ist unwesentlich, weil die Verbindung bei der hohen Verbrennungstemperatur zum Teil dissoziiert. Der Stoff, der die zur Messung dienende Linie ausstrahlt, ist stets das chemisch nicht gebundene, neutrale Alkaliatom. Es wurden Versuche mit verschiedenen Alkaliverbindungen gemacht, mit Kaliumbenzoat, Kaliumzyanid und Kaliumalkoholat, ferner Natriumbenzoat und Natriumalkoholat, die jeweils innerhalb der Meßgenauigkeit gleiche Temperaturen ergaben. Auch die Menge des zugesetzten Stoffes ist beliebig. Eine größere Menge Zusatzstoff bewirkt eine Verbreiterung der Spektrallinien und eine Vergrößerung des Absorptionskoeffizienten, jedoch ist diese Erscheinung auf das Meßergebnis ohne Einfluß.

Selbst wenn die Zufuhr des Zusatzes während der Messung gelegentlich aussetzt, wird dadurch nur die Meßgenauigkeit vermindert, nicht aber das Meßergebnis gefälscht.

2. Meßgeräte und Meßverfahren.

Für die Durchführung der Temperaturmessungen stand ein serienmäßiger luftgekühlter Einzylinder-Horex-Motor von 500 cm³ Hubraum zur Verfügung. Der Motor besaß stehende Ventile, was den Vorteil mit sich brachte, daß der Zylinderkopf den Erfordernissen der Messung entsprechend ziemlich willkürlich ausgestaltet werden konnte. Es wurde ein wassergekühlter Zylinderkopf mit zwei Quarzfenstern konstruiert, Bild 1. Die beiden runden Quarzfenster von 14 mm freier Öffnung lagen einander gegenüber und zwar so, daß ihre gemeinsame optische Achse genau über den Ventilen und unter der Zündkerze lag. Diese Anordnung hatte zwei Vorteile:

1. Die Temperatur ist, nach Withrow und Raßweiler [4], im Gebiet der Zündkerze am höchsten, um an den von der Zündkerze entfernter liegenden Stellen um etwa 200° abzunehmen. Die Strahlung wird also an dieser Stelle am intensivsten.

2. Die Verschmutzung der Quarzfenster durch vom Kolben heraufgespritztes Öl war an dieser Stelle recht gering.

Für die Quarzfenster bewährte sich nach vielen Vorversuchen folgende Einbauart, die auch an einem wassergekühlten Motor versucht und dort für brauchbar befunden wurde: Die Quarzfenster bestehen aus einem dickeren und einem dünneren zylindrischen Stück. Der Übergang dazwischen ist kegelförmig. Diese Kegel werden in passende

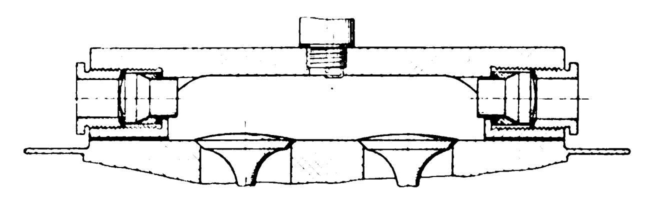


Bild 1. Schnitt durch den Zylinderkopf.

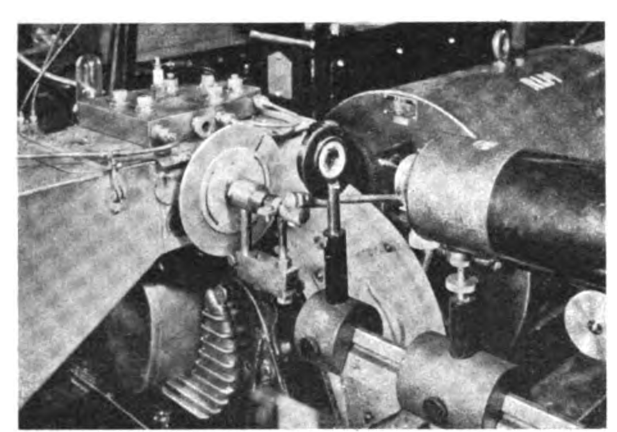


Bild 2. Versuchsaufbau bei dem Spektrallinienumkehrverfahren (Auspuffseite).

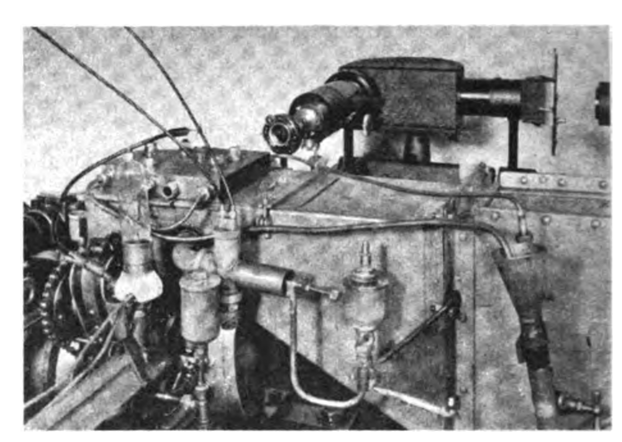


Bild 3. Versuchsaufbau bei dem Spektrallinienumkehrverfahren (Vergaserseite).

Kupferringe eingeschliffen. Die Abdichtung erfolgt durch Kupfer-Asbestringe zwischen den Kupferringen und dem Zylinderkopf. Die Quarzfenster werden so lang gemacht, daß sie etwa 1 mm in den Verbrennungsraum hineinragen. Sie werden dann vorne so heiß, daß die Ölkohle, die sich darauf niederschlägt, fast vollständig wegbrennt. Immerhin war bei den Meßläufen die Durchlässigkeitsverminderung der Quarzfenster noch so groß, daß nach 15 Betriebsminuten nur noch etwa 10% der anfänglichen Lichtmenge auf den Spalt des Spektrographen gelangte.

Um die Unterbringung der erforderlichen Hilfsgeräte zu ermöglichen, mußte die Kühlluftzuführung umgekehrt erfolgen, Bild 2 und 3, nämlich gegen die Seite des Motors, auf der die Ventile angebracht waren, während der Zylinder im Schatten des Kühlluftstromes lag. Da jedoch die Meßläufe nur mit halber Last gefahren wurden, bestanden gegen diese Anordnung keine Bedenken, zumal der Zylinder sich nicht mehr als zulässig erwärmte.

Auf der Vergaserseite war die Glühlampe auf einer optischen Bank angebracht. Es wurde eine Wolframbandlampe von Osram benützt. Das Wolframband hatte eine strahlende Fläche von 2 × 8 mm, eine sehr gleichmäßige Temperaturverteilung und einen bekannten spektralen Strahlungsverlauf. Sie wurde mit einer Akkumulatorenbatterie gespeist und erreichte eine maximale Temperatur von 2680° K. Die Temperatur ist nach oben hin begrenzt durch die Gefahr des Durchbrennens bei zu starker Heizung bzw. durch die geringe Lebensdauer der Lampe. Die Temperatur wurde mit einem Pyrometer von Siemens & Halske gemessen, das nach Art des Holborn-Kurlbaumschen arbeitet. Es wurde eine Eichung der Lampe vorgenommen, indem zu einer Zahl von verschiedenen Heizstromstärken die entsprechenden Temperaturen gemessen wurden. Während der Meßläufe des Motors konnten dann die umständlichen Temperaturmessungen durch die einfacheren Strommessungen ersetzt werden.

Beachtung verdient noch die Übertragung der gemessenen Temperaturwerte auf die Spektrallinienumkehrmethode. Mit dem Strahlungspyrometer werden die schwarzen Temperaturen im roten Spektralgebiet (mittlere Wellenlänge $\lambda = 6600$ Å) gemessen. Für die Spektrallinienumkehrmethode dagegen sind die schwarzen Temperaturen im gelben (Na-D-Linien, 5890/96 Å) bzw. ultraroten (K-Linien 7699/65 Å) Gebiet wichtig. Nun unterscheiden sich die Ausstrahlungsfaktoren von Wolfram in diesem Spektralbereich um höchstens 4,4% [9]. Dies entspricht bei einer Temperatur von 2500°K einem Unterschied in den schwarzen Temperaturen von ± 16°. Dieser Unterschied wird bei geringer Temperatur wesentlich kleiner. Er liegt allgemein innerhalb der Meßgenauigkeit und wurde deshalb vernachlässigt.

Die beiden Quarzfenster wurden als plankonvexe Linsen von rd. 90 mm Brennweite ausgebildet. Die ebene Seite der Linsen ist dem Verbrennungsraum zugewandt. Dadurch werden zwei Linsen außerhalb des Motors eingespart; ferner werden Reflexionsverluste an vier Glasluftflächen vermieden: außerdem gestaltet sich die Justierung der Anordnung einfacher; man hat dann bei der Justierung der Glühlampe nur darauf zu achten, daß sich der Glühfaden der Lampe zentrisch vor der ersten Linse befindet und daß die Glühlampe so nahe an den Motor herangebracht wird, daß die zweite Linse gerade voll »ausgeleuchtet« wird.

Im Brennpunkt der zweiten Linse befindet sich die Stroboskopscheibe. Sie wurde über zwei kleine Winkelantriebe von der Pendelbremse aus gesteuert, da die Steuerung durch biegsame Wellen verschiedener Konstruktion nicht genügend synchron war. Die Schlitzbreite der Stroboskopscheibe entsprach einer Öffnungsdauer des Lichtwegs von 5° KW. Die Drehzahl der Stroboskopscheibe ist, entsprechend dem Arbeitsrhythmus des Motors, gleich der halben Kurbelwellendrehzahl. Da der Spektrograph nicht unmittelbar hinter der Stroboskopscheibe aufgebaut werden konnte, wurde zwischen der Stroboskopscheibe und dem Spektrographen noch eine weitere Linse angebracht, die das Bild des Glühfadens in der Ebene der Stroboskopscheibe scharf auf den Spalt des Spektrographen abbildete. Durch Abblendung dieser Linse wurden Fehler in der Justierung des Spektrographen unwirksam gemacht.

Als Spektrograph wurde der 3-Prismenspektrograph mit dem Försterlingschen Prismensatz der Firma Carl Zeiß verwendet. Er war nicht allzu empfindlich gegen Erschütterungen, so daß die Linien auch bei laufendem Motor noch recht gut definiert waren.

Zur Verfügung standen an Aufnahmegeräten die kleine, sehr lichtstarke Kamera (f = 12 cm), und die große Kamera mit hoher Dispersion (f = 84 cm). Wegen ihrer großen Lichtstärke wurde fast ausschließlich die kleine Kamera benützt. Als Platten dienten für die K-Linie die Agfa Infrarotplatte 750 hart, für die Na-Linie die Agfa ISS-Platte oder die Agfa Spektralplatte Total Rapid. Bei der Auswertung der Spektren wurde die Durchlässigkeitsverminderung der Quarzfenster in folgender Weise berücksichtigt:

In den Zylinderkopf wurden saubere Quarzfenster eingesetzt. Der Motor wurde angetrieben, die Glühlampe auf eine bestimmte Temperatur eingestellt und Spektren mit verschiedener Belichtungsdauer untereinander photographiert. Diese Spektren ergaben die Eichwerte für die photographische Platte, denn einerseits konnten aus dem Produkt der Belichtungsdauer mit der Strahlungsleistung, die sich mit der Glühlampentemperatur aus dem Planckschen Gesetz ergibt, die »Strahlungswerte« errechnet werden, zum anderen mit dem Zeißschen Spektrallinienphotometer die Schwärzung der photographischen Platte im Spektralbereich der Linie gemessen werden. Wenn man die Logarithmen der Strahlungswerte gegen die Logarithmen der Plattenschwärzung auftrug, so ergab sich eine ziemlich genaue gerade Kennlinie in einem gewissen Schwärzungsbereich, deren Lage und Steigung von der Beschaffenheit der Platte, der Entwicklungsdauer und Entwicklungstemperatur, der

Art des Entwicklers und der möglicherweise auftretenden Schleierbildung abhängen. Die Eichaufnahmen mußten also für jede neue photographische Platte aufs neue durchgeführt werden.

Ferner wurde auf der gleichen Platte, auf der schon die Eichspektren waren, eine Anzahl Spektren des Spektrallinienumkehrverfahrens untereinander photographiert. Die Belichtungsdauer und die Lampentemperatur wurden dabei gemessen. Aus diesen beiden Größen ließen sich die theoretischen Strahlungswerte (bei sauberem Quarzfenster) errechnen, aus dem Mittelwert der Schwärzung der Platte an zwei auf beiden Seiten der Linie liegenden Stellen ließ sich der tatsächliche Wert der Strahlung, die durch die verschmutzten Quarzfenster ging, aus dem Eichdiagramm der Platte entnehmen. Der Quotient beider Strahlungswerte gab die Durchlässigkeit der Quarzfenster an.

Nun wurde im allgemeinen mit der Temperatur der Lampe nicht der Wert getroffen, der die Umkehr der Linie zeigte. Infolgedessen wurde zwischen den gemessenen Werten interpoliert und zwar so, daß die Schwärzungsdifferenz zwischen der Stelle der Linie und einer unmittelbar benachbarten Stelle als Maß für den Temperaturunterschied von Lampe und Gasraum genommen wurde. Wo die Temperatur des Gasraumes die zulässige Temperatur der Lampe überschritt (von etwa 0° bis 30° KW nach o. T.), wurde in ähnlicher Weise extrapoliert. Wurde so die Umkehrtemperatur gefunden, so wurde noch ihr Strahlungswert mit der Durchlässigkeit der Quarzfenster multipliziert. Der erhaltene Strahlungswert konnte wiederum in die wahre Temperatur des Gasraumes umgerechnet werden.

Das Verfahren der Durchlässigkeitsmessung bedarf noch einer Erläuterung. Auf den Quarzfenstern bildete sich beim Betrieb des Motors eine Schicht aus, die nicht allein absorbierend wirkte, sondern auch streuend. Der Teil des Glühlampenlichtes, der an dem ersten Quarzfenster gestreut wird, gelangt nur zu einem geringen Bruchteil auf das zweite Quarzfenster und damit in den Spektrographen. Die Streuung am Fenster hat auf das wirksame Licht der Glühlampe die gleiche Wirkung wie die Durchlässigkeitsverminderung. Die Streuung am zweiten Fenster wirkt auf die Strahlung der Lampe und der Gase verschieden. Vom Lampenlicht wird ein gewisser Bruchteil nach allen Richtungen weggestreut und ist für die Messung verloren; das Licht, das von den Motorgasen in derselben Richtung eingestrahlt wird, wird zum gleichen Teil zerstreut; doch steht für diese verlorengegangene Gasstrahlung noch das Gas, das, vom Fenster aus gesehen, den ganzen Raumwinkel von 2π umfaßt, zur Verfügung; dieser Gasraum strahlt nun ebenfalls auf das Fenster und wird dort ebenfalls gestreut, so daß derselbe Bruchteil der Strahlung, der, aus der Richtung der optischen Achse kommend, verloren ging, nun wieder dem Strahlengang zugefügt wird, so daß durch diese Streuung nichts von der Gasstrahlung verlorengeht. Die Streuung am zweiten Quarzfenster wirkt also genau so wie die am ersten Quarzfenster, nämlich so, daß die Gasstrahlung nicht betroffen wird, wohl aber die Lampenstrahlung. Lediglich, wenn sich auf dem zweiten Quarzfenster eine absorbierende Schicht befindet, wirkt diese auf Gas- und Lampenstrahlung gleich schwächend. Die Anwendung der gemessenen Lichtschwächung lediglich auf die Lampenstrahlung hat also nur dann volle Berechtigung, solange die Absorption am zweiten Quarzfenster klein und gegen die Streuungsverluste und Absorptionsverluste am ersten Quarzfenster zu vernachlässigen ist. Eine Betrachtung der benützten Quarzfenster zeigt nun, daß dies nach längerer Laufzeit des Motors durchaus nicht mehr der Fall ist; deshalb wurden die Quarzfenster nach etwa je 10 min Betriebsdauer ausgewechselt. Bei stärkerer Trübung des zweiten Fensters ergibt die Auswertung der Spektren nach dem oben beschriebenen Verfahren zu tiefe Temperaturwerte.

3. Meßergebnisse.

Das Temperatur-Zeitdiagramm zeigt Bild 4. Die Messungen, die den einzelnen Punkten entsprechen, wurden

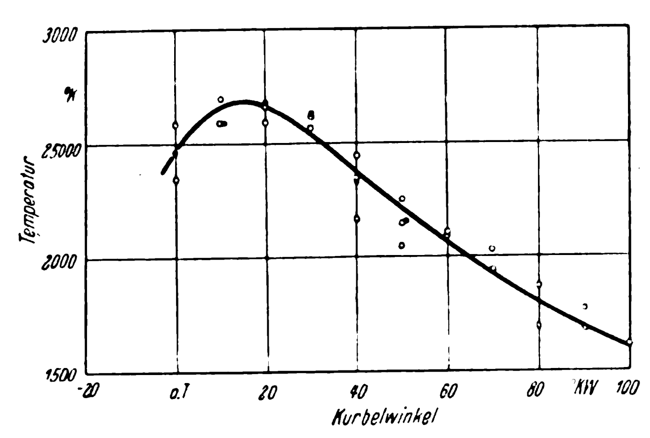


Bild 4. Meßergebnisse des Spektrallinienumkehrverfahrens.
x mit den K-Linien gemessen.
o mit den Na-Linien gemessen.

an verschiedenen Tagen vorgenommen. Die Betriebsdaten des Motors waren bei allen Messungen konstant:

Umdrehungszahl: 2000 U/min,
Leistung: 4 PS,
Zündung: 27° v. o. T.,
Vergaser: Amalvergaser mit Gasschieber 5/6,
Düsennadel in der obersten Kerbe,
Luftschieber voll geöffnet,
recht mageres Gemisch.

Dem Brennstoff (Bleibenzin) wurde eins der obengenannten Alkalisalze in geringer Menge zugeführt.

Wie man auf Bild 4 sieht, zeigen die Temperaturwerte eine ziemlich starke Streuung. Die Ursachen dafür sind hauptsächlich in der Unvollkommenheit der Apparatur zu sehen:

1. Die Verschmutzung des Quarzfensters, das dem Spektrographen zugewandt ist, war durch ausspritzendes Öl ziemlich stark.

2. Die Stellung des Spektrographen konnte während eines Meßlaufes nicht genau konstant gehalten werden. Schon eine Verschiebung des Spektrographen um 0,5 mm bringt seinen Spalt neben das Bild der Lichtquelle, so daß kein Licht mehr von der Glühlampe in den Spektrographen gelangt. Eine starre Befestigung des Spektrographen ist wegen der dann auftretenden Erschütterungen und der dadurch bedingten Unschärfe der Linien nicht möglich.

3. Die Einstellung der Stroboskopscheibe war nicht genau reproduzierbar.

Daß der durchschnittliche Fehler der Einzelmessung bei dieser Anordnung immerhin nur $\pm$ 60° beträgt — das entspricht einer anteiligen Genauigkeit von etwa $\pm$ 2,5% —, ist hauptsächlich auf die photometrische Verfeinerung des Verfahrens zurückzuführen; andernfalls würden systematische Abweichungen nach höheren Temperaturen in der Größenordnung von 200° entstehen. Der mittlere Fehler der Kurve, Bild 4, beträgt $\pm$ 20°.

C. Das neue Spektrallinienverfahren.

1. Allgemeines.

Sobald man auf dem Wege der Strahlung den Temperaturverlauf der Einzelverbrennung erfassen will, muß man die Photozelle zur Anwendung bringen. Die Photozelle arbeitet praktisch trägheitsfrei, insbesondere Vakuumphotozellen. Der Photostrom läßt sich in einem Verstärker so hoch verstärken, daß man damit Oszillographen (Schleifenoszillograph oder — für höhere Ansprüche an trägheitsfreie Aufzeichnung — Kathodenstrahloszillographen) aussteuern kann. Diese Anwendbarkeit der Photozelle ist allgemein bekannt.

Entscheidend für die Brauchbarkeit aller Photozellenmethoden am Motor ist jedoch die meßtechnische Anwendbarkeit, d. h. die Frage, ob es gelingt, einem Licht-Zeit-



diagramm ein Temperatur-Zeitdiagramm in eindeutiger Weise zuzuordnen.

Ansätze dazu sind vorhanden. So wurde von Bisang [10] ein Verfahren entwickelt, das die Eigenstrahlung der Motorgase im Wellenlängenbereich um 9500 Å zur Grundlage der Messung machte. Als strahlende Körper wirken in diesem Wellenlängenbereich die H_2O-Moleküle, die intensive Banden aussenden. Die Eichung dieser Methode, d. h. die Zuordnung der Strahlungswerte zu bestimmten Temperaturen, wurde in einem Eichofen vorgenommen, an einem elektrisch geheizten Kohlerohr. Die Eichung konnte bis zu Temperaturen von 1850° K durchgeführt werden.

Abgesehen von der Frage, ob es gelingen würde, die Eichung bis zu wesentlich höheren Temperaturen vorzutreiben, bestand gegen die Meßmethode eine Reihe von Bedenken, die eine Weiterführung der Versuche in dieser Richtung als zwecklos erscheinen ließen.

Zunächst nimmt der Gehalt der Verbrennungsgase an Kohlendioxyd und Wasserdampf im Verlauf der Verbrennung zu, so daß sich bei gleicher Temperatur am Anfang und Ende der Verbrennung verschiedene Strahlungen ergeben; ferner ist die Strahlung z. B. von Kohlendioxyd, wie von Paschen und seiner Schule festgestellt wurde [11], druckabhängig, und außerdem besteht die Möglichkeit, daß infolge des breiten Spektralbereiches, der zur Messung benützt wird, die kontinuierliche Ausstrahlung der Gase bei Vorhandensein fester Teilchen, also bei reichem Gemisch, die Messung beeinflußt. Auch in anderen Spektralbereichen der Gasstrahlung, die der Messung mit der Photozelle zugänglich sind, stehen in den Verbrennungsgasen keine besser geeigneten Strahler zur Verfügung.

Es liegt also der Gedanke nahe, künstlich in den Verbrennungsraum einen solchen Strahler einzuführen, der die gewünschten Strahlungseigenschaften besitzt.

Da zur Herstellung eines kontinuierlichen Spektrums große Mengen eines festen Stoffes erforderlich sind, die den Verbrennungsablauf beeinflussen, kommt nur der Zusatz gasförmiger Strahler in Frage oder solcher fester oder flüssiger Stoffe, die bei der Verbrennung verdampfen und ein Linienspektrum ergeben. Nun besteht hier eine Reihe von grundsätzlichen Bedenken, deren Klärung für den Wert der Meßmethode wesentlich ist, die aber nur durch Versuche geklärt werden können.

Die Intensität der Ausstrahlung einer solchen Linie hängt von vielen Faktoren ab; zunächst von der Temperatur des Gasgemisches. Um hier einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Ausstrahlung und der Temperatur zu haben, ist es erforderlich, daß die Strahlungseigenschaften des Zusatzes dem Kirchhoffschen Gesetz genügen. In diesem Fall ist es meist möglich, den Absorptionskoeffizienten durch Vergrößerung der Zusatzmenge so groß zu machen, daß eine rein schwarze Strahlung im Bereich dieser Linie und damit ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Intensität in einem schmalen Spektralbereich der Linie und der Temperatur gewährleistet ist.

Außerdem hängt die Gesamtausstrahlung einer Linie noch von deren spektraler Breite ab. Die Breite der Linie ist wesentlich bedingt:

1. durch die Menge des Zusatzes,
2. durch die Temperatur des Gases,
3. durch den Druck des Gases,
4. durch die Zusammensetzung des Gases, d. h. durch den Teildruck der einzelnen, chemisch verschiedenartigen Bestandteile des Gases.

Der Einfluß aller dieser Faktoren entzieht sich der Berechnung und Abschätzung. Es können lediglich qualitative Aussagen gemacht werden in dem Sinn, daß mit steigender Temperatur und steigendem Druck sich die Spektrallinie verbreitert, daß sie ebenfalls bei steigendem Zusatz, also bei größerer Menge des strahlenden Stoffes breiter wird; betreffs der Gaszusammensetzung ist zu sagen, daß diejenigen Stoffe, die dem Strahler gegenüber chemisch inaktiv sind, auf die Breite bei verschiedenem Druck nur geringen Einfluß haben, während durch Anwesenheit chemisch aktiver Elemente oder Verbindungen die Spektrallinie stark verbreitert werden kann. Der Einfluß dieser Größen läßt sich in jedem Einzelfall nur durch Versuche ermitteln. Es ist also mit einem bewährten Temperaturmeßverfahren, z. B. dem Spektrallinienumkehrverfahren, zu prüfen, ob diese Einflüsse so stark sind, daß sie die Meßgenauigkeit über das zulässige Maß hinaus beeinträchtigen.

Solche Messungen wurden von dem schon erwähnten Yosida [7] durchgeführt. Er benützte als Grundmeßverfahren die Spektrallinienumkehrmethode mit den Na-Linien als Meßlinien und maß so den Temperaturverlauf bei verschiedenen Gemischzusammensetzungen.

Ferner nahm Yosida Oszillogramme der Strahlung der Na-Linien mit einer Photozelle auf, deren Ströme mit einem dreistufigen Widerstandsverstärker verstärkt wurden. Auf einem Diagramm trug er die Logarithmen der Strahlungswerte gegen die der Kehrwerte der entsprechenden Temperaturen auf und erhielt dabei, wie es dem Planckschen Gesetz entspricht, einen linearen Verlauf. Aus dieser Tatsache läßt sich schließen:

1. Der benützte Strahler (Natrium) gehorcht dem Kirchhoffschen Gesetz.

2. Die Breite der Spektrallinien, die für die Strahlungswerte maßgebend ist, hängt bei dem Verbrennungsvorgang in dem — verhältnismäßig kleinen — Meßbereich so wenig vom Druck und von der Temperatur sowie der Gaszusammensetzung ab, daß es in der Messung nicht merklich ist.

In dieser Arbeit sind keine genauen Angaben über die Menge des Zusatzes gemacht worden. Auch sind die Strahlungswerte der Na-Linien nicht für die Temperaturmessung ausgenützt worden.

Für die Durchführung einer Temperaturmessung durch Strahlungsmessung an Spektrallinien kommen alle Alkalien in Frage:

Lithium, Natrium, Kalium,
Rubidium und Cäsium.

Sie haben alle ähnlich gebaute Spektren und sind auch chemisch verwandte Elemente. Als Meßlinien dieser Elemente wählt man zweckmäßig das erste Glied der Hauptserie, die sog. Resonanzlinie. Es ist dies die Linie, die das Atom aussendet, wenn es vom niedrigsten angeregten Zustand in den Grundzustand zurückfällt. Sie besteht stets aus zwei Komponenten, deren Abstand in der angegebenen Reihenfolge der Elemente zunimmt. Trägt man die Strahlungswerte dieser Spektrallinien (bei bestimmter Breite der Linien) als Funktion der Temperatur nach dem Planckschen Gesetz auf, so ergeben sich exponentiell ansteigende Kurven. Diese Kurven sind um so stärker gekrümmt, je geringer die Wellenlängen der Linien sind. Um einen möglichst großen Meßbereich für die Temperatur zu erhalten, ist es also wünschenswert, die langwelligsten Linien, die Cs-Linien, zu wählen. Außerdem wird bei diesen großen Wellenlängen die Intensität höher und die Empfindlichkeit der verwendbaren Photozellen wesentlich größer. Insbesondere, wenn man den Meßbereich auf tiefere Temperaturen (< 1800° K) ausdehnen will, ist eine längerwellige Linie unbedingt vorzuziehen. Da aber Cäsium- und Rubidiumsalze teuer, schwer erhältlich und in der wünschenswertesten Form nicht leicht darstellbar sind, wurde die Kaliumlinie verwendet. Der Unterschied in der Wellenlänge zwischen K- und Cs-Linien ist außerdem bei weitem nicht so groß wie zwischen K- und Na-Linien, so daß die Verbesserung des Verfahrens durch Zusatz von Cs-Stoffen nicht so entscheidend ist.

Bei den Messungen mit der Photozelle ist im Gegensatz zum Spektrallinienumkehrverfahren der Form der Spektrallinie, d. h. der Intensitätsverteilung in einem schmalen Spektralbereich, besondere Beachtung zuzuwenden.

Beim Photozellenverfahren findet keine spektrale Zerlegung statt; es geht infolgedessen die Gesamtintensität der Linie in die Messung ein.

2. Meßgeräte und Meßverfahren.

Es ist notwendig, die Breite der Linie schon bei der Verbrennung so konstant zu machen, daß sie auf die Temperaturmessung einen vernachlässigbaren Einfluß hat. Von den vier Faktoren, die nach der obigen Aufstellung für die Breite der Linien verantwortlich sind, ist einer willkürlich veränderlich, nämlich die Menge des Zusatzes. Es gilt nun zu prüfen, ob die drei anderen Faktoren die Breite der Spektrallinien und damit die Temperaturmessung wesentlich beeinflussen. Um das Ergebnis der Messungen gleich vorwegzunehmen, sei gesagt, daß die Temperaturmessungen nach diesem Verfahren sich von dem absoluten der Spektrallinienumkehr um höchstens 0,5% unterscheiden. Will man diese Meßfehler wesentlich verkleinern, so dürfte es notwendig sein, eine Methode zur Ausfilterung des mittleren Teiles der Linie anzuwenden.

a) Die Zuführung des Kaliums. Vorversuche zeigten, daß die Breite der Spektrallinien in erheblichem Maß von der Menge des zugesetzten Stoffes abhängt. Es mußte also der regelmäßigen Zuführung des Zusatzes große Aufmerksamkeit geschenkt werden. So stellte sich heraus, daß die Zuführungsvorrichtung für die in Wasser aufgelösten Salze, die z. T. beim Spektrallinienumkehrverfahren verwendet wurde, den nötigen Ansprüchen an Regelmäßigkeit beim Photozellenverfahren nicht mehr genügte. Es wurde dann dazu übergegangen, unmittelbar dem Brennstoff das notwendige Kalium beizufügen und zwar geschah dies auf folgende Weise:

Metallisches Kalium wurde mit Alkohol zur Reaktion gebracht und das sich bildende Produkt, Kaliumalkoholat, dem Brennstoff zugefügt. Es ließ sich im Brennstoff sehr leicht lösen und hatte gegenüber anderen Kaliumsalzen den Vorteil, daß sich auf den Quarzfenstern weniger Rückstand bildete und daß ein höherer K-Gehalt erreicht werden konnte. Es konnte so auch der Kaliumgehalt des Brennstoffes genau festgelegt werden.

b) Photozelle und Filter. Als Photozelle diente eine edelgasgefüllte Preßler-Zelle, die eine Kathodenschicht mit der Firmenbezeichnung Spezial I besaß. Die Form der Zelle war so, daß sie sich in einen rohrförmigen Halter bequem einbauen ließ. Die Wahl einer gasgefüllten Zelle war deswegen von Vorteil, weil sich die Empfindlichkeit einer solchen Zelle mit der Anodenspannung stark ändert und dadurch eine bequeme Regelungsmöglichkeit der Spannung am Ableitwiderstand möglich ist. Außerdem hat eine gasgefüllte Zelle bei höherer Anodenspannung eine wesentlich größere Empfindlichkeit als eine Vakuumzelle. Die Trägheit der gasgefüllten Zelle spielte bei den verwendeten Anodenspannungen keine Rolle

Vor der Photozelle wurde ein Glasfilter angebracht, das aus vier verschiedenen Farbgläsern zusammengesetzt und verkittet war. Die Dicke und die Art der einzelnen Gläser wurden so ausgewählt, daß sich bei nicht zu hoher Absorption im Bereich der Linien doch ein ziemlich enger Spektralbereich, der vom Filter durchgelassen wird, ergab, Bild 5.

Die Photozelle bzw. der Photozellenhalter wurde auf einem kräftigen Gestell in etwa 150 mm Abstand vom Quarzfenster zentrisch angeordnet. Ein Schutzrohr vom Quarzfenster bis zur Zelle hielt das störende Tageslicht fern. Durch ein abgeschirmtes Kabel wurde die Kathode der Photozelle mit der Eingangsbuchse des Verstärkers verbunden.

c) Der Verstärker. Der Verstärker wurde als zweistufiger Gleichstromverstärker für direkten Anschluß an die Ablenkplatten eines Kathodenstrahl-Oszillographen konstruiert. Um eine stärkere Wanderung des Arbeitspunktes der zweiten Röhre durch thermische Beeinflussung vom Netzteil her zu vermeiden, wurden der Netzteil und der Verstärkerteil des Gerätes in zwei Gehäusen untergebracht. Die Spannungen für die Elektroden außer der Anodenspannung der zweiten Röhre wurden mit Glimmröhren stabilisiert. Die leicht auftretenden Eigenschwingungen des Verstärkers bei hohen Verstärkungsgraden wurden

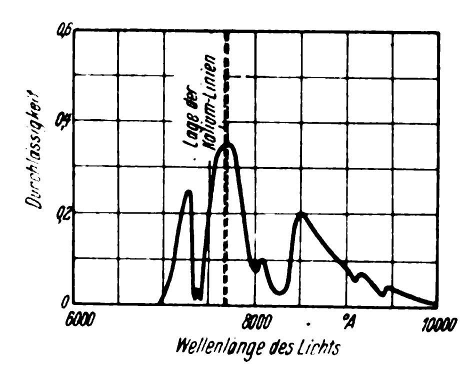


Bild 5. Farbdurchlässigkeit des Filters.

durch Verzicht auf verwickelte Anordnungen zur Regelung der Empfindlichkeit am Eingangsgitter vermieden.

Durch einen besonderen Kunstgriff in der Verstärkerschaltung gelang es, den Meßbereich der Photozellenmethode auf wesentlich tiefere Temperaturen als sonst meßbar herunterzudrücken. Der exponentielle Anstieg der Strahlung mit der Temperatur wurde durch Verwendung einer Verstärkerröhre mit exponentieller Kennlinie teilweise ausgeglichen, so daß sich in einem gewissen Temperaturbereich ein linearer Anstieg der Ausgangsspannung mit der Temperatur zeigt. Bild 6 zeigt die Gegenüberstellung der Temperaturkurve eines Verstärkers mit Regelröhre sowie mit normaler Röhre, wenn der Verstärker bei 2700° K gerade voll ausgesteuert wird. Man erkennt leicht, daß die Meßgenauigkeit bei tiefen Temperaturen durch diese neue Anordnung erheblich gesteigert wird. Um diese günstige Anordnung voll wirksam zu machen, ist es erforderlich, daß die Exponentialröhre voll ausgesteuert wird, d. h. die Röhre erfüllt nur dann ihren Zweck, wenn sie als Ausgangsröhre im Verstärker verwendet wird.

Die Spannungsverstärkung des Gerätes war im Arbeitspunkt 13000fach. Die Frequenzabhängigkeit des Verstärkers war so, daß Frequenzen bis 10000 Hz gut wiedergegeben wurden. Die Frequenzunabhängigkeit läßt sich weiter steigern; die oberste Grenze der Frequenzunabhängigkeit ist im wesentlichen durch das Produkt aus der Kapazität des Photozellenkabels mit der Empfindlichkeit des

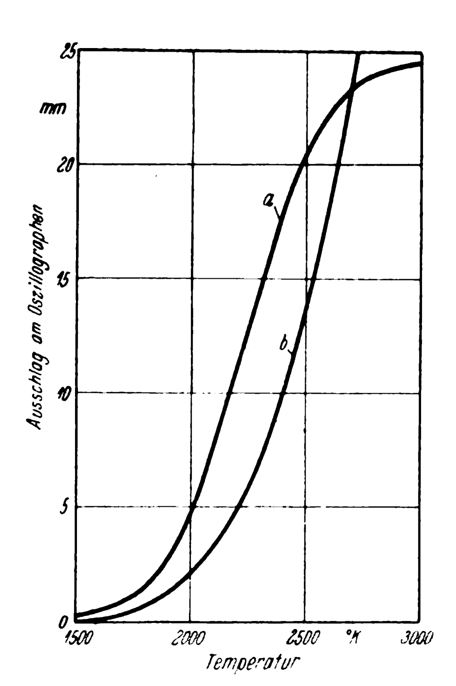



Bild 6. Verstärkerkennlinie bei normaler und exponentieller Kennlinie.
a Verstärker mit Exponentialröhre,
b Verstärker mit linearer Eichkurve.

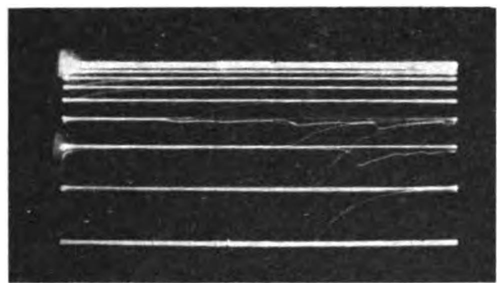


Bild 7. Beispiel für ein Eichdiagramm des Verstärkers.

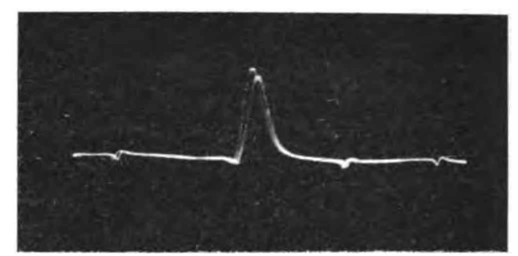


Bild 8. Beispiel für ein Strahlungsdiagramm.

Verstärkers (Größe des Photozellenwiderstandes) gegeben; sie dürfte bei 50000 Hz liegen.

Am Verstärker wurde durch Unterteilung des Photozellenwiderstandes eine Vorrichtung zur Aufnahme der Zeitmarkierung angebracht. Die Spannungsstöße für die Zeitmarken wurden in üblicher Weise durch Induktion von auf dem Schwungrad sitzenden Magneten auf eine Spule von 200 Windungen erzeugt. Sie wurden so 10,5° vor o. T. und vor u. T. angebracht, um das Strahlungsdiagramm nicht zu stören, Bild 8.

Die Spannung am Anodenableitwiderstand wurde auf die Ablenkplatten einer Braunschen Röhre gegeben. Um das Diagramm in die Mitte des Gesichtsfeldes der Röhre zu bringen, wurde zwischen dem netzseitigen Pol des Ableitwiderstandes und die eine Ablenkplatte eine Batteriespannung von —200 Volt gelegt. Zur Eichung der Verstärkeranordnung mitsamt dem Oszillographen diente ein Stufenschalter, durch den 10 verschiedene Spannungen (von 0 bis 100 m V) in rascher Folge an das Gitter der ersten Röhre gelegt werden konnten. Es ergaben sich dann Eichdiagramme, von denen Bild 7 ein Beispiel zeigt. Die Abstände der einzelnen waagerechten Linien entsprechen etwa gleichen Spannungsänderungen am Verstärkereingang. Man erkennt daraus den exponentiellen Charakter der Kennlinie des Verstärkers.

Die Messungen wurden nach folgendem Plan vorgenommen:

Es wurde zunächst ein Strahlungsdiagramm des Motors in der »Normaleinstellung« aufgenommen, Bild 8. Diese Normaleinstellung des Motors war die gleiche wie beim Spektrallinienumkehrverfahren.

Die Anodenspannung wurde so gewählt, daß der Verstärker etwa zur Hälfte ausgesteuert war, um bei Diagrammen mit höheren Temperaturen nicht den Aussteuerungsbereich zu überschreiten. Danach wurden drei oder vier Oszillogramme bei anderen Zündungs- und Gemischeinstellungen aufgenommen, nach diesen der Motor in Normalstellung gebracht und wieder das Diagramm photographiert. Alle diese Läufe wurden bei gleicher Spannung an der Photozelle und bei gleichem Kaliumzusatz (rd. 0,5 g K auf 1 l Brennstoff) gefahren. Es konnte durch die Eingrenzung der Meßläufe zwischen zwei Normalstellungen eine stetige Änderung der Durchlässigkeit des Quarzfensters bemerkt und in Rechnung gestellt werden. Danach wurde ein Eichdiagramm aufgenommen.

Zunächst wurden die Oszillogramme der Normalläufe ausgewertet. Die Auslenkung des Elektronenstrahls wurde auf der Platte als Funktion des Kurbelwinkels ausgemessen und diese Auslenkung nach dem Eichdiagramm den zugehörigen Spannungen am Verstärkereingang zugeordnet. Nun wurde aus den Ergebnissen der Spektrallinienumkehrmethode der Maximalwert der Temperatur herausgegriffen und nach dem Planckschen Gesetz der zugehörige Strahlungswert berechnet. Dieser Strahlungswert wurde in Beziehung gesetzt zur maximalen Spannung am Gitter, die aus dem Diagramm entnommen wurde. Man erhielt so einen Umrechnungsfaktor für Spannungen am Verstärkereingang (Photoströme) in Strahlungswerte. Mit diesem Umrechnungsfaktor wurden sämtliche Werte der Spannungen aus dem Diagramm multipliziert. Aus den so erhaltenen Strahlungswerten kann man nach dem Planckschen Gesetz wiederum die zugehörigen Temperaturen festlegen.

Dieses Verfahren ist nicht genau, weil die Maximaltemperaturen der Einzelverbrennungen gegenüber dem Mittelwert aus dem Spektrallinienumkehrverfahren schwanken. Durch eine größere Zahl von auswertbaren Diagrammen der Normaleinstellung des Motors lassen sich die Fehler dieser Methode verkleinern. Die Abweichungen der verschiedenen Umrechnungsfaktoren waren so groß, daß sie einem Temperaturunterschied von $\pm 150°$ entsprachen.

Wie man mit dieser Methode zu genaueren und absoluten Werten der Umrechnungsfaktoren übergehen kann, wird später gezeigt werden.

3. Meßergebnisse.

Die Temperaturen bei verschiedenen Einstellungen des Motors zeigen Bild 9 bis 11. Sie wurden bei drei verschiedenen Zündungseinstellungen gemessen, bei 27°, 37° und 47° Vorzündung. Diese extremen Werte der Vorzündung wurden deshalb gewählt, um das Verfahren bei höchsten Temperaturen zu erproben. Bei jeder Zündungseinstellung wurde mit drei bis fünf verschiedenen Gemischzusammensetzungen gefahren. Diese Gemischzusammensetzungen waren nicht reproduzierbar außer bei armem Gemisch, bei dem stets der Luftschieber ganz geöffnet wurde. Es zeigt sich mit steigender Vorzündung ein starkes Ansteigen der Temperaturen bis nahe an 3000° K. Wenn man, vom mageren Gemisch ausgehend, allmählich mehr Brennstoff zugibt, so steigen die Meßtemperaturen zunächst langsam an, um nach Überschreiten eines Höchstwertes, der annähernd mit der höchsten Leistung zusammenfällt, bei reichem Gemisch stark abzusinken. Auch ist bei reicher Gemischzusammensetzung ein starkes Schwanken der Temperaturen bei verschiedenen Verbrennungen feststellbar. Am Motor zeigte sich das durch stoßartigen unruhigen Gang.

Außer diesen Aufnahmen, die nur relativ zu einer Normalstellung des Motors durchgeführt wurden, wurden auch absolute Messungen mit sauberem Quarzfenster durchgeführt, die die Übertragung der Meßmethode auf einen beliebigen Motor gestatten. Während vorher die Zusatzmenge, die Anodenspannung an der Photozelle sowie die Trübung des Quarzfensters beliebig waren und nur während einer Meßreihe zwischen zwei Normalaufnahmen konstant gehalten wurden, mußte jetzt mit genau definierter Zusatzmenge sowie Zellenspannung und sauberem Quarzfenster gearbeitet werden.

Um die relativen Intensitäten der Strahlung als Funktion des Kaliumzusatzes und der Photozellenspannung bequem ausdrücken zu können, wurde folgende Gleichung für die Spannung am Photozellenableitwiderstand aufgestellt:

$$U_{mV} = f_1(K) \cdot f_2(V_z) \cdot c_1 \lambda^{-5} \frac{d\lambda}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \int^{F} \Omega \, df .$$

Hierin bedeuten f_1 (K) die Abhängigkeit der Strahlung von der Zusatzmenge, f_2 (V_z) die Abhängigkeit des Photostromes von der Zellenspannung und das Integral $\int^{F} \Omega \, df$ die Lichtstärke der Anordnung, ausgedrückt durch das Produkt aus dem Raumwinkel eines jeden Flächenelements df des Quarzfensters mit der Größe des Flächenelementes.

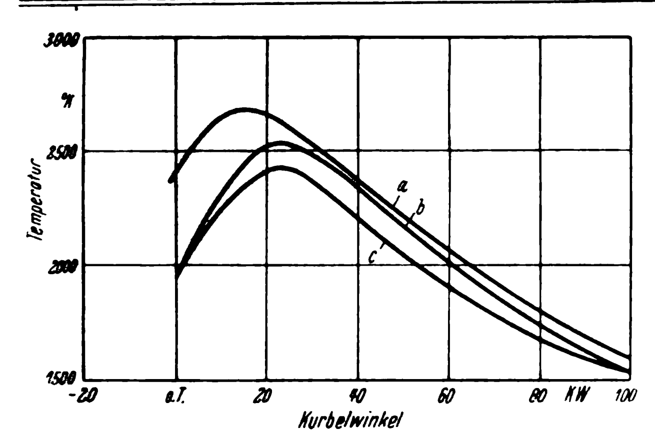


Bild 9. Temperaturen im Verbrennungsraum. Zündung 27° vor o. T.
a armes Gemisch,
b reiches Gemisch,
c sehr reiches Gemisch.

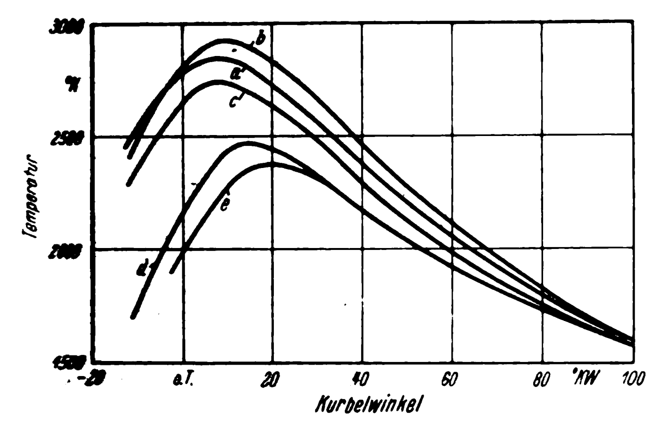


Bild 10. Temperaturen im Verbrennungsraum. Zündung 37° vor o.T.
a armes Gemisch,
b bestes Gemisch,
c reiches Gemisch,
d und e sehr reiches Gemisch.

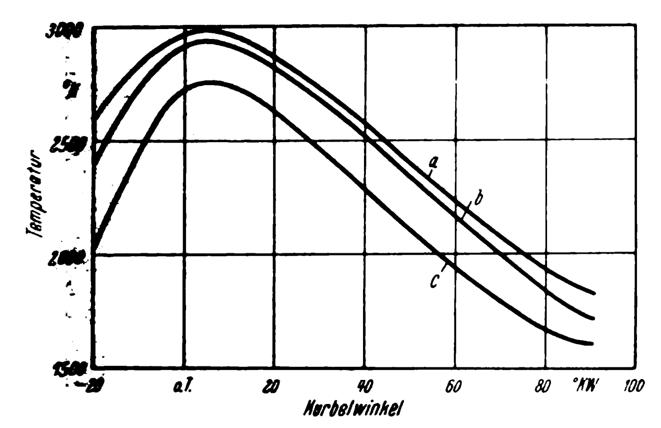


Bild 11. Temperaturen im Verbrennungsraum. Zündung 47° vor o.T.
a armes Gemisch,
b bestes Gemisch,
c reiches Gemisch.

Ist die Photozelle vom Quarzfenster soweit entfernt, daß von jeder Stelle des Quarzfensters die ganze Fläche der Photozellenkathode gesehen werden kann, so vereinfacht sich dieses Integral:

$$\int\limits^{F} \Omega\, d f = \Omega F = F \cdot F_z \cdot \frac{1}{2 \pi d^2},$$

wobei F_z die Fläche der Photozellenkathode, F die Fläche des Quarzfensters und d den Abstand Quarzfenster-Photozellenkathode bezeichnen. Die Funktion f_1 (K), die eine Funktion der Wellenlänge ist, weil in ihr die Abhängigkeit der Spektrallinienbreite von der Zusatzmenge enthalten ist, müßte in den Ausdruck des Planckschen Gesetzes $\frac{\lambda^{-5} d\lambda}{e^{c_2/\lambda T}-1}$ hineingenommen werden; da jedoch die Breite der Linien bei den verwendeten Zusatzmengen sehr klein ist (etwa 5 bis 20 Å), kann auf die Integration verzichtet werden; es wird dann für λ die mittlere Wellenlänge der Kaliumlinien eingesetzt und für eine beliebig gewählte konstante Größe, etwa $d\lambda = 1$ Å $= 10^{-8}$ cm.

Die Meßläufe wurden in der Normalstellung des Motors bei sehr verschiedenen Kaliumzusatzmengen vorgenommen und zwar zwischen 0,3 und 0,005 $\frac{\text{g Kalium}}{\text{l Brennstoff}}$. In einem Meßkolben wurde eine bestimmte Menge Kalium eingewogen und mit Alkohol zur Reaktion gebracht. Nach Beendigung der Reaktion wurde der Kolben bis zur Strichmarke mit Alkohol aufgefüllt. Von dieser Flüssigkeit wurde mit einer 5 cm³-Pipette einem abgemessenen Volumen Brennstoff die gewünschte Menge zugesetzt.

Die Zellenspannung mußte natürlich diesen Zusatzmengen angepaßt werden, um gut meßbare Diagramme zu erhalten; sie betrug beim geringsten Zusatz 100 V und beim größten Zusatz 1,5 V. Bei den Zwischenwerten des Zusatzes wurde jeweils die Spannung geringen Änderungen unterworfen, um die Berechtigung der oben aufgestellten Gleichung prüfen zu können. Die Auswertung der Diagramme erfolgte wieder so, daß das Maximum des Photostromes mit der aus den Spektrallinienumkehrmessungen erhaltenen Temperatur in Beziehung gesetzt wurde, wodurch sich der Umrechnungsfaktor mit Glasfilter ergab.

Nach den Meßläufen wurde die Empfindlichkeit der Photozelle als Funktion der Zellenspannung mit einer Lichtquelle von gleichbleibender Lichtstärke gemessen. Die Differenz der Empfindlichkeitskurven bei Belichtung und Dunkelheit ergab die gewünschte Funktion f_2 (V_z), Bild 12. Der Faktor f_1 (K) wurde folgendermaßen bestimmt: Es ergibt sich, daß der Umrechnungsfaktor γ folgende Bedeutung hat:

$$U_{max} = f_1(K) \cdot f_2(V_z) \cdot c_1 \lambda^{-5} \frac{d\lambda}{e^{c_2/\lambda T}-1} \int\limits^{F} \Omega\, d f$$

$$= \frac{1}{\gamma} c_1 \lambda^{-5} \frac{d\lambda}{e^{c_2/\lambda T}-1} \int\limits^{F} \Omega\, d f.$$

Also:

$$\gamma = \frac{1}{f_1(K) \cdot f_2(V_z)}; \quad f_1(K) = \frac{1}{\gamma \cdot f_2(V_z)}.$$

Mit Hilfe des Zellenfaktors f_2 (V_z) und des Umrechnungsfaktors γ ließ sich also der Zusatzfaktor f_1 (K) ermitteln, Bild 13. Beim Auftragen des Zusatzfaktors gegen den Logarithmus der Zusatzmenge ergab sich folgender Verlauf:

Bei stärkerem Zusatz stieg der Zusatzfaktor linear an, bei geringen Zusätzen wurde diese Linie allmählich flacher. Dies Ergebnis ist verständlich: Bei stärkerem Zusatz sind es vor allem die Kaliumatome, die durch gegenseitige Beeinflussung eine Verbreiterung der Linien hervorrufen; bei schwächerem Zusatz wird diese Verbreiterung dagegen durch den Druck des Gases hervorgerufen und dieser Einfluß ist bei verschiedenen Zusätzen stets gleich. Dies hat zur Folge, daß bei weiterer Verringerung des Kaliumzusatzes die Linie nicht immer schmaler wird, sondern eine gewisse Breite beibehält, jedoch an Intensität verliert, so daß im Bereich der Linie keine schwarze Strahlung mehr stattfindet. In diesem Fall muß die Ausstrahlung der Linie vom Druck abhängig sein. Dies wurde auch tatsächlich festgestellt, Bild 14. In den beiden Diagrammen bei geringem Zusatz zeigen sich von etwa 60° KW nach o. T. an (wenn also der Druck schon stark nachgelassen hat) systematische Abweichungen der Meßergebnisse nach tieferen Temperaturen hin. Um einwandfreie Temperaturmessungen mit dieser Methode durchführen zu können, muß man also mit der zugesetzten Kaliummenge über dieser Grenze, die bei etwa 0,02 g K auf 1 l Brennstoff liegt, bleiben. Die einzelnen Meßpunkte der Kurve f_1 (K) zeigen eine gewisse Streuung. Man kann mit Hilfe der nun erhaltenen Kurve

f_1 (K) die genauen Werte der Umrechnungsfaktoren für den jeweiligen Kaliumgehalt feststellen.

Nach diesen Messungen ist es nun möglich, an einem beliebigen Motor mit beliebig angebrachtem Quarzfenster die Temperaturen zu messen. Die Genauigkeit der Messungen beträgt abwärts bis zu Temperaturen von 2000° mindestens 1%. Diese Genauigkeit ist aus dem mittleren Fehler der Diagramme bei der Normaleinstellung des Motors errechnet worden. Nimmt man an, daß die Streuungen der Temperaturwerte in diesem Diagramm nicht auf Fehler der Messung, sondern durch tatsächliche Verschiedenheiten der Temperatur bedingt sind, so kann die Genauigkeit noch erheblich höher liegen. Die absolute Genauigkeit hängt hauptsächlich von der Verschmutzung des Quarzfensters ab.

D. Vergleich beider Verfahren.

Das neue Verfahren läßt sich mit dem Spektrallinienumkehrverfahren an der Hand von Bild 15 vergleichen. Die Ergebnisse des neuen Verfahrens wurden aus 27 verschiedenen Aufnahmen bei Normaleinstellung des Motors gewonnen. Die mittlere Abweichung der Einzelaufnahmen vom Mittelwert beträgt 2,4%. Da diese Abweichung um beinah eine Größenordnung höher ist als der Fehler gegenüber dem Spektrallinienumkehrverfahren, so ist anzunehmen, daß die Abweichungen der Einzelaufnahmen reell sind, d. h. daß sie durch tatsächliche Temperaturunterschiede bei den einzelnen Verbrennungen hervorgerufen werden, so daß bei weiterer Erhöhung der Zahl der Photozellenaufnahmen die Abweichungen nicht wesentlich herabgesetzt werden können.

Die Abweichungen beider Verfahren voneinander sind über Erwarten gering; sie betragen im Durchschnitt $\pm 12°$ oder etwa 0,5%. Es ist hiermit also die Brauchbarkeit des Verfahrens für diese Meßgenauigkeit erwiesen. Auf etwa die gleiche Genauigkeit (0,46%) kommt man, wenn man den mittleren Fehler des Mittelwerts der Photozellenmessungen bei Normaleinstellung des Motors bildet. Diese Angaben beziehen sich also auf die relative Genauigkeit des Verfahrens.

Die absolute Genauigkeit ergibt sich aus den Aufnahmen bei verschiedenen Zusatzmengen und aus den daraus gewonnenen Meßpunkten der Kurve f_1 (K), Bild 13.

Unter Ausschluß der Zusatzmengen, für die nur je ein Meßpunkt vorliegt, ergibt sich für die Zusatzfaktoren f_1 (K) ein mittlerer Fehler der Einzelmessung von $\pm 11,8\%$; dies ergibt für die Kurve einen mittleren Fehler von $\pm 3,27\%$. Dieser Fehler ist für die Strahlungsfaktoren maßgebend; bei der Umrechnung in Temperaturwerte ergibt sich unter Zugrundelegung einer Temperatur von 2400° K für die Einzelmessung ein Fehler von $\pm 36°$ oder 1,5% und für den Mittelwert ein Fehler von $\pm 10°$ oder 0,42%. Daß diese Absolutgenauigkeit höher liegt als die relative Genauigkeit, dürfte darin seinen Grund haben, daß die Werte für die Zusatzfaktoren und damit die Umrechnungsfaktoren für Strahlungs- in Temperaturwerte lediglich aus der Maximaltemperatur des Diagramms entnommen wurden, während die relativen Genauigkeiten für alle Diagramme aus dem Gesamtverlauf von o. T. bis 100° nach o. T. ermittelt wurden, wo sich bei den dann sehr kleinen Ausschlägen des Oszillographen beträchtliche Ungenauigkeiten ergeben können. Da sich der Fehler der Einzelmessung aus den Streuungen der wirklichen Temperaturen bei der Verbrennung und dem Meßfehler zusammensetzt, liegt der absolute Fehler zwischen dem der Einzelmessung und dem des Mittelwertes, also zwischen 1,5% und 0,4%. Für den Versuchsbetrieb ist, wenn eine hohe Genauigkeit des mittleren Temperaturverlaufes verlangt wird, die Aufnahme mehrerer Oszillogramme erforderlich, so daß der Fehler des Mittelwertes 0,4% maßgebend ist.

Man wird also für den gesamten Temperaturverlauf mit einem allgemeinen Fehler von 0,5% rechnen können. Diese Genauigkeit dürfte für alle Versuchszwecke an Motoren vollkommen hinreichend sein.

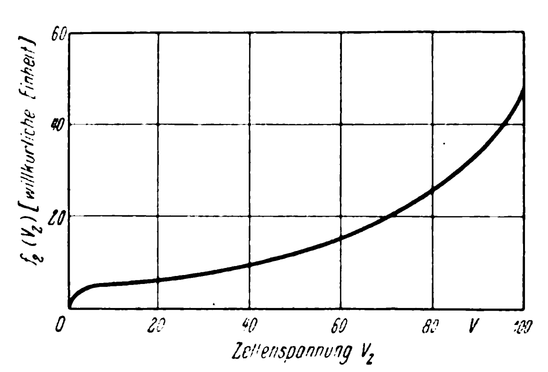


Bild 12. Zellenfaktor f_2 (V_2).

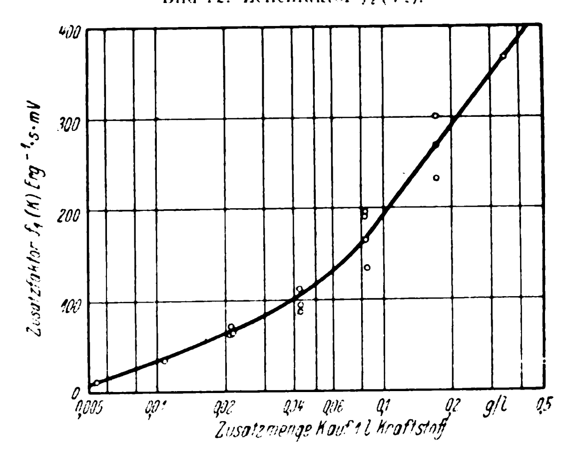


Bild 13. Zusatzfaktor f_1 (K).

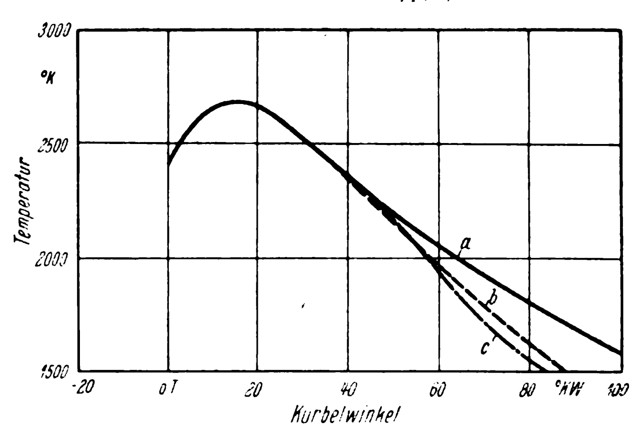


Bild 14. Einfluß der Kalziumzusatzmenge auf die gemessenen Temperaturen.
a 0,3 bis 0,02 g K/l Brennstoff,
b 0,01 g K/l Brennstoff,
c 0,005 g K/l Brennstoff.

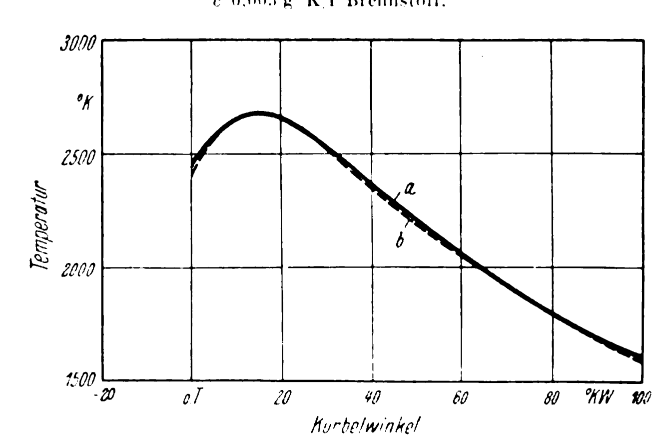


Bild 15. Vergleich der Meßergebnisse des Spektrallinienumkehrverfahrens mit dem Photozellenverfahren.
a Spektrallinienumkehrverfahren.
b Photozellenverfahren.

Durch diesen Vergleich beider Verfahren ist also bewiesen, daß die Einflüsse auf die Ausstrahlung der Linien, die — außer dem Temperatureinfluß nach dem Planckschen Gesetz — noch vorhanden sind, unmeßbar gering sind. Die Brauchbarkeit des neuen Photozellenverfahrens, das, abgesehen von der neuen Möglichkeit der oszillographischen Temperaturaufnahme, eine bisher unerreichte Genauigkeit ergibt, ist damit erwiesen.

E. Zusammenfassung.

Bei dem neuen Verfahren zur Messung des Gastemperaturverlaufs in Ottomotoren wird die Ausstrahlung der sog. Resonanzlinien des Kaliums benützt. Dem Brennstoff wird zu diesem Zweck eine geringe Menge Kaliumalkoholat, in Alkohol gelöst, zugesetzt. Die Strahlung wird mit einer gasgefüllten ultrarotempfindlichen Photozelle gemessen. Der Photostrom wird in einem zweistufigen Gleichstromverstärker so hoch verstärkt, daß dadurch die Ablenkplatten eines Kathodenstrahloszillographen ausgesteuert werden können.

Es wurde eine Gleichung für den Photostrom aufgestellt, in der die Temperatur als Veränderliche, ferner die Menge des Kaliumzusatzes, die Saugspannung der Photozelle und die Lichtstärke der Anordnung als Parameter enthalten sind. Der Einfluß der letzten drei Größen wurde experimentell bestimmt, so daß sich dann ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Temperatur und Photostrom ergab, der durch das Plancksche Gesetz gegeben ist.

Die Genauigkeit des Verfahrens beträgt im Temperaturgebiet von 1800° K aufwärts bei Messung des mittleren Temperaturverlaufs über mehrere Verbrennungen 0,5%. Bei Auswertung eines einzigen Diagramms ergeben sich Abweichungen von 1,5% vom Mittelwert, die zum größten Teil auf Ungleichmäßigkeiten des Verbrennungsablaufs, zum kleineren Teil auf Meßfehler zurückzuführen sind. Bei tieferen Temperaturen wird die Genauigkeit geringer. Die Grenze des Verfahrens liegt bei 1400° K.

Es war nach theoretischer Erwägung zu erwarten, daß die Temperaturen, die nach diesem Verfahren gemessen wurden, eine Abhängigkeit von Druck und Gaszusammensetzung zeigen. Zur Prüfung dieser Frage wurde das Spektrallinienumkehrverfahren angewendet. Bei einer bestimmten Einstellung des Motors, die die größte Gleichmäßigkeit der Einzelverbrennungen gewährleistete, ergab sich während des ganzen Verbrennungsverlaufs Übereinstimmung des Spektrallinienumkehrverfahrens mit dem neuen Verfahren unter Anwendung der Photozelle. Dies ist ein Beweis dafür, daß die Gaszusammensetzung und der Druck auf die Intensität der Strahlung und damit auf die angezeigte Temperatur keinen meßbaren Einfluß haben; das Spektrallinienumkehrverfahren ergab ferner bei Anwendung der Kalium- und Natriumlinien als Vergleichslinien gleiche Temperaturen. Das bedeutet, daß auch die Kaliumstrahlung dem Kirchhoffschen Gesetz gehorcht und daß demnach bei einer Temperaturmessung mit Hilfe der Ausstrahlung der Kaliumlinien die wahren Gastemperaturen erhalten werden.

Hiermit ist also erstmalig ein Verfahren gefunden worden, das die fortlaufende Aufzeichnung des Temperaturverlaufs während der Verbrennung gestattet. Die Hauptfehlerquelle, die bei der Durchführung des Verfahrens im Versuchsbetrieb auftritt, ist die Verschmutzung des Quarzfensters. Es ist ein weiteres Verfahren auf der Grundlage des bisherigen in Vorbereitung, das diese Fehlerquelle ausschalten soll.

F. Schrifttum.

[1] K. Schnauffer, Das Klopfen von Zündermotoren. Z. VDI Bd. 75 (1931), S. 455.

[2] Ch. Erichsen, Verbrennung im Dieselmotor. VDI-Forschungsheft 377 (1936).

[3] A. E. Hershey, Measurement of gas temperatures in an internal-combustion engine. Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. Bd. 58 (1936), S. 195.

[4] G. M. Rassweiler u. L. Withrow, Flame temperatures vary with knock and combustion-chamber posision. S.A.E.J. Bd. 36 (1935), S. 125.

[5] G. M. Rassweiler u. L. Withrow, Flame temperature observations three points measure changes during and after combustion. Automot. Ind. Bd. 72 (1935) Nr. 3, S. 86.

[6] A. C. Hershey u. R. F. Platon, Flame temperatures in an internal combustion engine measured by spektral line reversal. Univ. Illinois Bull. Bd. 31 (1933) Nr. 9.

[7] U. Yosida, Rep. aeron. Res. Inst., Tokio Imp. Univ., Bd. 14.

[8] E. Griffith u. J. B. Awbery, The measurement of flame temperatures. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, Bd. 123 (1929), S. 401/21.

[9] H. Geiger u. K. Scheel, Handbuch der Physik, Bd. 19, Berlin 1928, S. 40/43.

[10] L. Bisang, Ausstrahlung des Verbrennungsraumes schnellaufender Diesel- und Ottomotoren. Diss. T. H. Stuttgart. Z. VDI Bd. 81 (1937), S. 805; Deutsche Kraftf.-Forschg., Heft 4, Berlin 1938.

[11] Schäfer-Matossi, Das ultrarote Spektrum. Sammlung Struktur der Materie, Bd. 10 (1930), S. 104 u. S. 237.

Begrenzung von Resonanzdrehschwingungen durch einen Schwinger mit gekrümmter Federkennlinie.

Von K. Maier, VDI.

Bericht des Forschungsinstitutes für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Die schwingungsvermindernde Wirkung von elastischen Kupplungen und Schwingern mit gekrümmter Federkennlinie wurde früher auf deren dämpfende Eigenschaften zurückgeführt. Es wird durch Versuche an einem Flugmotor nachgewiesen, daß die richtige Abstimmung zwischen Schwingermasse und Federung den Einfluß der Reibung weit überwiegt[1]).

Gliederung.

I. Grundgedanken.

Bei Kolbenkraftmaschinen können bekanntlich in der Resonanz und auch in der Nähe der Resonanz so starke Drehschwingungen der Wellen auftreten, daß die zusätzlichen Beanspruchungen die Wechselfestigkeit des Werkstoffes überschreiten.

Zur Verminderung dieser gefährlichen Drehschwingungen werden neben anderen Maßnahmen auch elastische Kupplungen mit gekrümmter Federkennlinie verwendet. Ihre Wirkung wird nicht nur auf die von der Größe der Verdrehung abhängige Veränderung der Kupplungssteifigkeit und damit der Eigenschwingungszahl, sondern auch auf Dämpfung durch Reibung u. dgl. zurückgeführt [1]. Da bei einer wirklichen Dämpfung durch mechanische Energievernichtung Wärme erzeugt wird, müßten diese Kupplungen während des Betriebes sehr warm werden, oder mit einer Vorrichtung zur Wärmeabführung ausgestattet sein. Da dies aber nicht der Fall ist, dürfte die dämpfende Wirkung fast ausschließlich der gekrümmten Federkennlinie zuzusprechen sein.

Auch die bei einigen Anlagen bekannt gewordene zusätzliche Verwendung eines Dämpfers zur Beseitigung von Oberschwingungen [2] [4] wird verständlich, da die Lage einer Oberschwingung durch Änderung der Kupplungssteifigkeit meist nur in ganz geringem Maße beeinflußt wird.

Auf Grund einfacher Überlegungen war es naheliegend, zur Vermeidung von Schwingungen statt einer für die Übertragung der ganzen Motorleistung entsprechend schwer bemessenen Kupplung nur einen leichten Schwinger mit nicht gerader Federkennlinie z. B. an das freie Kurbelwellenende anzubauen. Schwingermasse und -federung müssen so gewählt werden, daß die bei bestimmten Motordrehzahlen auftretenden Resonanzen zwischen Erregerfrequenz und Eigenschwingungszahl des ganzen Massensystems mit wachsendem Ausschlag des Schwingers gestört werden. Als Folge werden — wie bei den erwähnten elastischen Kupplungen — die Schwingungsausschläge abnehmen, so daß wieder die ursprüngliche Resonanz eintreten und das Spiel von neuem beginnen kann. Die Schwingung wird sich daher einerseits nur bis zu einer gewissen Größe aufschaukeln können, andererseits ist ein Mindestausschlag erforderlich, damit die schwingungsbegrenzende Wirkung eintreten kann. Drehsteifigkeit und Größe des Schwingers lassen sich aber an Hand der Schwingungsform so bemessen, daß die Schwingung in den gekrümmten Teil der Federkennlinie genügend weit eingetreten ist und eine »Verstimmung« der Schwingungsanordnung hervorgerufen hat, bevor die Verdrehung innerhalb der Kurbelwelle das zulässige Maß erreicht hat.

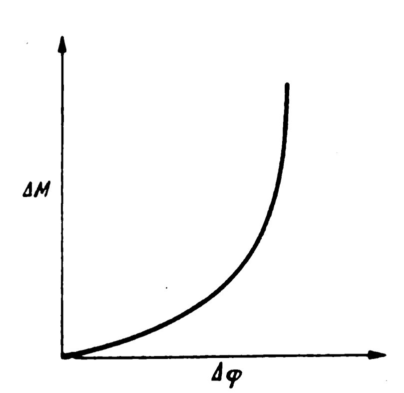
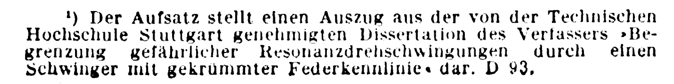


Bild 1. Gekrümmte Federkennlinie.

Die vorstehenden Ausführungen gelten zunächst nur für bestimmte Motordrehzahlen bzw. für bestimmte Erregerfrequenzen. Unter der Annahme, daß die Schwingermasse für jede Ausschlaggröße harmonische Schwingungen ausführt, kann man sich die Schwingerfederung angenähert durch eine vom Ausschlag abhängige, punktweise »reduzierte Steifigkeit« gegeben denken, mit der ein Schwinger gerader Kennlinie ausgeführt sein müßte, um jeweils die gleiche Schwingzeit wie der Schwinger mit nichtgerader Kennlinie zu besitzen. Wird nun z. B. bei einer Schwingerfederung nach Bild 1 diese reduzierte Steifigkeit unendlich groß, so wird wohl in Übereinstimmung mit dem Vorgang beim einfachen Schwinger die höchste Eigenschwingungszahl des Mehrmassensystems unendlich werden und damit verschwinden können. Alle übrigen Eigenschwingungszahlen erhalten aber auch wieder endliche Werte, die durch das Massensystem selbst und die Größe der Schwingermasse bestimmt sind, d. h. mit anderen Worten: Im Gegensatz zu den Verhältnissen beim einfachen Schwinger ist hier nach Erreichen eines bestimmten Schwingerausschlages von der gekrümmten Federkennlinie keine Veränderung der Eigenschwingungszahlen und damit auch keine Begrenzung der Schwingungsweite bzw. der zusätzlichen Schwingungsbeanspruchung mehr zu erwarten.

Dies würde den aus den Erfahrungen mit elastischen Kupplungen gezogenen Schlußfolgerungen bezüglich der


[1]) Der Aufsatz stellt einen Auszug aus der von der Technischen Hochschule Stuttgart genehmigten Dissertation des Verfassers »Begrenzung gefährlicher Resonanzdrehschwingungen durch einen Schwinger mit gekrümmter Federkennlinie« dar. D 93.

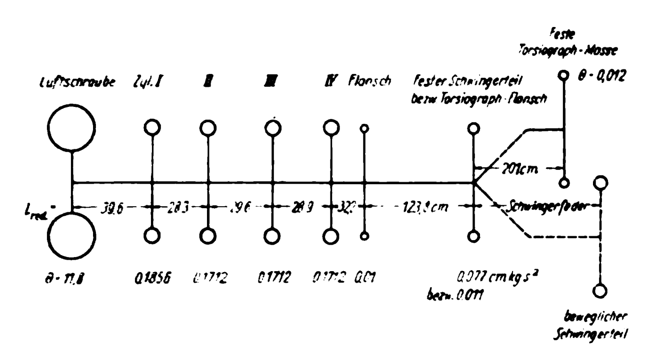


Bild 2. Verteilung der Drehmassen des As 8 B-Flugmotors. Die Längen sind auf $J_p = 84$ cm⁴ bezogen.

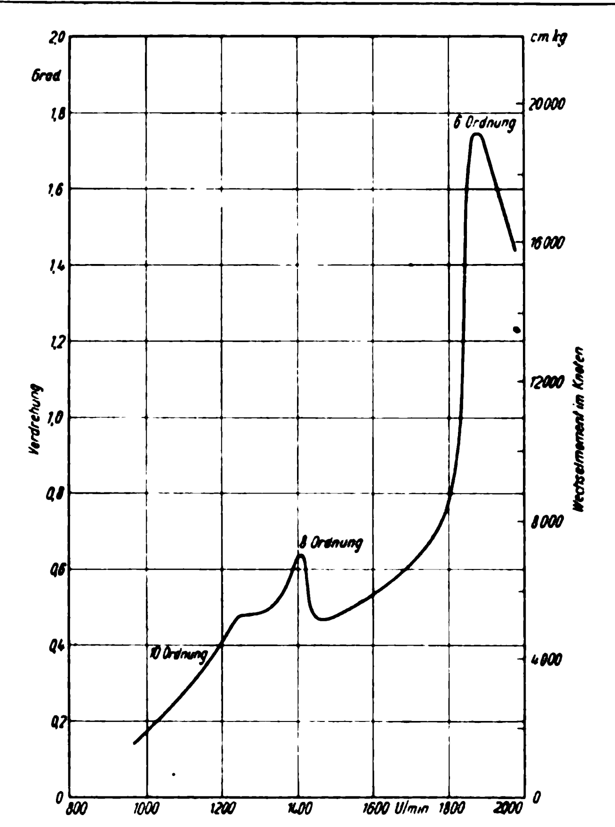


Bild 3. Schwingungskennlinie des As 8 B-Motors.

Größe und des Einflusses wirklicher Dämpfung widersprechen. Da sich aber bei der Bemessung eines Dämpfers nicht nur die Vergrößerung der Reibung, sondern auch die Abstimmung Masse zu Feder als günstig erwies [3] [4], setzte sich die Erkenntnis durch, daß nicht nur die Federreibung, sondern auch der gekrümmte Verlauf der Federkennlinie für die Wirkung des Dämpfers notwendig ist. Es ist daher anzunehmen, daß der Einfluß der gekrümmten Federkennlinie nicht nur auf der Veränderung der mittleren Steifigkeit, sondern auch darauf beruht, daß die Schwingung des Schwingers mit zunehmendem Ausschlag ihren Charakter einer harmonischen Schwingung verliert. Die Reibung dürfte nur eine ergänzende Wirkung hervorrufen. Ihre Größe ist sehr stark vom Zutritt bzw. Ausbleiben von Schmieröl, z. B. bei hoher Schwingungszahl, abhängig. Ihr Einfluß auf die Schwingungsbegrenzung ist damit veränderlich, kann u. U. die Betriebssicherheit beeinflussen und wird immer durch einen Leistungsverlust erkauft sein. Kann daher eine ausreichende Schwingungstilgung durch eine Feder mit möglichst reibungsfreier gekrümmter Kennlinie erzielt werden, so ist die Verwendungsmöglichkeit von einfachen, gegebenen Verhältnissen weitgehend anpassungsfähigen und betriebssicheren Konstruktionselementen gegeben [5].

Eine genaue mathematische Lösung dieser Fragen ist mit den zur Zeit verfügbaren Mitteln nicht möglich. Die bekannt gewordenen Näherungsverfahren (Duffing [6], Buchhold [7], Klotter [8] u. a.) beschränken sich auf gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen eines einfachen Schwingers. Ihre Erweiterung auf ein dämpfungsfreies Zwei- bzw. Dreimassensystem führt selbst unter Berücksichtigung der nicht mehr sinusförmigen Bewegung des Schwingers im Resonanzfall — soweit diese Bezeichnung hier gebraucht werden darf — noch zu unendlich großen Ausschlägen. Da die Ausdehnung auf ein Mehrmassensystem und die Mitberücksichtigung dämpfender Einflüsse zu sehr großen Schwierigkeiten führen, wird auf dem Wege des Versuches eine grundsätzliche Lösung der Aufgabe angestrebt.

II. Versuche an einem Flugmotor.

1. Versuchsanordnung.

Da Untersuchungen an einem einfachen Schwinger keine neuen Erkenntnisse bringen und durch die Ergebnisse, wie bereits erwähnt, die Verhältnisse eines Mehrmassensystems nicht geklärt werden können, wurden die Versuche an einem As 8 B-Flugmotor durchgeführt. Die Anordnung der Drehmassen dieses Motors konnte auf ein übersichtliches, aus nur fünf Hauptmassen bestehendes Schwingungssystem (Bild 2) zurückgeführt werden, das verschiedene ausgeprägte Resonanzstellen zeigte (Bild 3).

Am freien Kurbelwellenende wurde ein Schwinger angeflanscht, dessen Aufbau aus Bild 4 und 5 hervorgeht. Die Drehmasse des beweglichen Schwingerteiles konnte von 0,0062 cmkg s² bis auf 0,2 cmkg s² verändert werden. Zu diesen Massen ist jeweils noch die Masse des mitschwingenden Federteiles hinzuzufügen. Da durch die Verstellbarkeit der Druckbolzen beliebig starke Federblätter bis 6 mm Stärke verwendet und auch die Federwege geändert werden konnten, war eine weitgehende Abstimmungsmöglichkeit des Schwingers gegeben.

Besonderer Wert wurde auf ein reibungsfreies Arbeiten des Schwingers gelegt. Diese Forderung wurde durch die

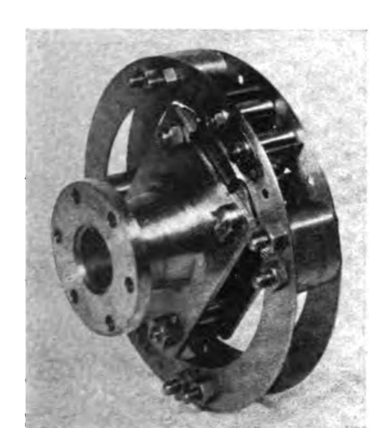
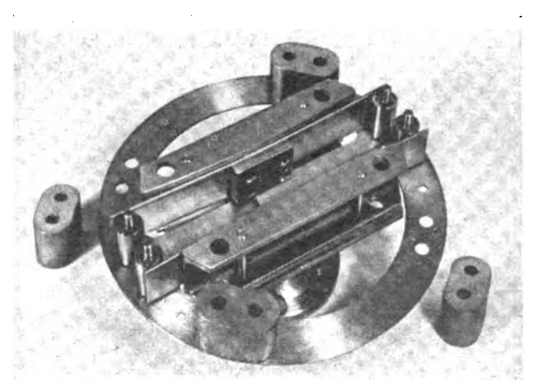


Bild 4. (links) Ansicht des Schwingers mit Befestigungsflansch.

Bild 5 (rechts). Ansicht der Federanordnung.



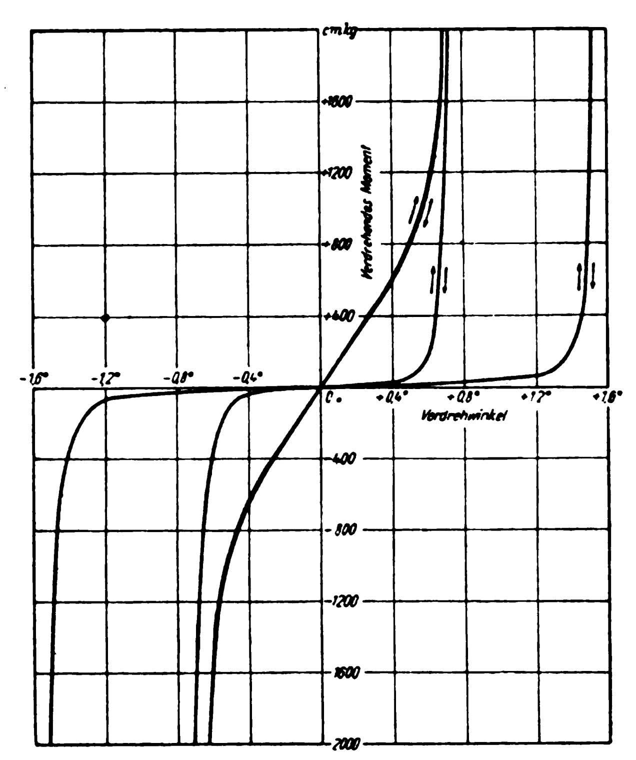


Bild 6. Kennlinien einiger Schwingerfedern.

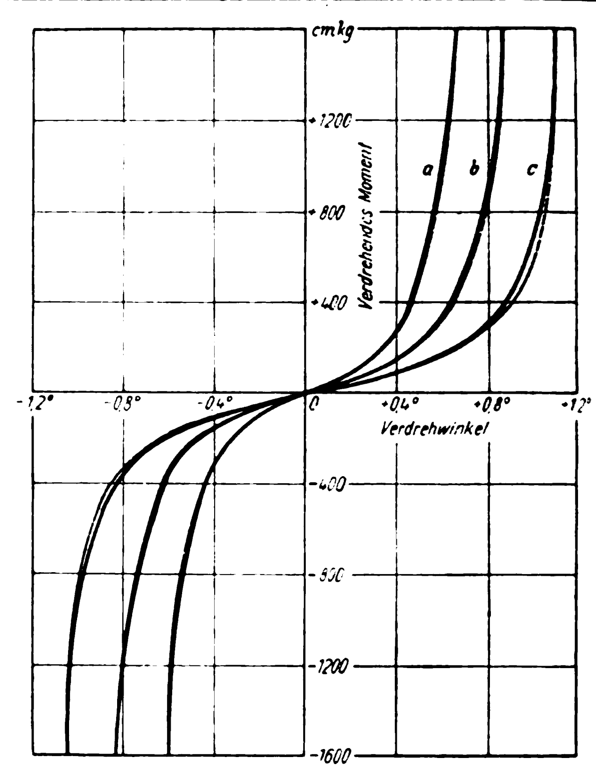


Bild 7. Kennlinien einer aus mehreren Blättern bestehenden Schwingerfeder.
a große Vorspannung, kleiner Federweg,
b mittl. Vorspannung, mittl. Federweg,
c kleine Vorspannung, große Federweg.

Wälzlagerung aller bewegten Teile weitgehend erreicht, zugleich konnte aber auch durch Verwendung von mehreren Federblättern an Stelle eines einzelnen die Reibung beträchtlich vergrößert werden.

Die durch Verdrehversuche bestimmten Kennlinien einiger Federanordnungen wurden in Bild 6 und 7 zusammengestellt.

2. Schwingungsmessungen.

Bekanntlich ist bei Ottomotoren die Größe der Drehkraftharmonischen dem mittleren Kolbendruck und dieser bei fester Bremsschraube dem Quadrat der Drehzahl verhältig. Da durch den Anbau des kräftig ausgeführten festen Schwingerteiles eine Erniedrigung der Eigenschwingungszahl und damit der Resonanzdrehzahlen zu erwarten war, lag schon dadurch eine Verringerung der Schwingungsausschläge im Bereich der Möglichkeit. Das aufgenommene Schwingungsbild ließ aber außer der um etwa 7% erniedrigten Eigenschwingungszahl keine wesentliche Abweichung gegen die Anordnung ohne Schwingermasse erkennen.

Die Untersuchungen über die Schwingerwirkungen am Motor wurden in der Weise durchgeführt, daß mit jeder Feder die Schwingungskennlinien für verschiedene Schwingermassen aufgenommen wurden.

Bild 8 zeigt die größten Schwingungsausschläge am Kurbelwellenende für die Anordnungen ohne Schwinger, mit kleiner und mit richtig abgestimmter Schwingermasse. Wegen der veränderlichen, von der Frequenz abhängigen Schwingungsform geben diese Aufzeichnungen allein noch kein klares Bild der Schwingungsverhältnisse. Liegt z. B. in oder in der Nähe der Meßstelle ein Knoten, so werden auch bei sehr starken Schwingungen keine bzw. nur sehr kleine Ausschläge gemessen werden können. Für einen einwandfreien Vergleich wurden daher nicht die Ausschläge, sondern die im Schwingungsknoten auftretenden Wechselmomente aufgetragen, Bild 9.

III. Auswertung der Messungen.

1. Einfluß der Schwingergröße, der Schwingerfederung und der Schwingerreibung.

Durch die Messungen wurden die im ersten Abschnitt ausgesprochenen Vermutungen bezüglich der schwingungsmindernden Wirkung des Schwingers grundsätzlich bestätigt. Diese Wirkung strebt bei den einzelnen Federn, also bei gleichen Dämpfungsverhältnissen, jeweils einem Bestwert zu, der, wie der linke Kurvenzug auf Bild 9 zeigt, von der Größe der Schwingermasse abhängig ist. Bei den Versuchen wurde er meist nicht nur erreicht, sondern sogar die darauf wieder einsetzende Verschlechterung festgestellt. Bei zu kleiner Masse treten noch klar ausgebildete Sinusschwingungen der Grundfrequenz auf; während bei richtiger Bemessung die bereits erwähnten Überlagerungen und bei zu großer Masse Schwingungen der ersten Oberschwingung festgestellt werden können.

In Bild 10 ist für sämtliche untersuchten Schwingergrößen die Abhängigkeit der Eigenschwingungszahlen des

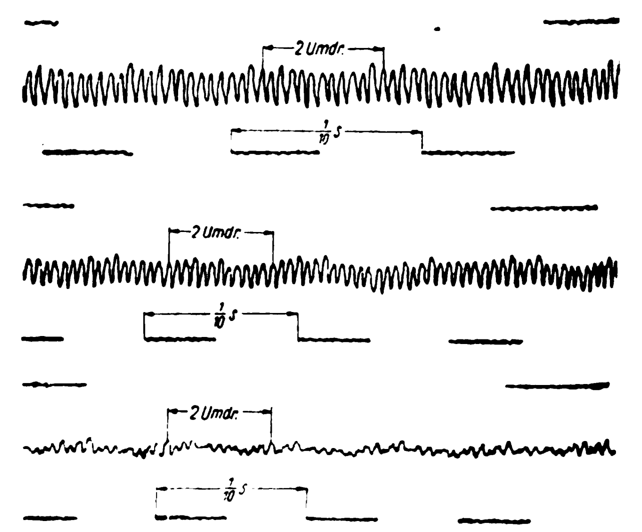


Bild 8. Größte Schwingungsausschläge für verschiedene Schwingeranordnungen.
a ohne Schwinger (rd. 1890 U/min),
b mit Schwinger, kleine Masse (rd. 1740 U/min),
c mit Schwinger, richtig abgestimmte Masse (rd. 1730 U/min).

Bild 10. Abhängigkeit der Eigenschwingungszahlen des As 8 B-Motors von der Masse und der Federung des Schwingers.

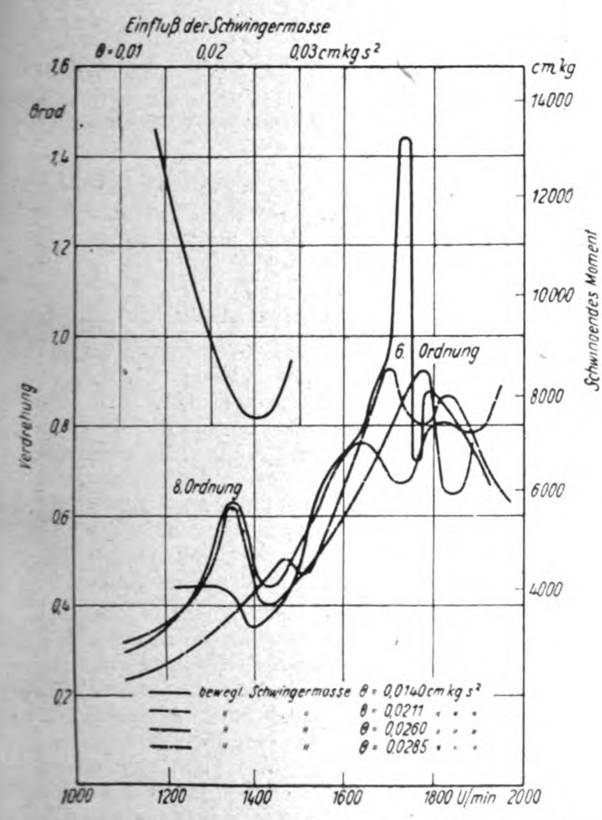


Bild 9. Schwingungskennlinie des As 8 B-Motors mit verschiedenen Schwingermassen.

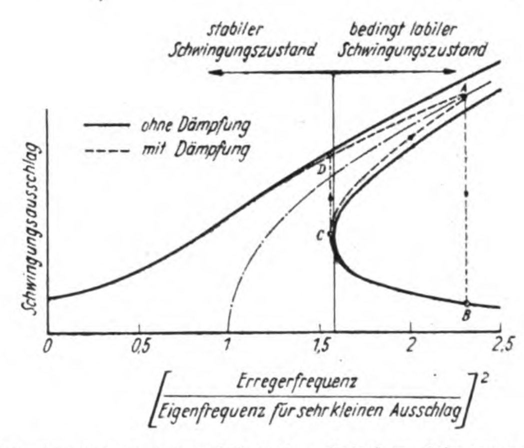


Bild 11. Erzwungene Ausschläge des einfachen Schwingers (nach Klotter).

As 8 B-Motors von der Schwingersteifigkeit in Kurvenform aufgezeichnet. Trägt man in diese Kurvenscharen die Werte der verwendeten Schwingermassen mit den Anfangssteifigkeiten der zugehörigen Schwingerfedern ein, so stimmen die so erhaltenen Eigenschwingungszahlen erwartungsgemäß nicht mit den aus den Schwingungsmessungen festgestellten Frequenzen der größten Schwingungsausschläge überein.

Nach der in bestimmten Grenzen zulässigen Annahme harmonischer Schwingerbewegungen werden sich diese Eigenschwingungen nicht über ein gewisses Maß aufschaukeln, wenn sich durch eine Vergrößerung des Schwingerausschlages mit der »reduzierten Steifigkeit« auch die Eigen-



frequenzen des ganzen Massensystems erhöhen. Mit steigender Erregerfrequenz treten zunächst bei vergrößertem Schwingerausschlag wieder Resonanzmöglichkeiten ein, bis der Schwingungszustand — ähnlich dem Vorgang beim einfachen Schwinger, Bild 11, — gleichsam aus einem »stabilen« in einen »labilen« übergeht. Dieser wird schon durch geringfügige Einwirkungen, die durch die Dämpfung im Schwinger und vor allem im Motor selbst gegeben sind, gestört. Das für den einfachen Schwinger mit gekrümmter Kennlinie kennzeichnende Kippen der Schwingung — von *A* nach *B* bei steigender, von *C* nach *D* bei fallender Erregerfrequenz — trat jedoch bei den Messungen am Kurbelwellenende nicht in Erscheinung.

Bewirkt eine Erhöhung der reduzierten Schwingersteifigkeit keine oder nur eine geringe Verschiebung der Eigenschwingungszahlen, d. h. ist die Ausschlagkurve im Vergleich zu Bild 11 steiler, z. B. bei zu kleiner Schwingermasse, so wird die Grenze des »stabilen« Schwingungszustandes nicht oder erst bei größerem Schwingungsausschlag überschritten. Wie auch aus den hierbei auftretenden ausgeprägten Sinusschwingungen zu schließen ist, verhält sich dieser Schwinger wie ein nur wenig oder nichtgedämpfter Schwinger mit gerader Kennlinie.

Bei weicher Federung scheint das Verhalten des Schwingers hiervon abzuweichen. Mit Schwingern, die eigentlich im Bereich der Bestwerte liegen sollten, treten noch Schwingungsbeanspruchungen auf, die nicht viel kleiner als diejenigen der Anordnung ohne Schwinger sind und sich diesen mit weiterer Verkleinerung der Masse noch mehr nähern. Auch läßt eine Aufzeichnung der günstigsten Schwingermasse in Abhängigkeit von der Anfangssteifigkeit der Federn, Bild 12, vermuten, daß dieser Wert mit zunehmender Federweichheit nicht dem Wert Null, sondern nur einem Kleinstwert zustrebt.

Diese Erscheinung ist darauf zurückzuführen, daß durch die erregenden Drehkräfte nicht nur Eigenschwingungen erregt, sondern Schwingungen jeder Frequenz im Takte der Erregung erzwungen werden . Bei fehlender bzw. vernachlässigbar kleiner Dämpfung ist der Ausschlag durch die Gleichgewichtsbedingung zwischen erregender Kraft und Massenkraft gegeben. Bei einer Mehrmassenanordnung sind die Ausschläge der einzelnen Massen nicht gleich, sondern um die Verdrehung der sie verbindenden Wellenstücke durch die erregende Kraft und durch die Trägheitskräfte voneinander verschieden. Der Schwinger wird sich daher unter der Einwirkung einer bestimmten Erregerkraft auch außerhalb des Resonanzbereichs verdrehen und zwar um so mehr, je kleiner seine Steifigkeit und seine Masse ist. Im vorliegenden Fall bedeutet dies aber, daß der Schwinger schon bei kleiner Erregerkraft Schwingungen ausführen kann, die über seinen linearen Federbereich hinausgehen.

Diese Folgerung findet in den Versuchen mit großer Schwingermasse und starker Feder eine gewisse Bestätigung. Obwohl hier die erste Eigenschwingungszahl so weit erniedrigt wurde, daß an Stelle der bei kleinem Schwinger auftretenden Resonanz mit der Drehkraftharmonischen sechster Ordnung Resonanz mit der etwa 2,4 mal so starken Harmonischen vierter Ordnung eintritt, wird doch die Schwingungsbeanspruchung noch beträchtlich herabgesetzt.

Obwohl durch die Messung der grundsätzliche Einfluß der Abstimmung zwischen Schwingermasse und -federung bereits festgestellt war, wurden die Vorspannungen einiger Federn verändert und ergänzende Versuche durchgeführt.

Die neuen Federkennlinien unterscheiden sich z. T. nur in der Größe des Federweges. Für die aus mehreren Blättern bestehenden Federn wird auch die Reibungsschleife erwartungsgemäß mit zunehmendem Federweg größer, Bild 7. Bei beiden Federanordnungen brachte die Vergrößerung des Federweges keine Verminderung, sondern eine Erhöhung der Schwingungsbeanspruchungen, Bild 13. Dies läßt den Schluß zu, daß auch hier erst der »labile« Schwingungszustand erreicht werden mußte und daß der Einfluß der Federreibung von untergeordneter Bedeutung ist. Der Schwingungsausschlag am Kurbelwellenende steht in einem

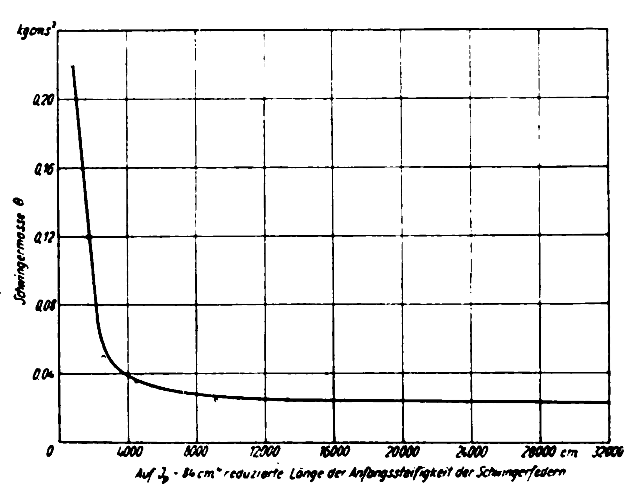


Bild 12. Abhängigkeit der günstigsten Schwingermasse von der Federsteifigkeit.

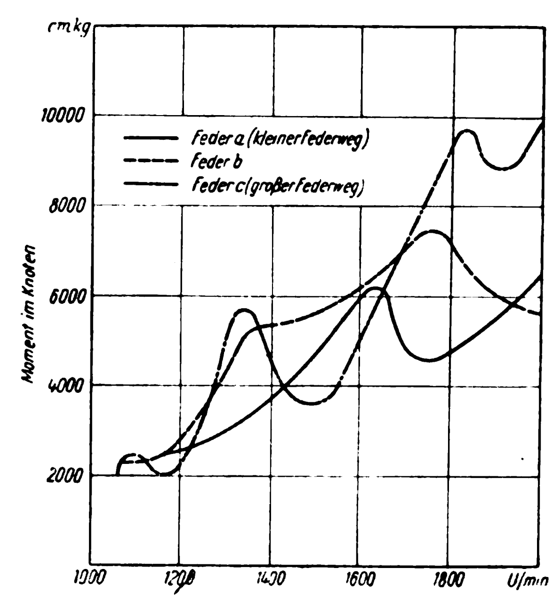


Bild 13. Schwingungskennlinie des As 8 B-Motors mit Schwingerfedern nach Bild 7 und mit günstigster Abstimmung.

durch die jeweilige Eigenschwingungsform gegebenen Verhältnis zur Verdrehung des Schwingers und hängt daher auch unmittelbar von der Größe des geradlinigen Teiles der Federkennlinie ab.

2. Schlußfolgerungen.

Die Versuche haben gezeigt, daß die Stärke der Drehschwingungen schon mit einer kleinen Schwingermasse ganz beträchtlich herabgesetzt werden kann. Da aber die Verminderung nur so weit nötig ist, daß die Schwingungsbeanspruchungen ein zulässiges Maß nicht überschreiten, eignet sich der Schwinger besonders da, wo geringes Gewicht, kleiner Raumbedarf und unbedingte Zuverlässigkeit gefordert werden müssen. Durch seine vielseitige Gestaltungsmöglichkeit, z. B. durch geeignete Ausbildung von Gegengewichten, können diese Forderungen vielfach restlos erfüllt werden.

Die Wirkungsweise des Schwingers mit nichtgerader Kennlinie macht ihn in mancher Hinsicht auch dem in letzter Zeit viel genannten, in seinem Grundaufbau ebenfalls sehr einfachen Fliehkraftresonanzpendel überlegen. [9] [10]. Während dieses jeweils nur auf eine Drehkraftharmonische und auf eine bestimmte Lage ihres Angriffspunktes abgestimmt werden kann, erfaßt ein einziger Schwinger alle im Bereich seiner Abstimmungsfrequenzen liegenden Resonanzmöglichkeiten. Seine Verwendung erscheint daher

bei Reihenmotoren mit ihren verschiedenen Erregungsstellen und mit den in ihrer Stärke oft nicht genau vorausbestimmbaren Nebenkritischen besonders vorteilhaft.

Fallen durch irgendwelche Umstände ein oder mehrere Zylinder eines Motors aus oder gehen ihre Leistungen zurück, so wird sich die Stärke ihrer harmonischen Drehkräfte mehr oder weniger verringern. Dadurch können, vor allem bei Fremdzündungsmotoren, die Summen der Erregungsarbeiten auch für normalerweise gegenseitig ziemlich ausgeglichene Harmonische so stark werden, daß die von ihnen erregten Schwingungen das zulässige Maß überschreiten. Auch diese im Flugbetrieb äußerst gefährlichen Möglichkeiten werden durch den Schwinger ausgeschaltet.

IV. Zusammenfassung.

Bei »schwingungsdämpfenden« elastischen Kupplungen mit gekrümmter Federkennlinie und bei ähnlich aufgebauten »Schwingungsdämpfern« wurde die schwingungsvermindernde Wirkung früher auf die Reibung einzelner Teile gegeneinander zurückgeführt. Da die Beobachtung gemacht wurde, daß diese »Dämpfer« im Betrieb keine der vernichteten Schwingungsenergie entsprechende Erwärmung erleiden, wurde der Schluß gezogen, daß sich ihre Wirkung in erster Linie auf der gekrümmten Federkennlinie aufbaut.

Die analytische Behandlung der gedämpften und ungedämpften erzwungenen Schwingungen eines einfachen Schwingers mit nichtgerader Kennlinie ist bekannt. Ihre Erweiterung auf ein Mehrmassensystem stößt jedoch auf äußerst große Schwierigkeiten. Es wurden daher an einem As 8 B-Motor grundsätzliche Versuche mit einem einfachen Schwinger durchgeführt, der eine vielseitige Veränderung der Federn und Massen ermöglichte.

Durch die Messungen wurde ein überragender Einfluß der Abstimmung zwischen Feder und Schwingermasse nachgewiesen. Die beste Wirkung wurde erzielt, wenn Feder und Masse so gewählt waren, daß mit der vom Ausschlag abhängigen Veränderung der »reduzierten Steifigkeit« auch eine möglichst große Veränderung der Eigenschwingungszahlen des ganzen Massensystems verbunden ist. Liegt aber die Abstimmung so, daß diese Eigenschwingungszahlen durch die Vergrößerung der reduzierten Steifigkeit nicht mehr oder nur mehr sehr wenig erhöht wird, so verhält sich der Schwinger mit gekrümmter Kennlinie wie ein Schwinger mit gerader Kennlinie und die Schwingungsausschläge werden nur durch die im Motor und Schwinger wirkende Dämpfung begrenzt.

V. Schrifttum.

[1] V. Rembold und J. Jehlicka, Das Verhalten federnder Kupplungen bei Drehschwingungen. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 5 (1934), S. 146.
[2] A. H. Ysselmuiden, Die Getriebeanlage auf den holl. Dieselschiffen M. S. »Manoeran« und »Madoera«. Werft Reed. Hafen (1934), S. 91.
[3] Schwingungsdämpfer für Wellen. DRP. 617204 Kl. 46a Gr. 2.
[4] G. Pielstick, Schwingungsdämpfende Hülsenfedern, Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffn. Bd. 4 (1935/36), H. 5, S. 123.
[5] Vgl. a. MTZ Bd. 1 (1939), S. 60.
[6] G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre techn. Bedeutung. Sammlung Vieweg H. 41/42, Braunschweig 1918.
[7] W. Buchhold, Erzwungene Schwingungen bei vorhandenem Spiel zwischen Masse und Federung. Diss. T. H. Darmstadt 1933.
[8] K. Klotter, Einführung in die technische Schwingungslehre. Berlin 1938, I. Bd., Einfache Schwinger.
[9] O. Kraemer, Z. VDI Bd. 82 (1938), S. 1297, Schwingungstilgung d. d. Taylor-Pendel.
[10] W. Schick, Wirkung und Abstimmung von Fliehkraftpendeln am Mehrzylindermotor. Ing. Arch. Bd. 10 (1939), S. 303.

Der Fliehkrafteinfluß auf die höheren Biege-Eigenfrequenzen von Luftschrauben bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Von J. Meyer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerkmechanik.

Aus der Lösung der Differentialgleichung des im Zentrifugalfeld schwingenden Seiles wird der Fliehkrafteinfluß auf die höheren Eigenfrequenzen von Luftschrauben bei verschiedenen Anstellwinkeln abgeschätzt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die steigende Geschwindigkeit der Flugzeuge bringt eine Vergrößerung des Anstellwinkels der Luftschraube mit sich. Er ist heute in manchen Fällen schon so groß, daß die den früheren Berechnungen des Fliehkrafteinflusses zugrunde liegende Annahme, die Blattschwingungen über die flache Kante erfolgten senkrecht zur Schraubenkreisebene [1, 2], nicht mehr zutrifft. Für die Eigenfrequenzen der umlaufenden Schraube war dort gesetzt worden

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + C\,\omega^2.$$

Hierin bedeuten ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraube, C den konstanten Fliehkraftbeiwert und $\lambda_0 = \lambda_{(\omega=0)}$ die Standfrequenz. Die C-Werte der ersten und zweiten Oberschwingung wurden vom Verfasser in der unter [2] im Schrifttum aufgeführten Arbeit für den Anstellwinkel Null und für verschiedene Massenverteilungen und Nabenlängen der Blätter ermittelt. Sie ergaben sich als Eigenwerte der Differentialgleichung des im Zentrifugalfeld schwingenden Seiles. Die Berechtigung dieser Methode ist in den unter [1, 2] aufgeführten Arbeiten dargelegt. Im folgenden soll untersucht werden, inwieweit sich diese C-Werte mit einer Vergrößerung des Anstellwinkels ändern.

II. Die Gleichung für die Schwingungen in der Schraubenkreisebene.

Bei der Schwingung in der Schraubenkreisebene steht eine kleinere Komponente der Seilkraft als bei der Schwingung senkrecht dazu als Rückstellkraft zur Verfügung, Bild 1, nämlich statt $S_{(x)}\,y'_{(x)}$ jetzt nur $S_{(x)}\,[y'_{(x)} - \psi]$. Die Differentialgleichung lautet somit

$$\mu_{(x)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{S_{(x)}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{y}{b+x}\right]\right\} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Aus diesem Ansatz geht sofort hervor, daß die Grundschwingung des Seiles mit einer Geraden als Schwingungsform bei der Nabenlänge Null nicht möglich ist. Dann gilt nämlich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x}$, womit die Rückstellkraft verschwindet. Die Seilkraft $S_{(x)}$ ist bei kleinen Ausschlägen wieder genau so groß wie im Fall der Schwingungen senkrecht zur Schraubenkreisebene, also

$$S_{(x)} = \int_x^l \mu_{(x)}\,\omega^2\,(b+x)\,dx.$$

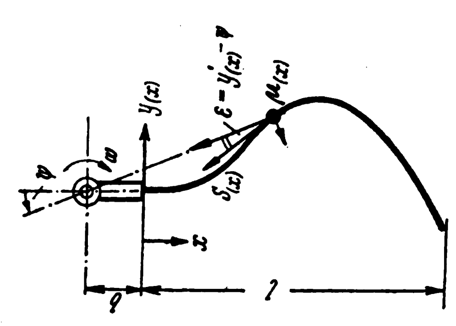


Bild 1. Zur Ableitung der Differentialgleichung für das in der Umlaufebene schwingende Seil.

Setzt man wie bei den früheren Rechnungen für die Massenverteilung $\mu_{(x)} = \mu_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)^n$, ferner $1 + \frac{b}{l} = p$ und $1 - \frac{x}{l} = z$, so geht die Gleichung (1) über in

$$\mu_{(z)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{S_{(z)}\left[-\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{y}{p-z}\right]\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Mit dem Bernoullischen Ansatz $y = y_{(z)} \sin \lambda_s t$ ergibt dies

$$S_{(z)}\,y''_{(z)} + y'_{(z)}\left\{S'_{(z)} + \frac{S_{(z)}}{p-z}\right\} + y_{(z)}\left\{\mu_{(z)}\,\lambda_s^2 + \frac{S'_{(z)}}{p-z} + \frac{S_{(z)}}{(p-z)^2}\right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

Mit der Einführung des Wertes der Seilkraft

$$S_{(z)} = \mu_0\,\omega^2 \int_0^z z^n\,(p-z)\,dz$$

nimmt die Gleichung (3) die Form an, wobei $C = \left(\frac{\lambda_s}{\omega}\right)^2$

$$y''_{(z)}\,(p-z)^2\left\{(n+2)\,p z - (n+1)\,z^2\right\} + y'_{(z)}\,(p-z)\left\{(n+2)\,(n+1)\,(p-z)^2 + [(n+2)\,p z + (n+1)\,z^2]\right\} + y_{(z)}\left\{(C+1)\,(n+2)\,(n+1)\,(p-z)^2 + [(n+2)\,p z - (n+1)\,z^2]\right\} = 0 \quad . \; . \; . \; (4)$$

III. Die Gleichung für beliebigen Anstellwinkel.

Die Gleichung für beliebigen Anstellwinkel α ergibt sich durch Kombination der Gleichung (2) mit der zur Schwingung senkrecht zur Schraubenkreisebene gehörenden Gleichung zu

$$\mu_{(z)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial y}{\partial z}\left\{S_{(z)}\left[-\frac{\partial y}{\partial z}\cos^2\alpha + \left(-\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{y}{p-z}\right)\sin^2\alpha\right]\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

Sie läßt sich vereinfachen zu

$$\mu_{(z)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial y}{\partial z}\left\{S_{(z)}\left[-\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{y}{p-z}\sin^2\alpha\right]\right\} \quad . \; . \; (6)$$

Damit ergibt sich ähnlich wie Gleichung (4)

$$y''_{(z)}\,(p-z)^2\left\{(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2\right\}+$$
$$y'_{(z)}\,(p-z)\left\{(n+2)(n+1)(p-z)^2 + \left[(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2\right]\sin^2\alpha\right\}+$$
$$y_{(z)}\left\{(C_\alpha+\sin^2\alpha)(n+2)(n+1)(p-z)^2 + \left[(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2\right]\sin^2\alpha\right\}=0 \quad (7)$$

Zum Vergleich sei hier die entsprechende Gleichung für die Schwingungen senkrecht zur Schraubenkreisebene angeführt:

$$y''_{(z)}\left\{(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2\right\}+y'_{(z)}\,(n+2)(n+1)(p-z)+$$
$$y_{(z)}\left\{(n+2)(n+1)\,C\right\}=0 \quad \ldots \quad (8)$$

C_α wäre jetzt für verschiedene α, n und p aus Gleichung (7) zu errechnen. Auch hier käme zweckmäßig eine Lösung mittels Potenzreihenansatzes in Frage wie bei der Lösung der Gleichung (8). Der erforderliche Rechenaufwand wäre jedoch ungleich größer, da ja α als neuer weiterer Parameter neben n und p auftritt und außerdem die Gleichung (7) viel mehr Glieder besitzt. Es liegt daher nahe, zu prüfen, inwieweit die aus der Gleichung (8) bereits bekannten C-Werte benutzt werden können.

Aus einem Vergleich der beiden Gleichungen (7) und (8) geht hervor, daß in der Gleichung (7) bei $y'_{(z)}$ und $y_{(z)}$ ein neues Glied auftritt vom Betrage

$$\left[(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2\right]\sin^2\alpha\,.$$

Die nähere Betrachtung zeigt, daß dieses Glied klein gegenüber dem Glied

$$\left[(p-z)^2\cdot(n+2)\cdot(n+1)\right]$$

ist. Da der Anstellwinkel höchstens etwa 45⁰ betragen dürfte, so wird er bei $y'_{(z)}$ stehende Klammerausdruck wie folgt

$$\left[p^2(n+2)\cdot(n+1)\right]-2\,p\,z\,(n+2)\cdot\left[(n+1)-\frac{1}{4}\right]$$
$$+z^2(n+1)\cdot\left[(n+2)-\frac{1}{2}\right].$$

Gegenüber Gleichung (8), die zu diesem Vergleich zweckmäßig mit $(p-z)^2$ multipliziert wird, sind die Koeffizienten jetzt, wenn gesetzt wird $n=1{,}3$ (Durchschnittswert), 7,6 gegenüber 7,6 bei p^2, 6,8 gegenüber 7,6 bei $2\,p\,z$ und 6,5 gegenüber 7,6 bei z^2. Es ändern sich also nur zwei von drei Koeffizienten und diese noch geringfügig. Diese Abweichungen der Gleichung (7) gegenüber der Gleichung (8) werden mit wachsendem n geringer. Mit Vernachlässigung des unbedeutenden Gliedes $[(n+2)\,p\,z-(n+1)\,z^2]\sin^2\alpha$ bei $y'_{(z)}$ und $y_{(z)}$ in Gleichung (7) wird diese identisch mit Gleichung (8), nur daß statt C jetzt $(C_\alpha+\sin^2\alpha)$ steht. Der zu jedem Anstellwinkel α gehörende Fliehkraftbeiwert C_α ergibt sich somit aus der Beziehung

$$C_\alpha = C-\sin^2\alpha \quad \ldots \quad (9)$$

Diese Beziehung wurde für die Grundeigenfrequenzen eines umlaufenden Stabes bzw. einer Turbinenschaufel von Stodola [3] und Störensen [4] bereits auf anderem Wege gefunden. Wie gut die Näherung (9) ist, ergibt sich auch daraus, daß sie für den schon weiter oben genannten Fall der Grundschwingung des Seiles mit verschwindender Nabenlänge den genauen Wert für $C_{(90^\circ)}$, nämlich Null, liefert. Doch sind die Fliehkraftbeiwerte C selbst nur für die höheren Eigenfrequenzen zu brauchen, da die Eigenschwingungsformen des Seiles nur in diesen Fällen genügend ähnlich denen des Luftschraubenflügels sind.

IV. Zusammenfassung.

Die Fliehkraftbeiwerte für die erste und zweite Oberschwingung der umlaufenden Luftschraube wurden für beliebige Anstellwinkel ermittelt. Dazu wurde die entsprechende Differentialgleichung des im Zentrifugalfeld schwingenden Seiles aufgestellt, weil in früheren Arbeiten [1, 2] die Fliehkraftbeiwerte für die Schwingungen senkrecht zur Rotationsebene bereits in gleicher Weise errechnet worden waren. Aus einem Vergleich der beiden Differentialgleichungen ergab sich eine Beziehung, aus der die Fliehkraftbeiwerte mittels der bereits bekannten Werte für jeden Anstellwinkel errechnet werden können.

V. Schrifttum.

[1] Liebers, Berechnung der drei tiefsten Biegefrequenzen der umlaufenden Schraube. Luftf.-Forsch. Bd. 12 (1935), S. 155.

[2] Meyer, Zur Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses auf die Biegefrequenzen von Luftschrauben. Luftf.-Forsch. Bd. 16 (1939), S. 429.

[3] Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. Auflage, S. 375.

[4] Sörensen, Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Dampfturbinenschaufeln. Werft-Reederei-Hafen (1928), Nr. 4.

Über aushärtbare Aluminium-Zink-Magnesium-Knetlegierungen.

Von W. Bungardt und G. Schaitberger.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Es wird über Festigkeitseigenschaften, Korrosionsbeständigkeit und Spannungskorrosionsverhalten einiger aushärtbarer Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen mit Zusätzen an Vanadin und Kupfer nach Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung von 450° und Raumtemperaturauslagerung berichtet.

Gliederung.

I. Einleitung.

Durch ältere und neuere Untersuchungen von K. L. Meißner[1]), W. Sander[2]), R. Schmitt[3]) und W. Köster und K. Kam[4]) ist bekannt, daß aluminiumreiche Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen nach geeigneter Wärmebehandlung sowohl nach Kalt- als auch Warmauslagerung beachtliche Aushärtungseffekte aufweisen[5]). Eine praktische Verwertung dieser Erkenntnisse durch technische Legierungen höherer Festigkeit z. B. mit 7% Zink, 1,6% Magnesium, 1,3% Mangan, 0,3% Eisen, 0,3% Silizium, Rest Aluminium ist jedoch bisher an der großen Spannungskorrosionsempfindlichkeit dieser Legierungen gescheitert, die nach neueren Erfahrungen vornehmlich durch eine ungeeignete Wärmebehandlung verursacht wird. Selbst in Legierungen mit höheren Zink- und entsprechenden Magnesiumzusätzen kann das Spannungskorrosionsverhalten dieser Legierungsgattung entscheidend verbessert werden, wenn im Anschluß an die Lösungsglühung nicht — wie bei Duralumin üblich — in Wasser abgeschreckt, sondern an Luft abgekühlt und die Temperatur für das Lösungsglühen nicht zu hoch gewählt wird, z. B. 450°. Die günstige Wirkung der Luftabkühlung wird hierbei in ähnlicher Weise zu deuten sein wie auch bei den Aluminium-Magnesium-Legierungen nach DIN 1713, Gattung 5.

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen erschien eine Nachprüfung der Frage wünschenswert, ob auch nach Wasserabschreckung spannungskorrosionsbeständige, kaltaushärtbare Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen guter allgemeiner Korrosionsbeständigkeit und hoher Festigkeit erhalten werden können und welche legierungsmäßigen Voraussetzungen hierfür erfüllt sein müssen. Diesen Fragen kommt insofern einige praktische Bedeutung zu, als die Erzielung gleichmäßiger Gütewerte in der laufenden Fabrikation durch Wasserabschreckung nach dem Lösungsglühen eher gewährleistet erscheint als nach Luftabkühlung.

Durch eine größere Anzahl von Vorversuchen mit Legierungen verschiedensten Zink- und Magnesiumgehaltes wurde zunächst erkannt, daß es bei Beibehaltung der Wasserabschreckung und Kaltauslagerung unzweckmäßig ist, den Zinkgehalt über 5% hinaus zu steigern. Es wurde daher für die hier eingehender untersuchten Legierungen der Zinkgehalt auf 4,5% festgesetzt. Festigkeitsmäßig mußten von den kaltausgelagerten, nicht nachgerichteten Legierungen folgende untere Grenzwerte verlangt werden: Streckgrenze: 25 kg/mm², Zugfestigkeit: 40 kg/mm² bei einer Dehnung von 15%, wenn die Legierung praktisch von Interesse sein soll. Da schon aus den älteren Erfahrungen mit dieser Legierungsgattung zu entnehmen war, daß diese Festigkeitsmindestforderungen — vor allem bezüglich der Streckgrenze — durch kaltausgelagerte, spannungskorrosionsunempfindliche Legierungen, deren Zusammensetzung sich auf dem quasibinären Schnitt Al-$MgZn_2$ bewegt und deren Zinkgehalt 5% nicht überschreitet, nicht zu erreichen waren, wurde das bisher bevorzugte Legierungsgebiet verlassen und eine stärkere Verfestigung der Legierung durch höhere Magnesiumzusätze zu erreichen versucht. Nach einigen orientierenden Vorversuchen empfahl sich ein Magnesiumgehalt von 3,5%. Da beabsichtigt war, dieselbe Aluminium-Zink-Magnesium-Legierung nicht nur zur Herstellung von Blechen und Bändern, sondern auch zu Schmiede- und Preßteilen zu verwenden, wurde ihr Mangangehalt auf 0,4% bis höchstens 0,5% festgesetzt, um die Ausbildung von Manganaluminidzeilen und ihr schädlicher Einfluß auf die Querfestigkeit auszuschalten. Die Gehalte an Eisen und Silizium sollten den Gehalten von Hüttenaluminium mit 99,5% Aluminium entsprechen.

Darüber hinaus wurde im einzelnen die Wirkung kleiner Legierungszusätze an Vanadium und Kupfer einer eingehenderen Prüfung unterzogen. Es zeigte sich hierbei, daß innerhalb gewisser Legierungsgrenzen derartige Zusätze nicht nur das Spannungskorrosionsverhalten günstig beeinflussen, sondern auch zu einer Verbesserung der Festigkeitswerte beitragen, ohne daß das allgemeine Korrosionsverhalten der Legierungen stärker geschädigt zu werden braucht.

Die vorliegenden Untersuchungsergebnisse beziehen sich also auf eine Aluminium-Zink-Magnesium-Legierung folgender Zusammensetzung: 4,5% Zink, 3,5% Magnesium, 0,3% Mangan, 0,15% Silizium, 0,3% Eisen, Rest Aluminium mit Zusätzen an Vanadium zwischen 0 und 0,3% und Kupfer zwischen 0 und 0,75%. Über einige praktisch wichtige Eigenschaften dieser Legierungsgattung wird im folgenden berichtet.

II. Versuchslegierungen.

Die Zusammensetzung der Versuchslegierungen enthält Zahlentafel 1. Die Werkstoffe Nr. 1 bis 3 besitzen dem-

[1]) Z. Metallkde. Bd. 17 (1925), S. 77/84.
[2]) Z. anorg. u. allgem. Chem. Bd. 154 (1926), S. 144/151.
[3]) Z. Metallkde. Bd. 27 (1935), S. 121/25.
[4]) Z. Metallkde. Bd. 30 (1938), S. 320/22.
[5]) Untersuchungen über das Zustandsschaubild wurden ausgeführt von: W. Sander und K. L. Meißner, Z. Metallkde. Bd. 15 (1923), S. 180/83 und Bd. 16 (1924), S. 12/17; W. Köster und W. Wolf, Z. Metallkde. Bd. 28 (1936), S. 309/12 und S. 363/67; W. L. Fink und L. A. Willey, Trans. Am. Inst. Min. Met. Engg. Inst. Met. Div. Bd. 124 (1937), S. 78; s. a. Metals Technology Bd. 3 (1936), Techn. Publ. Nr. 761. — Trotz dieser zahlreichen Untersuchungen besteht indessen über den Verlauf der Sättigungsfläche des aluminiumreichen Mischkristalls und die an der Aushärtung beteiligten Phasen keine Klarheit.



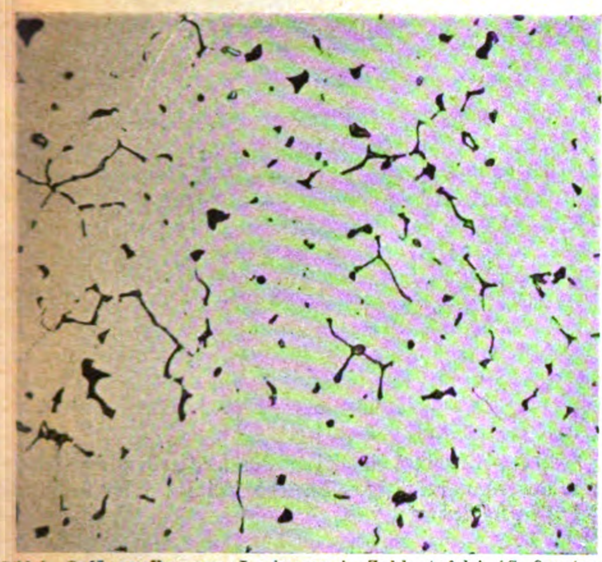


Bild 1. Gefügeaufbau von Legierung 1, Zahlentafel 1 (Gußzustand). Vergr. 500fach.

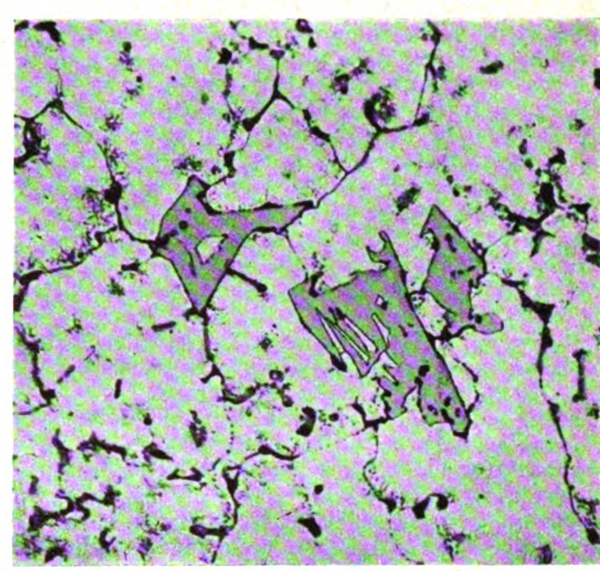


Bild 2. Gefügeaufbau von Legierung 3, Zahlentafel 1 (Gußzustand). Vergr. 500fach.

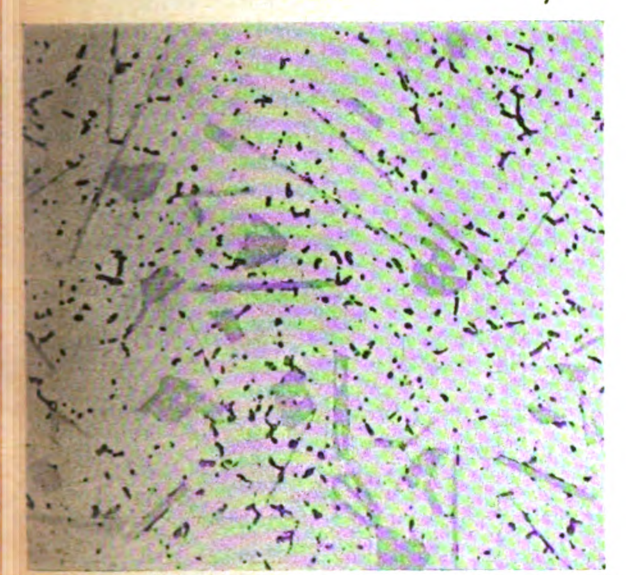


Bild 3. Gefügeaufbau einer Al-Zn-Mg-Legierung mit 1,42% Vanadin (Gußzustand). Vergr. 100fach.

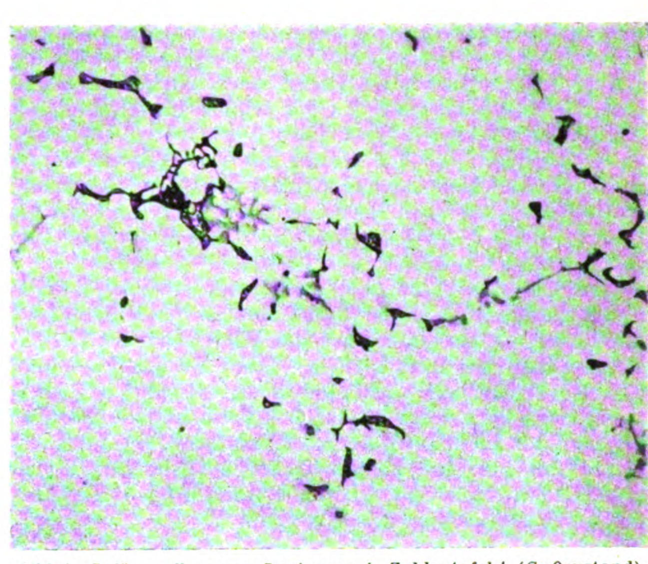


Bild 4. Gefügeaufbau von Legierung 4, Zahlentafel 1 (Gußzustand). Vergr. 500fach.

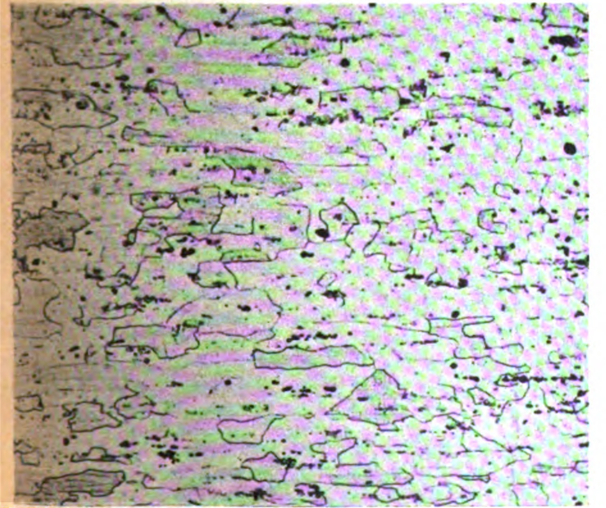


Bild 5. Gefügeaufbau von Legierung 2. Zahlentafel 1 (Walzzustand). Vergr. 200fach.

nach bei sonst etwa gleicher Zusammensetzung steigende Vanadingehalte bis zu 0,25%; die folgende Gruppe, welche die Legierungen Nr. 2 und 4 bis 7 umfaßt, ist gekennzeichnet durch Vanadinzusätze zwischen 0,10 und 0,14% und steigende Kupfergehalte zwischen 0,01 und 0,76%. Legierung Nr. 8 vereint endlich vergleichsweise einen höheren Vanadingehalt von 0,25% mit einem Kupferzusatz von 0,32%.

Sämtliche Versuchswerkstoffe wurden im kernlosen Induktionsofen aus Reinaluminium, Zink, Magnesium und

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe.

Legierung Nr.	Chemische Zusammensetzung in %							
	Zn	Mg	Mn	Cu	Si	Fe	V	Al
1	4,25	3,49	0,33	0,02	0,14	0,28	**0,05**	Rest
2	4,38	3,47	0,32	0,01	0,16	0,30	**0,10**	»
3	4,40	3,43	0,30	0,01	0,21	0,32	**0,25**	»
4	4,54	3,54	0,29	**0,11**	0,16	0,32	**0,11**	»
5	4,57	3,65	0,29	**0,32**	0,17	0,31	**0,14**	»
6	4,35	3,50	0,34	**0,64**	0,15	0,28	**0,10**	»
7	4,58	3,65	0,27	**0,76**	0,17	0,32	**0,11**	»
8	4,25	3,45	0,35	**0,32**	0,14	0,32	**0,25**	»

geeigneten binären Vorlegierungen bei einem Schmelzgewicht von 1 kg erschmolzen. Die erhaltenen Gußblöckchen ließen sich ohne Schwierigkeiten zwischen 450 und 400° zu Platten von 4 bis 5 mm Dicke verschmieden, die anschließend mit den erforderlichen Zwischenglühungen bis auf 1 mm kalt abgewalzt wurden. Die fertigen Blechstreifen wurden dann bei 450° eine halbe Stunde geglüht, in Wasser abgeschreckt bzw. an Luft abgekühlt und drei Wochen bei Raumtemperatur ausgelagert.

Da in den Werkstoffen erstmalig ein Vanadinzusatz zur praktischen Verwendung gelangt, ist es notwendig, auf den Gefügeaufbau dieser Legierungen einzugehen. Der geringfügige Vanadinzusatz zu Legierung Nr. 1 von 0,05% führt, wie aus Bild 1 (Gußzustand) hervorgeht, nicht zur Ausbildung einer neuen Gefügekomponente, sondern ist im Mischkristall gelöst. Vanadin bewirkt schon in geringer Menge (> 0,05%) eine außerordentliche Kornverfeinerung im Gußblock, auch bei großen Blockabmessungen. Wegen der nahen Verwandtschaft des Vanadins zu den Elementen Titan, Chrom, Mangan und Eisen, die abgesehen vom Mangan nur geringfügig in festem Aluminium löslich sind, kann angenommen werden, daß auch Vanadin sich ähnlich verhält. Infolgedessen führt bereits ein Vanadinzusatz von nur 0,25% zur Ausbildung primärer Vanadinaluminide, deren Ausbildungsform aus Bild 2 zu erkennen ist. Eine weitere Steigerung des Vanadingehaltes, z. B. auf 1,42%, führt entsprechend Bild 3 zu einer starken Zunahme dieses nadeligen bzw. plattenförmigen Aluminids, die für eine praktische Verwendung der Legierung unzweckmäßig ist. Durch die geringen Kupferzusätze entstehen erwartungsgemäß keine neuen Gefügebestandteile, da das Kupfer im Mischkristall vollständig gelöst ist. Den Gefügeaufbau der Legierung im Gußzustand, die auf Grund der vorliegenden Untersuchungen im wasserabgeschreckten, kaltausgelagerten Walzzustand die günstigsten Eigenschaften besitzt, zeigt endlich Bild 4. Diese Legierung (Nr. 4 in Zahlentafel 1) enthält neben 0,11% Vanadin 0,11% Kupfer.

Die Gefügebeschaffenheit der Versuchsbleche im kaltausgelagerten Zustand geht aus Bild 5 für Legierung 2 (Zahlentafel 1) hervor. Neben den auf Grund der Zusammensetzung vorhandenen Eisen- und Manganaluminiden und der Verbindung Mg_2Si sind in der Mischkristallgrundmasse auch in feiner Verteilung Vanadinaluminide vorerst unbekannter Zusammensetzung festzustellen, die im ungeätzten Zustand eine blaugraue Farbe besitzen[6]). Einen grundsätzlich ähnlichen Aufbau, wie ihn Bild 5 zeigt, besaßen sämtliche Versuchslegierungen.

III. Versuchsergebnisse.

Um einen ersten Anhalt über die Verwendbarkeit dieser neuartigen Legierungen zu erhalten, wurden die Festigkeitseigenschaften, das allgemeine Korrosionsverhalten und die Neigung zu Spannungskorrosionsbrüchen im wasserabgeschreckten und luftgekühlten, kaltausgelagerten Zustand bestimmt.

[6]) Eine ausführlichere Untersuchung über die Gleichgewichtsverhältnisse im System Aluminium-Vanadin wird z. Z. im Institut für Werkstofforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, Berlin-Adlershof durchgeführt und über die hierbei gewonnenen Erkenntnisse demnächst berichtet.

1. Festigkeitseigenschaften.

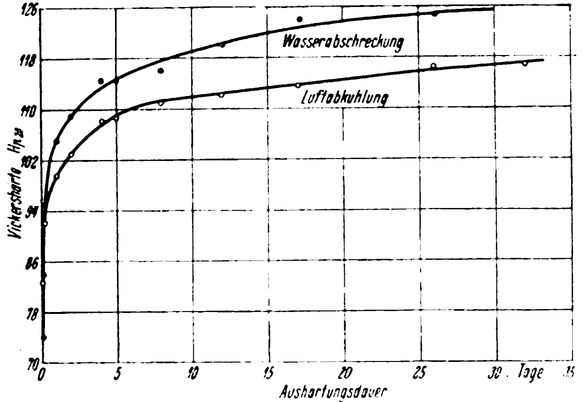
Aus der in Bild 6 und 7 gezeigten Aushärtungscharakteristik bei Raumtemperatur für die Legierungen Nr. 2 und 6 nach Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung von 450° geht hervor, daß nach der hier eingehaltenen Lagerdauer von drei Wochen die Aushärtung nahezu vollständig erfolgt ist. Eine weitere, geringfügige Härtezunahme ist jedoch selbst nach dreiwöchiger Lagerung bei Raumtemperatur noch festzustellen. Bemerkenswert ist im übrigen der Einfluß der unterschiedlichen Abkühlungsbedingungen; bei allen Legierungen ist also mit dem Übergang von der Wasserabschreckung zur Luftabkühlung eine starke Verminderung der Aushärtungseffekte verbunden.

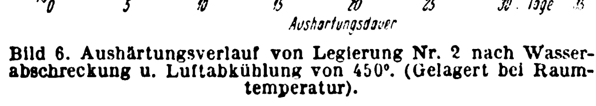
Aus der Zusammenstellung der statischen Festigkeitswerte der vanadinhaltigen Legierungen Nr. 1 bis 3 (Zahlentafel 1) in Zahlentafel 2 ist zu ersehen, daß insbesondere die Legierung 2 und 3 die angestrebten Mindestfestigkeitswerte beachtlich überschreiten. Auf Grund der geringeren Festigkeitswerte von Legierung 1 — insbesondere bezüglich der Streckgrenze — kann übrigens angenommen werden, daß mit der Steigerung des Vanadinzusatzes von 0,05 auf 0,10% ein Festigkeitsgewinn verbunden ist, dessen Höhe zwar geringer ist als aus Zahlentafel 2 hervorgeht, weil gleichzeitig der Zinkgehalt von Legierung 1 geringer als der der Vergleichslegierungen 2 und 3 ist.

Die bemerkenswert günstige Wirkung geringer Kupferzusätze vor allem nach Wasserabschreckung und Kaltauslagerung auf die Festigkeitseigenschaften zeigt Bild 8. Man ersieht hieraus, daß bei Zugabe von 0,5% Kupfer bereits Zugfestigkeits- und Streckgrenzenwerte im wasserabgeschreckten, kaltausgelagerten, nicht nachgerichteten Zustand

Zahlentafel 2. Einfluß steigender Vanadinzusätze auf die statischen Festigkeitseigenschaften (Wärmebehandlung: 450°/30 min/Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung/kalt ausgelagert).

Legierung Nr.	Abkühlung in	Statische Festigkeitseigenschaften		
		Streckgrenze kg/mm²	Zugfestigkeit kg/mm²	Dehnung δ_{10} %
1 (0,05% V)	Wasser	24,8	43,5	20,4
	Luft	24,4	42,2	15,7
2 (0,10% V)	Wasser	29,7	46,5	19,3
	Luft	26,3	43,0	16,5
3 (0,25% V)	Wasser	29,7	46,0	17,2
	Luft	26,3	42,0	15,8




Bild 6. Aushärtungsverlauf von Legierung Nr. 2 nach Wasserabschreckung u. Luftabkühlung von 450°. (Gelagert bei Raumtemperatur).

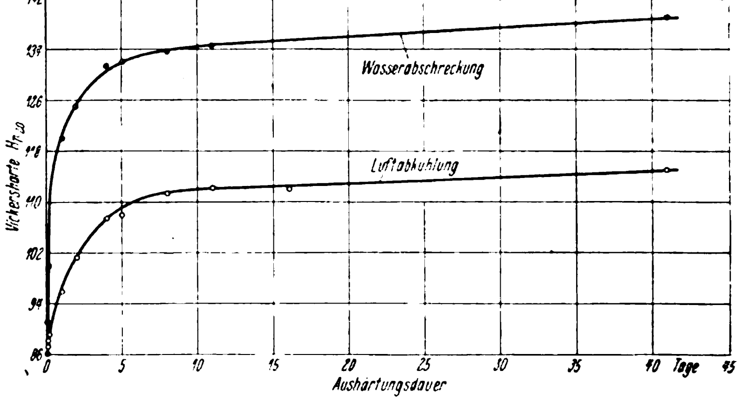


Bild 7. Aushärtungsverlauf von Legierung Nr. 6 nach Wasserabschreckung und Luftabkühlung von 450°. (Gelagert bei Raumtemperatur).

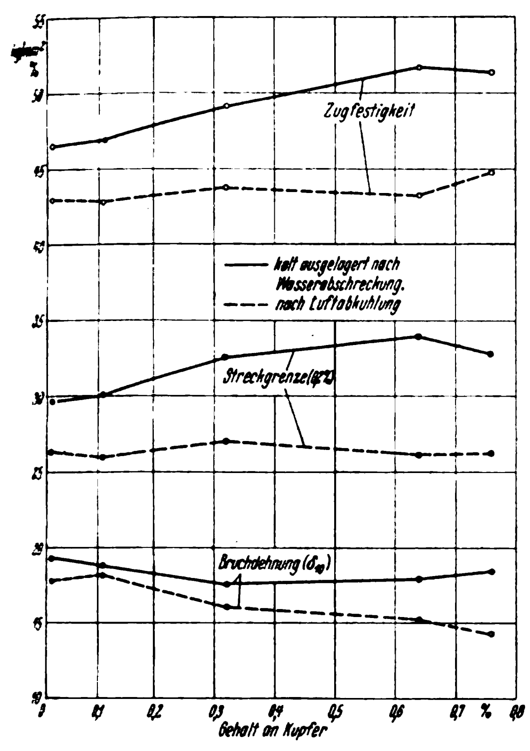


Bild 8. Einfluß eines Kupferzusatzes auf die statischen Festigkeitseigenschaften einer Al-Zn-Mg-Legierung.
Grundzusammensetzung: 4,5% Zn, 3,5% Mg, 0,3% Mn; 0,2% Si, 0,25% Fe, 0,1% V, Rest Al.
Wärmebehandlung: 450°/30 min/Wasserabschreckung (bzw. Luftabkühlung)/3 Wochen kalt ausgelagert.

von 50 bzw. 33 kg/mm² bei etwa 18% Dehnung erreicht werden können. Während nach Wasserabschreckung eine deutliche Zunahme von Streckgrenze und Zugfestigkeit mit steigendem Kupfergehalt beobachtet wird, und die Dehnungswerte sich nicht wesentlich ändern, ist nach Luftabkühlung und Kaltauslagerung mit steigenden Kupferzusätzen keine wesentliche Veränderung der Festigkeitswerte festzustellen. Die Dehnungswerte nehmen dagegen nach dieser Wärmebehandlung mit steigendem Kupferzusatz von 18 auf 14% ab. — Bemerkenswert ist außerdem, daß eine geringe Steigerung der Lagertemperatur, z. B. bis 50°, eine starke Verbesserung der Festigkeitseigenschaften bedingt.

2. Spannungskorrosionsverhalten.

Das Verhalten der Legierungen gegen Spannungskorrosion wurde in der bekannten Weise mit Hilfe der Schlaufenprobe bestimmt. Aus den kaltausgelagerten Blechstreifen wurden nach 10prozentigem Kaltwalzen je sechs Proben in Walzrichtung entnommen, zu Schlaufen gebogen und in das DVL-Wechseltauchgerät (3proz. Kochsalzlösung) eingehängt. Von einer zusätzlichen Erwärmung auf Temperaturen bis zu etwa 100° wurde abgesehen, da hiermit keine Verschärfung der Prüfbedingungen verbunden ist. Die mittleren Standzeiten der Proben bis zum Auftreten des ersten sichtbaren Anrisses sind in Zahlentafel 3 zusammengefaßt. Nach einer Dauer von 60 Tagen wurde der Versuch abgebrochen, da die in dieser Zeitspanne erhaltenen Ergebnisse zur praktischen Beurteilung ausreichen.

Die geringe Spannungskorrosionsbeständigkeit von Legierung 1 im wasserabgeschreckten Zustand wird danach durch die Zugabe von 0,1% Vanadin ganz erheblich verbessert; eine weitere Steigerung des Vanadingehaltes bringt dagegen keine zusätzliche Verbesserung des Spannungskorrosionsverhaltens. Im luftgekühlten Zustand konnte in der Versuchszeit ein Einfluß des Vanadinzusatzes nicht nachgewiesen werden. Sämtliche Schlaufen waren nach 60tägiger Beanspruchung rißfrei; ebenso war kein merklicher Abbau der elastischen Spannungen feststellbar, trotzdem vor allem die kupferhaltigen Legierungen mit mehr als 0,3% Cu

Zahlentafel 3. Spannungskorrosionsverhalten der Versuchslegierungen *).

Legierung Nr.	Schlaufenlebensdauer	
	Wasserabschreckung	Luftabkühlung
1	10 Stunden	> 60 Tage
2	53 Tage	> 60 »
3	56 »	> 60 »
4	> 60 »	> 60 »
5	> 60 »	> 60 »
6	> 60 »	> 60 »
7	> 60 »	> 60 »
8	> 60 »	> 60 »

*) Bestimmt mit Hilfe der Schlaufenprobe in folgendem Prüfzustand: 450°/30 min/Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung/kaltausgelagert + 10% kaltgewalzt.
Die angegebenen Werte sind Mittelwerte aus je sechs Einzelbeobachtungen.

einen stärkeren lochfraßähnlichen Korrosionsangriff erkennen ließen. Wie aus Zahlentafel 3 hervorgeht, wirken sich auch weitere kleine Kupferzusätze günstig aus; es genügt bereits ein Zusatz von nur 0,1% Kupfer in Verbindung mit 0,1% Vanadin um die Legierung im wasserabgeschreckten Zustand spannungskorrosionsbeständig zu machen. Nach weiteren Versuchen mit vanadinfreien Al-Zn-Mg-Legierungen derselben Grundzusammensetzung ergab sich ferner, daß geringe Kupferzusätze bis zu 0,2% allein eine durchschlagende Verbesserung des Spannungskorrosionsverhaltens dieser Legierungsgattung im wasserabgeschreckten, bei Raumtemperatur ausgelagerten Zustand nicht zu bewirken vermögen. Man wird daher in der gleichzeitigen Anwesenheit von geringen Vanadin- und Kupfergehalten in Al-Zn-Mg-Legierungen — etwa in den Mengen wie sie Legierung 4 (Zahlentafel 1) enthält — ein wirksames Mittel ersehen können, auch den wasserabgeschreckten Zustand spannungskorrosionsbeständig zu machen.

Aus den bisher beschriebenen Versuchsergebnissen geht somit eindeutig hervor, daß auch durch Wasserabschrekkung und Kaltauslagerung vergütbare Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen guter Festigkeit und hoher Spannungskorrosionsbeständigkeit erhalten werden können. Die mit der Wasserabschreckung verbundene Gefahr einer größeren Neigung zu Spannungskorrosionsbrüchen läßt sich bei dieser Legierungsgattung durch die Zugabe von geringen Vanadin- bzw. Vanadin- und Kupferzusätzen beheben.

3. Allgemeines Korrosionsverhalten.

Aus sämtlichen unter den früher angegebenen Bedingungen vergüteten Blechen wurden Proportionalstäbe hergestellt und im Schnellprüfgerät dem Korrosionsangriff ausgesetzt. Die erhaltenen Kurven des zeitlichen Festigkeits- und Dehnungsabfalls sind in Bild 9 bis 12 wiedergegeben. Jeder Punkt dieser Kurven ist das Mittel aus zwei Einzelmessungen. Die Auswertung der Korrosionsversuche mit diesen Versuchsblechen erfolgte frühestens 4 Wochen nach dem Vergüten.

Aus dem Korrosionsverhalten der Legierungen 1 bis 3 in Bild 9 und 10 geht hervor, daß sowohl im wasserabgeschreckten wie auch luftabgekühlten Zustand mit steigendem Vanadinzusatz eine Verschlechterung der Korrosionsbeständigkeit verbunden ist, der jedoch erst oberhalb 0,1% stärker in Erscheinung tritt. Während Legierung 1 und 2 sich nach Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung praktisch in gleicher Weise verhalten und — verglichen mit einer kaltausgehärteten und nichtplattierten Al-Cu-Mg-Legierung (s. Bild 9) — in beiden Zuständen eine sehr gute Korrosionsbeständigkeit besitzen, erfolgt bei höheren Vanadinzusätzen (Legierung 3) eine stärkere Verschlechterung, die bei den in Wasser abgeschreckten Proben etwas größer als bei den luftgekühlten Proben ist.

Die Wirkung zusätzlicher Kupfergehalte auf das Korrosionsverhalten derartiger Legierungen zeigen Bild 11 und 12 für beide Behandlungszustände. Die hierin niedergelegten Versuchsergebnisse lassen erkennen, daß Kupfer-

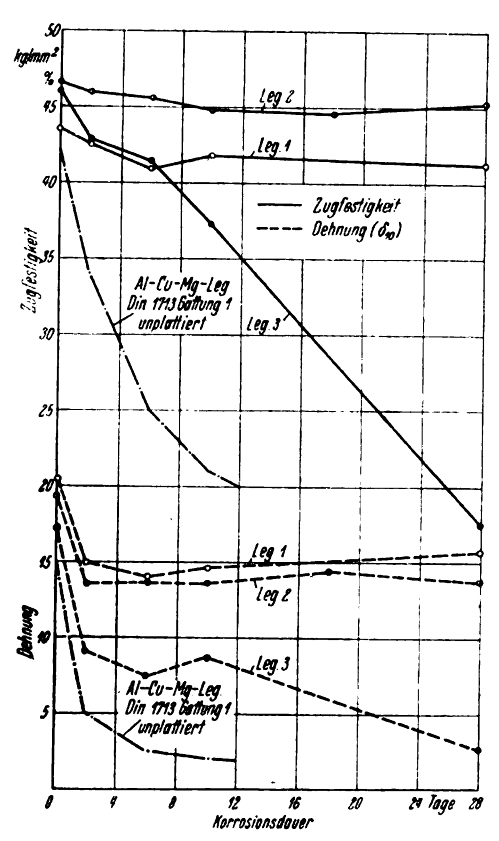


Bild 9. Korrosionsverhalten von Al-Zn-Mg-Legierungen mit kleinen V-Zusätzen (Schnellprüfverfahren).
Wärmebehandlung: 450°/30 min/Wasserabschreckung/kalt ausgelagert.

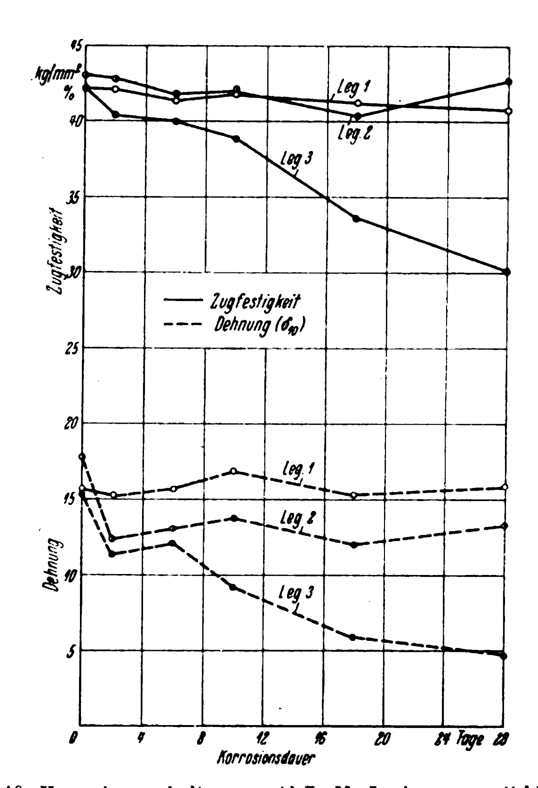


Bild 10. Korrosionsverhalten von Al-Zn-Mg-Legierungen mit kleinen V-Zusätzen (Schnellprüfverfahren).
Wärmebehandlung: 450°/30 min./Luftabkühlung/kalt ausgelagert.

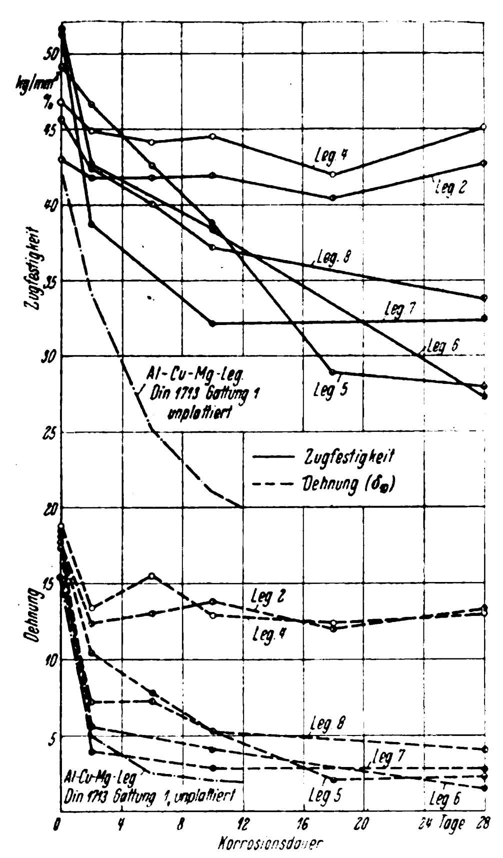


Bild 11. Korrosionsverhalten von Al-Zn-Mg-Legierungen mit kleinen V- und Cu-Zusätzen (Schnellprüfverfahren).
Wärmebehandlung: 450°/30 min/Wasserabschreckung/kalt ausgelagert.

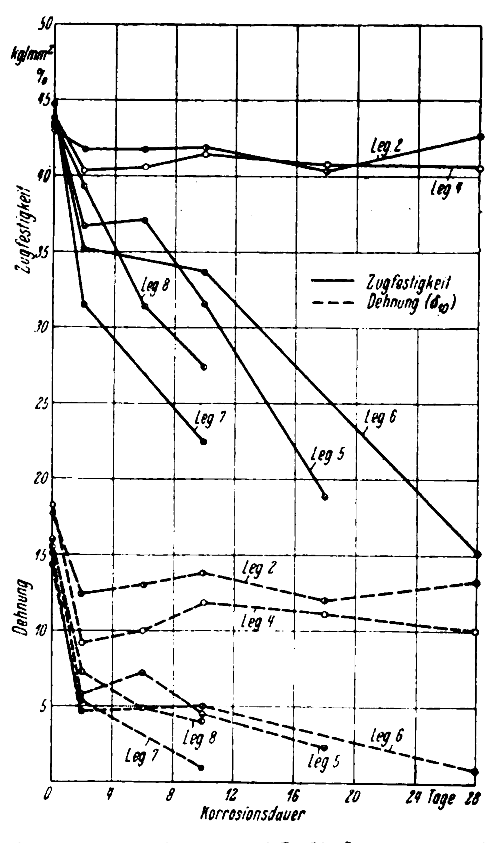


Bild 12. Korrosionsverhalten von Al-Zn-Mg-Legierungen mit kleinen V- und Cu-Zusätzen (Schnellprüfverfahren).
Wärmebehandlung: 450°/30 min/Luftabkühlung/kalt ausgelagert.

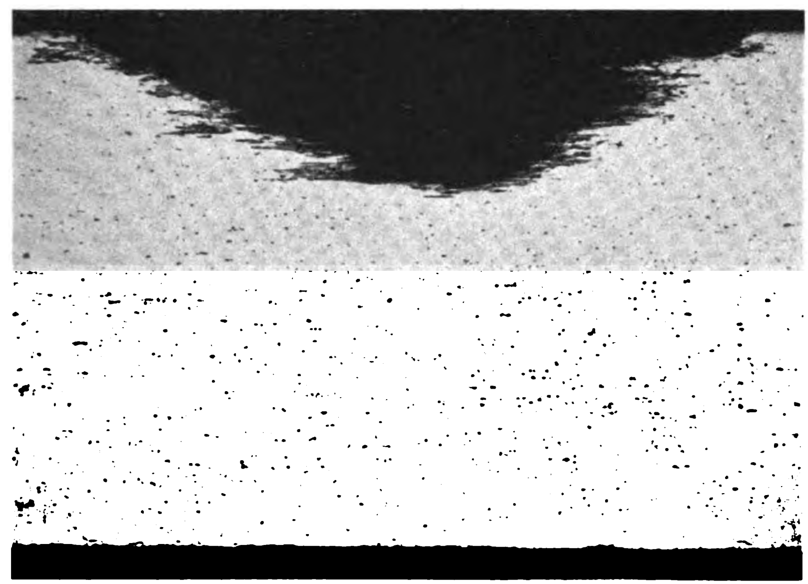


Bild 13. Zerstörung einer Al-Zn-Mg-Cu-Legierung durch Lochfraß nach 28 tägiger Korrosionsbeanspruchung im Schnellprüfgerät (Leg. Nr. 6).
Wärmebehandlung: 450°/30 min/Wasserabschreckung/ausgelagert bei Raumtemperatur.
Vergr. 75 fach.

gehalte von 0,1%, die — wie vorher gezeigt — die günstige Wirkung kleiner Vanadinzusätze auf das Spannungskorrosionsverhalten der wasserabgeschreckten, kaltausgelagerten Legierungen noch weiter steigern, die allgemeine Korrosionsbeständigkeit weder im wasserabgeschreckten noch luftgekühlten Zustand verschlechtern. Wird jedoch der Kupferzusatz auf mehr als 0,3% erhöht, so nähert das Korrosionsverhalten dieser Legierungsgattung immer stärker demjenigen der nichtplattierten Al-Cu-Mg-Legierungen; mit zunehmender Korrosionsdauer erfolgt dabei — ähnlich wie bei dieser Legierungsgattung — ein starker Abfall der Festigkeits- und Dehnungswerte. Der Korrosionsangriff erfolgt entsprechend Bild 13 vorwiegend in Form von Lochkorrosion und durch flächige Abtragung, unabhängig von der Art der eingehaltenen Vergütungsbehandlung. Für diese letzten, kupferhaltigen Legierungen ist die Entwicklung einer geeigneten Plattierung von großer Wichtigkeit; vor allem dann, wenn an eine Verwendung in Form von Blechen gedacht wird.

IV. Zusammenfassung.

Versuche zur Entwicklung einer aushärtbaren, technischen Aluminium-Zink-Magnesium-Knetlegierung höherer Festigkeit, die auch nach Wasserabschreckung von 450° und Auslagern bei Raumtemperatur ein gutes Korrosions- und Spannungskorrosionsverhalten besitzt, führten zu einer Aluminium-Legierung mit der Grundzusammensetzung 4,5% Zink, 3,5% Magnesium, 0,3% Mangan, 0,3% Eisen und 0,2% Silizium. Dieser Legierung, die nach Wasserabschrekkung von 450° und Auslagerung bei Raumtemperatur festigkeitsmäßig befriedigt, wurde 0,1% Vanadin und ferner zusätzlich Kupfer zulegiert, um die Spannungskorrosionsverhalten und auch die Festigkeitseigenschaften zu verbessern. Durch geringe Kupfergehalte bis zu 1% können nach Wasserabschreckung und Kaltauslagerung beträchtliche Festigkeitswerte bei guter Spannungskorrosionsbeständigkeit erreicht werden. Das allgemeine Korrosionsverhalten der Aluminium-Zink-Magnesium-Legierungen wird dagegen durch höheren Kupferzusatz verschlechtert.

Korrektur des Abwindes in Windkanälen mit kreisrunden oder elliptischen Querschnitten.

Berichtigung.

Die Herren Dipl.-Ing. Fuchs und Dr.-Ing. Schrenk machten mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß in Bild 27 (Verteilung des Abwindes über die Flügelspannweite) meiner Arbeit in Bd. 12 (1935) Lfg. 8, S. 250 bis 264, die Ordinatenachse falsche Maßzahlen trägt. Statt 0 . . 1,0 . . 2,0 muß 1,0 . . 1,2 . . 1,4 stehen, wie sich auch durch Vergleich mit Bild 22 ergibt.

J. Flügge-Lotz, Berlin.

Kriechverhalten geschichteter Kunstharzpreßstoffe.

Von H. Perkuhn.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

An einer Reihe geschichteter Kunstharzpreßstoffe, die mit verschiedenen Harzgehalten und Preßdrücken hergestellt wurden, wird bei statischer Belastung die Zeitabhängigkeit der Bruchspannung über einen Zeitraum von rd. 30 Tagen, das Kriechverhalten und die Dauerstandfestigkeit bei Raumtemperatur und 70 % relativer Luftfeuchtigkeit untersucht. Die Spannung, die in 30 Tagen zum Bruch führt, beträgt im Mittel 50 bis 75 % der Höchstspannung, die im Zugversuch bei einer Belastungsgeschwindigkeit von 800 kg/cm²/min erreicht wird, und die Dauerstandfestigkeit wird zu etwa 28 % dieser Zugfestigkeit festgestellt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Werden Kunststoffe so hoch beansprucht, daß man mit ihnen etwa gewichtsgleich wie mit metallischen Werkstoffen baut, so können bei den vergleichbaren im Flugzeugbau für metallische Werkstoffe zulässigen Spannungen je nach Art der Beanspruchung und je nach Form des Bauteiles bemerkenswert hohe Verformungen auftreten. Die Verformungen werden hoch sowohl wegen des den Kunststoffen eigenen niedrigen Elastizitätsmoduls als auch wegen des bei langandauernden Belastungen schon bei niedrigen Spannungen einsetzenden Kriechens. Der Zeiteinfluß auf die Verformung — auf den elastischen und plastischen Anteil — ist auch bei den für tragende Bauteile bei dem derzeitigen Entwicklungsstande allein in Frage kommenden geschichteten Kunstharzpreßstoffen bereits bei Raumtemperatur von einem Ausmaß, wie man es für die metallischen Werkstoffe des Zellenbaus erst bei gehobenen und hohen Temperaturen, die jedoch unter normalen Betriebsbedingungen nicht vorkommen, kennt.

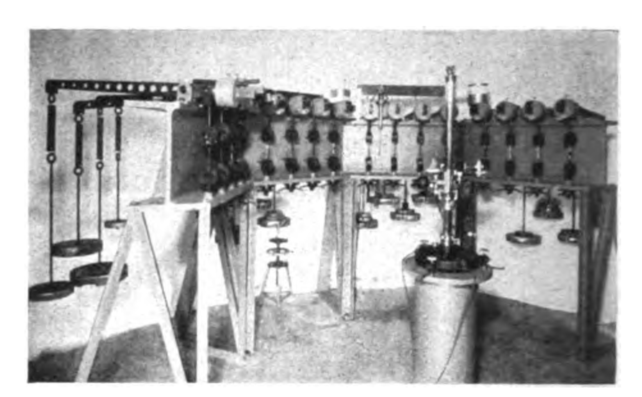
Der Umfang der bisher über das Kriechverhalten durchgeführten Versuche[1]) ist gering.

Im folgenden wird über Untersuchungen berichtet, die sich eingehend mit dem Kriechverhalten geschichteter, mit verschiedenen Preßdrücken und Harzgehalten hergestellter Kunststoffe befassen. Anschließend werden Wege zur Verbesserung des Kriechverhaltens solcher Kunststoffe angegeben.

Kunststoffe zeigen also unter Last bereits bei Raumtemperatur starke Kriecherscheinungen. Auf einen Versuch von F. H. Müller[2]) zur Deutung des Kriechverhaltens reiner Kunststoffe sei hingewiesen.

Bei geschichteten Kunststoffen werden die Verformungsvorgänge viel verwickelter und unübersichtlicher, da stets ein sehr inhomogener und anisotroper Aufbau vorliegt.

[1]) K. Riechers, Versuche an Kunststoffen für den Flugzeugbau. Z. VDI Bd. 82 (1938), S. 668/669.
A. Thum und H. R. Jacobi, Mechanische Festigkeit von Phenol-Formaldehyd-Kunststoffen. Berlin VDI-Forschungsheft 396, Bd. 10, Mai/Juni 1939.
A. Thum, A. Greth und H. R. Jacobi, Kunst- und Preßstoffe 2, VDI, Berlin, 1937, S. 16/24.
[2]) R. Houwink, Chemie und Technologie der Kunststoffe. Leipzig 1939, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.



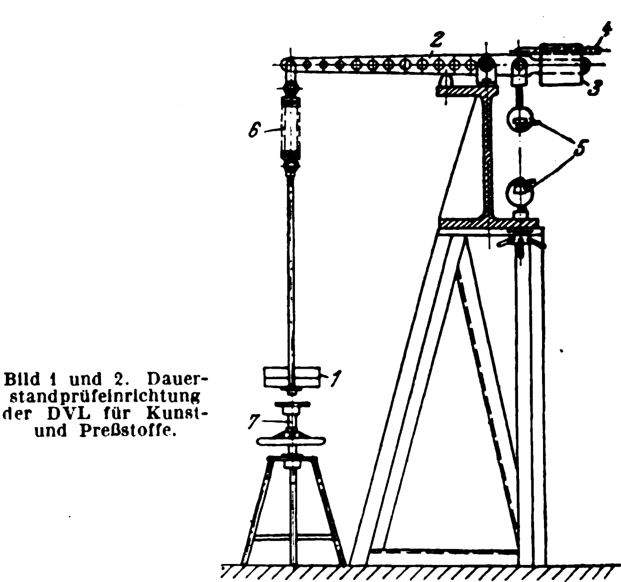


Bild 1 und 2. Dauerstandprüfeinrichtung der DVL für Kunst- und Preßstoffe.

II. Beschreibung der Versuchsanlage:

Für die Durchführung der Versuche wurde die in Bild 1 und 2 gezeigte Dauerstandprüfeinrichtung entwickelt. Der Aufbau der Maschine ermöglicht die gleichzeitige Prüfung von 16 Proben. Die Belastung der Proben erfolgt durch Gewichte (*1*) und Hebel (*2*) mit einem Übersetzungsverhältnis von 1:6. Die Hebel sind in Kugellagern gelagert und tragen Ausgleichsgewichte mit Grob- und Feineinstellung (*3*), (*4*). Um einen zentrischen Lastangriff zu ermöglichen, erfolgt die Einspannung der Proben in kugelig gelagerten Einspannköpfen (*5*) mit Keilbacken. Das stoßfreie Aufbringen der Last wird durch die Zugfedern (*6*) und durch das Absenken der Last mit Hilfe einer Spindel (*7*) erreicht. Zur Messung der Dehnungen dient ein Kathetometer von Fueß (Bild 1). Das Gerät ist um eine senkrechte Achse drehbar und im Mittelpunkt der auf einem Halbkreis angeordneten Proben aufgestellt. Seine Meßgenauigkeit beträgt ± 0,01 mm. Die Anordnung der Spannbacken gestattet auch das Messen der Verformungen mit anderen Dehnungsmeßgeräten.

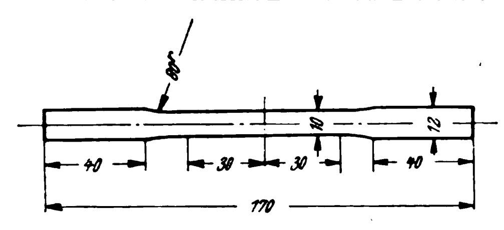


Bild 3. Zugstab. Dicke ~ 1,2 mm.

Zur Erzielung gleichbleibender Temperatur (20° C) wurde in der Höhe der Proben ein Kontaktthermometer angeordnet, das einen elektrischen Ofen steuerte. In ähnlicher Weise wurden durch ein Kontakthygrometer und eine elektrisch betätigte Wasserverdampfungsanlage die Unterschiede der Luftfeuchtigkeit ausgeglichen.

III. Versuchsdurchführung.

Die Untersuchungen erstreckten sich auf die folgenden Werkstoffe:

1. Zellstoffbahnen-Preßstoffe.
   a) Preßstoff DVL, verpreßt aus 0,6 mm dicken Natronzellulosebahnen. Harzgehalt 9%, 31% und 44% (bezogen auf das Preßstoffgewicht).
   b) Preßstoff, handelsübliches Hartpapier.
   c) Preßstoff Z 3 A, verpreßt aus 0,25 mm dicken, fertig getränkten Papierbahnen, Harzgehalt 31%.
   d) Preßstoff Z 3 F, bei diesen Versuchen wurden die Proben einem Formpreßteil eines Flugzeuges entnommen.
2. Gewebebahnen-Preßstoffe aus einem Baumwollgewebe mit einem Gewicht von 66 g/m², Harzgehalt 22%, 38% und 51%.

Als Bindemittel wurde bei den Preßstoffen unter 1a und 2 Phenol-Formaldehyd-Harz verwendet und durch Bestreichen auf den Harzträger aufgetragen. Die Preßstoffe 1a, 1c und 2 wurden in freien Füllraumformen 200 × 90 bzw. 200 × 40 mm auf einer 80 t-Presse des Instituts verpreßt. Der Preßdruck beträgt 60, 200 und 600 kg/cm², die Preßtemperatur 145°. Die Zugstäbe hatten die in Bild 3 gezeigte Form und wurden bei den Werkstoffen 1a, 1c und 2 aus Platten 200 × 90 × 1,2 bzw. 200 × 40 × 1,2 mm, bei dem Werkstoff 1b aus Platten 1000 × 1000 × 1,2 mm und bei dem Werkstoff 1d aus einem formgepreßten Flugzeugbauteil entnommen.

Die Messungen wurden bei einer Temperatur von 20 ± 1° C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 70% ± 1,5% durchgeführt.

Die Dehnungen wurden mit einem Kathetometer (± 1/100 mm) und im Bereich der niederen Lasten mit einem Zeiger-Feinmeßgerät (Meßlänge 50 mm, Übersetzung 1 : 50) gemessen. Durch die Untersuchungen wurden folgende Werte bestimmt.

1. Standfestigkeit in Abhängigkeit vom
   a) Preßdruck.
   b) Harzgehalt.

   Die Versuche erstreckten sich über 30 Tage. Als Standfestigkeit wurde die Spannung bezeichnet, die mindestens 30 Tage ohne Bruch ertragen wurde.
2. Dehnungsverlauf bei Spannungen, die dieser Standfestigkeit entsprechen.

   Die Dehnungen wurden während einer Belastungsdauer von 185 h und darauffolgender Entlastungsdauer von 185 h bestimmt.
3. Dauerstandfestigkeit.

   Unter Last wurde das Kriechen je nach der Spannung während 185, 500 und 700 h beobachtet. Nach der Entlastung wurde der Kriechvorgang entsprechend der Belastungszeit verfolgt.

IV. Versuchsergebnisse.

In Bild 4 bis 7 sind die Standzeiten von Zellstoff- und Gewebebahnen-Preßstoffen bei verschiedenen Spannungen

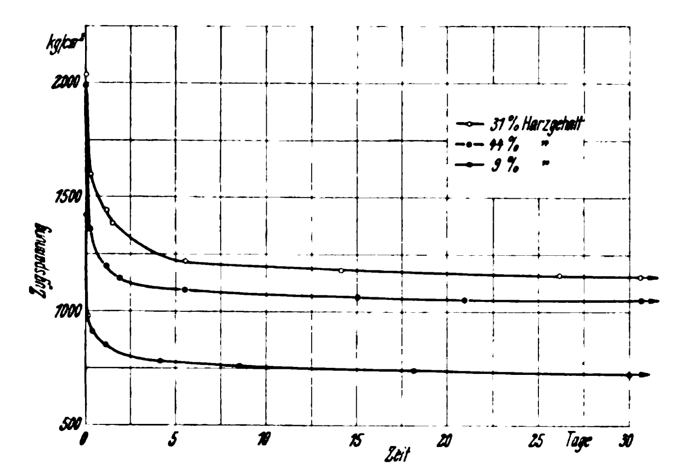


Bild 4. Standfestigkeit von Zellstoffbahnen-Preßstoff (DVL) bei verschiedenem Harzgehalt.

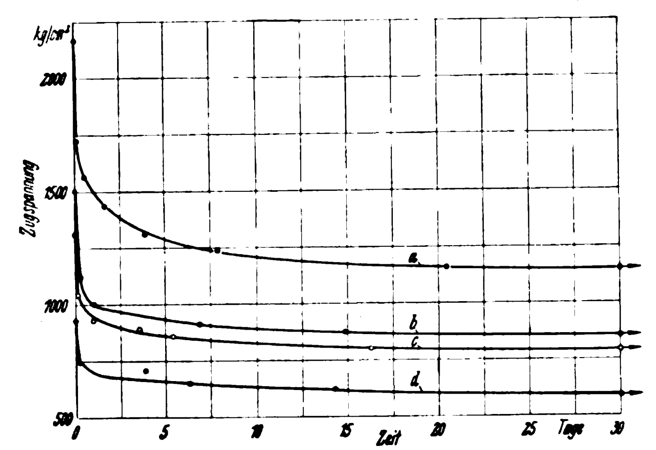


Bild 5. Standfestigkeit von Zellstoffbahnen-Preßstoffen Z 3.
a Zellstoffbahnen-Preßstoff Z 3 A.
b Formgepreßter Zellstoffbahnen-Preßstoff.
c Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich.
d Zellstoffbahnen-Preßstoff, Z 3 A Nr. 5690.

wiedergegeben. Die Standfestigkeit (Spannung) die mindestens 30 Tage ohne Bruch ertragen wird) beträgt bei den einzelnen Werkstoffen je nach Harzgehalt und Preßdruck 50 bis 75% der Zugfestigkeit.

Alle Schaulinien weisen einen starken Abfall der Spannungen in verhältnismäßig kurzer Belastungszeit auf. Bei zweitägiger Belastung ist bei allen Werkstoffen die Festigkeit im Mittel nahezu 40% geringer als bei einem Zugversuch mit 800 kg/cm²/min Belastungsgeschwindigkeit. Nach einer Belastungszeit von 10 Tagen findet ein wesentlicher Spannungsabfall nicht mehr statt.

1a) Standfestigkeit in Abhängigkeit vom Preßdruck.

Bild 8a zeigt, daß die Standfestigkeit von Z 3 A mit zunehmendem Preßdruck bis rd. 250 kg/cm² erheblich ansteigt, während eine weitere Steigerung des Preßdruckes keine wesentliche Verbesserung der Festigkeit zur Folge hat.

1b) Standfestigkeit in Abhängigkeit vom Harzgehalt.

Die Standfestigkeit zeigt ferner die gleiche Abhängigkeit vom Harzgehalt wie die Bruchspannung beim Zugversuch mit gleichmäßig steigender Last[3]) (Bild 8b). Sowohl bei Gewebebahnen- als auch bei Zellstoffbahnen-Preßstoff steigt die Standfestigkeit mit zunehmendem Harzgehalt an. Die besten Werte liegen zwischen 30 bis 40% Harzgehalt, während eine Vermehrung über 40% wieder einen Abfall der Festigkeit zur Folge hat.

[3]) Vgl. W. Küch, Der Einfluß der Preßbedingungen und des Aufbaues auf die Eigenschaften geschichteter Kunstharzpreßstoffe. Jahrbuch 1939 der Deutschen Luftfahrtforschung S. I 671/I 672.

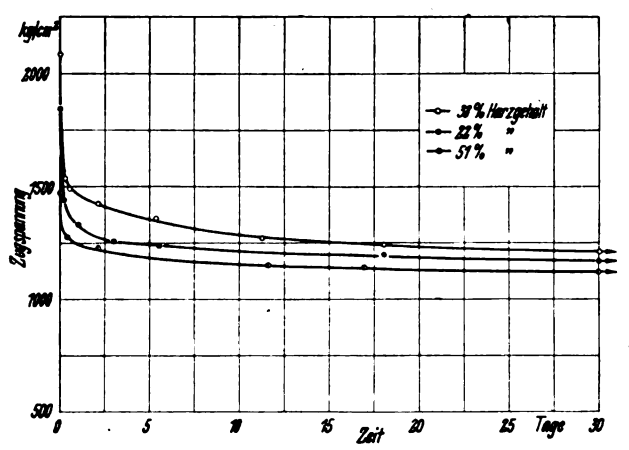


Bild 6. Standfestigkeit von Gewebebahnen-Preßstoff (DVL) bei verschiedenem Harzgehalt.

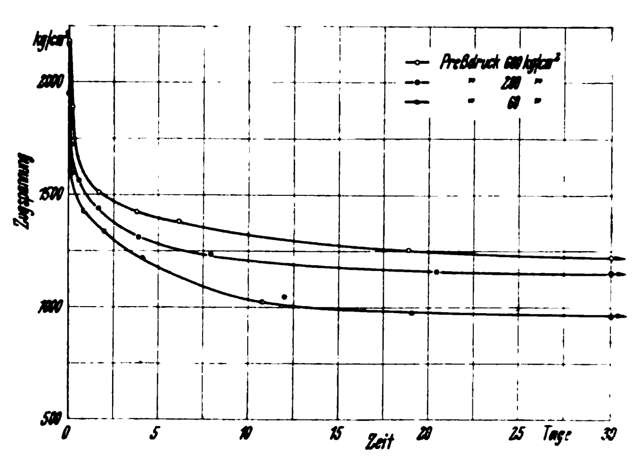


Bild 7. Zeit-Spannungsschaubild von Zellstoffbahnen-Preßstoff Z 3 A bei verschiedenem Preßdruck.

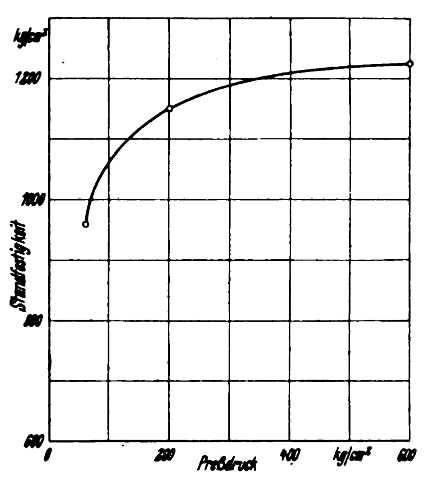


Bild 8a. Standfestigkeit von Z 3 A in Abhängigkeit vom Preßdruck.

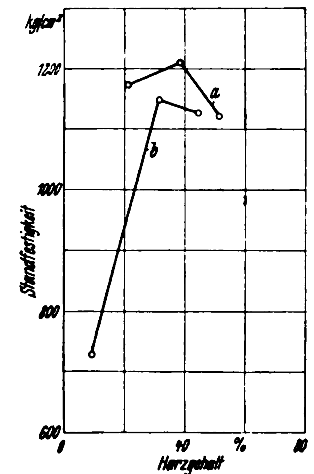


Bild 8b. Standfestigkeit in Abhängigkeit vom Harzgehalt.
a Gewebebahnen-Preßstoff (DVL).
b Zellstoffbahnen-Preßstoff (DVL).

Die wichtigsten Ergebnisse sind in Zahlentafel 1 wiedergegeben.

2. Dehnungsverlauf bei Spannungen, die der Standfestigkeit entsprechen.

Der Verlauf der Dehungen bei Spannungen, die der Standfestigkeit entsprechen, ist in Bild 9 wiedergegeben. Sämtliche Werkstoffe wiesen bei dieser Belastung Gesamtdehnungen auf (1,2 bis 2,5%)], die das bei technischen Bauwerken zulässige Maß weit überschreiten. Allein schon die bleibenden Dehnungen sind bei allen Werkstoffen nach 190stündiger Belastung größer als 0,2%. Aus dem Verlauf der Zeit-Dehnungslinien geht hervor, daß die Dehngeschwindigkeit dauernd abnimmt, ohne jedoch den Wert 0 zu erreichen. Zur Klärung der Frage, ob bei dem Verlauf der Kurven nach Bild 9 die Proben in endlicher Zeit zu Bruch gehen, wurden die Zeit-Dehnungslinien im einfachlogarithmischen Koordinatensystem aufgetragen. Bild 10 läßt erkennen, daß alle Zeit-Dehnungslinien hohl zur Dehnachse verlaufen, d. h., es besteht in endlicher Zeit Bruchgefahr. Die bleibende Dehnung nach der Entlastung klingt jedoch nach Bild 9 nach verhältnismäßig kurzer Zeit stark ab.

3. Dauerstandfestigkeit.

Die Definition der Dauerstandfestigkeit setzt für jeden Werkstoff die Kenntnis der für eine vorgegebene Zeit zugehörigen Dehngeschwindigkeit voraus. Die Auswertung der Zeit-Dehnungskurven zur Ermittlung der Dauerstandfestigkeit geschah unter Berücksichtigung der von F. Gentner[4]) dargestellten Zusammenhänge.

Bei der Ermittlung der Dauerstandfestigkeit sind im wesentlichen zwei Grundarten von Zeit-Dehnungslinien zu unterscheiden (Bild 11). Nach einem anfänglich ähnlichen Verlauf der hohl zur Zeitachse ist, nimmt die Dehngeschwindigkeit der Art a) in endlicher Zeit den Wert 0 an, das Dehnen kommt zum Stillstand. Bei Schaulinien der Art b) nimmt die Dehngeschwindigkeit dauernd ab, ohne jedoch den Wert 0 zu erreichen. Während nun Kurven der Art a) in jedem Fall im sicheren Gebiet liegen, können die durch die Zeit-Dehnungskurven der Gruppe b) gekennzeichneten Werkstoffe je nach der Dehngeschwindigkeit früher oder später zum Bruch führen.

F. Gentner zeigt, wie aus dem Verlauf der Kurven der Art b) beim Auftragen im einfachlogarithmischen Koordinatensystem (Zeit auf der Abszissenachse logarithmisch) ersichtlich ist, ob in endlicher Zeit Bruchgefahr besteht. Da-

[4]) F. Gentner, Die Auswertung von Dauerstandversuchen Archiv für das Eisenhüttenwesen Nr. 9 (1936), S. 441/450.

Zahlentafel 1. Standfestigkeit von Kunstharzpreßstoffen.

Werkstoff	Harzgehalt %	Preßdruck kg/cm²	Zugfestigkeit kg/cm²	Standfestigkeit kg/cm²	Standfestigkeit in % der Zugfestigkeit
Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL	9	200	1420	725	51
» » »	31	200	2038	1155	56,5
» » »	44	200	1990	1050	53
» » Z 3 A	31	200	2175	1145	52,5
» » Z 3 A	31	60	1953	944	48
» » Z 3 A	31	600	2180	1230	56,5
» » Z 3 A Nr. 5690	48	200	930	590	63,5
» » handelsüblich	—	—	1310	790	60
Formgepr. Zellstoffbahnen-Preßstoff	—	—	1498	850	57
Gewebebahnen-Preßstoff DVL	22	200	1840	1170	63,5
» » »	38	200	2085	1210	58
» » »	51	200	1470	1120	76,5

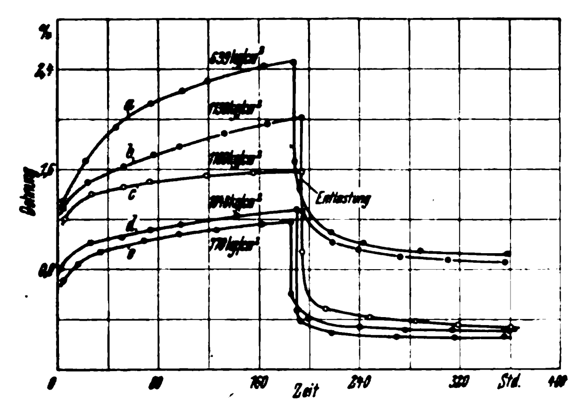


Bild 9. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoff- und Gewebebahnen-Preßstoffen bei Belastungen, die der Standfestigkeit entsprechen.
a Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich.
b » » Z 3 A.
c Gewebebahnen-Preßstoff DVL.
d Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL.
e » » Flugzeugbauteil.

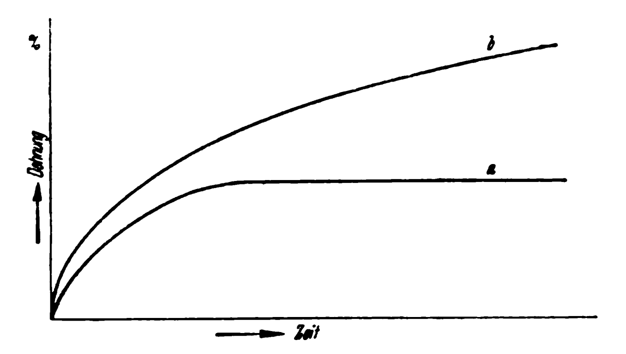


Bild 11. Zwei mögliche Arten von Zeit-Dehnungskurven.

nach führen Zeit-Dehnungslinien in endlicher Zeit nicht zum Bruch, die

1. im einfachlogarithmischen Koordinatensystem hohl zur Zeitachse sind (Hyperbeln)
2. geradlinig verlaufen (logarithmische Kurven)
3. zunächst hohl zur Dehnachse sind, sich aber im weiteren Verlauf asymptotisch Geraden anschmiegen (logarithmische Kurven).
   Dagegen besteht bei Schaulinien, die hohl zur Dehnachse verlaufen (Parabeln), in endlicher Zeit Bruchgefahr.

In Bild 12 bis 15 sind die Zeit-Dehnungslinien von Kunstharzpreßstoffen bei verschiedenen Belastungen wiedergegeben. Je nach der Höhe der aufgebrachten Spannungen sind Schaulinien mit parabolischem oder logarithmischem Verlauf gut zu erkennen. Bei den Langzeitversuchen (700 h, Bild 12) rufen die aufgebrachten Spannungen über das ganze Zeitgebiet einen parabolischen Verlauf hervor. Diese Spannungen würden also noch Bruch der Proben in endlicher Zeit zur Folge haben. Die der Dauerstandfestigkeit entsprechenden Grenzspannungen, die gerade noch die unter 3) angeführte Bedingung erfüllen, sind in Bild 13 bis 15 gekennzeichnet.

Nachdem diese Grenzspannungen gefunden waren, wurde mit einer Belastung die 5% höher lag wiederum der Verlauf der Zeit-Dehnkurven ermittelt und festgestellt, daß diese Belastungen schon parabolischen Verlauf zur Folge hatten. Da bei Kunstharzpreßstoffen mit Streuungen von $\pm$ 5% gerechnet werden muß, wurde der zuerst gefundene Spannungswert mit genügender Genauigkeit als Dauerstandfestigkeit festgesetzt.

Weiterhin wurden die Zeit-Dehnungskurven daraufhin untersucht, ob aus der Dehngeschwindigkeit zu bestimmten Zeiten auf ihren weiteren Verlauf geschlossen werden kann. Von je vier Versuchsproben mit verschiedenen der Dauerstandfestigkeit angepaßten Belastungen wurden die Zeit-Dehnungslinien ermittelt (Bild 16 bis 18), die Dehnge-

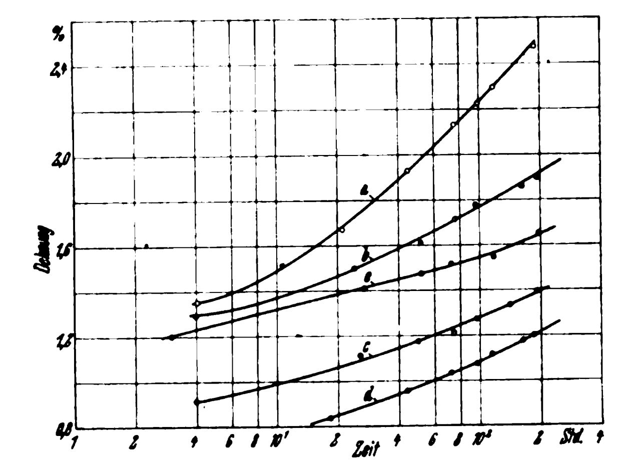


Bild 10. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoff- und Gewebebahnen-Preßstoffen bei Belastungen von rd. 50 % der Zugfestigkeit.
a Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich.
b » » Z 3 S.
c » » DVL.
d » » Flugzeugbauteil.
e Gewebebahnen-Preßstoff DVL.

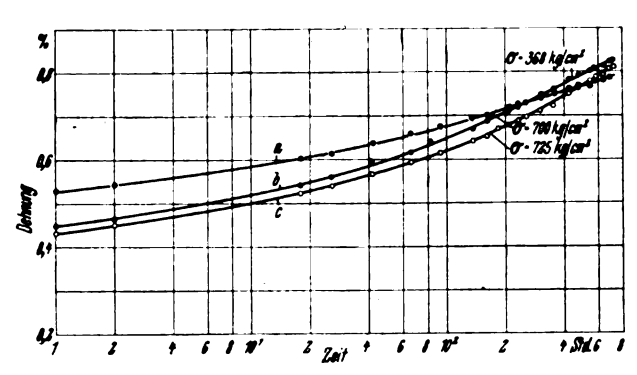


Bild 12. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoffen (Langzeitversuch).
a Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL.
b » » handelsüblich.
c » » Z 3 A.

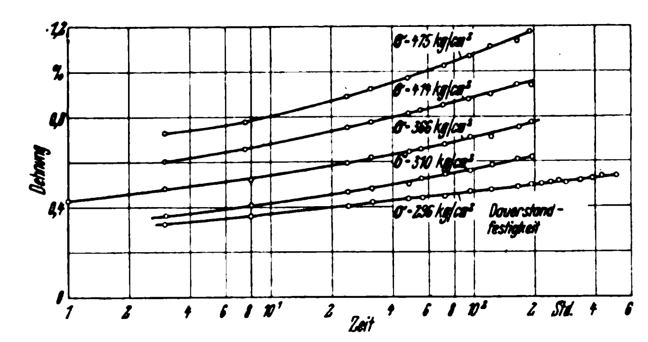


Bild 13. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich.

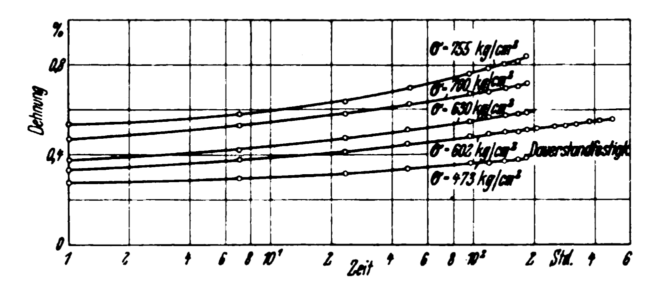


Bild 14. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff Z 3 A.

Bild 15. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL.

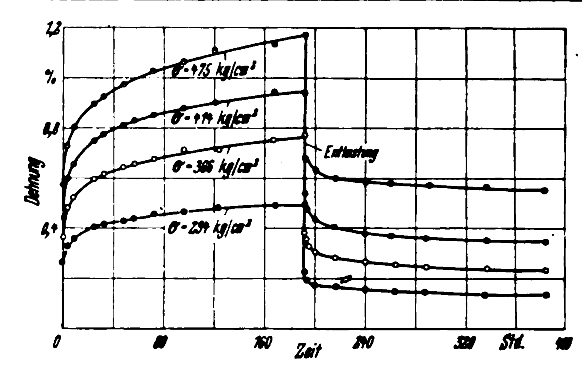


Bild 16. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich.

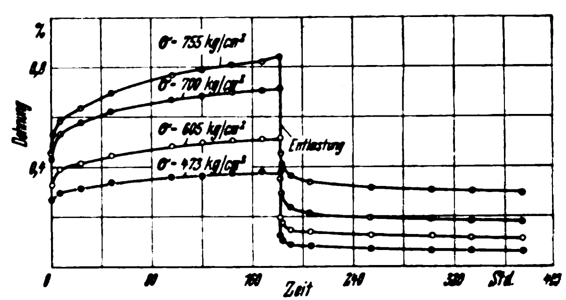


Bild 17. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff Z 3 A.

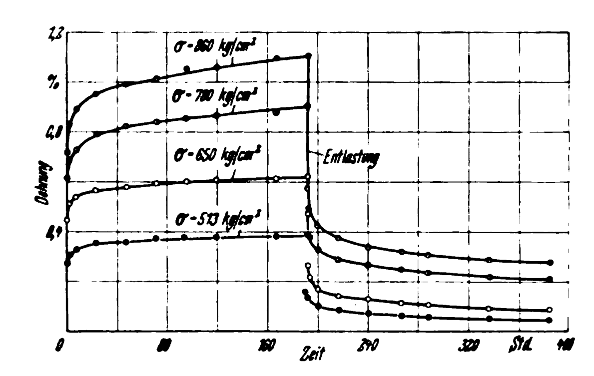


Bild 18. Zeit-Dehnungskurven von Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL.

schwindigkeit für das Zeitintervall der 40. bis 185. Belastungsstunde festgestellt und in Abhängigkeit von der Belastung aufgetragen (Bild 19 bis 21).

Aus diesen Kurven ist nun unter Zugrundelegung einer bestimmten Last die Dehngeschwindigkeit für verschiedene Belastungszeiten zu ermitteln. Für die oben gefundenen Grenzspannungen ergibt sich bei den drei verschiedenen Werkstoffen in der 100. Belastungsstunde eine Dehngeschwindigkeit von rd. 5.10^{-4}%/h.

Der Verlauf der Zeit-Dehnungslinien in Bild 16 bis 18 läßt erkennen, daß nach 100 h die Dehnungen genügend stark abgeklungen sind, diese Belastungszeit also zur Bestimmung der Dauerstandfestigkeit ausreicht.

Auf Grund dieser Feststellungen wurde daher für Kunstharzschichtstoffe die Dauerstandfestigkeit als die Spannung ermittelt, die in der 100. bis 110. Belastungsstunde eine Dehngeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$%/h zur Folge hat.

Ferner darf die bleibende Dehnung nach 110stündiger Belastung und darauffolgender 24stündiger Entlastung nicht 0,2% überschreiten.

Bild 22 zeigt, daß die letzte Bedingung für die vorliegenden Werkstoffe selbst noch nach 190stündiger Belastungszeit erfüllt ist. Da nun kürzere Belastungszeiten geringere Dehnungen zur Folge haben, ist diese Bedingung bei 110 stündiger Belastung erst recht erfüllt.

In Zahlentafel 2 sind die ermittelten Versuchswerte wiedergegeben. Für die praktische Anwendung ist das zuletzt beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Dauerstandfestigkeit gut brauchbar. Nach Kenntnis der für eine bestimmte Belastungszeit zulässigen Dehngeschwindigkeit kann die Dauerstandfestigkeit mit 3 bis 4 Proben ermittelt werden; dagegen ist die Feststellung der Dauerstandfestigkeit nach der ersten Methode weniger zweckmäßig, weil die Einschachtelung des Grenzwertes eine größere Anzahl von Versuchen und längere Zeit beansprucht.

Um einen Anhalt für die bei Langzeitversuchen zu erwartenden Streuungen zu erhalten, wurden an einem Werkstoff mehrere gleichartige Versuche durchgeführt. In Bild 23 sind drei voneinander stark abweichende Zeit-Dehnungslinien für die gleiche Spannung wiedergegeben. In der Hauptsache sind diese Streuungen wohl dadurch bedingt, daß das Gefüge der Kunstharzschichtstoffe auch mikroskopisch weder homogen noch isotrop ist. Zur genaueren Erfassung der Dehnunterschiede müßten weitere Versuche durchgeführt werden.

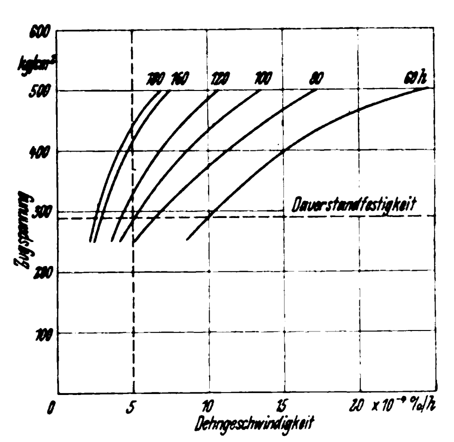


Bild 19. Spannungs-Dehngeschwindigkeits-Schaubild von Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich, für verschiedene Belastungszeiten.

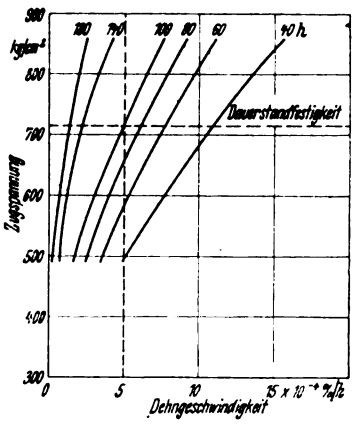


Bild 20. Spannungs-Dehngeschwindigkeits-Schaubild von Zellstoffbahnen-Preßstoff Z 3 A für verschiedene Belastungszeiten.

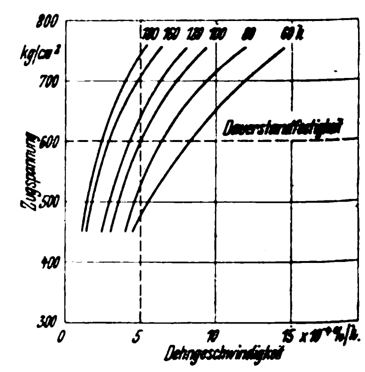


Bild 21. Spannungs-Dehngeschwindigkeits-Schaubild von Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL für verschiedene Belastungszeiten.

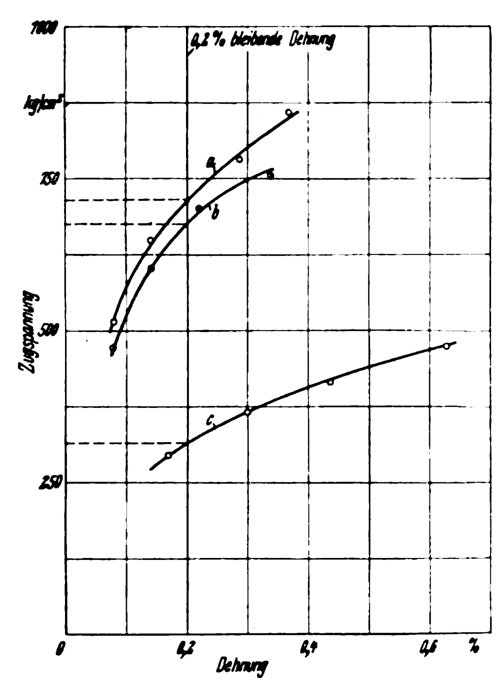


Bild 22. Bleibende Dehnung nach 190stündiger Belastung und darauffolgender 24stündiger Entlastung.
a Zellstoffbahnen-Preßstoff DVL.
b » Z 3 A.
c » handelsüblich.

Zahlentafel 2. Dauerstandfestigkeit von verschiedenen Zellstoffbahnen-Preßstoffen.

Werkstoff	Zugfestigkeit	Dauerstandfestigkeit nach Gentner	Dauerstandfestigkeit unter Zugrundelegung einer Dehngeschw. v. 5.10^{-4} %/h in der 100. Belastungsstunde	in % der Zugfestigkeit
	kg/cm²	kg/cm²	kg/cm²	
Zellstofbahnen-Preßstoff DVL. .	2038	720	715	30,1
Zellstofbahnen-Preßstoff Z 3 A .	2175	602	600	27,6
Zellstofbahnen-Preßstoff handelsüblich	1310	296	290	22,2

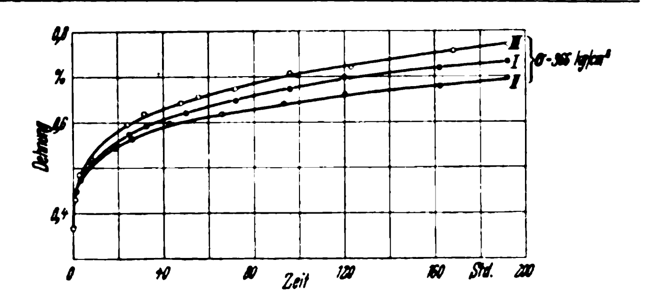


Bild 23. Zeit-Dehnungslinien von Zellstoffbahnen-Preßstoff, handelsüblich, bei gleicher Last an 3 verschiedenen Proben.

Bei den Versuchen konnte beobachtet werden, daß nicht nur die Temperatur, sondern auch die Luftfeuchtigkeit den Fließvorgang bei den Preßstoffen beeinflußt. Zunehmende Feuchtigkeit erhöht die Formänderungen, bei abnehmender Feuchtigkeit tritt dagegen durch Schrumpferscheinungen eine Verkürzung der Proben ein. Offensichtlich sind die Preßstoffe im gespannten und gedehnten Zustand gegenüber Feuchtigkeitseinflüssen besonders empfindlich.

V. Zusammenfassung.

Für die verschiedensten Kunstharzschichtstoffe wurde die Standfestigkeit ermittelt und der Einfluß des Preßdruckes und Harzgehaltes festgestellt. Die günstigste Standfestigkeit wurde bei einem Harzgehalt von 30 bis 40% beobachtet. Die Standfestigkeit steigt ferner mit zunehmendem Preßdruck bis 250 kg/cm² an; eine weitere Steigerung des Druckes führt zu keiner wesentlichen weiteren Verbesserung.

Als Dauerstandfestigkeit wurde die Belastung ermittelt, die in der 100. Belastungsstunde eine Dehngeschwindigkeit von 5.10^{-4}%/h hervorruft. Dauerstandwerte von verschiedenen Werkstoffen wurden bestimmt und sind in Zahlentafel 2 aufgeführt.

Auf den Einfluß der Luftfeuchtigkeit bei Langzeitversuchen wurde hingewiesen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Ratschläge bei der Durchführung dankt der Verfasser dem Leiter des Instituts Herrn F. Bollenrath.

Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet.

Ergänzung.

In der kürzlich unter dem obigen Titel in dieser Schriftenreihe[1]) veröffentlichten Arbeit bedarf eine am Schluß aus Formel (25) gezogene Folgerung einer Richtigstellung, worauf mich Herr B. Göthert freundlichst hingewiesen hat. Die »Korrektur der Anströmgeschwindigkeit« ΔU an der Kanalwand wird durch (26a) gegeben; der Wert von ΔU am Profilrand ergibt sich nach (25) aus

$$w_P = 2\,(U + \Delta U)\left[1 + \frac{7}{12}\,(M + \Delta M)^2\right].$$

Hierbei ist w_P aus (25) zu entnehmen. Man erhält statt (26b)

$$\frac{(\Delta U)_P}{U} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{11}{6}\,M^2\right)\left(\frac{2\pi R}{H}\right)^2$$

und damit statt (27)

$$\frac{(\Delta U)_P}{(\Delta U)_K} = \frac{1}{3}.$$

Das heißt: Ein Einfluß der Kompressibilität macht sich in der hier benutzten Näherung in dem Verhältnis der beiden ΔU nicht bemerkbar.

Alle übrigen Ableitungen der Arbeit bleiben hiervon unberührt.

E. Lamla.

[1]) Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 329 331.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 2/3 SEITE 39 BIS 110 | MÜNCHEN, 29. 3. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreis: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.



Band 18 | 29. März 1941 | Lfg. 2/3

Zur Forschung der Industrie.

Steigerung der Flugleistungen, der Sicherheit und Vervollkommnung der Flugeigenschaften sind die Triebfedern der notwendigen Forschung in der Luftfahrttechnik. Die Geschwindigkeit, mit der die Entwicklung im deutschen Flugzeugbau bis zu der heute vorhandenen Breite und Höhe vorgetrieben worden ist, war dadurch möglich, daß die Luftfahrtindustrie neben den Forschungsanstalten in sehr weitgehendem Maße eigene Forschung treiben konnte. Der harte Zwang, für ganz bestimmte, dem Flugzeugbau durch Luftwaffe und Luftverkehr gestellte Aufgaben bis zu einem festgelegten Termin befriedigende Lösungen zu finden, erfordert für die dabei anfallenden Probleme eine Bearbeitung, die wesentlich abweicht von den Arbeitsmethoden der Forschungsanstalten. Die Industrieforschung hat nur in ganz seltenen Fällen Zeit, durch allgemeine breitere theoretische Überlegungen und dazu ausreichende systematische Versuche zum Ziel zu gelangen, sondern muß sich möglichst schnell an die gewünschte spezielle Lösung herantasten und kann das Ergebnis nur durch einen sehr schmalen Erkenntnisstreifen sichern. Dieses Verfahren bietet dem wissenschaftlich denkenden Bearbeiter wenig Befriedigung, läßt sich aber leider nicht vermeiden. Dagegen hat der Ingenieur in der Forschungsanstalt, abgesehen von den Fällen, in denen er ebenfalls in kurzbefristete Industrieaufträge eingespannt ist, die Möglichkeit, frei von irgendwelchem Termindruck, in seiner Forschungsarbeit mit möglichst gutem Anschluß an bereits vorliegende Ergebnisse allgemeingültige Erkenntnisse herauszufeilen. Beide Forschungstypen sind notwendig und werden für die Entwicklung im ganzen sehr fruchtbar sein, wenn ein möglichst lebhafter gegenseitiger Austausch theoretischer und praktischer Forschungsergebnisse stattfindet. Neben den Sitzungen und Tagungen der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung und der Lilienthal-Gesellschaft dienen insbesondere die Zeitschriften diesem Zweck. —

Die aus dem Kreise meiner Mitarbeiter stammenden Arbeiten, die in diesem Luftfahrtforschungsheft zusammengefaßt wurden, sind nach dem vorher Gesagten zu werten. Die Auswahl für die Veröffentlichung mußte sich selbstverständlich den besonderen Bedingungen anpassen, die sich aus dem Kriege für die deutsche Luftfahrttechnik ergeben. In der vorliegenden Form wird ein genügender Einblick in die Methoden der Industrieforschung geboten.

Tank.



Beobachtung des Einflusses von Flügelanbauten und Klappen auf den Abreißverlauf der Tragflügelströmung.

Von G. Hartwig.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Die Abhängigkeit des Abreißverlaufs der Tragflügelströmung von Umriß und Verwindung des Tragflügels ist bereits des öfteren experimentell untersucht worden. Noch sehr wenig ist dagegen über den Abreißvorgang bei Hinzutreten von Anbauten wie Rumpf und Gondeln oder bei Vorhandensein von ausgeschlagenen Landeklappen über einen in der Praxis gebräuchlichen Spannweitenbereich veröffentlicht worden. Im Entwicklungsgang der Focke-Wulf-FW 200 (Condor) wurden im Windkanal der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. Versuche über den Abreißvorgang an mehreren Flügeln gleicher Tiefenverteilung, jedoch mit unterschiedlichem Verlauf der tragenden Linie vorgenommen und bei einem der Flügel auch auf den Fall zusätzlichen Vorhandenseins von Rumpf, Gondeln und ausgeschlagenen Landeklappen erweitert. Die Ergebnisse werden im folgenden mitgeteilt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Aufgabe, die durch die vorliegende Versuchsreihe gelöst werden sollte, ist so aufzufassen, daß durch laufende Beobachtung der Tragflügelströmung in Abhängigkeit vom positiven Anstellwinkel kritische Stellen aufgedeckt werden sollten, um in erster Linie qualitative Aufschlüsse über die Änderungen der Strömung zu erhalten. Darüber hinaus waren durch eine möglichst dichte Folge der Beobachtungen auch quantitativ verwertbare Ergebnisse anzustreben.

Als praktisch wohl bequemste Art der Strömungsbeobachtung hat sich die mittels Fäden immer wieder bewährt; trotzdem ist die Frage berechtigt, inwieweit ein Faden überhaupt in der Lage ist, einen kritischen Strömungsvorgang, wie z. B. den Beginn einer Strömungsablösung, richtig genug anzuzeigen. Sofern der Faden auf der Flügeloberseite in nicht zu großer Nähe der Flügelnase befestigt ist, liegt er hinsichtlich heute gebräuchlicher Profile bei einer Dicke von 0,3 bis 0,5 mm und den in mittleren Kanälen üblichen Modelltiefen und Windgeschwindigkeiten in der Grenzschicht eingebettet, und zwar bei Vorhandensein stärkerer Kanalturbulenz, kleiner Erschütterungen und Rauhigkeiten bereits außerhalb des laminaren Anlaufs in der turbulenten Grenzschicht und zum Teil in der unter dieser stets vorhandenen laminaren Unterschicht. Durch die Reibung werden die Fäden, die ohne Anströmung infolge ihrer inneren Spannungen meist leicht gewellt erscheinen, bei Anströmung gestrafft und bei gesunder Strömung glatt an die Oberfläche angeschmiegt. Am Anfangspunkt der Strömungsablösung ändert sich nun der Charakter des Geschwindigkeitsprofils in der Grenzschicht grundlegend, da an dieser Stelle das Gebiet, in dem Rückströmung und demzufolge stärkere Wirbelbildung herrscht, beginnt. Ragt nun z. B. ein Fadenende in dieses Gebiet hinein, so wird es dieser Wirbelbewegung folgen und in schlagende Bewegung geraten. In der Projektion ergibt dieses etwa ein fächerartiges Bild. Je nachdem, in welcher Länge der Faden erfaßt wird, erscheint der Fächer größer oder kleiner. Befindet sich der Faden mit etwa seiner ganzen Länge im Ablösungsgebiet, dann werden seine Bewegungen so heftig, daß er sich oft in sich selbst verfängt. Auf diese Weise ist es möglich, das Wandern der Ablösungszonen mit brauchbarer Genauigkeit zu verfolgen. Unter Berücksichtigung der Grenze, die schon durch eine ausreichende Sichtbarmachung gezogen ist, können die Fäden recht dünn und unmittelbar an der Oberfläche befestigt sein, ohne daß die Anzeige des Ablösungsgebietes beeinträchtigt wird. Je dünner und beweglicher der Faden und je sorgfältiger seine Befestigung an der Oberfläche, um so geringer werden die Störungen sein, die die Grenzschichtentwicklung durch die Fäden selbst erfährt.

Die Änderungen im Verlauf der tragenden Linie der hier untersuchten Flügelmodelle erfassen etwa die durch Konstruktion und Fertigung in der Praxis normalerweise gezogenen Grenzen.

II. Modellbeschreibung und Versuchsanordnung.

Es wurden im ganzen drei Flügelformen untersucht. Ihr Umriß war trapezförmig, bei gleicher Tiefenverteilung, Bild 1. Die Flügelprofile entstammen der 22er-Reihe der NACA-Profile [1], ihr Dickenverhältnis ist aus Bild 2 ersichtlich. Die beiden Trapezflügel mit gerader Hinter- bzw. Vorderkante waren ohne Verwindung und V-Form. Der dritte Flügel hatte dagegen beides und war außerdem mit Querrudern und Spreizklappen versehen, Bild 1 und 2. An diesem Flügel wurden im Verlaufe der weiteren Untersuchung auch Rumpf und Gondeln angebracht, Bild 3. Die Flügelmodelle waren gut polierte Gipsmodelle mit Stahl-Zinkgerippe.

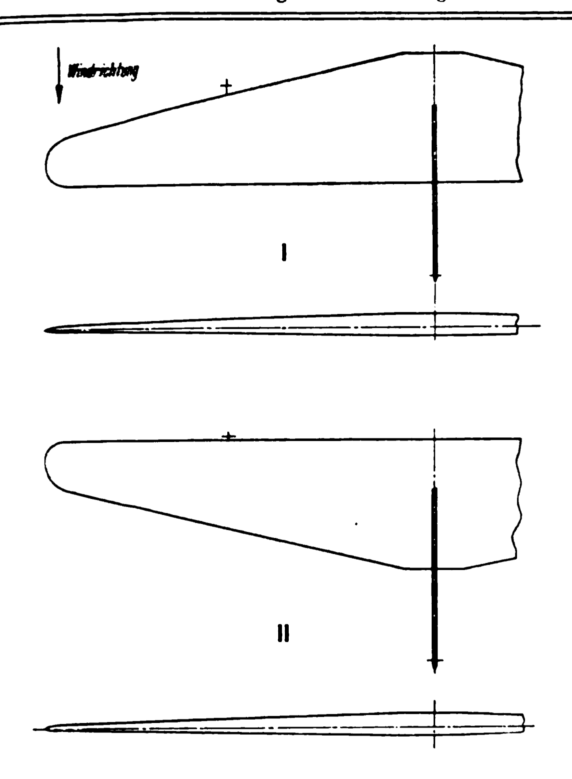
Die Modellaufhängung entsprach der aus Göttingen bekannten Anordnung [2]. Die Modellspannweite betrug 1,320 m und damit etwa 63% der Kanalbreite. Eine Beschreibung der benutzten Kanalanlage findet sich unter [3].

Als Fadenmaterial diente Seidenreihgarn, das nochmals in zwei Fäden aufgeteilt wurde und so einen sehr feinen und leicht beweglichen Faden lieferte, der zudem auf der braunen Modelloberfläche gut sichtbar war. Die einzelnen Fäden waren etwa 20 mm lang und mittels Zellglasband so gegeneinander versetzt befestigt, daß sie sich gegenseitig kaum stören oder verfangen konnten, Bild 16 bis 26. Zur Aufnahme der einzelnen Fadenzustände diente eine Kleinbildkamera, deren Bilder für die Auswertung vergrößert wurden. Die Belichtungszeit war unter Zuhilfenahme von zwei Nitraphotlampen bei einer Lichtstärke des Objektivs von 1 : 3,5 $^1/_{25}$ s.

III. Durchführung der Versuche.

Die Versuche wurden bei einer Windgeschwindigkeit von etwa 32 m/s durchgeführt. Mit Ausschluß des Randbogens änderte sich die Tiefe entlang der Spannweite von 80 mm außen auf 212 mm innen und damit die Reynoldszahl der Messung von $1{,}79 \cdot 10^5$ bis $4{,}75 \cdot 10^5$ bzw. die effektive Reynoldszahl von $2{,}68 \cdot 10^5$ bis $7{,}12 \cdot 10^5$. Als Anstellwinkel α





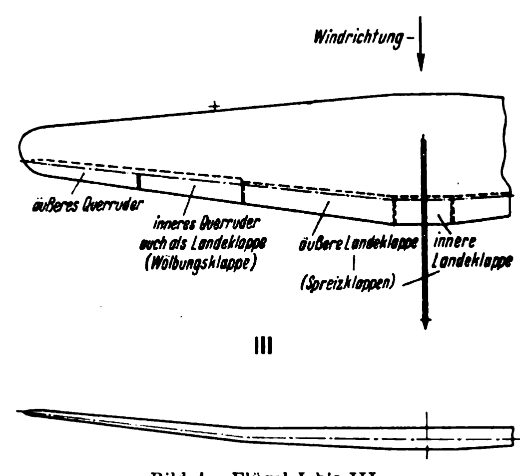


Bild 1. Flügel I bis III.

wurde für die Trapezflügel mit gerader Vorder- bzw. Hinterkante der geometrische Winkel zwischen Sehne und Kanalachse gewählt, für den dritten Flügel der Winkel zwischen der Bezugsachse des später angebauten Rumpfes und der Kanalachse. In den Anstellwinkelangaben zu Bild 4 bis 15 und Bild 16 bis 26 ist also der durch die Strahlgrenzen bedingte Fehler nicht berücksichtigt. Die Einstellung der Bezugsachse des angebauten Rumpfes gegen die Sehne in Flügelmitte betrug 2,5° nach unten.

Die Versuchsfolge war nun so, daß in dem Anstellwinkelgebiet, in dem der Strömungsvorgang normal verlief, die Winkeländerungen von 6° zu 6° erfolgten, traten jedoch Abreißerscheinungen auf, wurde jede folgende optisch feststellbare Veränderung aufgenommen und der dazugehörige Anstellwinkel festgestellt. Die Untersuchungen erfolgten bei symmetrischer Anblasung und bei einem Schiebewinkel $\tau = 9°$. Zu verstehen ist dabei der Winkel zwischen Modell-Symmetrie- und senkrechter Kanal-Symmetrieebene. Bei den Untersuchungen mit Klappenausschlag waren die Spreizklappen 60° und die inneren Querruder 40° ausgeschlagen. Die Versuche Flügel mit Rumpf und Gondeln erfolgten ohne Luftschrauben.

IV. Ergebnisse.

Hinsichtlich des Beurteilungsmaßstabs der Ergebnisse sei noch einmal auf die Erörterungen der Einleitung verwiesen. Demzufolge wurden drei Fadenzustände besonders beachtet.

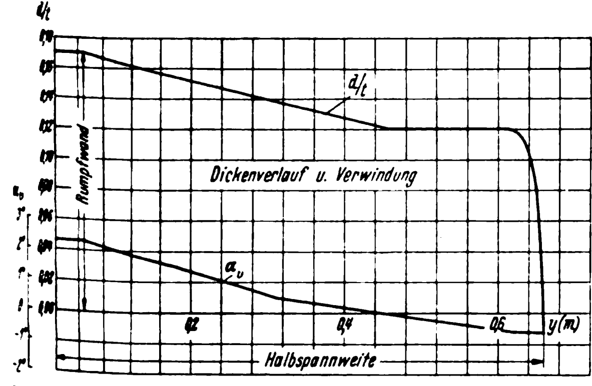


Bild 2. Verwindung des Trapezflügels mit gerader 30%-Linie und Dickenverlauf der drei Flügelmodelle.

1. Der Faden liegt in seiner ganzen Länge ruhig und glatt an der Oberfläche: Merkmal für anliegende Strömung.
2. Das Fadenende ist in Bewegung, der übrige Teil liegt noch glatt: Beginn des Abreißens am Fadenende.
3. Der ganze Faden ist in heftig schlagender Bewegung: Anzeichen, daß der Faden sich vollkommen in abgelöster Strömung befindet.

Nach diesen Gesichtspunkten erfolgte auch die Auswertung der aufgenommenen Bildreihen. Die einzelnen Abreißzonen sind in Bild 4 bis 15 als schraffierte Flächen gekennzeichnet. Die Lage der Modellaufhängebügel ist angedeutet. Wie die Bilder zeigen, setzt das Abreißen bei den Flügeln ohne Anbauten und Klappenausschlag stets an der Hinterkante in der Gegend hinter den vorderen Aufhängebügeln ein. Es wurde angenommen, daß die durch die vorderen Aufhängebügel hervorgerufene Störung den Ablösungsbeginn an dieser Stelle verursacht. Eine experimentelle Nachprüfung dieser Annahme fand aus Zeitmangel nicht statt.

Der Abreißverlauf der beiden unverwundenen Trapezflügel mit gerader Hinter- bzw. Vorderkante zeigt keine allzu großen Unterschiede, Bild 4 und 6. Bei beiden dehnt sich die Ablösung, ausgehend von den Auslösestellen hinter

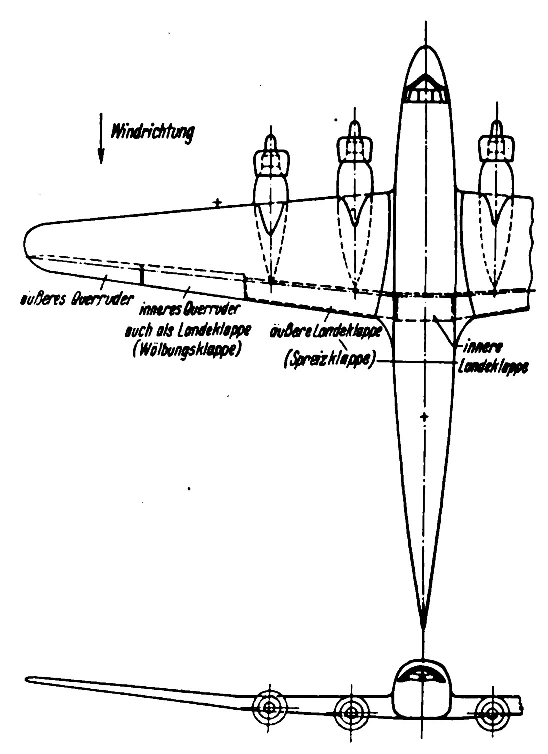


Bild 3. Flügel III mit Anbauten.

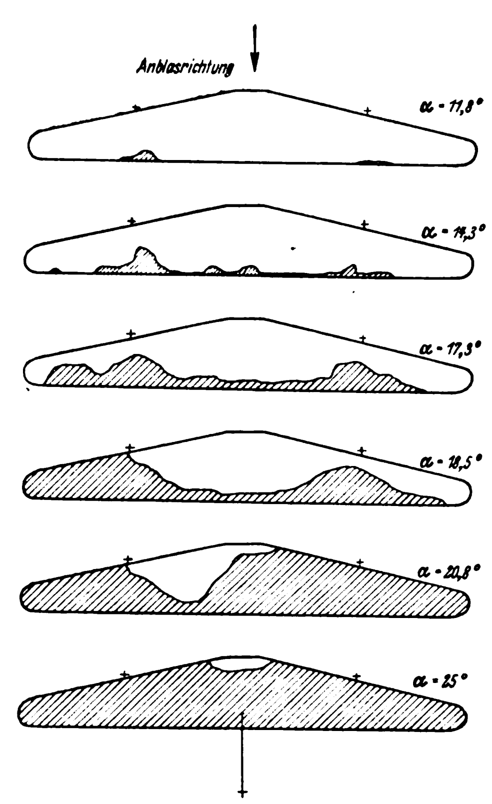


Bild 4. Flügel I, gerade Hinterkante, $\tau = 0°$.

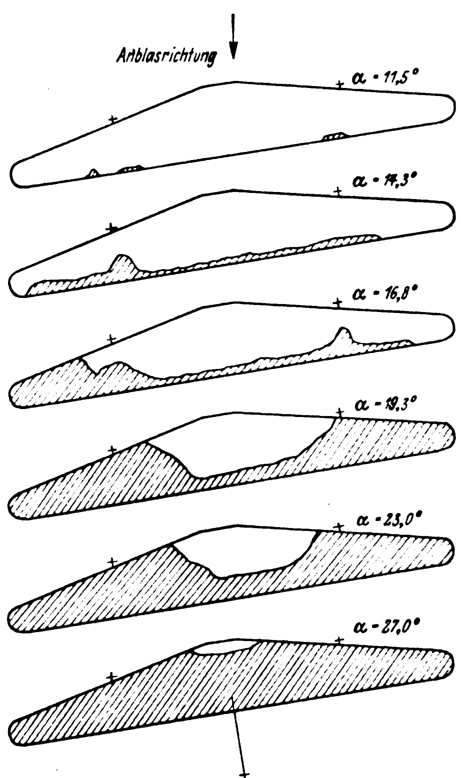


Bild 5. Flügel I, gerade Hinterkante, $\tau = 9°$.

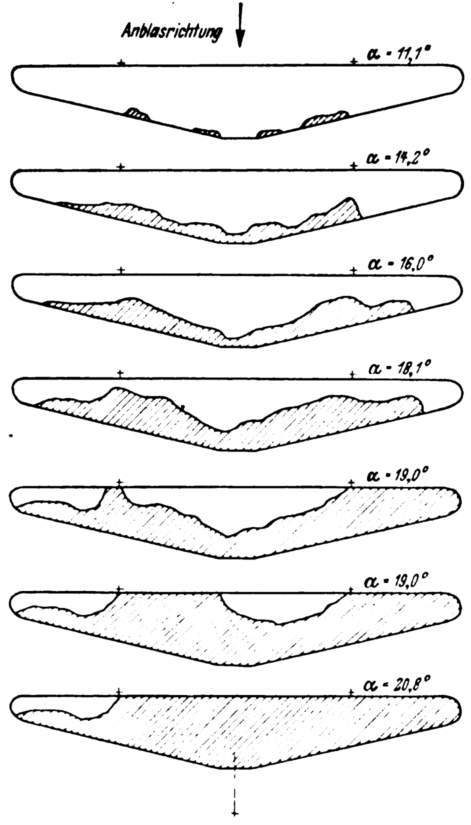


Bild 6. Flügel II, gerade Vorderkante, $\tau = 0°$.

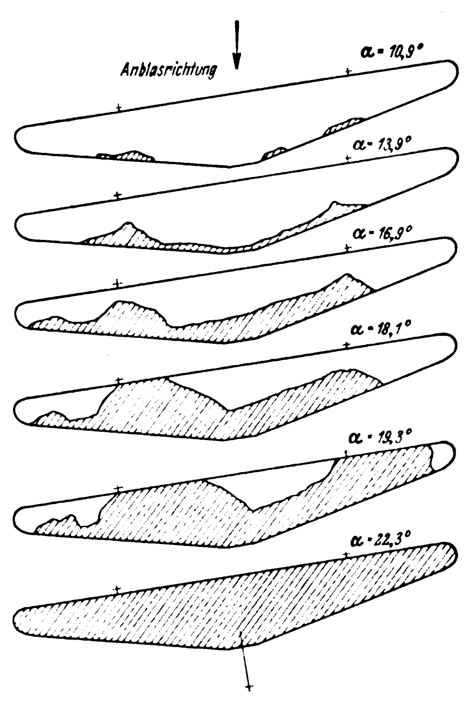


Bild 7. Flügel II, gerade Vorderkante, $\tau = 9°$.

der Aufhängung, über die Hinterkante aus und dringt dann weiter nach außen vor, bis schließlich einer der Außenflügel vollständig abreißt. In Richtung Vorderkante pflanzt sich das Abreißen dabei am kräftigsten an den Auslösestellen fort. Es hat den Anschein, als verhielte sich der Flügel mit gerader Vorderkante etwas gleichmäßiger und außen gutartiger; doch sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß an den Modellen kleine im Rahmen der Herstellungsgenauigkeit liegende, kaum vermeidbare Abweichungen und außerdem eine gewisse Inhomogenität des Luftstrahls in Kauf genommen werden mußten, die sehr leicht den Unterschied zwischen beiden Flügeln etwas verschleiern können. Es wird später noch einmal hierauf zurückgekommen.

Bei Schräganblasung verläuft der Abreißvorgang ähnlich wie bei symmetrischer Anströmung, nur verlagert sich das Abreißen mehr nach dem zurückliegenden Flügelende. Auch hier erscheint der Flügel mit gerader Vorderkante etwas gutartiger.

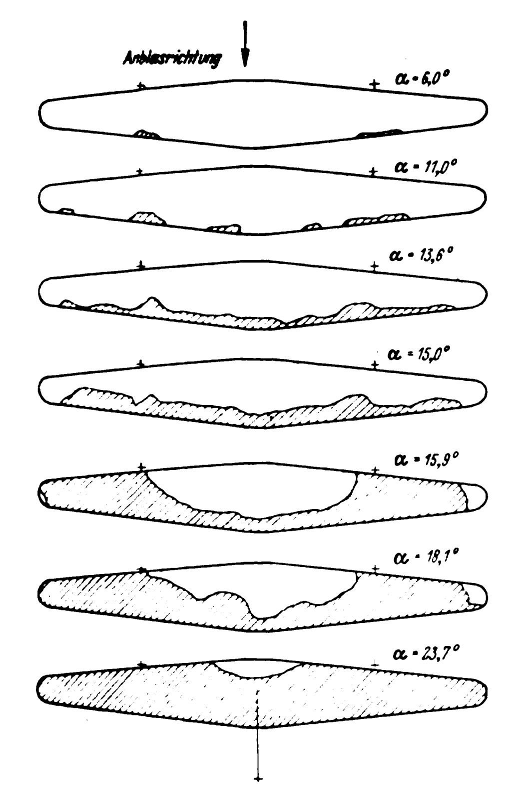


Bild 8. Flügel III, gerade 30%-Linie, Verwindung u. V-Form, $\tau = 0°$.

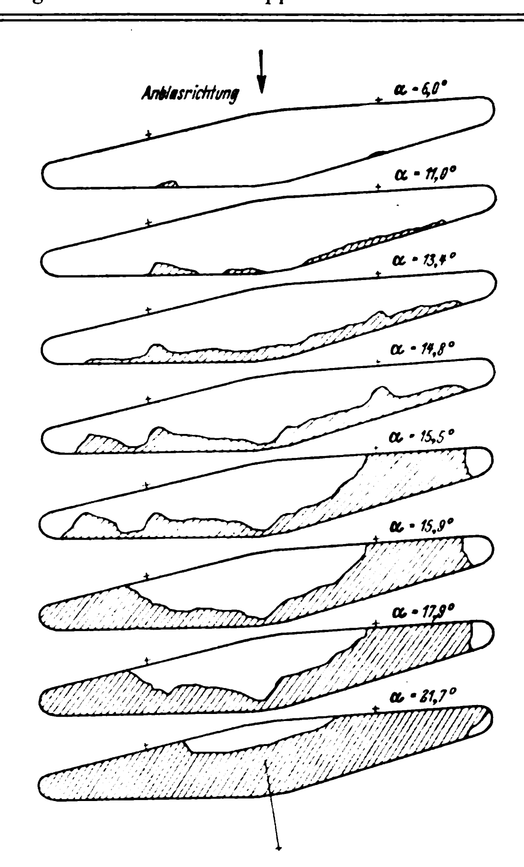


Bild 9. Flügel III, gerade 30%-Linie, Verwindung u. V-Form, $\tau = 9°$.

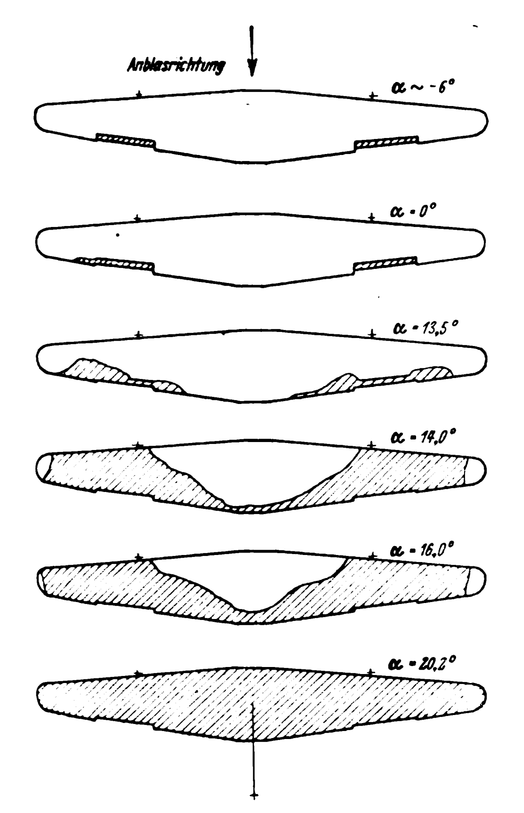


Bild 10. Flügel III, gerade 30%-Linie, Verwindung u. V-Form, ausgeschlagene Landeklappen, $\iota = 0°$.

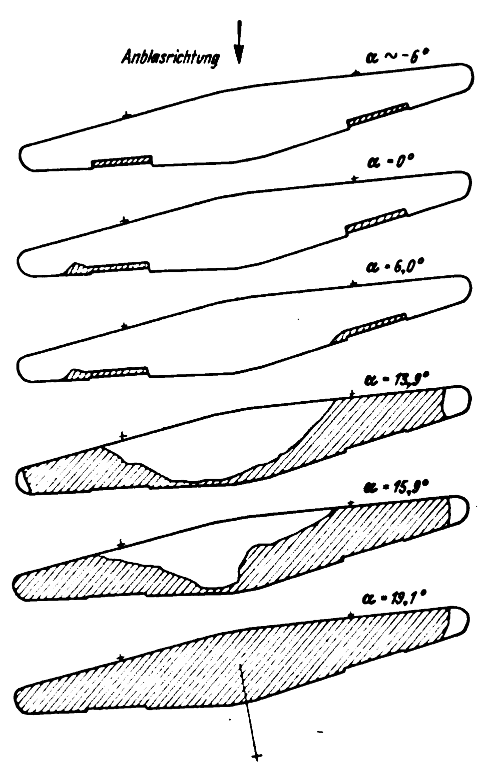


Bild 11. Flügel III, gerade 30%-Linie, Verwindung u. V-Form, ausgeschlagene Landeklappen, $\iota = 9°$.

Für die Betrachtung des Flügels mit Verwindung und V-Form, Bild 8, sei daran erinnert, daß seine Anstellwinkelangaben auf die Rumpfbezugsachse des später angebauten Rumpfes bezogen sind. Die Sehne des Mittenprofils war also 2,5° stärker angestellt als die Werte in dem Bild angeben. Der Abreißvorgang entspricht dem der anderen Flügel und verläuft auf beiden Flügelhälften recht gleichmäßig; auch hier sind die Flügelenden, trotz der Verwindung, als erste vollständig abgerissen. Dazu sei noch bemerkt, daß im Gegensatz zu den unverwundenen Trapezflügeln der verwundene als zusätzliche Störquelle Querruder und Klappen besaß. Die vorher erfolgten Kraftmessungen ohne Fadenbelegung decken sich, was die Anstellwinkel des Höchstauftriebes anlangt, annähernd mit den Fadenbeobachtungen. Der Höchstauftrieb des verwundenen Flügels war ein wenig größer als der der unverwunde-

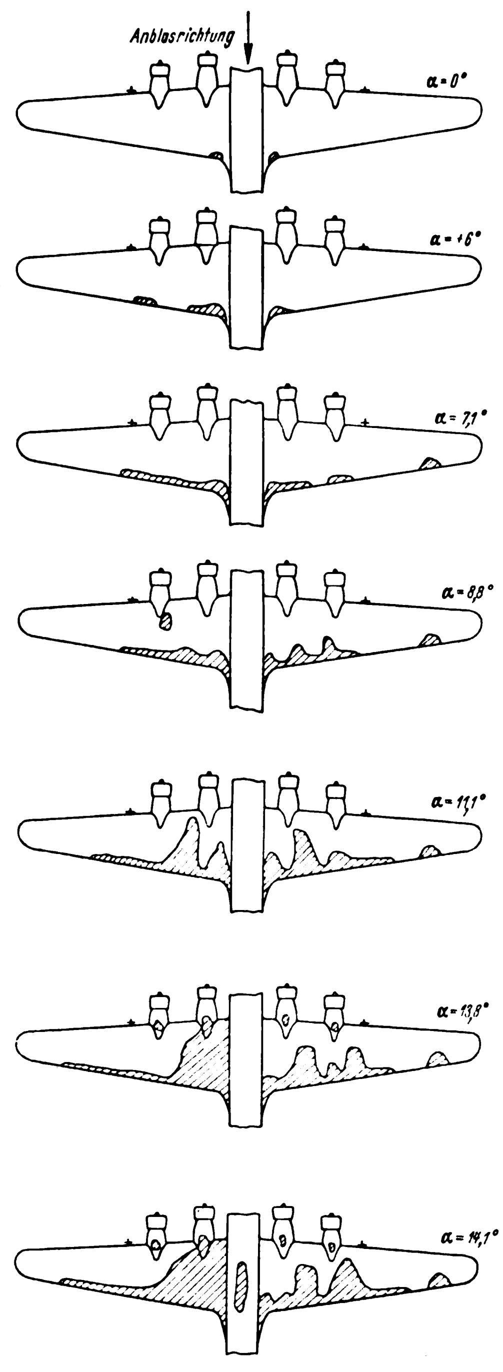


Bild 12. Flügel III mit Anbauten, $\tau = 0°$.

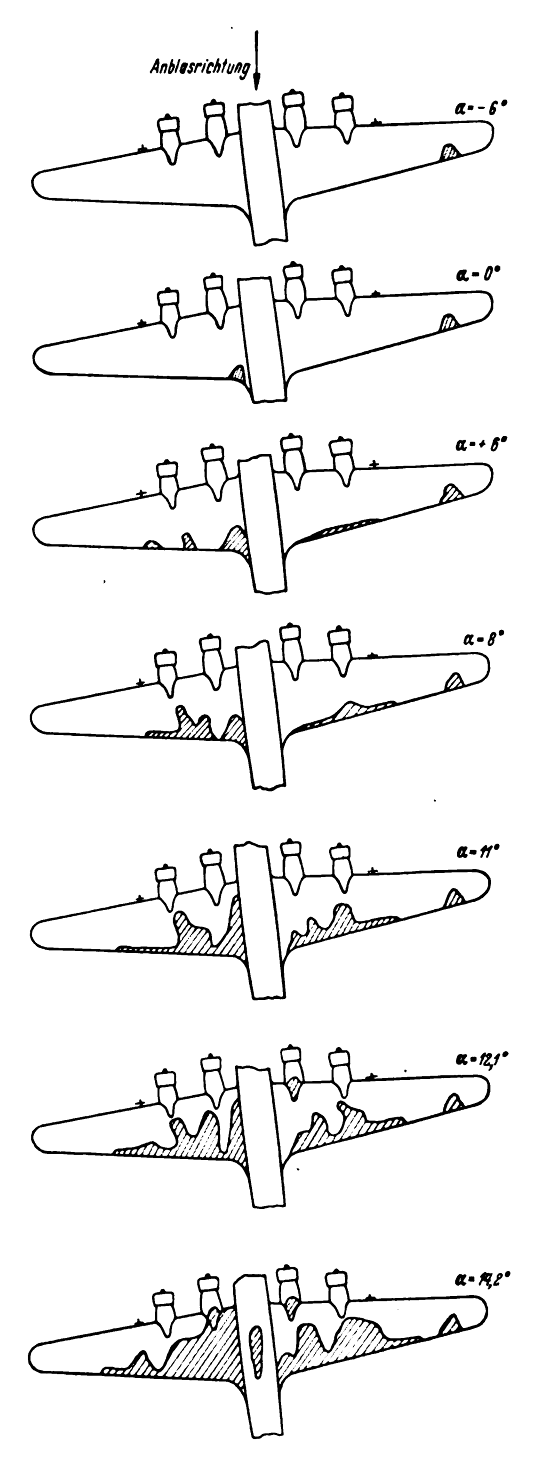


Bild 13. Flügel III mit Anbauten, $\tau = 9°$.

nen, während die unverwundenen Flügel untereinander gleichen Höchstauftrieb hatten. Die zugehörigen Anstellwinkel (α unkorrigiert), bezogen auf Sehne Mittenprofil, waren 17,7° (verwunden) bzw. 17° (unverwunden). Ein exakterer Vorgang wäre allerdings gewesen, zum Vergleich mit den Fadenbeobachtungen und als Aufschluß über den durch die Fäden verursachten Störungsumfang die Kraftmessungen auch mit Fadenbelegung vorzunehmen; doch muß hier der Zeitmangel als Entschuldigung angeführt werden.

Schräg angeströmt, Bild 9, zeigt der verwundene Flügel, abgesehen von einem sonst den unverwundenen Flügeln ähnlichen Verhalten, den Einfluß der V-Form. Er reißt jetzt am vorgeschobenen Ende zuerst vollständig ab.

Der verwundene Flügel mit ausgeschlagenen Klappen (Spreizklappen 60°, Wölbungsklappen 40°), Bild 10, zeigt sehr klar das noch früher erfolgende Abreißen der Außenflügel. Bei Schräganblasung, Bild 11, ist auch jetzt noch der Einfluß der V-Form bemerkbar, wenn auch in abgeschwächterer Form als beim Flügel ohne Klappenausschlag.

Als wesentlichstes Ergebnis kann bisher festgestellt werden, daß alle drei untersuchten Flügel für sich allein genommen vom Standpunkt der Quersteuerbarkeit in der Nähe des Auftriebsmaximums die zu stellenden Anforderungen nicht erfüllen. Dieses zu erwartende recht hoffnungslose Ergebnis ändert sich jedoch vollkommen bei Hinzukommen von Anbauten der hier untersuchten Art. Bedauerlicherweise konnten in dem vorgesehenen Meßprogramm die unverwundenen Flügel nicht mehr mit Anbauten untersucht werden.

In Bild 12 sind an den verwundenen Flügel ein Rumpf und vier Gondeln angebaut. Der Abreißvorgang setzt jetzt nicht mehr so eindeutig nur hinter der Aufhängung ein, sondern außerdem in den Diffusoren zwischen Flügel und

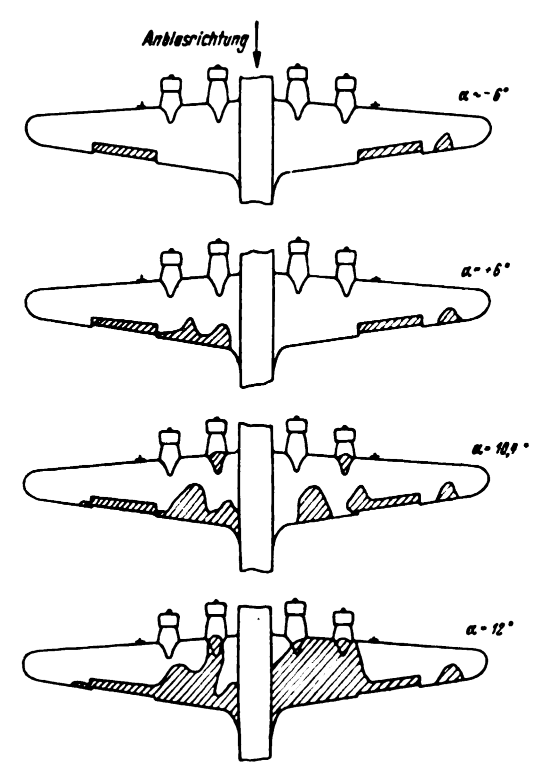


Bild 14. Flügel III mit Anbauten, ausgeschlagene Landeklappen, $\tau = 0°$.

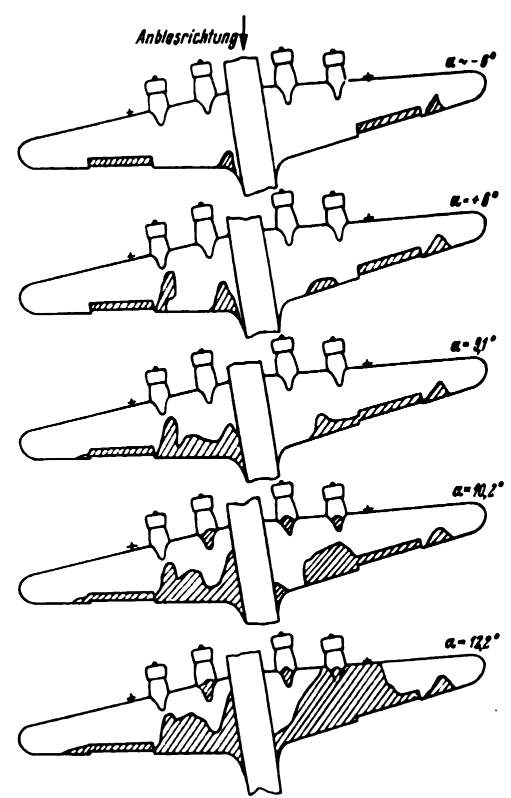


Bild 15. Flügel III mit Anbauten, ausgeschlagene Landeklappen, $\tau = 9°$.

Rumpf. Von diesen Stellen ausgehend, breitet sich das Abreißgebiet weiter nach den Seiten und nach vorn aus, jedoch so, daß in der Gegend des Auftriebsmaximums die Strömung an den Außenflügeln noch hinreichend gesund bleibt und jetzt der Innenflügel zuerst vollständig abreißt. Die Störung auf dem rechten Außenflügel rührt allem Anschein nach von einem unbemerkt gebliebenen Fehler einer Fadenbefestigung her und ist von der Betrachtung auszuschließen. Sie tritt auch in den folgenden Bildreihen auf.

Bei Schräganströmung, Bild 13, bleibt die gutartige Tendenz, zuerst in der Mitte abzureißen, erhalten, desgleichen auch bei ausgeschlagenen Klappen (Spreizklappen 60°, Wölbungsklappen 40°, Bild 14 und 15).

Zum weiteren Verständnis einiger bisher mitgeteilter Beobachtungen sei nunmehr auf die stellenweise aufgetretenen Grenzschichtbewegungen quer zur Anströmungsrichtung eingegangen. Am Flügel mit gerader Hinterkante war bei symmetrischer Anströmung nur sehr schwache Querströmung, und zwar nach der Mitte hin, zu beobachten, während am Flügel mit gerader Vorderkante recht merkbare, mit dem Anstellwinkel wachsende Querströmung auftrat. Die Fäden wurden nach der Mitte zu abgelenkt, wohl als Folge eines Druckgefälles, dessen Ursache, wie besonders das unterschiedliche Verhalten der beiden Flügel zeigt, neben anderen, hier nicht zur Erörterung stehenden Faktoren, in der Verschiebung der einzelnen Profile gegeneinander längs der Spannweite zu suchen sein dürfte. Die Querströmung bewirkt nun, daß Grenzschichtmaterial von den Außenflügeln nach innen transportiert wird. Der Abreißvorgang wird auf diese Weise außen verzögert und somit gutartiger, was bereits eingangs bei der Kritik der beiden Flügel zum Ausdruck kam; doch sind die Unterschiede nicht erheblich und können z. T. von anderen ebenfalls bereits eingangs erwähnten Einflüssen überdeckt sein.

Unter Schräganströmung tritt auch beim Flügel mit gerader Hinterkante eine merkliche Querrichtung der Fäden auf, und zwar an der vorgeschobenen Flügelhälfte in verstärktem Maße nach innen, an der zurückliegenden Flügelhälfte teilweise schwach nach außen. Die so erfolgende unterschiedliche Grenzschichtbeeinflussung der beiden Flügelhälften muß mit zur Entstehung von Unterschieden im Abreißverlauf beitragen. Wie bereits früher bemerkt, verlagert sich das Abreißen mehr zur zurückliegenden Flügelhälfte.

Der Flügel mit gerader Vorderkante weist selbst bei Schiebestellung 9° an der zurückliegenden Flügelhälfte noch eine schwach nach innen gerichtete Querströmung auf, bezogen auf die Anströmrichtung, während die vorgeschobene Flügelhälfte um so stärkere Querströmung nach innen besitzt. Das Abreißen verlagert sich auch hier mehr nach der zurückliegenden Flügelhälfte, doch der Abreißverlauf geht allmählicher vonstatten als beim 9° schiebenden Flügel mit gerader Hinterkante.

Der verwundene Flügel zeigt hinsichtlich Grenzschichtquerströmung sowohl bei symmetrischer wie unsymmetrischer Anströmung etwa das gleiche Bild wie der Flügel mit gerader Vorderkante nur in abgeschwächter Form. Abgesehen von gewissen örtlichen Abweichungen, besonders hinter den Gondeln, bleibt dieses Bild in seiner Grundtendenz auch bei Hinzufügen der Anbauten oder bei Ausschlag der Klappen (Spreizklappen 60°, Wölbungsklappe 40°).

Im Verlauf dieser Querströmungsbeobachtungen der Grenzschicht interessierte, wie weit die Strömung auch außerhalb der Grenzschicht einem längs der Spannweite auftretenden Druckgefälle folgen würde. Zu diesem Zweck wurden in mehreren Vertikalebenen längs der Spannweite die Fadenrichtungen in Abhängigkeit vom Abstand von der Flügeloberseite beobachtet und festgestellt, daß bei größeren Anstellwinkeln die Fäden auch außerhalb der Grenzschicht merkbar in der Querrichtung abgelenkt wurden. Erst in einem Abstand von etwa 20 bis 30% der Profiltiefe oberhalb des Flügels waren die Querbewegungen dann praktisch abgeklungen. In dieser Höhe über dem Flügel überwog also die Geschwindigkeitskomponente in Anströmrichtung die Querkomponente so, daß eine Abweichung von der Anströmrichtung so gut wie nicht mehr vorhanden war. Bild 16 bis 18 veranschaulichen andeutungsweise dieses Ergebnis.

V. Zusammenfassung.

An drei Trapezflügeln wurde der Verlauf der Strömungsablösung an der Hand von Fadenbeobachtungen so-

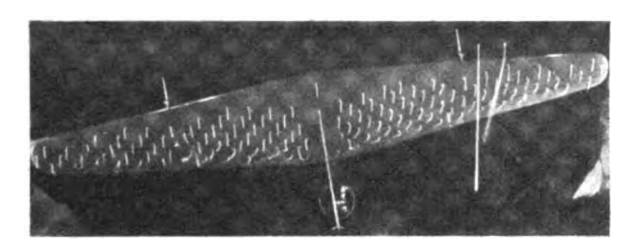


Bild 16. Flügel III, Fadensonde 2 mm über Flügeloberfläche, $\alpha = 14,5°$, $\iota = 9°$.

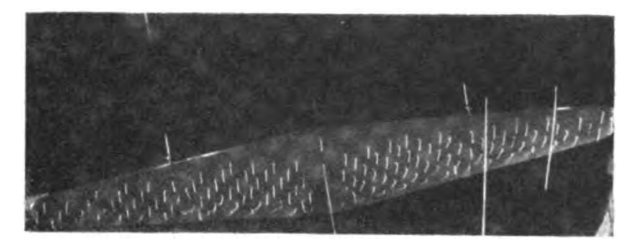


Bild 18. Flügel III, Fadensonde 50 mm über Flügeloberfläche, $\alpha = 14,5°$, $\iota = 9°$.

wohl bei symmetrischer wie unsymmetrischer Anströmung verfolgt. Bei gleicher Dicken- und Tiefenverteilung besaßen die Flügel verschiedene Form der tragenden Linie. Einer von ihnen hatte außerdem Verwindung und V-Form und wurde zusätzlich mit Rumpf, Gondeln und bei Landeklappenausschlag untersucht. Als hauptsächliches Ergebnis



Bild 17. Flügel III, Fadensonde 20 mm über Flügeloberfläche, $\alpha = 14,5°$, $\iota = 9°$.

zeigte die Untersuchung, daß die Flügel für sich allein zuerst an den Flügelenden vollkommene Strömungsablösung aufwiesen, auch der verwundene, daß jedoch durch Hinzufügen von Rumpf und Gondeln in der hier untersuchten Anordnung der verwundene Flügel zuerst in Flügelmitte vollständig abgerissen war. Weiter wurden Grenzschichtbewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung festgestellt und deren möglicher Einfluß auf den Abreißverlauf kurz behandelt. Darüber hinaus konnten gewisse Aufschlüsse erhalten werden, in welchem Ausmaß die in der Grenzschicht beobachteten Querbewegungen auch oberhalb der Grenzschicht noch merkbar werden.

VI. Schrifttum.

[1] Jakobs, Ward and Pinkerton, The Characteristics of 78 related Airfoil sections from Test in the variable density Wind Tunnel. NACA T. Rep. 460.
[2] Ergebnisse der AVA zu Göttingen. Lieferung I.
[3] H. Focke, Der Windkanal der Focke-Wulf Flugzeugbau, A.-G., Bremen. Z. Flugtechn. Bd. 22 (1932).

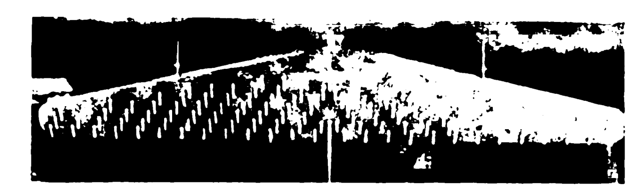


Bild 19. Flügel I, $\alpha = 11,3°$, $\iota = 0°$.



Bild 20. Flügel I, $\alpha = 11,5°$, $\iota = 9°$.



Bild 21. Flügel II, $\alpha = 11,1°$, $\iota = 0°$.

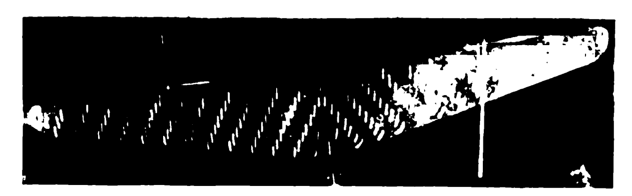


Bild 22. Flügel II, $\alpha = 10,9°$, $\iota = 9°$.

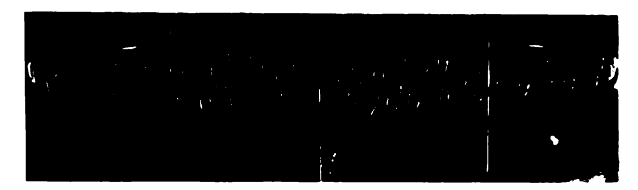


Bild 23. Flügel III, $\alpha = 11°$, $\iota = 0°$.



Bild 24. Flügel III, $\alpha = 11°$, $\iota = 9°$.

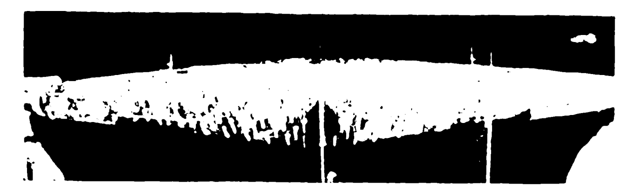


Bild 25. Flügel III mit ausgeschlagenen Landeklappen, $\alpha = 13,5°$, $\iota = 0°$.

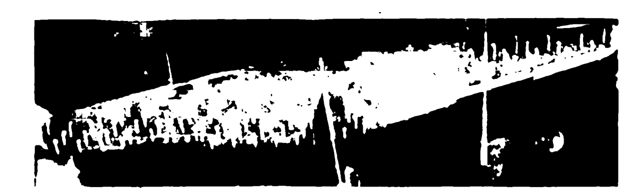


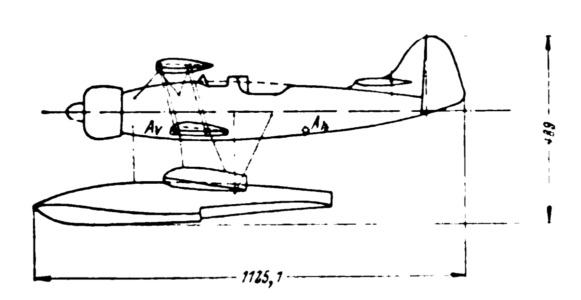
Bild 26. Flügel III mit ausgeschlagenen Landeklappen, $\alpha = 6°$, $\iota = 9°$.

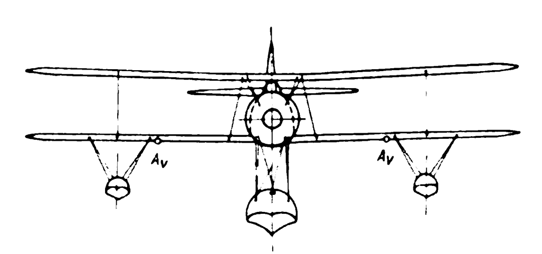


Sechskomponentenmessung an einem Seeflugzeugmodell.

Von O. Pabst.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.





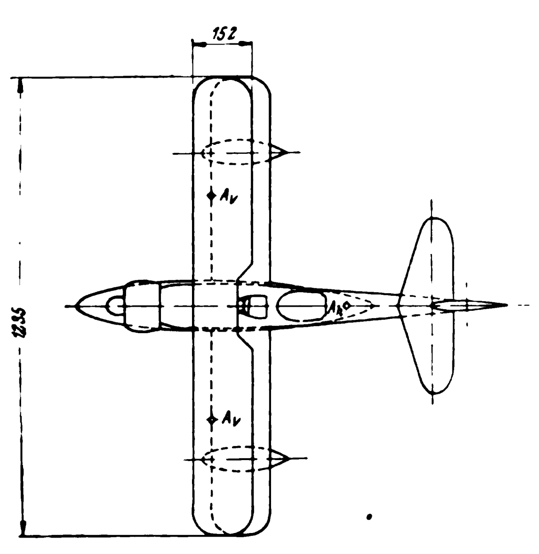


Bild 1. Modellskizze.

Zur Vermehrung des Versuchsmaterials über das Verhalten von Seeflugzeugen bei Anblasung aus beliebiger Richtung wird im vorliegenden Bericht die Untersuchung an einem Seeflugzeugmuster der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. mitgeteilt. Die Untersuchung ist insofern abweichend von den bisherigen Veröffentlichungen, als sie Messungen ohne Anwesenheit des Wasserspiegels wiedergibt. Die bisherigen Messungen gingen meist von den Stabilitätsfragen von auf dem Wasser schwimmenden Seemaschinen aus, während im vorliegenden Fall statische Fragen im Vordergrund standen. Es ist ein Anstellwinkel bei seitlicher Anblasung von 0 bis 360° und Hängewinkeln von 0 bis 30° durchgemessen. Die Ergebnisse werden besprochen und mit früheren Veröffentlichungen verglichen.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die bisher bekanntgewordenen Untersuchungen über Seeflugzeuge sind meist aus Gründen der Schwimmstabilität angestellt worden. Entsprechend sind es Messungen, bei denen der Wasserspiegel durch eine während des Versuchs zweckentsprechend angebrachte Platte dargestellt wurde. Bei der Aufgabe, die statischen Beanspruchungen zu ermitteln, die beim festgezurrten Flugzeug in der Ruhestellung oder kurz vor dem Abschuß oder auch während des Abschusses auf einem Katapult vorhanden sind, gaben die bisherigen Messungen keine befriedigenden Aufschlüsse. Insbesondere konnten die bisher durchgeführten Hängewinkel bis etwa 5° im vorliegenden Falle stark überschritten werden. Um also die Festigkeitsrechnungen auf einen etwas festeren Boden zu stellen, wurde das Modell eines Seeflugzeugmusters im Windkanal der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. einer entsprechenden Untersuchung unterzogen.

II. Aufgabe der Untersuchung.

Es war beabsichtigt, durch die Messungen alle Luftkräfte klarzustellen, die bei einem auf einem Katapult festgezurrten Flugzeug auftreten können, gleichgültig, welche Stellung es zu der Windrichtung bzw. Anblasrichtung einnimmt. Unter Berücksichtigung der größtmöglichen Roll-, Stampf- und Gierwinkel, die an einem Schiff auftreten können, wurde der größtmögliche Hängewinkel zu 30° bestimmt, während die seitliche Anblasung von 0° bis 360° wechseln konnte. Beim Anstellwinkel war dagegen nur ein Winkel notwendig. Da die Wirkung der Landehilfen nicht vorauszusehen war, wurden die Messungen gleichmäßig ohne und mit betätigten Landehilfen durchgeführt.

III. Vorbereitung zu den Messungen.

a) Das Modell.

Das Modell ist ein normaler Doppeldecker mit Sternmotor. Das Schwimmwerk besteht aus einem Zentral- und zwei seitlichen Stützschwimmern. Die ausführliche Darstellung zeigt Bild 1. Der Modellwerkstoff war Lindenholz. Um ein Verziehen durch das Arbeiten des Holzes zu verringern bzw. ganz zu vermeiden, war das Modell mit Spachtel und Farbe überspritzt. Die Streben zwischen den Tragflügeln bestanden aus Stahlblech, das entsprechend der normalen Anblasrichtung profiliert war. Die Strebenzahl entspricht nicht dem richtigen statischen Verband an der Großausführung, da im Modellversuch dann der Widerstand zu groß ermittelt wird. Aus dem gleichen Grunde waren Teile wie Bewaffnung usw. weggelassen. Die vordere Aufhängungsachse war eine Querachse durch die für die Zurrstellung gefährlichste Schwerpunktslage. Die Lage der Aufhängepunkte ist in Bild 1 angegeben. Der hintere Aufhängepunkt lag in einer zur Rumpfbezugsachse parallelen Ebene durch die vorderen Aufhängepunkte. Die Sehnen-



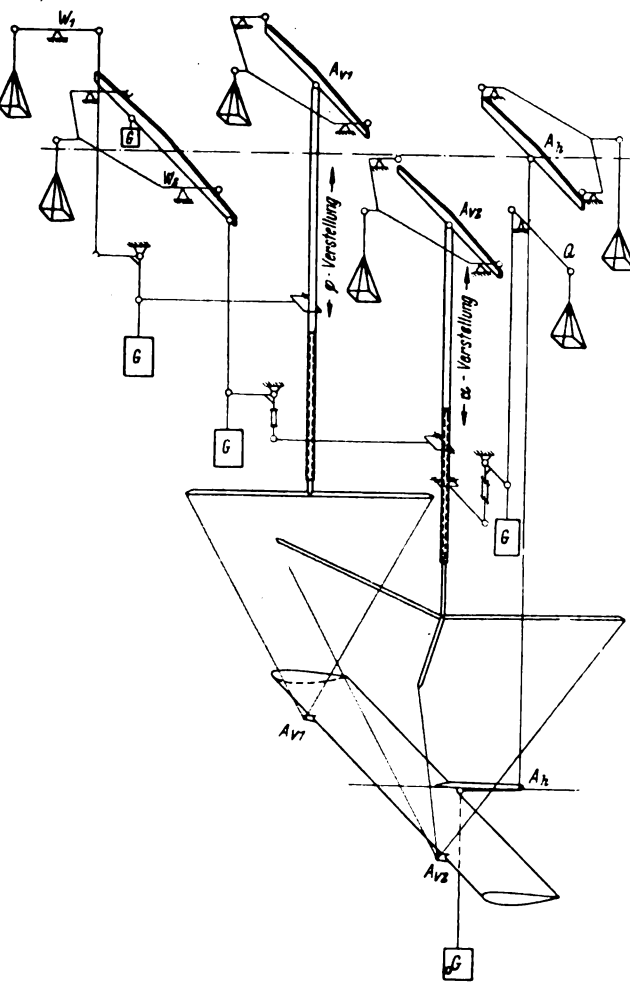


Bild 2. Schema der Sechskomponentenwaage.

ebene des Unterflügels war + 2,5°, die des Oberflügels + 0,5° gegen die Rumpfachse angestellt. Eine Verwindung der Flügel war nicht vorhanden. Das symmetrisch profilierte Höhenleitwerk hatte gegen die Rumpfachse keine Anstellung. Die Schwimmer waren von üblicher Form. Die Wassersteuerung des Zentralschwimmers war aus den schon erwähnten Gründen der Widerstandsermittlung weggelassen.

b) Die Aufhängung.

Eine Beschreibung der Windkanalanlage mit der sonst üblichen Art der Modellaufhängung ist in [1] zu finden. Die bisherige Sechskomponentenwaage, die der von Göttingen bekannten Art entsprach [2], wies für eine Messung, wie sie hier notwendig wurde, einige Unannehmlichkeiten auf. Einmal war die Möglichkeit einer seitlichen Anblasung durch die Fixpunkte der Aufhängung unter dem Strahl auf etwa 60° beschränkt. Zum andern benötigte man zur Einstellung der Schiebewinkel mehrere Personen, da die Befestigungen am Boden unter der Meßstrecke gesondert vom Waagentisch eingestellt werden mußten. Außer der Umständlichkeit der Einstellung war die Eichung der Aufhängung, die ja bei der Ausgangsstellung erfolgt, in ihrer Genauigkeit in Frage gestellt. Die Aufhängung hatte überdies noch einen Nachteil aerodynamischer Art. Der Draht für die Aufnahme der Seitenkraft läuft nämlich in ziemlicher Länge vor dem Modell, meist sogar direkt vor dem Flügelprofil her. Frühere Untersuchungen hatten gezeigt, daß der Draht leicht als Stördraht wirkt und dann ziemliche Fehler verursachen kann.

All diese Gründe waren bestimmend für die Entwicklung einer Art der Aufhängung, die diese Fehler vermeidet, ohne andere dafür in Kauf zu nehmen. Bild 2 zeigt das Schema der neuen Sechskomponentenwaage. Das Modell wird wieder an drei Punkten erfaßt, zwei vorderen Punkten auf einer Querachse und einem hinteren Punkt in der Symmetrieebene. Einer der beiden vorderen Punkte führt Kräfte aller drei Richtungen ab. Er wird daher von drei Drähten gehalten, die in Form einer dreiseitigen Pyramide zu einem Gerüst führen. Dieses Gerüst ist an einer der Auftriebswaagen aufgehängt. Der zweite vordere Modellpunkt wird von zwei Drähten gehalten, die nur Kräfte in Richtung des Lotes und der horizontalen Längsrichtung aufnehmen. Dieses Gerüst hängt an einer zweiten Auftriebswaage. Der dritte Punkt gibt nur eine Kraft in der Senkrechten an eine dritte Auftriebswaage ab. Die waagerechten Kräfte werden etwa in der Mitte zwischen Modell und Auftriebswaagen durch angelenkte Gabeln an den beiden vorderen Gerüsten abgenommen und über Umlenkhebel den normalen Waagen für Widerstand und Querkraft zugeführt. Da an dem Schaft des einen Gerüstes die Gabeln für zwei aufeinander senkrecht stehende Kräfte angreifen, müssen die Umlenkhebel durch Laschen seitlich beweglich gehalten werden, da sonst die beiden Waagen blockiert werden. Sämtliche Gelenkpunkte sind mit Kugellagern versehen. Die Festpunkte und Lager sind alle am Waagentisch befestigt, so daß durch Verdrehen des Waagentisches gleichzeitig Aufhängung und Modell mitgedreht werden, ohne daß irgendeine weitere Einstellung notwendig ist. Wie man sieht, sind die oben angeführten Nachteile der alten Anordnung damit vollständig vermieden. Da der Anstellwinkelbereich des Waagentisches nur ± 25° beträgt, wurde eine Möglichkeit vorgesehen, dem Modell Hängewinkel geben zu können. Die beiden Gerüste besitzen einen Tubus, durch den ein Hängewinkel bis über 30° hergestellt werden kann.

In der inzwischen erfolgten Erprobung hat sich gezeigt, daß die neue Aufhängung der alten Art überlegen ist. Die Empfindlichkeit in Sechskomponentenanordnung ist mit der früheren etwa gleich. Bei abgekoppelter Seitenkraft und Ersatz der drei Drähte des einen Gerüstes durch zwei in der gleichen Anordnung wie am anderen Gerüst stellt man einfach eine Dreikomponentenwaage her. Diese Dreikomponentenwaage ist an Empfindlichkeit der früheren Dreikomponentenwaage überlegen. Es hat sich gezeigt, daß die Anpassung an die verschiedenen Versuchsbedingungen außerordentlich schnell und einfach gelingt. Weiter hat sich der Drahtwiderstand auf etwa die Hälfte vermindert, ein Vorteil, der bei der Ermittlung kleiner Modellwiderstände zutage tritt. In Bild 3 und 4 ist die Herabsetzung der Drahtzahl deutlich zu sehen. Bei dem hier behandelten Modell mußte wegen des durchlaufenden Zentralschwimmers für die hintere Aufhängung eine Spreize angebracht werden. Da es sich jedoch in diesem Falle um die Ermittlung von ziemlich groben Kräften handelt, fällt dies nicht ins Gewicht. Ist das Modell selbst nicht schwer genug, so kann die Vorbelastung an möglichst wenig störender Stelle als Einzelgewicht angebracht werden. Es muß dann darauf geachtet werden, daß das Modell genügend steif gebaut ist, damit keine Änderungen am Modell auftreten. Wie schon erwähnt, sind alle Gelenke nicht durch Schneiden dargestellt, sondern als Kugellager ausgeführt. Dies gilt natürlich nicht für die eigentlichen Einzelwaagen. Die Kugellager bedürfen besonderer Beachtung. Einmal wurde darauf gesehen, die Kugellager mit möglichst langen Hebeln zusammenarbeiten zu lassen, um das Reibungsmoment an sich klein zu machen, andererseits wurde auf fehlerfreien Einbau der Kugellager geachtet. Schläge auf die Lager, auch leichter Art, müssen unbedingt vermieden werden, da sonst sogleich Hemmungen festzustellen sind. Um Störungen durch Dauerbelastung zu vermeiden, sind die Lager nur durch Luftkräfte belastet. Außerdem werden sie in längeren Zeiträumen nachgeprüft und in ihrer Fassung etwas gedreht.

IV. Versuchsgang, Auswertung und Bezeichnungen.

Wie in der Aufgabenstellung vorgesehen, erstreckte sich der Meßbereich beim Schiebewinkel von 0 bis 360° mit



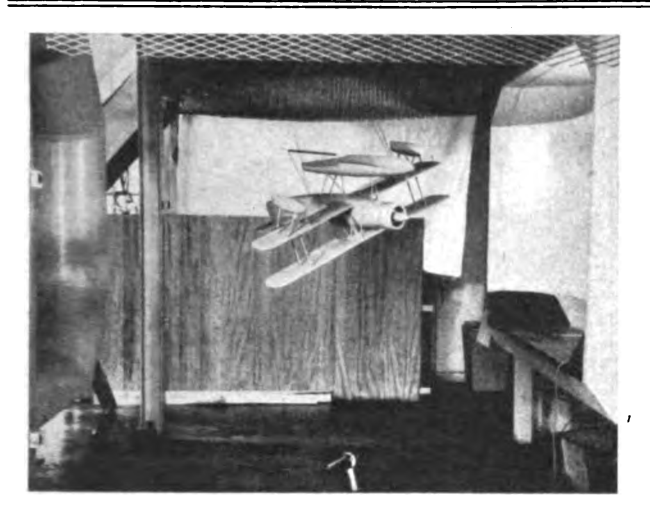


Bild 3. Modell in der Meßstrecke, Seitenansicht.

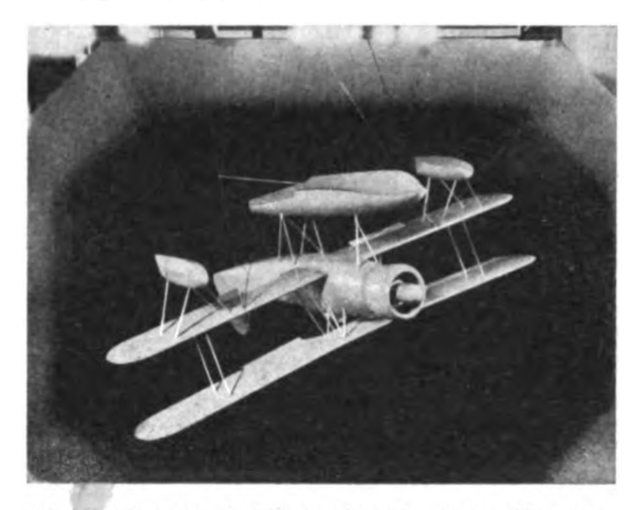


Bild 4. Modell in der Meßstrecke, Ansicht von der Düse aus.

Abständen von 30 zu 30°. Der Anstellwinkel wurde entsprechend der Zurrstellung der Großausführung mit 5,5° festgehalten. Der Hängewinkel wurde von 10 zu 10° bis maximal 30° verändert. Die Untersuchung der Stellung ohne Hängewinkel geschah aus Symmetriegründen nur bei Schiebewinkeln —30° bis +210°. Alle Stellungen sind ohne und mit betätigten Landehilfen untersucht. Im Landefall ist die innere Klappe 20°, die beiden äußeren sind 6° ausgeschlagen. In der Auswertung sind die Versuchswerte aus dem Waagensystem auf flugzeugfeste Koordinaten umgerechnet. Eine Korrektur zur Entfernung des Einflusses der Luftstrahlgrenzen wurde nicht angebracht, da die Auftriebsverteilung bei den meisten Versuchspunkten stark von der elliptischen abweicht und deshalb die Korrektur selbst fehlerhaft wäre. Bild 5 zeigt die Anordnung und Richtung der Winkel, Kräfte und Momente, die in den Diagrammen erscheinen. Als Bezugsfläche ist durchweg die ganze Flügelfläche 0,36 m², als Bezugslänge die Tiefe des Profils am rechteckigen Flügelteil mit 0,152 m gewählt. Die Windgeschwindigkeit lag zwischen 17 und 32 m/s.

Bezeichnungen.

x	Modell-Längsachse nach vorn	0-Punkt im gegebenen Schwerpunkt, Bild 1 A_v
y	Modell-Querachse nach rechts	
z	Modell-Hochachse nach unten	
ξ	Kanalhauptachse	Richtungen und 0-Punkte wie oben
η	Kanalquerachse	
ζ	Kanalhochachse	
α'	Anstellwinkel	im waagenfesten System
τ'	Schiebewinkel	
φ'	Hängewinkel	
c_n	Normalkraftbeiwert	Richtung entgegen x, y, z
c_t	Längskraftbeiwert	
c_s	Seitenkraftbeiwert	
cm_q	Rollmomentenbeiwert	um x, y, z linksdrehend
cm_h	Kippmomentenbeiwert ohne Strahlkorrektur	
cm_s	Giermomentenbeiwert	

V. Ergebnisse.

a) Ohne Landehilfe.

Der Verlauf des Normalkraftbeiwertes ist in Bild 6 dargestellt. Erwartungsgemäß ergaben sich ohne Hängewinkel Größtwerte bei Anströmung von vorn und von rückwärts. Bei $\tau' = 90°$ ist die Normalkraft entsprechend der geringen V-Stellung und der sehr schlechten Streckung nur sehr klein. Wird Hängewinkel gegeben, so wandert der Größtwert nach größeren Schiebewinkeln. Als Grenzlage ergäbe sich bei $\varphi' = 90$ ein Schiebewinkel von 90°, wobei dann c_n ein Widerstandsbeiwert wäre. Zwischen $\tau = 90$ und 180° tritt bei großem φ' ein neuer Extremwert auf, der der starken Anstellung und der gegen $\tau' = 90°$ vergrößerten scheinbaren Spannweite in diesem Bereich entspricht. Ein ähnlicher Fall zeigt sich bei Anblasung von $\tau' = -60°$ (+ 290°) nach der negativen Seite.

Der Längskraftbeiwert c_t, aufgezeichnet in Bild 7, zeigt einen ziemlich unregelmäßigen Verlauf. Vom Hängewinkel ist er nur wenig abhängig. Seine Größe ist an sich unbedeutend.

In Bild 8 ist der Seitenkraftbeiwert zu finden. Man erkennt, daß er fast nur vom Schiebewinkel abhängt. Selbst der große Hängewinkel 30° hat nur geringen Einfluß. Der Widerstand des Rumpfes und des Schwimmerwerks bei seitlicher Anblasung überwiegt demnach die Flügelseitenkräfte erheblich.

Der Rollmomentenbeiwert, Bild 9, zeigt sich naturgemäß kräftig vom Hängewinkel abhängig. Vor allem bei stark seitlicher Anblasung zeigt sich dieser Effekt. Ohne Hängewinkel ist bei kleinen Schiebewinkeln ein proportionaler Verlauf mit τ' festzustellen. Das gleiche gilt in der Nähe von $\tau' = 180°$. Das geringe Rollmoment bei $\tau' = 0°$ und 180° ist durch Ungleichmäßigkeiten von Modell und Strahl zu erklären. Die absoluten Größtwerte des Rollmoments liegen bei ähnlichen Schiebewinkeln wie die der Normalkraft. Trotz der großen Seitenkraft des Schwimmers bei starker seitlicher Anblasung genügt die geringe V-Form, um bei $\varphi' = 0°$ das Vorzeichen des Rollmoments im Sinne der V-Form zu erhalten.

Der Kippmomentenbeiwert in Bild 10 zeigt für $\tau' = 0$ und $\varphi' = 0$ ein schwaches Minimum. Die Abhängigkeit des cm_h vom Hängewinkel ist bedeutend. Bei Schiebewinkeln bis in die Nähe von 180° ergibt sich durch den Hänge-

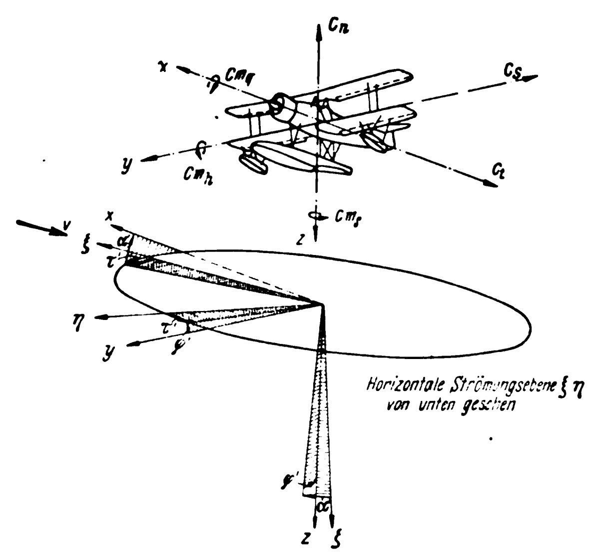


Bild 5. Winkel, Kräfte, Momente.

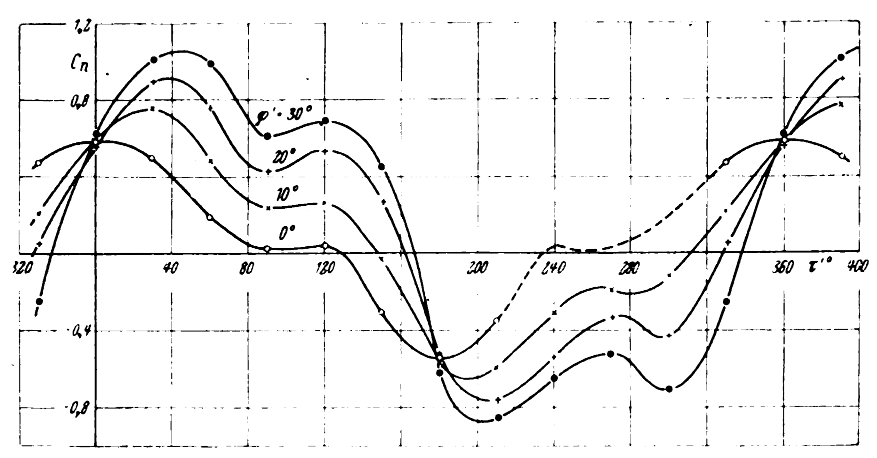


Bild 6. Normalkraftbeiwert ohne Landehilfe.

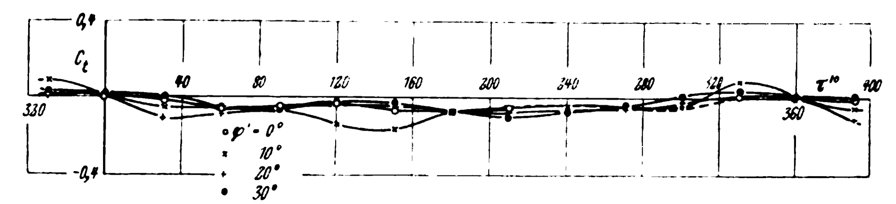


Bild 7. Längskraftbeiwert.

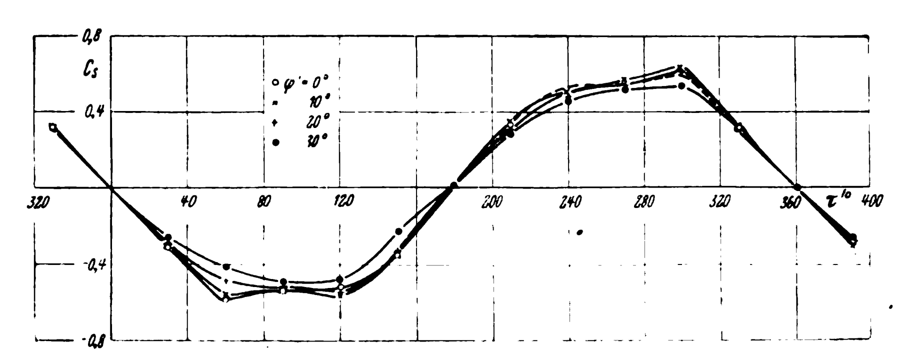


Bild 8. Seitenkraftbeiwert.

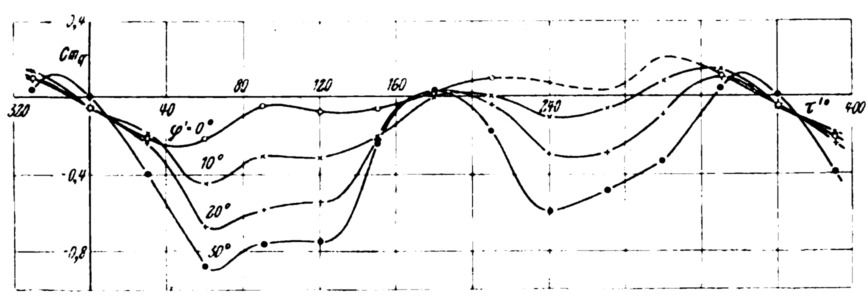


Bild 9. Rollmomentenbeiwert.

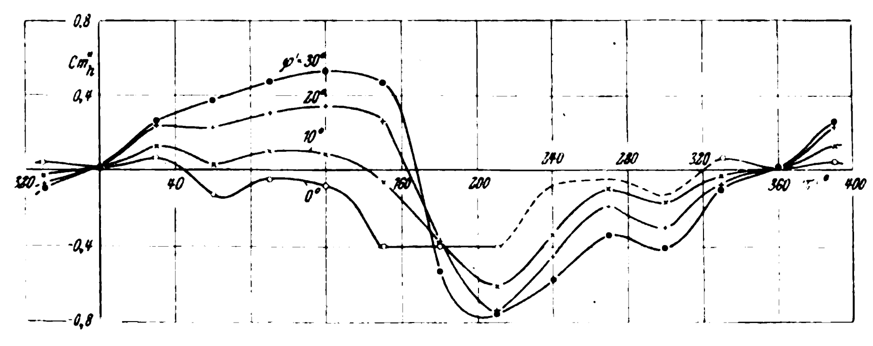


Bild 10. Kippmomentenbeiwert.

Bild 5 bis 11. $\alpha' = 5{,}5°$; $\beta_K = \beta_{Q_r} = \beta_{Q_l} = 0°$.

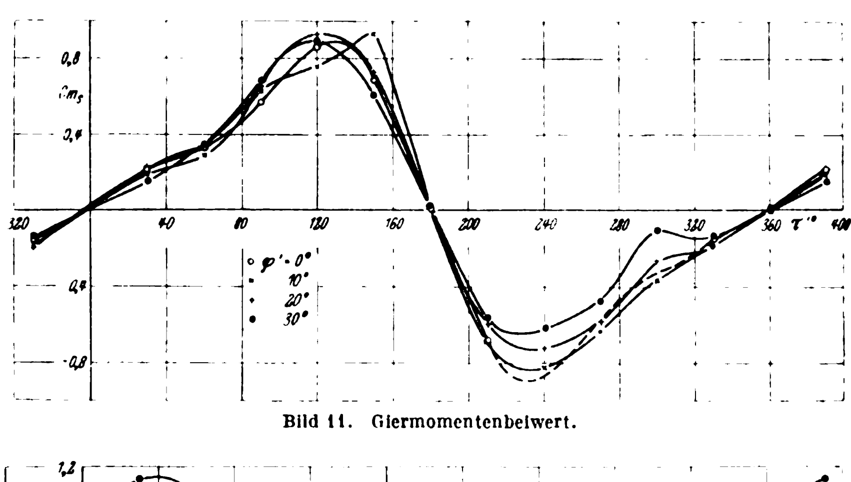


Bild 11. Giermomentenbeiwert.

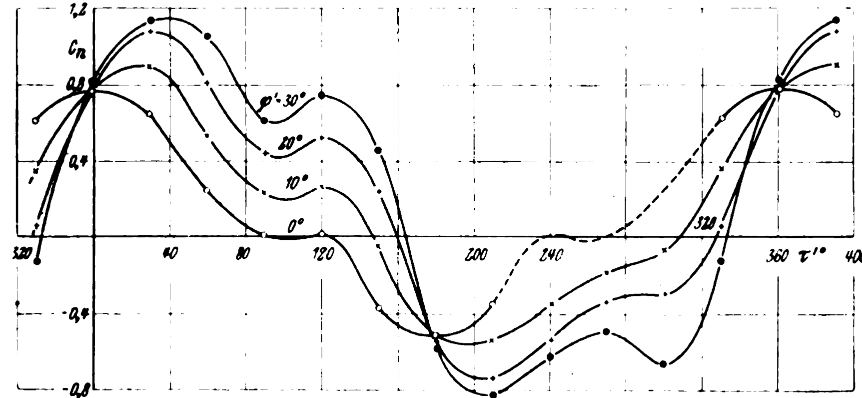


Bild 12. Normalkraftbeiwert mit Landehilfe.

Zu Bild 12: $\alpha' = 5{,}5^\circ$; $\beta_K = \beta_Q = \beta_{Sa} = 6^\circ$.

winkel eine Umkehr der Drehrichtung. Bei $\varphi' = 30^0$ wird ein Größtwert im cm_h von etwa 0,5 erreicht, nach der negativen Seite sogar fast 0,8. Diese Größe hängt mit der Bezugslänge zusammen, denn die Flügeltiefe in x-Richtung ist in diesem Falle keine natürliche Bezugsgröße. Bei $\varphi' = 0$ und $\tau' = 180^0$ erkennt man den stark negativen Beitrag des Höhenleitwerks, da ein cm_h von $-0{,}4$ erreicht wird.

Das Giermoment ist, wie man aus Bild 11 ersieht, wieder fast nur vom Schiebewinkel abhängig. Der Hängewinkel spielt eine untergeordnete Rolle. Die alleinige Abhängigkeit vom Schiebewinkel ist vom Seitenleitwerk verursacht, von dem überhaupt das Giermoment beherrscht wird. Das Maximum bei Anblasung von schräg rückwärts rührt daher, daß in diesem Falle das Moment des Rumpfes und des Schwimmers im selben Sinne wirkt wie das des Seitenleitwerks. Dem entspricht auch der steile Abfall bei $\tau' = 180^0$.

Ein Vergleich mit den Messungen von Kohler [3] und [4] zeigt, daß in den wesentlichen Punkten die Abhängigkeit vom Hängewinkel im ähnlichen Sinne liegen, obwohl dort nur ein Hängewinkel von 5^0 untersucht wurde und die Spiegelplatte vorhanden war. In der Normalkraft zeigen sich die gleichen Verschiebungen der Größtwerte mit dem Hängewinkel zu größeren τ'-Werten. Auch der zweite Größtwert bei $\tau' = 120^0$ bahnt sich an. Der Längskraftbeiwert zeigt ebenso das große Gebiet von τ' mit negativem Wert. Die Seitenkraft stimmt im Verlauf gut überein. Die Übereinstimmung im Rollmoment ist in der Tendenz ebenfalls gut. Im Kippmoment zeigt sich dagegen bei $\tau' = 0^0$ und $\varphi' = 0^0$ nicht das Minimum, sondern ein Größtwert. Es mag sein, daß bei dem Kohlerschen Modell der Abstand der gemessenen Schiebewinkel von 30^0 zu 30^0 nicht genügt, um den Verlauf zu erfassen, um so mehr, als das von ihm festgestellte Minimum bei $\tau' = 30^0$ in unserem Falle erst bei 60^0 auftritt. An sich sind die von Kohler gezeigten Kurven etwas glatter im Verlauf, was wohl auch den formenmäßig weniger komplizierten Modellen entspricht. Das Giermoment der älteren Messungen zeigt wieder das gleiche Bild wie das hier vorgelegte.

b) Mit Landehilfe.

Von den Messungen mit ausgeschlagenen Landehilfen ist hier nur der Normalkraftbeiwert in Bild 12 aufgeführt. Die anderen Beiwerte gleichen denen ohne Landehilfe derart, daß es sich nicht lohnt, sie hier noch einmal darzustellen. Der qualitative Verlauf von c_n über τ' ist der gleiche wie ohne Landehilfen. Die Größtwerte für positive c_n sind etwas größer geworden, am meisten bei $\tau' = 0^0$. Von $\tau' = 80^0$ ab ist ein Einfluß der Landehilfen nicht mehr vorhanden.

VI. Zusammenfassung.

Es wird eine Sechskomponentenmessung an einem Seeflugzeugmuster der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. mitgeteilt, die sich bei einem Anstellwinkel über Schiebewinkel von 0 bis 360^0 und Hängewinkel von 0 bis 30^0 erstreckt. Die zur Untersuchung entwickelte Modellaufhängung wird eingehend beschrieben und beurteilt. Die Meßergebnisse werden besprochen und mit bekannten Untersuchungen verglichen.

VII. Schrifttum.

[1] H. Focke, Der Windkanal der Focke-Wulf Flugzeugbau A.-G. Z. Flugtechn. Bd. 23 (1932).
[2] Göttinger Lieferung I.
[3] M. Kohler, Luftkräfte und Momente an einem Seeflugzeug auf dem Wasser. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933).
[4] M. Kohler, Sechskomponentenmessungen an einem Flugbootmodell usw. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 583.

Zur Aerodynamik des Flugzeugrumpfes.

Von H. Multhopp.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Der vorliegende Bericht enthält einige Ansätze zur Bestimmung des Anteils des Rumpfes bzw. der Motorgondeln an den Luftkräften am Flugzeug für eine Reihe technisch wichtiger Flugzustände. Vor allem werden hierbei die Erscheinungen betrachtet, die durch das Zusammenwirken des Rumpfes mit anderen Flugzeugteilen, insbesondere mit dem Tragflügel, entstehen. So wird für die Berechnung der Lastverteilung über Tragwerk und Rumpf ein vereinfachtes Verfahren entwickelt, bei der mit einer meist recht einfachen konformen Abbildung ein der Flügel-Rumpf-Kombination gleichwertiger Flügel bestimmt wird, für den die übliche Auftriebsverteilungsrechnung durchzuführen ist. Die Lastverteilung über die Rumpflänge und die damit zusammenhängenden Neutralpunktsverschiebungen durch den Rumpf werden mit einer einfachen Impulsabschätzung näherungsweise erfaßt. Beim schiebenden Flugzeug ergibt sich aus der Verdrängungsströmung um den Rumpf eine antisymmetrische zusätzliche Auftriebsverteilung längs des Flügels, die ein ganz beachtliches Schieberollmoment zur Folge hat. Weiterhin wird hierdurch ein Seitenwind am Seitenleitwerk erzeugt, der ganz maßgeblich die Richtungsstabilität und die Wendedämpfung beeinflußt. Die Größenordnung dieser Erscheinungen wird abgeschätzt.

Gliederung.

1. Bemerkungen zur Rumpfaerodynamik.

Ein in der Aerodynamik des Flugzeuges arg vernachlässigtes Gebiet ist das der Rumpfaerodynamik. Das liegt in erster Linie daran, daß der Rumpf für sich allein betrachtet ein verhältnismäßig einfaches Gebilde ist, dessen Wirkungen scheinbar schnell zu übersehen sind. Seine Haupteinflüsse entfaltet der Rumpf aber erst im Zusammenwirken mit den übrigen Teilen des Flugzeuges, insbesondere mit dem Tragflügel, so daß notwendigerweise eine Rumpfaerodynamik in erster Linie von Fragen der gegenseitigen Beeinflussung her aufgebaut werden muß. Das Aufsuchen mathematisch exakter Lösungen zu solchen Aufgaben aus dem Gebiet der Interferenz ist durchweg außerordentlich umständlich, da man zu diesem Zwecke eine räumliche Potentialtheorie mit sehr willkürlichen Randbedingungen durchentwickeln müßte: eine Aufgabe, die wohl kaum über ein paar Existenzbeweise hinaus käme.

Infolgedessen erschien es mir notwendig, geeignete Ansätze zu entwickeln, die bei jeder gerade betrachteten Erscheinung den wesentlichen Kern unter Verzicht auf alle Einflüsse sekundärer Art herausschälen. Es ist klar, daß eine derartige Handlungsweise ihre Berechtigung stets erst noch in gewissen Fehlerabschätzungen oder durch sinnvoll aufgezogene Versuche nachweisen muß. Die hier angegebenen Verfahren sollen auch noch nichts Endgültiges darstellen; sie sind vielmehr die ersten Schritte auf einem Wege, der wegen der immer dringenderen Sorgen des praktischen Flugzeugbaues auf diesem Gebiete doch einmal gegangen werden muß, selbst wenn die vorgeschlagenen Verfahren zunächst noch manchmal etwas schwerfällig erscheinen sollten.

Die drei Hauptanwendungsgebiete der Flugzeugaerodynamik, nämlich die Flugleistungsmechanik, die Aerodynamik der Lastannahmen für den Festigkeitsnachweis des Flugzeuges und die Mechanik der Flugeigenschaften werden alle durch Einflüsse des Rumpfes oder der Motorgondeln berührt. Für unsere Betrachtungen wollen wir das Gebiet der Leistungsmechanik im allgemeinen ausschließen, da Widerstandsfragen gewöhnlich der experimentellen Forschung überlassen bleiben müssen. Was die induzierten Widerstände anbetrifft, so ändert der Rumpf zumeist nur deren Verteilung in einem allerdings oft ganz bemerkenswerten Maße, kaum aber den Gesamtbetrag des induzierten Widerstandes eines Flugzeuges. Wichtiger ist dann schon der Einfluß auf das $c_{a\,max}$ und damit auf die Landegeschwindigkeit des Flugzeuges, wofür die hier durchgeführten Rechnungen in vielen Fällen eine Erklärung geben können.

Für den Festigkeitsnachweis des Flugzeuges ist eine genaue Kenntnis der Lastverteilung über den Flügel unter dem Einfluß des Rumpfes und der Motorgondeln und außerdem der Verteilung der Luftkräfte längs Rumpf und Gondeln selbst von ganz erheblicher Bedeutung; diese Dinge haben in erster Linie die vorliegenden Untersuchungen veranlaßt. Der bisherige Stand der Dinge auf diesem Gebiete war so, daß die im Windkanal gemessenen Unterschiede in den Luftkräften und Momenten zwischen einem Modell mit Rumpf und dem Flügel allein unmittelbar dem Rumpf oder der Motorgondel zugeschrieben wurden. Demgegenüber zeigen die vorliegenden Rechnungen, daß diese Änderungen der Luftkräfte in den meisten Fällen erst durch den Einfluß des Rumpfes auf den Tragflügel entstehen und somit durchweg als Flügellasten anzusetzen sind.

Bei der Vorausbestimmung und der Deutung der Flugeigenschaften eines Flugzeugmusters taucht gleichfalls eine große Anzahl von Fragen auf, die unsere Rumpfaerodynamik beantworten muß. Da ist insbesondere die für die Mechanik symmetrischer Flugbewegungen so wichtige Lage des Flugzeugneutralpunktes, der sich unter dem Einfluß von Rumpf und Gondel ganz erheblich nach vorn schiebt. Aber auch bei unsymmetrischen Flugbewegungen spielt der Rumpf eine beachtliche Rolle. Einmal beeinflußt er beim Schieben die Strömungsverhältnisse am Flügel so, daß ein vorwiegend von der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf abhängiges Schieberollmoment zustande kommt, dessen Größenordnung in vielen Fällen durchaus mit der des Schieberollmomentes aus der V-Stellung des Flügels verglichen werden kann. Ebenso wichtig ist dann die Rück-



wirkung der unter dem Einfluß des Rumpfes beim Schieben entstandenen Auftriebsverteilung des Flügels auf die Strömungszustände am Seitenleitwerk. Dort beobachten wir nämlich einen ganz erheblichen Seitenwind, der ähnlich wie der Abwind am Höhenleitwerk die Richtungsstabilität und die Wendedämpfung in verschiedener Weise beeinflußt. Wir müssen daher an Stelle des einfachen Begriffes der Wendedämpfung genauer zwei Größen unterscheiden: einmal haben wir eine Drehung des Flugzeuges infolge einer Bahnkrümmung, das andere Mal eine reine Drehung des Flugzeuges ohne Änderung der Flugbahn, und nur in diesem letzten Fall treten die erwähnten Änderungen der Wendedämpfung durch den Seitenwind auf. Die Kenntnis dieser Verhältnisse ist zur Beurteilung der Seitenstabilitätsfragen einigermaßen wichtig. Insbesondere bei den heutzutage oft in den Vordergrund des Interesses gerückten Gierschwingungen moderner Flugzeuge darf man diese Einflüsse nicht vernachlässigen.

Wir sehen also, daß der Rumpf in mannigfaltiger und oft überraschender Weise an vielen Vorgängen in der Aerodynamik des Flugzeuges beteiligt ist. Es erschien mir daher nötig, einmal einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Erkenntnisse zu vermitteln.

2. Der Rumpf allein.

Ehe wir daran gehen, das Zusammenwirken des Rumpfes mit den übrigen Teilen des Flugzeuges zu untersuchen, müssen wir kurz die Erscheinungen besprechen, die wir bei einem Rumpf beobachten würden, wenn keine weiteren Teile des Flugzeuges da wären und ihren Einfluß ausübten. Die meisten Erkenntnisse auf diesem Gebiete können wir aus den Forschungsergebnissen früherer Jahre an Luftschiffkörpern übernehmen. Es sei deshalb hier auch nur das Wichtigste dieser Erfahrungen kurz zusammengestellt und ein wenig nach neueren Gesichtspunkten geordnet; eine ausführliche Darstellung der Aerodynamik der Luftschiffkörper findet man zum Beispiel im 6. Band von Durands »Aerodynamic Theory«.

Betrachten wir zunächst die Verhältnisse in reibungsfreier Parallelströmung, so ergibt sich als erstes, daß am Rumpf überhaupt keine resultierenden Kräfte entstehen; aus der Verteilung der Drücke über den Körper kann man lediglich freie Momente erhalten. Diese freien Momente haben für uns einige Bedeutung, da sie dem Anstellwinkel des Rumpfes proportional sind und daher in die Stabilitätsgrößen hineingehen. Das Vorzeichen dieser Momente ist so, daß die Stabilität um die Hochachse oder um die Querachse durch die Wirkung dieser freien Momente verkleinert wird. Für einen rotationssymmetrischen Rumpf ist das freie Moment bei einer Anströmung in Richtung der Rumpfachse natürlich null; bei unsymmetrischen Rumpfformen oder durch Anbauten kann die Achse für das Moment null irgendwo anders liegen. Zustande kommt das freie Moment bei angestelltem Rumpf dadurch, daß wir an der Oberseite des Buges und an der Unterseite des Hecks Übergeschwindigkeiten und damit Unterdrücke haben, während umgekehrt auf der Unterseite des Rumpfbuges und der Oberseite des Hecks Überdrücke entstehen, Bild 1.

Die Berechnung der freien Momente kann nun auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Wenn man Zeit und Ausdauer genug hat, kann man sich daran begeben, mit Hilfe potentialtheoretischer Methoden, wie sie von v. Kármán, Lotz, Kaplan und anderen entwickelt sind, ein Feld von Singularitäten aufbauen, das den Rumpfkörper ersetzen soll. Für unsere Bedürfnisse erheblich zweckmäßiger ist Munk [1] vorgegangen, der einfach zunächst den asymptotischen Wert für sehr schlanke Rumpfformen bestimmte und dann einen vom Schlankheitsverhältnis abhängigen Korrekturfaktor hinzufügte, den er durch einen Vergleich mit den Werten von genügend leicht exakt berechenbaren Formen erhielt.

Nach den Ansätzen von Munk ergibt sich für das unstabile Moment eines sehr langen Rotationskörpers:

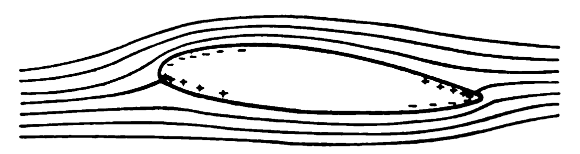


Bild 1. Rumpf in idealer Strömung.
+ Überdrücke — Unterdrücke

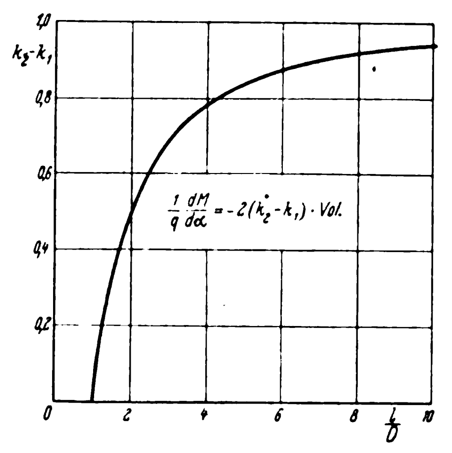


Bild 2. Munksche Korrekturfaktoren für die unstabilen Momente von Rotationskörpern (NACA-Rep. 184).

$$\frac{1}{q}\frac{dM}{d\alpha} = -2\,\text{Vol.} \quad \quad (2.1)$$

und für den Einfluß der endlichen Rumpflänge kommt der Korrekturfaktor $(K_2 - K_1)$ hinzu, der von dem Schlankheitsverhältnis l/D abhängig ist, Bild 2. In dieser von Munk gewählten Bezeichnungsweise stellt K_2 das bei der Querbewegung des Rumpfes, K_1 das bei der Längsbewegung mit erfaßte Luftvolumen im Verhältnis zum Volumen des Rumpfes dar. Für nicht rotationssymmetrische Körper ergibt sich

$$\frac{1}{q}\frac{dM_R}{d\alpha} = -\frac{\pi}{2}(K_2 - K_1)\int_0^l b_R^2\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.2)$$

bzw. für den Anteil am Giermoment:

$$\frac{1}{q}\frac{dN_R}{d\tau} = -\frac{\pi}{2}(K_2 - K_1)\int_0^l h_R^2\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3)$$

Das unstabile Längsmoment des Rumpfes ändert sich noch erheblich unter dem Einfluß der Flügelumströmung; wir werden später deshalb noch zuverlässigere Formeln ableiten, die diese Dinge mit berücksichtigen. Die Formel für das Giermoment kann indessen ohne weiteres übernommen werden, da der Flügelabwind keinen nennenswerten Beitrag zum Impuls der Rumpfumströmung in Richtung der Querachse liefert.

Bei Drehbewegungen eines Rumpfes um den Schwerpunkt des Rumpfvolumens bei Rotationskörpern oder um den Schwerpunkt der Volumina

$$\int_0^l b_R^2\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^l h_R^2\,dx$$

entsteht weder eine resultierende Kraft noch ein zusätzliches Moment, solange wir die Verhältnisse in idealer Strömung betrachten. Wir erhalten lediglich eine etwas geänderte Querkraftverteilung. Erfolgt die Drehung nicht um den Volumenschwerpunkt, so ist dasjenige Moment in die Rechnung einzusetzen, das sich aus der örtlichen Schräganblasung gerade in diesem Schwerpunkt infolge der Drehbewegung ergibt. Liegt also zum Beispiel bei Drehungen um die Hochachse des Flugzeuges der Flugzeugschwerpunkt, wie das gewöhnlich der Fall ist, vor dem Schwerpunkt des Rumpfvolumens, so liefert der Rumpf unmittelbar einen negativen Beitrag zur Wendedämpfung von der Größe:

$$\frac{1}{q}\frac{2v}{b}\frac{dN_R}{d\omega_z} = \pi(K_2 - K_1)\frac{\Delta x}{b}\int_0 h_R^2\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (2.4$$

wobei Δx den Abstand zwischen dem Flugzeugschwerpunkt und dem Volumenschwerpunkt bezeichnet.

Das ist alles, was die potentialtheoretische Betrachtung an Aussagen über einen einzelnen Rumpf liefert. Das wirkliche Verhalten des Rumpfes wird nun aber durch die Potentialströmung allein nicht beschrieben. Sobald die Umströmung des Rumpfes nicht mehr völlig symmetrisch ist, häuft sich das Grenzschichtmaterial auf einer Seite stärker an und ändert dadurch die Umströmungsverhältnisse so, daß zusätzliche Kräfte am Rumpf entstehen, die ganz maßgeblich in die Momentenbilanz des Rumpfes mit hineingeraten. Der Angriffspunkt des so entstandenen Reibungsauftriebes oder Quertriebes liegt naturgemäß verhältnismäßig weit hinten am Rumpf; man erhält diesen Punkt aus den Messungen, wenn man von den gemessenen Momenten zunächst den theoretischen unstabilen Anteil abzieht und das verbleibende Restmoment mit der Auftriebs- oder Quertriebskraft in Beziehung bringt. Es liegen leider nur sehr wenig auswertbare Messungen vor; von mir verwendet wurden die amerikanischen Ergebnisse mit Luftschiffkörpern aus dem NACA-Report 394 und die Messungen mit den Rümpfen des NACA-Reports 540 sowie einige unveröffentlichte Fw-Messungen. Als wichtigstes Ergebnis dieser Auswertungen zeigte sich, daß für den Reibungsauftrieb ebenfalls so etwas wie ein Neutralpunkt existiert, trotzdem dieser Auftrieb nicht einmal linear vom Anstellwinkel abhängt, Bild 3 und 4.

Die Abhängigkeit des Reibungsauftriebes vom Anstellwinkel erinnert stark an den durchaus ähnlichen Verlauf bei Flügeln sehr kleiner Streckung, so daß man versucht ist, hier Beziehungen aufzufinden. Bei einem Flügel sehr kleiner Streckung erhält man in der Umgebung von $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{q}\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\pi}{2}b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.5)$$

ein Ergebnis, das man sich mit Hilfe gewisser Impulsbetrachtungen leicht herleiten kann und das auch mit den vorliegenden Meßergebnissen an solchen Flügeln gut übereinstimmt. Bei unseren Rümpfen haben wir nun gewöhnlich keine scharfen seitlichen Kanten, so daß an Stelle der Breite b ein zunächst noch unbekanntes Maß stehen wird, das die Breite der sich ablösenden Grenzschicht bezeichnet. Wir beziehen statt dessen den Auftrieb auf die größte Rumpfbreite b_R und führen lieber einen Formfaktor f ein, dessen genauere Bestimmung ein dankbares Gebiet experimenteller Forschung wäre; voraussichtlich hängt er in erster Linie von der Querschnittsform des Rumpfes ab, von seiner Völligkeit und von der Lage der Anbauten. Wir setzen also:

$$\frac{1}{q}\frac{dA_R}{d\alpha} = \frac{\pi}{2}f\,b_R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.6)$$

oder entsprechend für die Seitenkraft:

$$\frac{1}{q}\frac{dY_R}{d\tau} = -\frac{\pi}{2}f\,h_R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.7)$$

Jetzt zeigen die vorhandenen von mir ausgewerteten Messungen, was an sich wahrscheinlich war, für schlanke Rümpfe einen gewissen Zusammenhang zwischen dem Formfaktor f und der Lage des Angriffspunktes des Reibungsauftriebes, die ich mit x_n (gemessen von der Rumpfnase ab) bezeichnet habe, Bild 5. Wie man erwarten kann, liegt dieser Angriffspunkt um so weiter hinten, je geringer der Reibungsauftrieb tatsächlich ausgebildet ist. Diese Abhängigkeit des Angriffspunktes x_n vom Formfaktor f hat immerhin den Vorzug, daß man bei der Abschätzung des Schiebegiermomentes aus dem Reibungsquertrieb bei den üblichen Schwerpunktlagen des Flugzeuges nicht allzu vorsichtig zu sein braucht. Weiterhin erkennt man, daß die Richtungsstabilität von der Lage des Schwerpunktes um so stärker abhängig wird, je größer der Formfaktor f und je geringer das Schlankheitsverhältnis des Rumpfes ist.

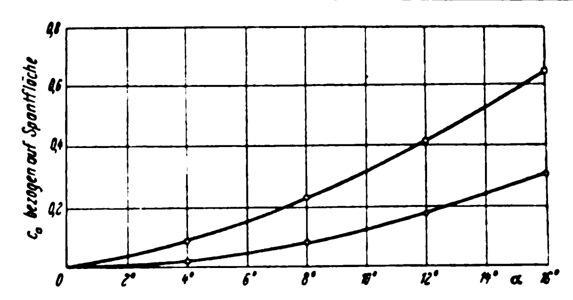


Bild 3. Auftrieb des Rumpfes allein.
○ runder Rumpf } aus NACA-Rep. 540.
□ eckiger „

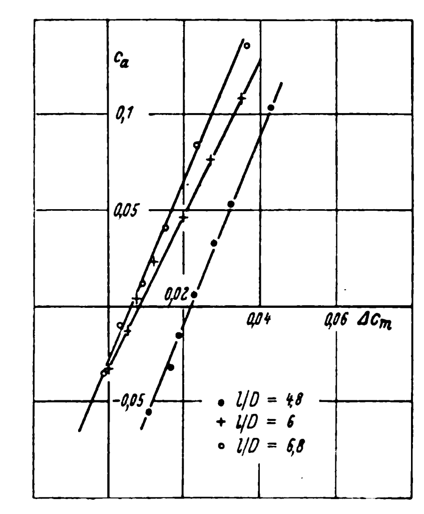


Bild 4. Momentenverlauf des Reibungsauftriebs. Rümpfe aus NACA-Rep. 394.
● $l/D = 4,8$
+ $l/D = 6$
O $l/D = 6,8$.

Wie weit die Rumpfgrenzschicht zu der Entstehung von Luftkräften und Momenten bei Drehungen des Rumpfes um die Hochachse oder Querachse führt, ist bis jetzt noch völlig ungeklärt; diese Fragen sind auch nur durch Versuche zu beantworten.

3. Die Rumpflängsmomente unter dem Einfluß des Flügels.

Für die Längsmomente genügt die in dem vorhergehenden Abschnitt gebrachte Abschätzung der Momente des freifahrenden Rumpfes nicht mehr, weil das Strömungsbild des Flügels auch die Strömungsverhältnisse am Rumpf ganz gründlich ändert. Zunächst ist der im vorigen Abschnitt beschriebene Reibungsauftrieb des Rumpfes unter dem Einfluß des Flügels kaum noch vorhanden, weil der Flügel die Strömung längs der Flügeltiefe und auch dahinter weitgehend richtet, so daß in dem eigentlichen Entstehungsgebiet des Reibungsauftriebes gar keine nennenswerte Strö-

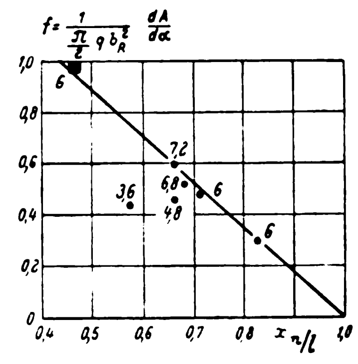


Bild 5. Neutralpunktlage des Reibungsauftriebes. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten das Schlankheitsverhältnis.

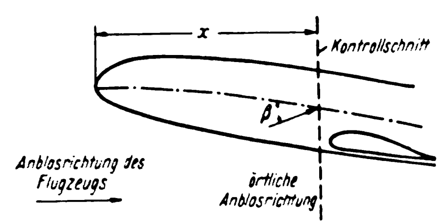


Bild 6. Impulsbetrachtung zur Ermittlung der freien Rumpfmomente.

mungskomponente quer zum Rumpf vorhanden ist. Wir können also mit einiger Berechtigung annehmen, daß die theoretisch zu erwartenden Momente nachher auch wirklich vorliegen werden.

Zunächst unterscheidet sich der Rumpf mit Flügel von dem alleinfahrenden Rumpf schon dadurch, daß der Rumpf einen ganz erheblichen Anteil der Auftriebskräfte, die das sonst an seiner Stelle liegende Flügelstück haben würde, übernimmt. Nun haben die Rechnungen von Lennertz [4] und Vandrey [5] gezeigt, daß der Angriffspunkt dieser unmittelbar von der Flügelzirkulation herrührenden Luftkräfte am Rumpf an der gleichen Stelle liegt wie bei dem Ersatzflügelstück; wenn wir diese Luftkraftverteilung zunächst abspalten, bleibt nur noch ein freies Moment übrig, für dessen Bestimmung wir eine einfache Impulsabschätzung machen.

Wir nehmen zunächst an, daß der Rumpf genügend lang ist. Legen wir dann senkrecht zur Anströmungsrichtung eine Kontrollebene fest, die den Rumpf im Abstand x von der Rumpfnase schneidet, dann ist das Integral über die Druckverteilung des Rumpfstückes vor der Kontrollebene gleich dem in der Zeiteinheit durch diese Fläche hindurchtretenden vertikalen Impuls. Ist jetzt β der Winkel der Schräganblasung in der Kontrollebene, also der Winkel, den die Strömung mit der Rumpfachse bilden würde, wenn der Rumpf nicht da wäre und b_R die Rumpfbreite an dieser Stelle, so ist der Auftrieb des so herausgegriffenen Rumpfstückes, Bild 6:

$$\int_0^x \frac{dA_R}{dx}\,dx = \varrho\, v^2 \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{4}\, b_R^2 \quad \ldots\ldots (3.1)$$

Wir dürfen ja die Strömung, wenn der Rumpf lang genug ist, senkrecht zur Rumpfachse als näherungsweise eben annehmen, und für die Strömung senkrecht zu einem elliptischen Zylinder ist die erfaßte Luftmenge, also das Integral

$$\int \varrho\,(v_n - v_{n\infty})\,df = \varrho\, v_{n\infty} \cdot \frac{\pi}{4}\, b_R^2 = \varrho\, v\,\beta \cdot \frac{\pi}{4}\, b_R^2 \quad (3.2)$$

(v_n und $v_{n\infty}$ sind die Komponenten senkrecht zur Zylinderachse) unabhängig vom Achsenverhältnis der Ellipse. Da diese Formel sogar für den zu einer ebenen Platte ausgearteten Zylinder noch gilt, erscheint es berechtigt, sie näherungsweise für alle Querschnittsformen zu verwenden.

Durch Differentiation nach x ergibt sich nun:

$$\frac{1}{q}\frac{dA}{dx} = \frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}(\beta \cdot b_R^2) \quad \ldots\ldots (3.3)$$

Der hiernach errechnete Gesamtauftrieb des Rumpfes ist wegen des Verschwindens von b_R an beiden Rumpfenden null. Wir erhalten also mit der hier begonnenen Überlegung nur die gesuchten freien Momente, die der Rumpf zusätzlich liefert. Für irgendeinen Bezugspunkt ist dieses freie Moment:

$$\frac{M_R}{q} = \frac{\pi}{2}\int_0^l \frac{d}{dx}(\beta \cdot b_R^2) \cdot x\,dx \quad \ldots\ldots (3.4)$$

Daraus wird durch partielle Integration:

$$\frac{M_R}{q} = -\frac{\pi}{2}\int_0^l \beta \cdot b_R^2\,dx \quad \ldots\ldots (3.5)$$

Für Rotationskörper, bei denen die Strömung nicht durch die Gegenwart des Flügels gestört ist, erhält man wegen $\beta = \text{const}$:

$$\frac{M_R}{q\beta} = -\frac{\pi}{2}\int_0^l D^2\,dx = -2\,\text{Vol.} \quad \ldots\ldots (3.6)$$

Wir haben also wieder das Ergebnis, das Munk für die freien Momente von Luftschiffkörpern errechnet hatte. Es würde sich jetzt vielleicht empfehlen, die auf diese Weise bestimmten freien Rumpfmomente ebenfalls nach dem Vorbild von Munk mit einem Korrekturfaktor zu versehen, der den Einfluß der endlichen Rumpflänge enthalten soll. Nur bestehen dabei einige Schwierigkeiten: man weiß nicht recht, welches Schlankheitsverhältnis man einsetzen soll. Die Abminderung gegenüber dem theoretischen Wert kommt in erster Linie dadurch zustande, daß die Strömung an den Rumpfenden von dem angenommenen zweidimensionalen Bilde doch etwas abweicht; nun liefert aber das hintere Rumpfende fast gar keinen Beitrag zum freien Rumpfmoment, dafür liefern uns die Teile des Rumpfes dicht vor dem Flügel, die sicherlich von dieser Abminderung durch den Einfluß der endlichen Länge nicht erfaßt werden, sehr große Beträge. Der wahre Wert für den Korrekturfaktor liegt also wahrscheinlich weit näher an 1 als die Munksche Größe $(K_2 - K_1)$. Die bisherigen Nachrechnungen verhältnismäßig zahlreicher Messungen haben durchweg gezeigt, daß es bei der Bestimmung der Längsmomente des Rumpfes eines solchen Korrekturfaktors kaum noch bedarf.

Die Gegenwart des Flügels berücksichtigen wir jetzt dadurch, daß β abhängig von der Flügelumströmung wird. Für die Änderung des Momentes mit dem Anstellwinkel, die wir für Längsstabilitätsbetrachtungen dringend brauchen, erhält man:

$$\frac{1}{q}\frac{dM_R}{d\alpha} = -\frac{\pi}{2}\int_0^l b_R^2 \frac{d\beta}{d\alpha}\,dx \quad \ldots\ldots (3.7)$$

Die Änderung der Schräganblasung mit dem Anstellwinkel $\frac{d\beta}{d\alpha}$ setzt man jetzt folgendermaßen an: Im Bereich des Flügels kann die Strömung praktisch nur parallel zur Flügelsehne verlaufen, hier ist also $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$. Hinter dem Flügel wird die Schräganblasung um den Abwind vermindert; am Rumpfheck in der Gegend des Höhenleitwerkes haben wir:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 1 - \frac{d\alpha_w}{d\alpha}.$$

Es ist genügend genau, wenn wir annehmen, daß $\frac{d\beta}{d\alpha}$ von der Flügelhinterkante aus linear auf diesen Wert ansteigt. Vor dem Flügel ist $\frac{d\beta}{d\alpha}$ wegen des dort herrschenden Aufwindes immer größer als 1. Insgesamt erhalten wir etwa einen Verlauf, wie ihn Bild 7 zeigt. Für die Abschätzung der Werte $\frac{d\beta}{d\alpha}$ vor dem Flügel lege man, wenn man keine genaue Rechnung veranstalten will, den Verlauf von Bild 8 zugrunde, der für eine Flügelstreckung $\Lambda = 8$ berechnet ist, was einem Auftriebsanstieg $c_a' = 4{,}5$ entspricht. Für

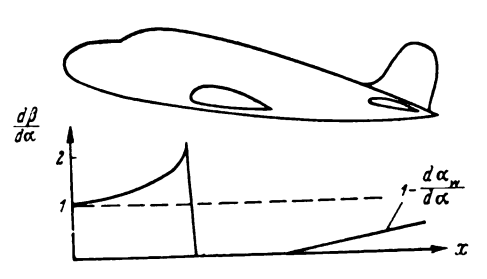


Bild 7. Verlauf von $\frac{d\beta}{d\alpha}$ längs des Rumpfes.

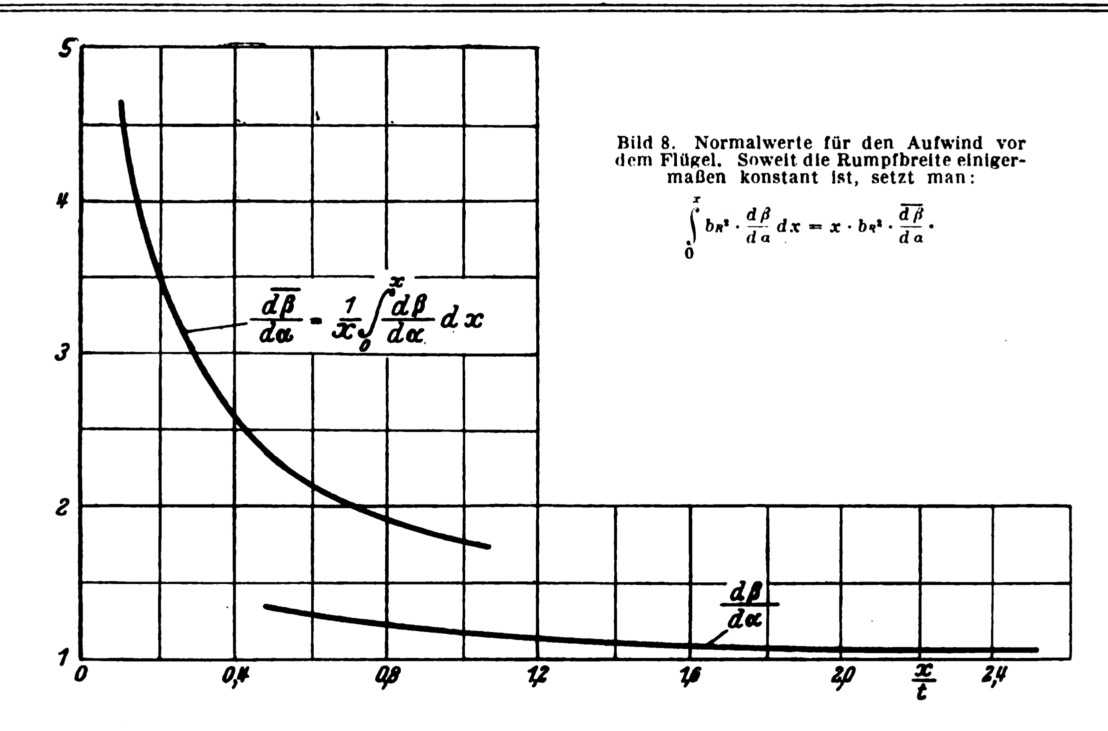


Bild 8. Normalwerte für den Aufwind vor dem Flügel. Soweit die Rumpfbreite einigermaßen konstant ist, setzt man: $\int_0^x b_R^2 \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\,dx = x \cdot b_R^2 \cdot \overline{\frac{d\beta}{d\alpha}}$.

andere Streckungen rechnet man die Werte ungefähr im Verhältnis der c_a'-Werte um. Da in der Nähe des Flügels $\frac{d\beta}{d\alpha}$ eine ziemlich hohe Spitze erreicht, ist dort nicht dieser Wert selbst, sondern das Integral von der Flügelvorderkante bis zu einem bestimmten Punkte davor dargestellt. Die nach der Formel (3. 7) notwendige Integration läßt sich mit Hilfe dieser Kurven leicht durchführen.

Für die Ermittlung des Nullmomentes $c_{m0} = c_m\ (c_a = 0)$ gelten an sich die gleichen Überlegungen nur mit dem Unterschied, daß der Flügeleinfluß im allgemeinen bedeutend geringer ist. Sobald man die Nullauftriebsrichtung des Flugzeuges genau kennt, wozu erst einige Auftriebsverteilungsrechnungen vorausgehen müssen, bestimmt man sich die für diese Stellung in Betracht kommenden β-Werte und führt dann die Integration nach Formel (3. 5) durch. Dabei darf man auch die Verdrängungsströmung infolge endlicher Flügeldicke, die bei unseren bisherigen Betrachtungen keine Rolle spielte, nicht ganz außer acht lassen; insbesondere gilt dieses bei Motorgondeln, bei denen dadurch der c_{m0}-Wert ziemlich stark von der Hochlage abhängig wird. Der Momentenbeitrag aus dem Rumpfwiderstand ist im allgemeinen sehr klein.

Die bisherigen Überlegungen waren in erster Linie auf die Verhältnisse am Flugzeugrumpf zugeschnitten, also auf im Vergleich zur Flügeltiefe verhältnismäßig lange Körper. Etwas anders liegen die Dinge bei den Motorgondeln insbesondere deshalb, weil die Motorgondeln gewöhnlich nur nach vorn über den Flügel hinausragen. Dadurch, daß die Gondelbreite längs der Flügeltiefe abnimmt, ändern sich auch die von der Gondel induzierten Normalgeschwindigkeiten längs der Flügeltiefe; da diese induzierten Geschwindigkeiten dem Gondelanstellwinkel proportional sind, bedeutet dies eine vom c_a-Wert abhängige Krümmung der Flügelzuströmung, die wiederum zusätzliche vom c_a-Wert abhängige Flügelmomente zur Folge hat. Bei der Gondel haben wir also außer dem nach Formel (3. 7) leicht berechenbaren reinen Gondelmoment noch ein Flügelmoment infolge des Einflusses der Gondel M_{FG}, das einen weiteren unstabilen Beitrag zu den Längsmomenten darstellt. Zu seiner Abschätzung machen wir folgende Überlegungen:

Aus der zweidimensionalen Tragflügeltheorie (Skeletttheorie nach Prandtl-Birnbaum) ergibt sich, wenn β_v die Neigung der Strömung an der Flügelvorderkante, β_m die in Flügelmitte und β_h die an der Hinterkante bezeichnet:

$$c_{m0} = \frac{\pi}{16}(3\beta_h - \beta_v - 2\beta_m) \quad \ldots\ldots (3.8)$$

Integrieren wir nun die β-Werte über den ganzen Flügel, so ergibt sich näherungsweise, wenn wir den Gondelbereich selbst von der Integration ausnehmen:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \beta\,dy \approx \int_{-\infty}^{\infty} \beta\,dy = \alpha_G \cdot b_G \quad \ldots\ldots (3.9)$$

Wir erhalten also einen Flügelmoment unter dem Einfluß der Gondel von der Größenordnung:

$$\frac{M_{FG}}{q} = -\frac{\pi}{16}\alpha_G\,[b_{Gv} + 2\,b_{Gm} - 3\,b_{Gh}]\,t_G^2 \quad \ldots (3.10)$$

dabei ist t_G die Flügeltiefe im Bereich der Gondel. Man sieht sofort, wenn man praktisch vorkommende Gondel- und Flügelabmessungen hier einsetzt, daß dieser Momentenbeitrag gar nicht so gering ist. Zum Beispiel ergibt eine Gondel, die nicht mehr über die Hinterkante hinausragt ($b_{Gh} = 0$) und deren Breite in Flügelmitte etwa ¾ derjenigen an der Flügelvorderkante ist, einen Momentenbeitrag von der Größe:

$$\frac{1}{q}\frac{d\,M_{FG}}{d\alpha} \approx 0{,}5\,b_{Gv} \cdot t_G^2 .$$

In welcher Weise man diese Momente über den Flügel zu verteilen hat, kann man auf Grund dieser einfachen Überschlagsrechnung nicht genau sagen, da die gegenseitige Induktion der einzelnen Flügelschnitte hierbei einige Verschiebungen hervorruft, die Gesamtwerte im allgemeinen aber wenig berührt. Es ist klar, daß man dieses zusätzliche Flügelmoment auch bei der c_{m0}-Ermittlung in Ansatz bringen muß, wenn die Gondel gegen den Flügel geschränkt ist.

Weiterhin ist bei der Berechnung des Gondeleinflusses an einem ganzen Flugzeug auch darauf zu achten, daß die Queranströmung zur Motorgondel schon unter dem Einfluß des Rumpfes steht, so daß wir oft die Gondelmomente um ein entsprechendes Maß erhöhen müssen.

Für die praktische Durchführung der Längsstabilitätsrechnungen empfiehlt es sich immer, die Stabilitätsbeiträge einzelner Flugzeugbauteile als Neutralpunktsverschiebungen darzustellen; ist Δx_n die Verschiebung des Neutralpunktes nach vorn, so ergibt sich, wie man leicht einsieht:

$$\frac{\Delta x_n}{t} = -\frac{1}{c_a'\,q\,F\,t}\frac{d\,M_K}{d\alpha} \quad \ldots\ldots (3.11)$$

Um die Brauchbarkeit der hier entwickelten Rechenverfahren nachzuprüfen, habe ich für eine Reihe von Fw-

Mustern, bei denen die Neutralpunktsverschiebung im Windkanal aus Differenzmessungen bestimmt worden war, diese Werte rechnerisch ermittelt. Zahlentafel 1 zeigt das Ergebnis dieser Nachrechnung, wobei zu bemerken ist, daß die gemessenen Neutralpunktsverschiebungen, bei deren Bestimmung eine gewisse Unsicherheit aus meßtechnischen Gründen unvermeidlich ist, schon vor Beginn der Rechnung vom Windkanal ermittelt worden waren.

Zahlentafel 1. Neutralpunktverschiebung durch Rumpf und Gondeln für einige ausgeführte Fw-Muster.

Baumuster		$100 \frac{\Delta x_n}{t}$ gemessen	$= 100 \frac{d \Delta c_m}{d c_a}$ gerechnet
A	Rumpf	2,0	2,3
	Gondeln	2,2	2,4
B	Rumpf	4,1	4,1
	Innengondeln	3,7	3,7
	Außengondeln	2,4	2,3
C	Rumpf	9,2	9,4
	Luftschraubenträger	0,8	0,6
D	Rumpf	1,4	1,5
	Gondeln	4,4	4,2
E	Rumpf	2,0	2,0
	Leitwerksträger	2,0	2,3
F	Rumpf V_1	5,6	6,0
	Rumpf V_5	4,0	4,4
G	Rumpf	4,0	4,1
	Gondeln	3,5	3,5

Eine ähnliche Nachrechnung hat schon Vandrey-AVA für eine Reihe amerikanischer Rumpfflügelkombinationen vorgenommen, wobei ebenfalls eine gute Bestätigung unserer Theorie herauskam. Weiterhin seien zur Unterstützung der hier entwickelten Überlegungen die Arbeiten von Muttray [6] zum Entwurf idealer Rumpfformen kleinsten Widerstandes aufgeführt, bei denen es an sich auf die hier behandelten Fragen nicht so ankam. Dort sind einige Rümpfe so gebaut, daß ihre Achse bei einem bestimmten c_a-Wert völlig der Flügelströmung folgt; bei diesem c_a-Wert ist also β_R überall Null. Tatsächlich ergibt sich auch bei diesem c_a-Wert gar kein zusätzliches Moment gegenüber dem Flügel allein. Daß es auf die hier behandelten Dinge stark ankommt, sieht man beim Vergleich mit den nicht so in die Strömung hineingeschmiegten Rumpfformen. Die Messungen von Muttray zeigen übrigens genau wie jene der Amerikaner [NACA-Rep. 540], daß Flügelwurzelauskleidungen normaler Größenordnung kaum einen Einfluß auf die Momente haben und daher unberücksichtigt bleiben dürfen.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß die hier entwickelten Formeln für die Stabilitätsbeiträge von Rumpf und Gondeln nicht auf den Mitteldecker beschränkt sind; wie man sich leicht überlegen kann, ist die Abhängigkeit des $\frac{d M_R}{d \alpha}$ von der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf außerordentlich gering. Das wird auch von den amerikanischen Messungen des NACA-Rep. 540 bestätigt, soweit nicht Abreißerscheinungen insbesondere bei den Tiefdeckeranordnungen das Bild verfälschen. Es sei hier nur auf Bild 22 des Reports 540 verwiesen, aus dem man sehr deutlich erkennt, daß die Kurven der über der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf aufgetragenen Momente für die verschiedenen c_a-Werte nur zueinander parallel verschoben sind, was in den Zahlentafeln am Schluß dieses Berichtes nicht so sehr zum Ausdruck kommt. Offenbar ist die Auswertung der gemessenen $\frac{d c_m}{d c_a}$-Werte stark von der Geschicklichkeit des Bearbeiters abhängig.

4. Die Luftkraftverteilung am Flügel unter dem Einfluß des Rumpfes.

Für die Festigkeitsrechnung des Flugzeuges ist eine möglichst zuverlässige Kenntnis der Luftkraftverteilung über den Flügel besonders wichtig, da gerade im Tragwerk ein ziemlich großer Betrag des gesamten Zellengewichtes des Flugzeuges steckt. Während man in früheren Zeiten den Einfluß des Rumpfes oder der Motorgondeln auf diese Lastverteilungen ganz fortließ, entstand mit zunehmender Verfeinerung der Berechnungsmethoden schließlich auch das Bedürfnis nach einer Berücksichtigung dieser Einflüsse, zumal die Messungen der Gesamtkräfte und Momente eines Flugzeugmodells im Vergleich zu denen des Flügels allein oft erhebliche Verschiebungen zeigten. Das erste und primitivste Verfahren, das daraufhin entstand, war so aufgebaut, daß sämtliche im Windkanal gemessenen Kräftedifferenzen unmittelbar dem Rumpf oder der Motorgondel zur Last gelegt wurden. Dieses ergab aber bei manchen schnellen Flugzeugmustern recht ungünstige Belastungsfälle, so daß eine etwas gründlichere Bearbeitung dieser Dinge erforderlich schien.

Der Rumpf wirkt in erster Linie dadurch auf den Flügel ein, daß er die Größe und die Richtung der Zuströmungsgeschwindigkeit zu jedem Flügelschnitt ändert. Außerdem bildet er für alle am Flügel entstehenden Zusatzströmungen eine feste Begrenzung, das heißt, es können keine Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu seiner Oberfläche vorhanden sein. Ein Rechenverfahren zur Bestimmung des Rumpfeinflusses muß diese beiden Wirkungen unbedingt berücksichtigen. Ein weiterer rechnerisch kaum erfaßbarer Einfluß rührt her von der Grenzschichtströmung des Rumpfes, die eine Auftriebsverminderung für die sehr nahe am Rumpf liegenden Flügelschnitte in vielen Fällen zur Folge hat und die bei gewissen Tiefdeckeranordnungen für eine frühzeitige Ablösung der rumpfnahen Flügelströmung verantwortlich ist. Bei den heutzutage meist sehr glatten und günstig geformten Rümpfen dürfte aber der Einfluß der Grenzschicht nicht mehr allzu groß sein. Man mag dabei bedenken, wie gering die Grenzschichtdicke zum Beispiel im Vergleich zur Flügeltiefe ist.

Die Strömung um den Rumpf zerlegt man zweckmäßig in eine Verdrängungsströmung parallel zur Rumpfachse und in eine solche senkrecht dazu. Aus der Verdrängungsströmung parallel zur Rumpfachse ergeben sich in der Gegend des Flügels gewöhnlich geringe Übergeschwindigkeiten, die um so größer sind, je kleiner das Schlankheitsverhältnis des Rumpfes ist. Die aus der Querströmung des Rumpfes folgenden Geschwindigkeiten normal zum Flügel haben die Bedeutung einer Anstellwinkeländerung. Nun ist die Zirkulation um einen Flügelschnitt

$$\Gamma = c\, v\, t\, \alpha_{eff.} \quad \text{. . . . . (4. 1)}$$

wie sich sowohl aus der Theorie wie auch aus Windkanalmessungen immer wieder ergibt. Dabei ist der wirksame Anstellwinkel $\alpha_{eff.}$ der Winkel zwischen der örtlichen Anströmungsrichtung mit der Nullauftriebsrichtung des Flügelschnittes. Bezeichnen wir nun die Strömungskomponente senkrecht zur Nullauftriebsrichtung mit w_n, so ist

$$\alpha_{eff.} = \frac{w_n}{v} \quad \text{. . . . . (4. 2)}$$

und damit

$$\Gamma = c\, t\, w_n \quad \text{. . . . . (4. 3)}$$

Die Normalgeschwindigkeit w_n setzen wir aus drei Beiträgen zusammen:

$$w_n = \alpha_F \cdot v + w_{n\,R} + w_i \quad \text{. . . . . . (4. 4)}$$

Dabei ist α_F der örtliche Anstellwinkel des Flügelschnittes, also der Winkel zwischen der Flugbahn und seiner Nullauftriebsrichtung; $w_{n\,R}$ ist die zusätzliche Normalgeschwindigkeit unter dem Einfluß des Rumpfes und w_i ist die im allgemeinen negative induzierte Geschwindigkeit aus der hinter dem Flügel entstandenen Wirbelschicht.

Die Auftriebsdichte, bezogen auf die Längeneinheit, ist nach dem bekannten Satz von Kutta-Joukowski:

$$\frac{dA}{dy} = \varrho\, v\, \Gamma \quad \text{. . . . . (4. 5)}$$

2*

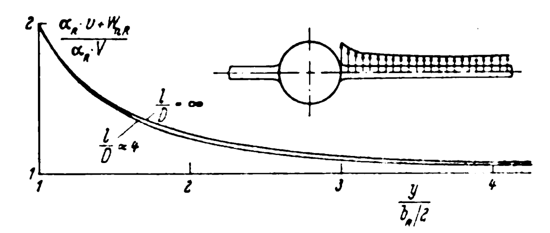


Bild 9. Querumströmung beim rotationselliptischen Rumpf $\left(\frac{l}{D} \approx 4\right)$ und beim Kreiszylinder $\left(\frac{l}{D}\right) = \infty$.

also gleich

$$\frac{dA}{dy} = \varrho\, v\, w_n \cdot c\, t \qquad (4.6)$$

Vergleicht man nun die Verdrängungsströmung von Rümpfen sehr verschiedenen Schlankheitsgrades miteinander, so ergibt sich das merkwürdige Bild, daß das Produkt der aus der Längsumströmung folgenden Zuströmungsgeschwindigkeit V und der dem Rumpfanstellwinkel proportionalen Normalgeschwindigkeit w_n nahezu unabhängig vom Schlankheitsverhältnis des Rumpfes ist. Da nun in diesem Geschwindigkeitsprodukt die aus der Querumströmung folgende Normalgeschwindigkeit w_n in erster Linie für den Verlauf längs der Flügelspannweite maßgeblich ist, erscheint es berechtigt, anstatt mit einem Rumpf endlicher Länge mit einem sehr langen Zylinder zu rechnen, der den gleichen Querschnitt besitzt wie der Rumpf bei 3/4 der Flügeltiefe. Man hat bei einer Anstellung eines solchen unendlich langen Zylinders nur noch Anstellwinkeländerungen am Flügel und keine Geschwindigkeitsänderungen mehr. Weiterhin gibt uns diese Näherungsannahme die Möglichkeit, den Verlauf der induzierten Geschwindigkeiten längs der Spannweite des Flügels auf vernünftige Art und Weise zu berechnen. Wie gering der durch diese Annahme in die Rechnung hineingetragene Fehler sein kann, mag Bild 9 zeigen, in dem der Verlauf des Produktes $v \cdot w_{nR}$ für einen Rumpf unendlicher Länge und für einen solchen vom Schlankheitsverhältnis $l/D = 4$ dargestellt ist.

Die Geschwindigkeiten w_{nR} normal zum Flügel ermitteln wir uns jetzt am einfachsten dadurch, daß wir die Strömung quer zum Rumpf konform abbilden, so daß der Rumpfquerschnitt in einen senkrechten Schlitz übergeht, Bild 10. Eine derartige konforme Abbildung läßt sich für die wichtigsten und heute fast ausschließlich vorkommenden Rumpfquerschnitte, die meist ja Kreise oder Ellipsen sind oder diesen Formen zumindest sehr nahe kommen, leicht angeben. Aber auch abweichende Formen lassen sich durch irgendeines der bekannten Entzerrungsverfahren zunächst auf einen Kreis oder eine Ellipse abbilden und dann in der üblichen Weise weiterbehandeln. Sei jetzt

$$u = z + i\, y \qquad (4.7)$$

die komplexe Koordinate in der Ebene senkrecht zur Rumpfachse und

$$\bar{u} = \bar{z} + i\, \bar{y} \qquad (4.8)$$

die daraus durch die konforme Abbildung

$$\bar{u} = \bar{u}(u) \qquad (4.9)$$

entstandene Koordinate in der Ebene, in der der Rumpf nur noch einen senkrechten Schlitz bildet, dann ist die z-Komponente der zusätzlichen Verdrängungsströmung quer zum Rumpf gleich

$$w_{nR} = \alpha_R \cdot v \left[\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) - 1\right] \qquad (4.10)$$

dabei ist $\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ der Realteil der Ableitung der Abbildungsfunktion $\bar{u}(u)$, denn in der $\bar{u}$-Ebene haben wir ja eine reine Parallelströmung entgegen der $\bar{z}$-Achse von der Größe $\alpha_R \cdot v$. Für die Berechnung der Lastverteilung ist nun noch die Kenntnis der induzierten Geschwindigkeiten längs des Flügels erforderlich, bei deren Bestimmung wir ebenfalls die Gegenwart des Rumpfes berücksichtigen müssen.

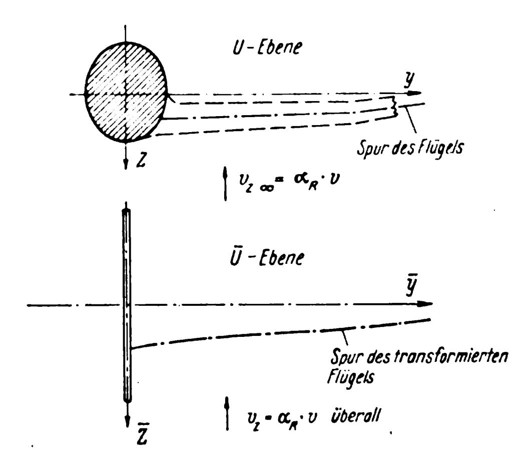


Bild 10. Konforme Abbildung des Rumpfquerschnittes auf einen senkrechten Schlitz.

Hier zeigt sich der Hauptvorteil der Einführung des unendlich langen Rumpfes; wir brauchen nicht mehr irgendwelche Singularitäten im Innern des Rumpfes anzubringen, um die Randbedingungen auf der Rumpfoberfläche zu erfüllen, sondern bringen durch eine konforme Abbildung den Rumpf in eine Form, in der die Randbedingungen sich von selbst erfüllen. Zu diesem Zweck greifen wir auf die Ansätze von Treffz für die Prandtlsche Tragflügeltheorie [7] zurück, der die Aufgabe der Bestimmung der Auftriebsverteilung auf ein potentialtheoretisches Randwertproblem zurückführt. Führt man für die vom Tragflügel erzeugte Zusatzströmung eine Potentialfunktion Φ ein, so erhält man genügend weit hinter dem Flügel wieder ebene Verhältnisse, wenn man den Einfluß des Aufrollens der Wirbel vernachlässigt. Bezeichnen wir Grenzwerte von Φ sehr weit hinter dem Flügel mit

$$\varphi = \lim_{x \to -\infty} \Phi \qquad (4.11)$$

so ist die Zirkulation um irgendeinen Flügelschnitt, wenn man einmal über den Flügel hinweg und einmal unterhalb des Flügels längs einer Stromlinie integriert:

$$\Gamma(y) = \varphi_0(y) - \varphi_u(y) \qquad (4.12)$$

Und da w_i am Ort des Flügels gerade halb so groß ist wie weit hinter dem Flügel, so ist:

$$w_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (4.13)$$

Da jetzt für die induzierte zusätzliche Flügelströmung wiederum die Gegenwart des Rumpfes berücksichtigt werden muß, bilden wir jetzt auch das Potential $\varphi(y, z)$ aus der U-Ebene in die Ū-Ebene konform ab. Dabei bleiben ja, wie man aus den Regeln der konformen Abbildung weiß, die Beträge des Potentials φ ungeändert:

$$\varphi(y, z) = \varphi(\bar{y}(y, z),\ \bar{z}(y, z)) \qquad (4.14)$$

während in die Ableitung wieder der Abbildungsfaktor $\frac{d\bar{u}}{du}$ hineinkommt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \Re\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right) \qquad (4.15)$$

(Der Mittelwert von $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}}$ oberhalb und unterhalb des Flügels ist immer nahe bei Null.) Es wird also:

$$w_i(y) = \bar{w}_i(\bar{y}) \cdot \Re\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right) \qquad (4.16)$$

$\bar{w}_i(\bar{y})$ läßt sich dann leicht in der üblichen Weise bestimmen; da für symmetrische Luftkraftverteilungen keine Geschwindigkeit senkrecht zu dem Schlitz, der den Rumpf darstellt, mehr bestehen bleibt, ergibt sich die übliche Formel der Tragflügeltheorie:

$$\bar{w}_i(\bar{y}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\bar{b}/2}^{\bar{b}/2} \frac{d\Gamma}{d\bar{y}'}\,\frac{d\bar{y}}{\bar{y} - \bar{y}'} \qquad (4.17)$$

so daß für die Rechnung in der y-$\bar{z}$-Ebene die üblichen Verfahren der Auftriebsverteilungsrechnung Anwendung finden können.

Insgesamt erhalten wir jetzt, wenn wir die Gleichung (4. 3) in die $\bar{U}$-Ebene übertragen:

$$\Gamma(\bar{y}) = c\,t(\bar{y}) \left\{ v\,\alpha_F(\bar{y}) + \alpha_K\,v \left[\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) - 1 \right] - \frac{1}{4\pi} \Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \cdot \int_{-\bar{b}/2}^{\bar{b}/2} \frac{d\Gamma}{d\bar{y}'} \frac{d\bar{y}'}{\bar{y} - \bar{y}'} \right\}; \quad (4.18)$$

dabei ist dann:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(\bar{y}) &= \Gamma[y(\bar{y})] \\ t(\bar{y}) &= t[y(\bar{y})] \\ \alpha_F(\bar{y}) &= \alpha_F[y(\bar{y})] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4.19)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung bilden wir jetzt:

$$\bar{\gamma} = \frac{\Gamma}{\bar{b} \cdot v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.20)$$

$$\bar{\eta} = \frac{2\,\bar{y}}{\bar{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.21)$$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d\bar{\gamma}}{d\bar{\eta}'} \frac{d\bar{\eta}'}{\bar{\eta} - \bar{\eta}'} = -\frac{\bar{w}_i}{v} \quad \ldots\ldots (4.22)$$

damit wird:

$$\bar{\gamma} = \frac{c\,t}{\bar{b}}(\bar{\eta})\,\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \cdot \left\{ \frac{\alpha_F(\bar{\eta}) - \alpha_K}{\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)} + \alpha_K - \bar{\alpha}_i(\bar{\eta}) \right\} \quad (4.23)$$

Man sieht sofort, daß es zweckmäßig ist, die Auftriebsverteilung in zwei Anteile aufzuspalten: die Auftriebsverteilung des gegen die Rumpfachse geschränkten Flügels und die des mit dem Rumpf gemeinsam eingestellten Flügels:

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0 + \alpha_K\,\bar{\gamma}_K \quad \ldots\ldots\ldots (4.24)$$

ähnlich wie man schon beim Flügel allein in die Verteilung des verwundenen und des unverwundenen Flügels aufspaltet. Es wird dann:

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{c\,t}{\bar{b}}\,\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \cdot \left\{ \frac{\alpha_F(\bar{\eta}) - \alpha_K}{\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)} - \bar{\alpha}_{i0} \right\} \quad \ldots (4.25)$$

und

$$\bar{\gamma}_K = \frac{c\,t}{\bar{b}}\,\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \cdot (1 - \bar{\alpha}_{iK}) \quad \ldots\ldots\ldots (4.26)$$

Gegenüber den üblichen Berechnungsverfahren ändert sich nichts weiter, als daß die Flügeltiefe noch mit dem Abbildungsfaktor $\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ multipliziert wird, während die Verwindung $(\alpha_F - \alpha_K)$ dadurch zu dividieren ist. Etwas aufachten muß man noch bei der Zuordnung der Stellen am Flügel, an denen man die Auftriebsverteilung bestimmen will. Es ist ja:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \Im(\bar{u}) \\ &= \Im[\bar{u}(z + i\,y)] \end{aligned}$$

und die Spannweite in der $\bar{U}$-Ebene ergibt sich aus:

$$\frac{\bar{b}}{2} = \Im\left[\bar{u}\left(z_F + i \cdot \frac{b}{2}\right)\right].$$

5. Die Luftkraftverteilung am Rumpf.

Nachdem wir so die Verteilung der Luftkräfte über dem Flügel bestimmt haben, bleibt noch die Luftkraftverteilung im Rumpfbereich übrig. Hier ermitteln wir zunächst die Verteilung über die Rumpfbreite, weil diese Verteilung in engstem Zusammenhang steht mit der Auftriebsverteilung über die Fläche. Wir hatten schon für die zusätzliche Strömung infolge der Wirkung des Flügels das Potential Φ eingeführt, und zwar ist die lokale Strömungsgeschwindigkeit entgegen der X-Richtung:

$$v = V + v_x \quad (5.1)$$

mit

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Nun ist entsprechend dem Satz von Bernoulli:

$$p_0 + \frac{\varrho}{2} V^2 = p + \frac{\varrho}{2} \left[(V + v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2\right] \quad . . (5.2)$$

Unter Berücksichtigung nur der von 1. Ordnung kleinen Glieder erhält man so:

$$p - p_0 = -\varrho\,V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots (5.3)$$

Integrieren wir jetzt längs eines Streifens der Rumpfwand, so ist

$$\int_{-\infty}^{x} (p - p_0)\,dx = -\varrho\,V\,\varphi \quad \ldots\ldots (5.4)$$

so daß der Verlauf des Potentials φ weit hinter dem Flügel auch auf der Rumpfkontur ein Maß dafür ist, wieviel der einzelne Rumpfstreifen an Luftkräften mitbekommt. Da es bei den Kräften, die der Rumpf aufnimmt, in erster Linie auf die Differenz von Ober- und Unterseite ankommt, so sieht man leicht ein, daß es berechtigt ist, in Gl. (5. 2) die quadratischen Glieder $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ zu vernachlässigen, da diese Glieder oben und unten von der gleichen Größenordnung sind.

Die Bestimmung des Verlaufes von φ auf der Rumpfkontur gelingt leicht, wenn man sich wiederum der gleichen konformen Abbildung bedient, die schon die Berechnung der Auftriebsverteilung ermöglichte. In der $\bar{U}$-Ebene wird ja der Rumpf durch einen senkrechten Schlitz dargestellt; infolgedessen können wir $\varphi(\bar{z})$ in eine Taylorreihe von der Höhenlage des Flügels $\bar{z}_F$ aus entwickeln:

$$\varphi(\bar{z}) = \varphi(\bar{z}_F) + (\bar{z} - \bar{z}_F) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_F) + \ldots \quad (5.5)$$

Es genügt in allen Fällen, sich auf die ersten beiden Glieder dieser Entwicklung zu beschränken. Nun ist für $\bar{z} > \bar{z}_F$, also für das Gebiet unter dem Flügel

$$\varphi(\bar{z}_F) = -\frac{1}{2}\Gamma(\bar{y} = 0) \quad \ldots\ldots (5.6)$$

und für $\bar{z} < \bar{z}_F$

$$\varphi(\bar{z}_F) = +\frac{1}{2}\Gamma(\bar{y} = 0) \quad \ldots\ldots (5.7)$$

während in beiden Fällen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_F) = 2\,\bar{w}_i(\bar{y} = 0) \quad \ldots\ldots\ldots (5.8)$$

ist. Es ergibt sich daher ein Verlauf $\varphi(\bar{z})$, wie er in Bild 11 dargestellt ist. Diesen Verlauf jetzt auf die ursprüngliche Rumpfkontur in der U-Ebene zu übertragen, bereitet nun keine Schwierigkeit mehr, da die Abhängigkeit $y(\bar{z})$ ja bekannt ist.

Für die Bestimmung der Luftkraftverteilung über die Rumpflänge greifen wir auf die Überlegungen zurück, die wir im 3. Abschnitt über die Rumpfmomente gemacht haben. Wir können die Luftkraftverteilung in zwei Teile zerlegen, deren eine ein freies Moment liefert, während die zweite nur einen Auftrieb mit der Resultierenden bei $t/4$ des Flügelmittelstücks ergibt. Für die Verteilung der Luftkräfte vor und hinter dem Flügel kommt nur der erste Anteil in Frage. Die Verteilung ergibt sich dann unmittelbar aus der Formel (3. 3).

Im Flügelbereich verteilen wir den Auftrieb entsprechend der Auftriebsverteilung über die Tiefe des Flügelstücks, das im Rumpfbereich liegen würde, wenn der Rumpf nicht da wäre. Dabei ergeben sich in der Gegend der Flügelnase sehr große örtliche Auftriebswerte, die sich aber gegen die in der gleichen Gegend liegenden Abtriebe nach Formel (3. 3) — an der Flügelnase fällt β bzw. $\frac{d\beta}{dx}$ sehr schnell auf Null ab — sehr stark ausgleichen. Insgesamt wird man die so ermittelte Verteilung über die gesamte Rumpflänge noch etwas ausgleichen müssen. Übertrieben ängstlich braucht man dabei nicht zu sein, da sich die Querkräfte und Biegemomente im Rumpf erst durch Integration aus diesen Verteilungen ergeben und daher nicht sehr empfindlich gegen kleine Fehler sind. Man achte nur

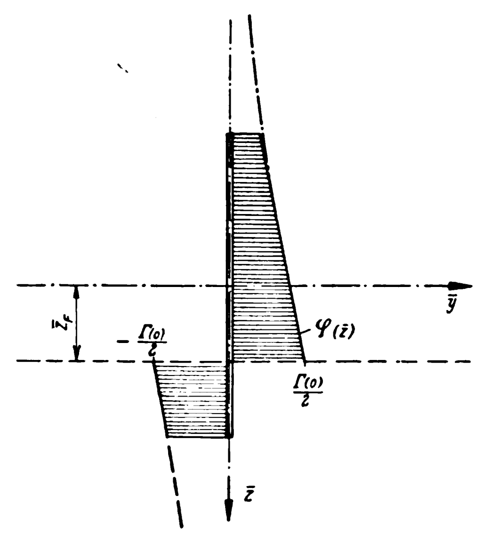


Bild 11. Verlauf des Potentials φ auf dem Schnitt des konform abgebildeten Rumpfes.

darauf, daß der Gesamtauftrieb und das Rumpflängsmoment die in den vorhergehenden Abschnitten errechneten Werte annehmen. Die Verteilungen sehen dann etwa so aus, wie Bild 12 zeigt.

6. Der praktische Gang der Auftriebsverteilungsrechnung bei Berücksichtigung des Rumpfes.

Um die Ergebnisse der in den vorhergehenden Abschnitten entwickelten Theorie anwenden zu können, muß man als erstes sich alle erforderlichen Unterlagen beschaffen. Hierzu gehören:

1. Die Angabe des Verlaufes von Flügeltiefe und Verwindung, wobei die Verwindung zweckmäßigerweise gleich gegen die Rumpfachse im Bereich des Flügels als Bezugsachse gemessen bzw. umgerechnet wird. Maßgebend ist auch immer die sog. aerodynamische Verwindung, also die Lage der Nullauftriebsrichtung jedes Flügelschnittes und nicht der Flügelsehne gegenüber der Bezugsachse.
2. Eine Skizze des Rumpfes, aus der insbesondere auch die genaue Zuordnung des Flügels zum Rumpf ersichtlich ist.

Als erstes ermittelt man dann die Funktion $\bar{u}(u)$ für die konforme Abbildung. Zu diesem Zweck zeichnen wir uns denjenigen Schnitt durch den Rumpf heraus, der bei ¾ der Wurzeltiefe des Flügels vorliegt. Hat der Rumpf kreisförmigen Querschnitt mit dem Halbmesser R, so ist:

$$\bar{u} = u + \frac{R^2}{u} \quad \ldots \ldots \ldots (6.1)$$

$$\frac{d\bar{u}}{du} = 1 - \frac{R^2}{u^2} \quad \ldots \ldots \ldots (6.2)$$

Die Spur des Flügels in der $\bar{U}$-Ebene ergibt sich also zu:

$$\bar{y} = y\left[1 - \frac{R^2}{y^2 + z_F^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (6.3)$$

der Faktor $\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ ist:

$$\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) = 1 + \frac{R^2(y^2 - z_F^2)}{(y^2 + z_F^2)^2} \quad \ldots \ldots (6.4)$$

für $z = 0$ (Mitteldecker) vereinfacht sich dies auf:

$$\bar{y} = y - \frac{R^2}{y} \quad \ldots \ldots \ldots (6.5)$$

$$\Re\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) = 1 + \frac{R^2}{y^2} \quad \ldots \ldots \ldots (6.6)$$

Für den Rumpf mit elliptischem Querschnitt machen wir erst eine Zwischenabbildung: Die Ellipse in der U-Ebene geht zunächst in einem Kreis in der U_1-Ebene über, der dann ebenso wie oben auf dem senkrechten Schlitz abgebildet wird, Bild 13. Die Zwischenabbildung vermittelt die Funktion

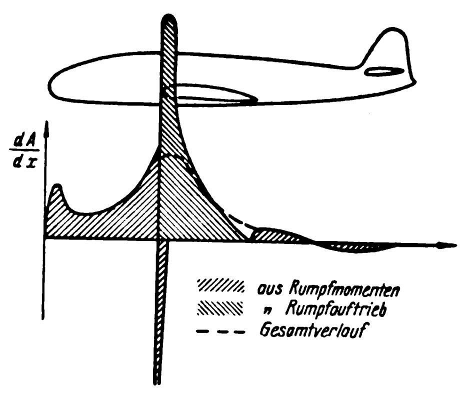


Bild 12. Luftkraftverteilung über Rumpflänge.

$$u = u_1 + \frac{R_1^2}{u_1}, \quad \ldots \ldots \ldots (6.7)$$

die die Verbindungslinie der Brennpunkte der Ellipse ($z = \pm E$) in einen Kreis transformiert, dessen Radius

$$R_1^2 = \frac{E^2}{4} = \frac{A^2 - B^2}{4} \quad \ldots \ldots (6.8)$$

beträgt. Die Ellipse mit den Halbachsen A und B geht dann in einen Kreis mit dem Radius

$$R_2 = \frac{A + B}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (6.9)$$

über. Dieser Kreis wird jetzt durch die Abbildung

$$\bar{u} = u_1 + \frac{R_2^2}{u_1} \quad \ldots \ldots \ldots (6.10)$$

in den senkrechten Schlitz überführt.

Aus (6. 7) und (6. 10) folgt jetzt, daß

$$\bar{u} - u = \frac{1}{u_1}(R_2^2 - R_1^2) \quad \ldots \ldots (6.11)$$

und

$$\bar{u} R_1^2 - u R_2^2 = u_1(R_1^2 - R_2^2) \quad \ldots (6.12)$$

ist. Die Multiplikation dieser beiden Gleichungen miteinander liefert:

$$\bar{u}^2 R_1^2 - u\bar{u}(R_1^2 + R_2^2) + u^2 R_2^2 + (R_2^2 - R_1^2)^2 = 0 \quad (6.13)$$

oder auch wegen Gl. (6. 7) und (6. 9):

$$\bar{u}^2 - \frac{2A}{A - B}\bar{u}u + \frac{A + B}{A - B}(u^2 + B^2) = 0 \quad \ldots (6.14)$$

Und daraus ergibt sich:

$$\bar{u} = \frac{1}{A - B}\left[A u - B\sqrt{u^2 - A^2 + B^2}\right]. \quad \ldots (6.15)$$

Dies ist die Abbildungsfunktion, die die Ellipse in der U-Ebene unmittelbar in den senkrechten Schlitz in der $\bar{U}$-Ebene überführt. Die Zuordnung zwischen den Punkten der U-Ebene, also insbesondere den Koordinaten des Flügels und denen der $\bar{U}$-Ebene erhält man durch ganz elementare Rechnungen mit Hilfe der Gleichung (6. 15). Am einfachsten setzt man

$$u = z + i y = a\cos\varphi + i b \sin\varphi \quad \ldots (6.16)$$

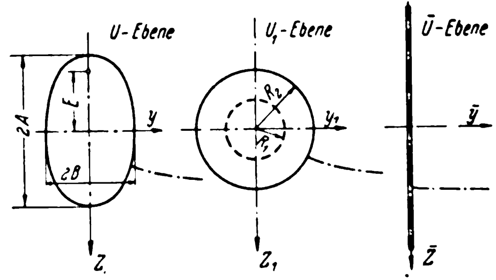


Bild 13. Gang der konformen Abbildung bei elliptischen Rumpfquerschnitten.

wobei a das geometrische Mittel der Entfernungen des Punktes von den beiden Brennpunkten der Ellipse ist, während $b = \sqrt{a^2 - E^2}$ ist. Dann wird

$$\sqrt{u^2 - a^2 + b^2} = b \cos \varphi + i\, a \sin \varphi \quad . \; . \; . \quad (6.\,17)$$

Die $\bar{y}$-Koordinate des transformierten Flügels, die wir für die Auftriebsverteilungsrechnung benötigen, wird dann

$$\bar{y} = \mathfrak{J}(\bar{u}) = \frac{1}{A - B}(A\, b \sin \varphi - B\, a \sin \varphi)$$

$$= \frac{y}{A - B}\left(A - B\frac{a}{\sqrt{a^2 - E^2}}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (6.\,18)$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{1}{A - B}\left[A - B\frac{u}{\sqrt{u^2 - E^2}}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (6.\,19)$$

Der in die Auftriebsverteilungsrechnung hineingehende Abbildungsfaktor wird dann:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) = \frac{1}{A - B}\left[A - B\frac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2 - E^2}}}{1 + \dfrac{E^2\, y^2}{(a^2 - E^2)^2}}\right] \quad . \; . \quad (6.\,20)$$

Für Rumpfquerschnitte, die auch von der Ellipse stark abweichen, muß man sich eine besondere Abbildungsfunktion überlegen; es würde eben zu weit führen, wenn man alle überhaupt denkbare Formen hier durchrechnet.

Nachdem man so zunächst die Zuordnung von y, $\bar{y}$ und $\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ zueinander gefunden hat, kann man leicht $\alpha_F(\bar{y})$ und $t(\bar{y})$ angeben; daraus bildet man wieder eine Auftragung von

$$\frac{c\, t(\bar{y})}{b} \cdot \mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$$

und

$$\frac{\alpha_F(\bar{y}) - \alpha_R}{\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)}$$

als Funktion von $\bar{y}$. Für die nun folgende ganz reguläre Auftriebsverteilungsrechnung führt man noch

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{y}}{\bar{b}/2}$$

ein. Die Bestimmung der in Gl. (4. 24) eingeführten Grundverteilungen $\bar{\gamma}_0$ und $\bar{\gamma}_R$ führt jetzt nach dem von mir angegebenen Verfahren [8] zu den Gleichungssystemen:

$$\left[b_{\nu\nu} + \frac{\bar{b}}{c_\nu\, t_\nu\, \mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)}\right]\bar{\gamma}_{0\nu} = \frac{\alpha_{F\nu} - \alpha_R}{\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)} + \sum_{1}^{\frac{m+1}{2}}{}' B_{\nu n}\, \bar{\gamma}_{0n} \quad (6.\,21)$$

$$\left[b_{\nu\nu} + \frac{\bar{b}}{c_\nu\, t_\nu\, \mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)}\right]\bar{\gamma}_{R\nu} = 1 + \sum_{1}^{\frac{m+1}{2}}{}' B_{\nu n}\, \bar{\gamma}_{Rn} \quad . \; . \; . \quad (6.\,22)$$

Die Zahlen $b_{\nu\nu}$ und $B_{\nu n}$ und die Stellen η_ν bzw. η_n entnimmt man dem Bericht [8].

Überträgt man die so errechneten Zirkulationswerte auf den wirklichen Flügel, so bildet man zunächst zweckmäßigerweise:

$$\gamma = \bar{\gamma}\,\frac{\bar{b}}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.\,23)$$

Im Rumpfbereich fällt γ jetzt normalerweise ab; bei einem Rumpf von elliptischem Querschnitt hat die Verteilung über die Rumpfbreite jetzt ebenfalls die Gestalt einer Halbellipse, und zwar ist der Wert in Rumpfmitte, wie man aus Gl. (5. 5) leicht errechnet:

$$\gamma_M = \gamma_{\frac{m+1}{2}} - \frac{h_R + b_R}{b/2}\,\bar{\alpha}_{i\,\frac{m+1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.\,24)$$

mit:

$$\bar{\alpha}_{i0\,\frac{m+1}{2}} = \frac{1}{\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)}\left[\alpha_{F\,\frac{m+1}{2}} - \alpha_R - \frac{b\,\gamma_{0\,\frac{m+1}{2}}}{c\, t_{\frac{m+1}{2}}}\right]$$

$$\bar{\alpha}_{iR\,\frac{m+1}{2}} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{R}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)}\,\frac{b\,\gamma_{R\,\frac{m+1}{2}}}{c\, t_{\frac{m+1}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6.\,25)$$

h_R und b_R sind die Höhe und Breite des Rumpfes.

Ein paar Beispiele durchgerechneter Auftriebsverteilungen über Flügel und Rumpf zeigen Bild 14 und 15. Zum Vergleich mit Messungen steht uns bis jetzt noch gar kein Material zur Verfügung; es sind keine Messungen vorhanden, in denen wirklich die Auftriebsverteilung unter dem Einfluß des Rumpfes ermittelt wurde. Um dennoch eine gewisse Bestätigung der Rechnungen zu erhalten, kann man einen Vergleich der gemessenen und berechneten Gesamt-c_a-Werte durchführen. Hierzu ist es aber erforderlich, den Flügel ohne Rumpf ebenfalls zu rechnen. Trägt man c_a über α_R auf, so erhält man ein Bild, wie es in Bild 16 dargestellt ist. Bei $\alpha_R = 0$ ist der c_a-Wert der Kombination durchweg etwas kleiner als der des Flügels allein, während die Steigung $\frac{d c_a}{d \alpha}$ für mittlere Hochlagen des Flügels gegenüber dem Rumpf größer wird. Dadurch haben wir in der Gegend von $c_a = 0$ bei gleichem α für die Kombination durchweg kleinere c_a-Werte, als für den Flügel allein. Die so bei konstantem α entstandene Differenz wurde aber nach dem bisherigen Verfahren der Lastverteilungsrechnung als Rumpfabtrieb dem Rumpf selbst unmittelbar zugeschrieben. Man erhielt dadurch für den C-Fall und auch für das Abfangen bei hohem Staudruck (B-Fall) Auftriebsverteilungen, deren einziger Vorteil darin besteht, daß sie auf sehr große Biegemomente im Tragwerk führen und dadurch die Wirkung eines weiteren Sicherheitszuschlages zu den Belastungsannahmen des Flügels hatten. Wegen des völlig anderen Charakters der richtigen Auftriebsverteilung ist es aber nicht immer

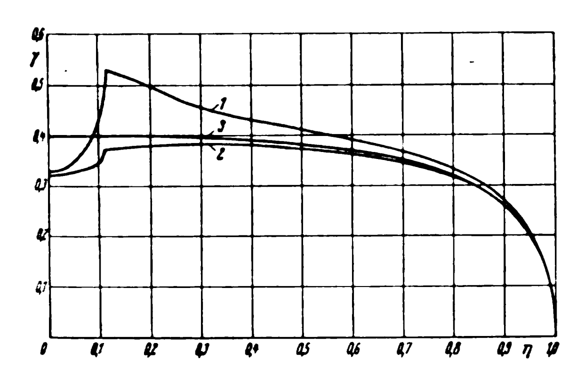


Bild 14. Auftriebsverteilungen für einen Mitteldecker mit Kreisrumpf und Rechteckflügel $\Lambda = 6$.
Die Abmessungen entsprechen den Verhältnissen im NACA-Rep. 540.
1 Flügel und Rumpf angestellt (γ_R); $\alpha_R = 1$
$\frac{\Delta c_a'}{c_{a\,Fl}'} = 0{,}073$ (gem. 0,054),
2 Flügel angestellt, Rumpf in Strömungsrichtung $\alpha_F - \alpha_R = 1$
$\frac{\Delta c_a}{c_{a\,Fl}} = -\,0{,}050$ (gem. $-\,0{,}049$),
3 Flügel allein $\alpha = 1$.

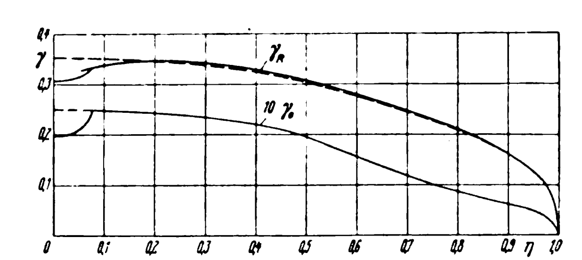


Bild 15. Auftriebsverteilungen für einen Tiefdecker.
— — — Flügel allein
$c_{a\,F}' = 4{,}53$ $c_{a\,F+R}' = 4{,}52$ $c_{a\,F}(\alpha_R = 0) = \cdot 238$ $c_{a\,F+R}(\alpha_R = 0) = \cdot 233$.
Gemessene c_a-Werte entsprechen der Rechnung.
Abweichungen im Rahmen der Meßgenauigkeit.

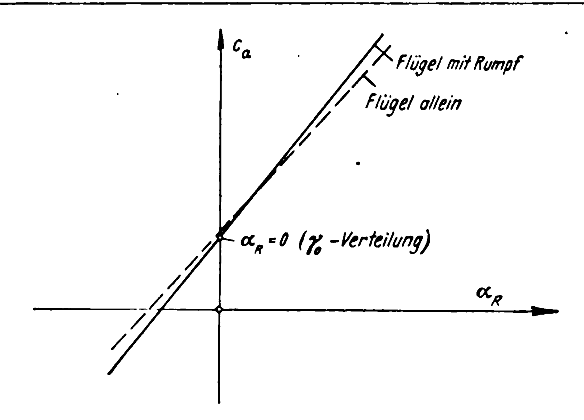


Bild 16. Abhängigkeit des Auftriebs vom Anstellwinkel.

gesagt, daß man mit diesem Verfahren an allen Stellen hinsichtlich der örtlichen Festigkeit auf der sicheren Seite bleibt.

Beim Vergleich der Rechnungen mit den Messungen muß man sich natürlich die Genauigkeit und Zuverlässigkeit beider etwas schärfer überlegen. Bei den Messungen besteht die Hauptschwierigkeit darin, daß man den Anstellwinkel im Windkanal nicht immer mit der in diesem Sonderfall eigentlich erforderlichen Sorgfalt einstellen kann. Weiterhin muß die Wägung sehr genau erfolgen, weil es ja auf verhältnismäßig kleine Differenzen ankommt. Bei Messungen in kleineren Kanälen kommt hinzu, daß die heutzutage gebräuchlichen Flügelprofile bei den Reynolds-Zahlen des Windkanals ein etwas absonderliches Verhalten zeigen, das mit dem Umschlag der Grenzschichtströmung vom laminaren zum turbulenten Zustand zusammenhängt; da auch diese Dinge ein wenig durch den Rumpf beeinflußt werden, vergrößert sich hierdurch der Streubereich der Messungen etwas.

Was nun die Theorie anbetrifft, so kann uns ein grundsätzlicher Fehler der ganzen Tragflügeltheorie die Ergebnisse etwas verfälschen, der in der Annahme

$$w_i = \frac{1}{2}\, w_{x \to -\infty}$$

steckt. In Wirklichkeit ist der für den Auftrieb wirksame Abwind größer als der halbe Abwind weit hinter dem Flügel, da für die Zuströmungsverhältnisse zum Flügel der Anstellwinkel bei $^3\!/_4\, t$ maßgeblich ist. Dies betrifft ganz besonders die Fälle, in denen wir sehr große Beträge des induzierten Anstellwinkels haben. Es sind daher gerade beim Mitteldecker in Rumpfnähe Einflüsse dieser Art zu erwarten, die bewirken, daß die Änderung des $\frac{d c_a}{d \alpha}$ durch den Rumpf nicht so groß wird, wie man es auf Grund der Rechnung vermuten sollte. Eine genügend einfache quantitative Erfassung dieser Dinge ist im Augenblick noch nicht möglich; ebenso reichen die vorhandenen Messungen nicht aus, um die Größenordnung der hierdurch bedingten Änderungen anzugeben. Vorläufig kann man sich, soweit man Messungen zur Hand hat, die hinreichend zuverlässig sind, so helfen, daß man entweder die gesamte Verteilung der Luftkräfte mit einem passenden Abminderungsfaktor versieht, oder, was wahrscheinlich besser ist, von dem Auftrieb in der Nähe des Rumpfes etwas abbaut. Hierdurch werden jedoch in erster Linie solche Rumpfflügelkombinationen betroffen, die man schon wegen des $c_{a\,\max}$-Verlustes zweckmäßigerweise nicht baut. Bei den bisher erfaßten Fw-Mustern war jedenfalls die Übereinstimmung hinsichtlich des $\frac{d c_a}{d \alpha}$ weit besser als bei dem in Amerika gemessenen Mitteldecker mit Kreisrumpf, Bild 14.

Eine etwas abweichende Behandlung muß im allgemeinen die Motorgondel erfahren. Wenn auch eine ähnliche Umströmung existiert wie beim Rumpf, so ist doch ihr Einfluß auf den Flügel im allgemeinen sehr gering, da die Gondelbreite schon im Bereich des Flügels stark abnimmt und, wie schon verschiedentlich betont, für die Zuströmungsverhältnisse zum Flügel die $^3\!/_4$-t-Gegend maßgebend ist. Bei tiefliegenden Gondeln haben wir aus der Längsverdrängungsströmung am Flügel eine vom Anstellwinkel unabhängige Abwärtsgeschwindigkeit in der Umgebung der Gondel zu erwarten, die auf eine Auftriebsverminderung am Flügel führt. Um die hieraus folgende Änderung der Auftriebsverteilung in ihrem Verlauf einigermaßen richtig zu erfassen, kann man, wie das schon vorgeschlagen wurde, im Bereich der Gondel mit einem geänderten Anstellwinkel rechnen und diese Anstellwinkeländerung so annehmen, daß die gemessene c_a-Differenz dabei herauskommt. Da der Einfluß der Gondel auf die Auftriebsverteilung und die daraus folgenden Biegemomente und Querkräfte im Tragwerk im allgemeinen klein ist, lohnt es sich nicht, ein genaueres Verfahren zu entwickeln. Hinsichtlich der Verteilung der Luftkräfte über die Gondeltiefe kann man dasselbe Verfahren wie beim Rumpf einschlagen. Eine geringfügige Änderung der Luftkraftverteilung kann unter dem Einfluß der Gondel dadurch zustande kommen, daß die Gondel wie eine auf den Flügel gesetzte Scheibe wirkt. Es kann hierdurch zu einer geringen Vergrößerung des Auftriebes in dem Flügelbereich zwischen den Gondeln und zu einem entsprechenden Abfall des Auftriebes im äußeren Flügelbereich kommen. Wenn man diese Dinge nicht berücksichtigt, bleibt man jedoch wohl immer auf der sicheren Seite hinsichtlich der Tragwerksbeanspruchungen.

7. Der Rumpfeinfluß auf das Schieberollmoment.

Bisher haben wir durchweg symmetrische Anströmungszustände des Rumpfes betrachtet und dabei gerade aus diesen Symmetrieeigenschaften der Strömung des öfteren für unsere Rechnung einigen Nutzen gezogen. Nicht minder bemerkenswert sind nun aber die Erscheinungen, die bei unsymmetrischen Anströmungszuständen des Rumpfes aufzutreten pflegen. Was da beim Rumpf allein geschieht, haben wir schon anfangs erläutert; ebenso wichtig sind aber die mittelbaren Wirkungen des Rumpfes. Als erstes haben wir da das Rollmoment des schiebenden Flugzeuges, das, wie ich schon an anderer Stelle ausgeführt habe [9], maßgeblich von der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf abhängt.

Ebenso wie bei einer Anstellung des Rumpfes haben wir natürlich auch bei seitlicher Anblasung eine Verdrängungsströmung proportional der Querkomponente der Rumpfzuströmung, die je nach der Hochlage des Flügels Geschwindigkeitskomponenten normal zum Flügel und damit also eine Anstellwinkeländerung bedingt. Da diese Erscheinung auf den beiden Seiten des Flügels mit verschiedenen Vorzeichen auftritt, so ergibt sich hieraus eine antisymmetrische Auftriebsverteilung, die ein Rollmoment zur Folge hat. Wenn auch die Anstellwinkeländerung zunächst nur auf die rumpfnahen Flügelteile beschränkt zu sein scheint, die keinen genügenden Hebelarm haben, so ergibt sich trotzdem durch die ausgleichende Wirkung der gegenseitigen Beeinflussung der einzelnen Flügelschnitte immer noch ein ganz annehmbares Schieberollmoment für den ganzen Flügel.

Wenn man diesen Einfluß rechnerisch verfolgen will, so muß man sich zunächst die Anstellwinkeländerung unter dem Einfluß der Querumströmung ermitteln. Zu diesem Zweck machen wir genau das gleiche, das wir vorher schon mit Erfolg bei symmetrischen Zuströmungszuständen gemacht haben: wir nehmen die Strömung quer zum Rumpf als eben an, und zwar ist für unsere Rechnungen der Schnitt durch den Rumpf bei $^3\!/_4$ der Flügeltiefe maßgebend. Die Ermittlung der Strömung quer zu diesem Rumpfschnitt erfolgt dann in den meisten Fällen am besten mit Hilfe der konformen Abbildung auf ganz ähnliche Weise wie in den vorangegangenen Abschnitten. Ist also jetzt

$$u = y + i z \qquad (7.1)$$



die komplexe Koordinate für die Ebene um diesen Rumpfschnitt, so ergibt $\bar{u}\,(u)$ die Abbildung dieses Rumpfschnittes auf eine in diesem Fall horizontale Schneide; dann ist

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{v_y - i\,v_z}{v \cdot \tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.2)$$

ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit um den Rumpfschnitt. Genügend weit ab vom Rumpf ist

$$v_y = v \cdot \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.3)$$

Die Anstellwinkeländerung für den einzelnen Flügelschnitt ist nun

$$\Delta\alpha = \frac{v_z}{v} = -\tau\,\Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.4)$$

Wir können also $-\Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ auch ohne weiteres als einen scheinbaren V-Winkel des Flügels ansehen, der zu der geometrischen V-Stellung hinzukommt.

Zur Ermittlung des Schieberollmomentes könnte man nun eine vollständige Auftriebsverteilungsrechnung durchführen. Man müßte dabei jedoch noch zweierlei zusätzlich berücksichtigen: einmal ist in der Nähe des Rumpfes die übliche Annahme

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\,\alpha_{w\;x \to -\infty}$$

nicht mehr hinreichend gültig, sondern es müßte ein größerer Wert dastehen, so daß die Auftriebswerte im Innenbereich des Flügels etwas kleiner würden als nach der üblichen Auftriebsverteilungsrechnung; zum anderen müßte man auch für die induzierte Strömung noch das Verschwinden der Geschwindigkeitskomponente normal zum Rumpf fordern, was eine Erhöhung der rumpfnahen Auftriebsbeiwerte mit sich bringt. Diese beiden Erscheinungen würden, wenn man sie wirklich berücksichtigen will, die praktische Rechnung ganz erheblich erschweren; glücklicherweise gehen aber beide in ihrer Wirkung gegeneinander, so daß es erfolgversprechend erscheint, sie beide zunächst zu vernachlässigen. Für einen elliptischen Flügel ist dann das Schieberollmoment:

$$\frac{dc_L}{d\tau} = \frac{1}{\frac{\pi}{c'_{a\,\infty}} + \frac{2}{\Lambda}} \int_{-1}^{1} \Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \eta\,\sqrt{1-\eta^2}\,d\eta \quad . \; . \; . \; (7.5)$$

für irgendeinen anderen Flügel hat man:

$$\frac{dc_L}{d\tau} = \int_{-1}^{1} \Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \eta \cdot f(\eta)\,d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7.6)$$

dabei ist der Integrationsfaktor $f\,(\eta)$ noch von der Umrißform des Flügels abhängig; soweit für die gerade vorliegende Umrißform Querruderrechnungen für verschiedene Querruderbreiten vorliegen, kann man daraus den Faktor f durch Differenzieren gewinnen. Im allgemeinen liegen jedoch die heutigen Flügelformen so nahe bei der Ellipse, daß eine genauere Rechnung nicht mehr lohnt.

Die Integration nach Formel (7.5) läßt sich jetzt leichter durchführen, wenn wir nicht über die ganze Spannweite des Flügels integrieren, sondern nur im Bereich

$$-\frac{2}{\pi} < \eta < \frac{2}{\pi},$$

und dafür den Faktor $\sqrt{1-\eta^2}$ bei der Integration fortlassen. Der verbleibende Fehler wird dann sehr klein, weil $\Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)$ mit der dritten Potenz von y nach außen abfällt. Wir setzen also:

$$\frac{dc_L}{d\tau} = \frac{1}{\frac{\pi}{c'_{a\,\infty}} + \frac{2}{\Lambda}} \int_{-2/\pi}^{2/\pi} \Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \eta\,d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7.7)$$

Nun führt das Integral

$$-\int \Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) y\,dy$$

wenn man zunächst das komplexe Integral

$$\int \frac{d\bar{u}}{du}\,u\,du$$

auswertet, auf die Formel

$$-\int \Im\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right) \cdot y\,dy = \Im\left(\int \bar{u}\,du\right) - y\,\Im\,(u) \quad . \; . \; . \; (7.8)$$

Bei einem elliptischen Rumpfquerschnitt mit den Halbachsen A und B ist nun:

$$\bar{u} = \frac{1}{A-B}\left[A\,u - B\sqrt{u^2-(A^2-B^2)}\right]$$

$$\int \bar{u}\,du = \frac{1}{A-B}\left\{A\,\frac{u^2}{2} - \frac{B}{2}\left[u\sqrt{u^2-(A^2-B^2)}\right.\right.$$
$$\left.\left. -\,(A^2-B^2)\ln\left(u + \sqrt{u^2-(A^2-B^2)}\right)\right]\right\} \quad (7.9)$$

Wir erhalten daher, wenn z_F die Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf bezeichnet, für das Schieberollmoment folgende endgültigen Beziehungen:

$$\frac{dc_L}{d\tau} = \frac{1}{\frac{\pi}{c'_{a\,\infty}} + \frac{2}{\Lambda}}\;\frac{h_R\,(h_R+b_R)}{b^2}\left[\frac{2\,z_F}{h_R}\sqrt{1-\left(\frac{2\,z_F}{h_R}\right)^2} + \arcsin\frac{2\,z_F}{h_R} - \frac{2\,\pi\,z_F}{b}\right]$$

für:

$$-\frac{h_R}{2} < z_F < \frac{h_R}{2}$$

oder:

$$\frac{dc_L}{d\tau} = \frac{1}{\frac{\pi}{c'_{a\,\infty}} + \frac{2}{\Lambda}}\;\frac{h_R\,(h_R+b_R)}{b^2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2\,\pi\,z_F}{b}\right] \qquad z_F > \frac{h_R}{2}$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{c'_{a\,\infty}} + \frac{2}{\Lambda}}\;\frac{h_R\,(h_R+b_R)}{b^2}\left[-\frac{\pi}{2} - \frac{2\,\pi\,z_F}{b}\right] \qquad z_F < -\frac{h_R}{2}$$

$$. \; . \; . \; (7.10)$$

Für den Vergleich dieser Werte mit Messungen steht zur Zeit noch sehr wenig Material zur Verfügung. Auswertbar sind eigentlich nur die Ergebnisse aus dem NACA Technical Note 730, worin die Schieberollmomente für eine Rumpf-Flügelkombination bei verschiedenen Hochlagen des Flügels gegenüber dem Rumpf mitgeteilt werden. Bei den Abmessungen des von den Amerikanern benutzten Modells ist

$$-\frac{dc_L}{d\tau} = 0{,}032_4$$

die Differenz zwischen den Schieberollmomenten von Hoch- und Mitteldecker und

$$-\frac{dc_L}{d\tau} = -0{,}035_2$$

die Differenz zwischen Tief- und Mitteldecker. Das Ergebnis zeigt Bild 17. In dem Anstellwinkelbereich $-4^0 < \alpha < 4^0$, also in der Gegend, wo die Strömung im Gebiet des Rumpf-flügelüberganges sicher noch völlig anliegt, ergibt sich als Mittelwert aus den Messungen genau das Ergebnis unserer Rechnungen. Ähnliche Ergebnisse hat auch Herr Professor Schlichting, wie er mir mündlich mitgeteilt hat, erhalten; er hat dabei festgestellt, daß die Schieberollmomente einen eindeutigen Verlauf zeigen, wenn man die Flügelwurzel so auskleidet, daß die Strömung nirgends abreißt, was ja auch aus Leistungsgründen angestrebt werden muß.

8. Der Rumpfeinfluß auf das Leitwerk.

Recht wenig geklärt ist bis jetzt das Zusammenwirken des Rumpfes mit dem Leitwerk. Grundsätzlich müßten am Höhenleitwerk ähnliche Erscheinungen auftreten wie beim Flügel, also bei üblichen Hochlagen eine Erhöhung des wirksamen Anstellwinkels durch die Rumpfumströmung und damit eine Änderung des $\frac{dc_n}{d\alpha}$; diese Wirkung ist natürlich nicht erkennbar, wenn man, wie das sehr oft geschieht, zur Bestimmung der Leitwerkswirksamkeit verschiedene Einstellungen des Leitwerks gegenüber dem Rumpf im Windkanal durchmißt. Wir haben daher in dieser Erscheinung



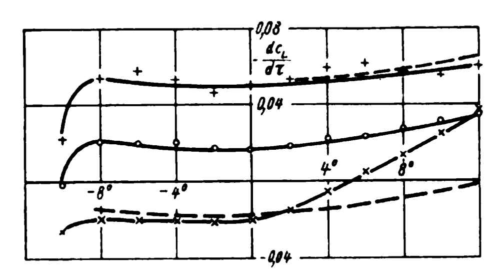


Bild 17. Schieberollmoment bei Rumpfeinfluß (Messungen aus NACA-Techn. Note 730).
+ Hochdecker O Mitteldecker × Tiefdecker
——— Theoretische Werte für Hoch- und Tiefdecker.

eine weitere Erschwerung der experimentellen Bestimmung der Strömungsverhältnisse am Höhenleitwerk.

Weiterhin ist wegen der Änderung der Luftkraftverteilung am Flügel unter dem Einfluß des Rumpfes auch eine Änderung des Abwindes α_W bzw. der für den Stabilitätsanteil des Höhenleitwerks bestimmenden Größe

$$1-\frac{d\alpha_W}{d\alpha}$$

zu erwarten, und zwar dürfte dieser Faktor im allgemeinen kleiner werden. Da wir im Windkanal aber nur den Unterschied des Produktes

$$\frac{dc_n}{d\alpha}\left(1-\frac{d\alpha_W}{d\alpha}\right)$$

gegenüber dem $\frac{dc_n}{d\alpha}$ des Leitwerks allein bestimmen, wird man die Abwindänderung durch den Rumpf gar nicht bemerken können, da hier zwei Einflüsse des Rumpfes gegeneinander arbeiten und sich gegenseitig fast aufheben.

Wichtiger scheint durchweg die Wirkung der Rumpfgrenzschicht zu sein, die in der Leitwerksgegend nicht mehr so klein ist, wie noch am Flügel, sondern vor allem auch dadurch, daß der Rumpf dort schon zusammengezogen ist, einen beträchtlichen Streifen des Leitwerks überdeckt. Natürlich hat man in diesem von der Grenzschicht überstrichenen Streifen einen ganz beachtlichen Einbruch in der Luftkraftverteilung. Das deshalb von Hoerner [10] vorgeschlagene Verfahren, den Rumpfbereich als einen Ausschnitt im Leitwerk aufzufassen, führt deshalb vielfach auf ganz vernünftige $\frac{dc_n}{d\alpha}$-Werte.

Beim Seitenleitwerk ist der Rumpf von großem Einfluß auf das $\frac{dc_W}{d\alpha}$, wenn es sich um eine zentrale Leitwerksanordnung handelt. Bei geteiltem Leitwerk ist der Rumpf im allgemeinen völlig zu vernachlässigen. Beim zentralen Seitenleitwerk muß man beachten, daß man es mit einem ganz unsymmetrischen Gebilde zu tun hat; der Rumpf und in vielen Fällen auch das Höhenleitwerk wirken wie eine einseitige Endscheibe; es hat sich daher bei uns als zweckmäßigste Regel herausgestellt, wenn man zur Bestimmung der Wirksamkeit des Seitenleitwerks mit der Streckung der durch eine Spiegelung an der Rumpfoberseite verdoppelten Leitwerksfläche rechnet.

Von besonderer Bedeutung für die Mechanik der unsymmetrischen Flugbewegungen ist aber die Tatsache, daß vom Flügel her nicht nur ein Abwind am Höhenleitwerk, sondern auch ein ganz ähnlich wirkender Seitenwind am Seitenleitwerk vorhanden ist. Die Größenordnung dieses Seitenwindes wird gerade durch das Zusammenwirken von Flügel und Rumpf beherrscht. Betrachten wir zunächst einmal einen Flügel ohne Rumpf, der eine gewisse V-Stellung δ haben möge. Beim Schieben entsteht dann eine Auftriebsverteilung derart, daß beim vorausschiebenden Flügelteil die Zirkulation vergrößert und beim nacheilenden Teil verkleinert wird. Das bedeutet dann aber, daß in der Flügelmitte $\frac{d\Gamma}{dy}$ ziemlich groß wird, und da wir nun wissen, daß $\frac{d\Gamma}{dy}$ gleich der Differenz der induzierten Geschwindigkeiten in Spannweitenrichtung von Ober- und Unterseite ist, so ergibt sich in der Flügelmitte oberhalb des Flügels ein ziemlich großer Seitenwind entgegen dem Seitenwind aus dem Schieben. Den Winkel, den dieser induzierte Seitenwind mit der Symmetrieebene des Flugzeuges bildet, wollen wir mit σ bezeichnen. Dann ergibt eine rohe Abschätzung der Größenordnung dieses Seitenwindes für einen Flügel mit der V-Stellung δ in der Flügelmitte oberhalb des Flügels:

$$\sigma \approx \tau \cdot \delta.$$

Infolge des Schiebens haben wir ja auf den beiden Seiten des Flügels eine Anstellwinkeländerung von der Größe $\tau \cdot \delta$, und diese Anstellwinkeländerung wird durch die induzierte Strömung fast völlig ausgeglichen. Wir können daher für eine ganz rohe Abschätzung annehmen, daß der Flügel im inneren Bereich wie ein Leitapparat wirkt, der der Strömung einen Drall von dieser Größe mitgibt.

Nun haben wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen, daß unter dem Einfluß des Rumpfes im Flügelmittelteil eine scheinbare V-Stellung erzeugt wird, die vorwiegend von der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf abhängt. Da der Absolutbetrag dieser scheinbaren V-Stellung für Hoch- und Tiefdecker weit größer ist als das, was man üblicherweise an geometrischer V-Stellung einbaut, haben wir auf diesem Umwege einen ganz erheblichen Einfluß des Rumpfes auf den Seitenwind zu erwarten. Beim Hochdecker wird der Seitenwind entsprechend der großen positiven scheinbaren V-Stellung den Seitenleitwerksbeitrag zur Richtungsstabilität stark verkleinern und beim Tiefdecker entsprechend vergrößern. Zur Abschätzung der Größenordnung fehlen z. Z. noch geeignete Anhaltspunkte; man kann vielleicht den Seitenwind mit der scheinbaren V-Stellung des Flügels in einer Entfernung aus der Flügelmitte vergleichen, die mit den Seitenleitwerksabmessungen in Beziehung gebracht werden können. Aussichtsreicher erscheinen im Augenblick systematische Messungen, bei denen man in erster Linie die Höhenlage des Flügels gegenüber dem Rumpf, das Verhältnis von Leitwerkshöhe zu Rumpfhöhe und die Einstellung des Flügels gegenüber dem Rumpf abwandeln muß. Weniger bedeutsam sind die Einflüsse der Flügelform, des Verhältnisses der Flügeltiefe zur Rumpfbreite und Höhe, die Leitwerksform usw.

Ein paar erste Messungen liegen in dem schon erwähnten NACA Technical Note 730 vor, die in Bild 18 zusammengestellt sind. Es ist hierin nur der Beitrag des Seitenleitwerks zur Richtungsstabilität dargestellt. Man sieht zunächst den ganz durchschlagenden Einfluß der Hochlage des Flügels gegenüber dem Rumpf, wobei der Hochdecker sich ziemlich eindeutig benimmt, während beim Tiefdecker wahrscheinlich einige Abreißvorgänge an der Flügelwurzel das Bild etwas verwischen; etwas ähnliches konnte man ja auch aus Bild 17 herauslesen. Beim Hochdecker ist die Wirkung des Seitenwindes ungefähr $\frac{d\sigma}{d\tau} = 0{,}4$, beim Tiefdecker haben wir etwa $\frac{d\sigma}{d\tau} = -0{,}3$, solange die Strömung in der Rumpfgegend anzuliegen scheint. Für den Einfluß der V-Stellung haben wir jeweils einen Zuschlag zu dem $\frac{d\sigma}{d\tau}$ in der Größenordnung von 0,09, was ja einer V-Stellung von 5° nach unseren Abschätzungen ziemlich genau entspricht. Der Hochdecker mit V-Stellung fällt bei negativen Anstellwinkeln etwas aus dem Rahmen heraus, wahrscheinlich sind auch hieran wieder örtliche Abreißerscheinungen schuld. Im allgemeinen zeigen alle Werte ein schwaches Ansteigen mit dem Anstellwinkel, was wohl mit dem Einfluß des Schiebens auf die Abwindverteilung längst der Flügelspannweite zusammenhängt. Bei fehlendem Tragflügel betrug bei dem gleichen Modell der Stabilitätsanteil des Seitenleitwerks $\frac{dc_N}{d\tau} = 0{,}09$; den gleichen Wert haben wir wieder beim Mitteldecker ohne V-Stellung in der Gegend von $\alpha = 0$, was man ja auch erwarten muß.

Für die Mechanik unsymmetrischer Flugbewegungen muß man nun bei dieser Angelegenheit folgendes beachten:

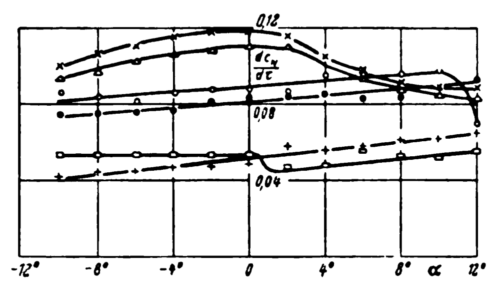


Bild 18. Anteil des Seitenleitwerks an der Richtungsstabilität unter Einfluß des Rumpfes.
(Nach NACA-Techn. Note 730.)
V-Stellung { 0°: + Hochdecker, O Mitteldecker, x Tiefdecker,
5°: □ „ ● „ ⊔ „ .

Während der Richtungsstabilitätsbeitrag des Seitenleitwerks jetzt mit dem Faktor

$$1 - \frac{d\sigma}{d\tau}$$

zu versehen ist, muß die Wendedämpfung, soweit die Wendebewegung aus einer Änderung des Schiebewinkels τ besteht, den Faktor

$$1 + \frac{d\sigma}{d\tau}$$

erhalten, weil der Seitenwind vom Flügel her genau wie der Abwind am Höhenleitwerk mit einer gewissen zeitlichen Verschiebung am Leitwerk ankommt. Diese gleichzeitige Änderung der Richtungsstabilität und der Wendedämpfung dürfte insbesondere für die Beurteilung der Gierschwingungen des Flugzeuges nicht zu vernachlässigen sein. In die statische Seitenstabilität, also die Stabilität gegen Spiralsturzbewegungen, geht jedoch nur der Einfluß auf die Richtungsstabilität ein und nicht die Wirkung des Seitenwindes auf die Wendedämpfung, weil es sich bei dieser Wendebewegung um eine Änderung des Flugzeugkurses handelt. Für die weiteren Seitenstabilitätsbetrachtungen läßt sich also der einheitliche Begriff der Wendedämpfung überhaupt nicht aufrechterhalten; man muß vielmehr entsprechend den zwei verschiedenen Arten der Wendebewegung auch zwei Begriffe dafür einführen. Etwas ähnliches ergibt sich ja auch schon bei der etwas eingehenderen Betrachtung der Wenderollmomente, wobei ebenfalls zwei verschiedene Werte herauskommen, je nachdem, ob bei der Wendebewegung die Flugbahn gerade bleibt oder gekrümmt ist [9].

Es ist zweckmäßig, all diese Fragen schon beim Entwurf eines Seitenleitwerks in geeigneter Weise zu berücksichtigen; insbesondere dürfte bei der Entscheidung, ob man ein geteiltes oder ein zentrales Seitenleitwerk baut, den Seitenwindverhältnissen unter dem Einfluß des Rumpfes und des Flügels eine besondere Bedeutung zukommen.

9. Zusammenfassung.

Für eine Reihe von Fragen, die insbesondere das Zusammenwirken des Rumpfes mit dem Flügel und dem Leitwerk betreffen, wurden einfache Rechnungsmethoden entwickelt, die aus möglichst stark idealisierten physikalischen Vorstellungen hergeleitet sind.

Für den Rumpf allein ergibt sich abweichend von der Potentialtheorie ein gewisser Reibungsauftrieb bei Schräganströmung, der ähnlich wie der Auftrieb von Flügeln kleiner Streckung nicht mehr linear vom Anstellwinkel abhängt. Dennoch existiert für diesen Reibungsauftrieb so etwas wie ein Neutralpunkt, dessen Lage bei länglichen Rümpfen nach den vorliegenden Versuchen mit dem Auftriebsanstieg des Rumpfes in der Gegend des Nullauftriebes zusammenzuhängen scheint.

Die Rumpflängsmomente lassen sich mit verhältnismäßig großer Zuverlässigkeit bestimmen, sofern man die Strömungsverhältnisse, die in der Gegend der Rumpfachse herrschen würden, wenn der Rumpf nicht da wäre, ungefähr ermitteln kann, was im allgemeinen nicht sehr schwierig ist. Insbesondere ergeben sich für den unstabilen Beitrag des Rumpfes zur statischen Längsstabilität des Flugzeuges verhältnismäßig einfache Formeln, deren Auswertung wenig Mühe macht. Bei den Motorgondeln kommt außerdem noch ein ganz erheblicher Momentenbeitrag des Flügels hinzu, der durch die ungleichmäßige Verteilung der Querverdrängungsströmung der Gondel längs der Flügeltiefe zustande kommt; auch dieser Beitrag läßt sich durch eine einfache Formel darstellen. Die Nachrechnung einer ganzen Reihe von verschiedenartigen Flugzeugmustern hinsichtlich der unstabilen Rumpf- und Gondelmomente ergab eine Übereinstimmung mit den Windkanalmessungen, die wohl für die Bedürfnisse der Praxis immer ausreichen dürfte; die Fehler lagen durchweg im Bereich der Meßgenauigkeit.

Bei der Bestimmung des Rumpfeinflusses auf die Auftriebsverteilung des Tragwerks wurde die ohne weiteres zulässige Annahme gemacht, daß man die Strömung quer zum Rumpf als eben ansehen darf; man kann dann sämtliche mathematischen Schwierigkeiten, die der Rumpf an sich mit sich bringen würde, durch eine konforme Abbildung des Rumpfquerschnittes auf einen senkrechten Schlitz beseitigen. Die Berechnung der Auftriebsverteilung für einen Flügel mit Rumpf läuft dann auf die Berechnung eines gleichwertigen Tragflügels hinaus, wobei der Rumpfeinfluß jetzt durch eine Änderung der Tiefenverteilung und zum Teil auch der Anstellwinkelverteilung dargestellt ist. Die üblichen Berechnungsmethoden für die Auftriebsverteilung eines Flügels können dann in vollem Umfange weiterverwendet werden; insbesondere erhält man wiederum zwei Grundverteilungen, aus denen man die Auftriebsverteilungen für die verschiedenen c_a-Werte des Flügels linear zusammensetzen kann, wie man das bei einem Flügel ohne Rumpfeinfluß schon gewohnt ist. Den Auftriebsanteil, den der Rumpf selbst übernimmt, kann man ebenfalls aus der so bestimmten Auftriebsverteilung des Tragwerks leicht abschätzen. Die nach diesem Verfahren bestimmten Luftkraftverteilungen für die Rumpfflügelkombination weichen ganz erheblich von denen ab, die man nach der bisherigen Methode erhielt, wenn man die gemessenen c_a-Differenzen unmittelbar als Rumpfauf- oder Abtrieb über die Breite des Rumpfes verteilte.

In einem weiteren Abschnitt wird der Einfluß des Rumpfes auf die Schieberollmomente des Flugzeuges besprochen. Dieser Einfluß kommt durch die Verdrängungsströmung quer zum Rumpf zustande, die beim Schieben entsteht. Man erhält hieraus bei einem Hoch- und Tiefdecker Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Flügel, die auf den beiden Flügelhälften verschiedene Vorzeichen haben, so daß daraus ein Rollmoment entsteht. Für dieses Rollmoment wird unter Beschränkung auf elliptische Rumpfquerschnitte eine einfache Formel abgeleitet, die durch die wenigen vorliegenden Messungen ganz gut bestätigt wird.

Schließlich werden die Strömungsverhältnisse am Leitwerk unter dem Einfluß des Rumpfes etwas näher erörtert. Es wird dabei vor allen Dingen auf den flugmechanisch sehr bedeutsamen Seitenwind am Seitenleitwerk hingewiesen, der beim Hoch- oder Tiefdecker durch die starke Beeinflussung der Auftriebsverteilung des Flügels durch die Querverdrängungsströmung des Rumpfes beim Schieben zustande kommt. Ein paar Messungen, die diese Erscheinung ausgeprägt zeigen, sollen auf die Folgen dieser Erscheinung für die Mechanik unsymmetrischer Flugbewegungen aufmerksam machen.

10. Schrifttum.

[1] Munk, The Aerodynamic forces on airship hulls. NACA-Report 184.

[2] J. H. Abbott, Airship model tests in the variable density wind tunnel. NACA-Report 394.

[3] E. N. Jakobs und K. E. Ward, Interference of wing and fuselage from tests of 209 combinations in the NACA variable-density tunnel. NACA-Report 540.

[4] J. Lennertz, Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpf. Z. angew. Math. Mechan. Bd. 7 (1927), S. 249.

[5] F. Vandrey, Zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragflügel und Rumpf. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 347.

[6] H. Muttray, Die aerodynamische Zusammenfügung von Tragflügel und Rumpf. Luftf.-Forschg. Bd. 11 (1934), S. 131.

[7] E. Trefftz, Prandtlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie. Z. angew. Math. Mechan. Bd. 1 (1921), S. 206.

[8] H. Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 153.

[9] H. Multhopp, Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik. In Vorbereitung.

[10] S. Hoerner, Einfluß von Rumpf und Luftschraube auf die Stabilität. Jahrbuch 1939 der Deutschen Luftfahrtforschung S. 231.

[11] M. J. Bamber und R. O. House, Wind-tunnel investigation of effect of yaw on lateral-stability characteristics. Rectangular-NACA 23012-Wing with a circular fuselage and a fin. NACA-TN. 730.

Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben.

Von H. Wolff.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Der bei Steigerung der Fluggeschwindigkeiten merkbar werdende Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben mit hoher Blattspitzengeschwindigkeit sollte durch Auswertung von Flugmessungen mit dem Muster Fw 200 »Condor« näher untersucht werden. Nach dem Vorschlag von Weinig wird dieser Einfluß durch den Wirkungsgrad η_u festgelegt. Beginn und Verlauf des Einflusses bei steigender Machscher Zahl werden ermittelt und mit dem von Weinig angegebenen Einflußbereich verglichen.

Die Geschwindigkeitssteigerung der Flugzeuge kann auf mehreren, grundsätzlich verschiedenen Wegen vorangetrieben werden. Neben der noch möglichen Verbesserung der aerodynamisch schon sehr hochwertigen äußeren Formgebung ist als wichtigstes und wirksamstes Mittel die Leistungssteigerung der Triebwerke in Angriff zu nehmen. — Für die Luftschraube erwächst dann die bei weiter sich steigernden Geschwindigkeiten schwieriger werdende Aufgabe, diese erhöhten Triebwerksleistungen mit möglichst gutem Wirkungsgrad in Vortriebsleistung umzuwandeln. Die Leistungsaufnahme der Luftschraube kann dabei durch Vergrößerung des Durchmessers, durch Steigerung der Drehzahl oder durch das Zusammenwirken beider Maßnahmen erhöht werden. Jede dieser Maßnahmen bedingt eine Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit der Luftschraubenblattspitzen, die allgemein als die »Umfangsgeschwindigkeit« der Luftschraube gewertet wird. Eine obere Grenze für diese Spitzengeschwindigkeit ist durch Annäherung an die Schallgeschwindigkeit gegeben; das Verhältnis der Blattspitzengeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit in der jeweiligen Luftdichte ergibt die Machsche Zahl der Luftschraube. Es zeigt sich, daß je nach Belastung und Dicke der Luftschraubenblattelemente bereits vor Erreichen der Machschen Zahl $M = 1{,}0$ eine merkliche Abnahme an Wirkungsgrad eintritt.

Im folgenden soll über Versuche berichtet werden, die bei der Focke-Wulf Flugzeugbau GmbH. im Rahmen der Flugerprobung eines neuen Baumusters über den Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben durchgeführt werden konnten. Bei der Entwicklung des Verkehrsflugzeuges Fw 200 »Condor« ergab sich aus bestimmten Gründen zunächst die Notwendigkeit, nicht untersetzte Motoren hoher Leistung zu verwenden. Eingebaut wurden 4 Motoren des Musters BMW 132 G bzw. L mit 720 PS Höchstleistung bei 2050 U/min in Bodennähe. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges hiermit beträgt 365 km/h.

Zur Erzielung guter Startverhältnisse waren Luftschraubendurchmesser bis zu 3,00 m zugelassen, sodaß sich im Schnellflug die Machsche Zahl der Luftschraube bei einem Durchmesser von 2,90 m zu 0,96 und bei 3,00 m zu 0,985 ergab.

Bei den Meßflügen zur Auswahl der für diesen Zweck günstigsten Luftschraube wurden zwei verschiedene Ausführungen untersucht, eine schmalblättrige mit $D = 2{,}90$ m und $l/D = 0{,}055$ und eine breitblättrige mit $D = 3{,}00$ m und $l/D = 0{,}059$. Im Laufe der Erprobung wurde die letztgenannte Luftschraube im Durchmesser auf 2,95 m verkürzt, und damit l/D auf 0,60 vergrößert, Bild 1. Bei den Flugversuchen mit je vier der ebengenannten verschiedenen

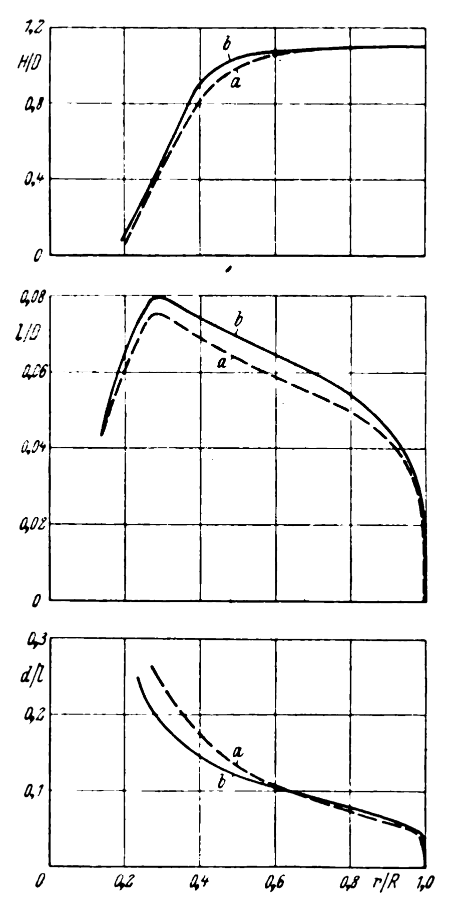


Bild 1. Fw 200 A »Condor«.
Steigungs-, Tiefen- und Dickenverlauf von zweiflügeligen Metall-Verstelluftschrauben.
a) Entwurf Focke-Wulf, $D = 2{,}90$ m.
b) Entwurf Focke-Wulf, $D = 2{,}95$ m.

Luftschrauben wurden die Geschwindigkeiten über der Meßstrecke mit verschiedenen Drosselungen der Motoren und jeweils konstanter Luftschraubensteigung erflogen. Hierbei blieb dann der Fortschrittsgrad λ ein- und derselben Luftschraube annähernd konstant, desgleichen auch die Belastung der Luftschraube k_s. Bekanntlich ändert sich bei einer Drosselung die Motorleistung N mit der 3. Potenz der Drehzahl n, also $N \sim n^3$, außerdem verhält sich die Geschwindigkeit $v \sim \sqrt[3]{N}$, also ist das Verhältnis $\lambda = \frac{v}{U}$ konstant für den gesamten Bereich einer Drosselkurve. Sinngemäß ergibt sich auch, daß der Wert k_s längs einer Drosselkurve konstant bleibt. Ermittelt man nun für diese Drosselkurve unter Annahme eines konstanten Wirkungsgrades der Luftschraube — wie er sein müßte, wenn kein Einfluß der Machschen Zahl da wäre — den Widerstand der gesamten Zelle, jedoch ohne den induzierten Widerstand, so zeigt eine Auftragung dieser Werte über der Drehzahl der Luftschraube eine Zunahme des Widerstandes mit zu-

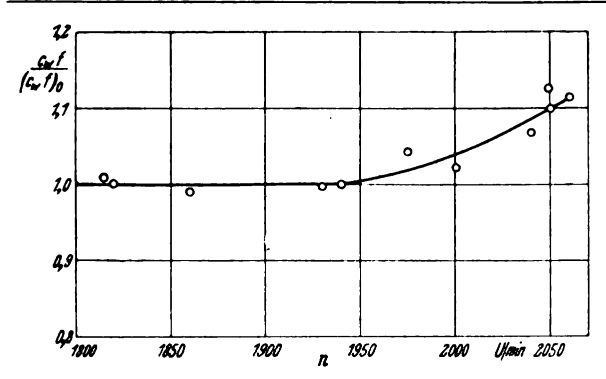


Bild 2. Fw 200 A »Condor«.
Änderung der Widerstandsfläche über Drehzahl der Luftschraube, unter Annahme konstanten Wirkungsgrades.

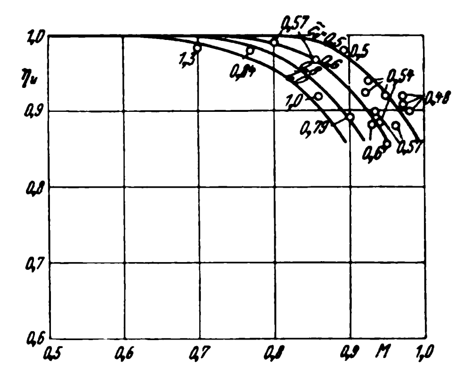


Bild 3. Wirkungsgradverlust über Machscher Zahl der Blattspitzengeschwindigkeit.
Ergebnisse aus Flugversuchen.

nehmender Umfangsgeschwindigkeit, Bild 2. Diese scheinbare Zunahme des Widerstandes ist jedoch in Wirklichkeit lediglich eine Verschlechterung des Luftschraubenwirkungsgrades infolge der hohen Umfangsgeschwindigkeiten, d. h. eine Folge des Einflusses der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad der Luftschraube.

Durch Änderung der Grundeinstellung — es handelt sich hierbei um Junkers-Hamilton-Zweistellungsschrauben — wurde die Belastung und der Fortschrittsgrad einer jeden Schraube geändert, so daß bei den Versuchen mit den Luftschrauben der drei verschiedenen Durchmesser eine große Anzahl von Meßpunkten gewonnen werden konnte, die nach den oben geschilderten Gesichtspunkten ausgewertet wurden.

Bei der Untersuchung der Ergebnisse und ihrer kurvenmäßigen Darstellung sind Definitionen und Bezeichnungen benutzt worden, wie sie Weinig in seiner Abhandlung »Luftschrauben für schnelle Flugzeuge« (Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) Lfg. 4/5 S. 168) zur Erfassung des Einflusses der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben eingeführt hat. Es wird ein Wirkungsgrad η_u bestimmt, der allein diesen Einfluß erfaßt und der zu den übrigen Wirkungsgraden der Luftschraube hinzukommt; er wird dargestellt in Abhängigkeit von der Machschen Zahl M und der Belastungszahl $\overline{c_a}$.

Dieser Wert ist folgendermaßen definiert:

$$\overline{c_a} = \frac{\pi \cdot k_s}{\frac{2}{3} \cdot z \cdot \frac{l_m}{D}},$$

wobei

$$k_s = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} \cdot u^2 \cdot F_p}$$

und

$$\frac{l_m}{D} = 4 \int_0^1 \frac{l}{D} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot d\left(\frac{r}{R}\right)$$

ist. Durch die Beziehung für $\frac{l_m}{D}$ werden die äußeren Schnitte der Luftschraubenblätter besonders hoch bewertet, da diese den größten Anteil am Wirkungsgradverlust infolge hoher Umfangsgeschwindigkeiten haben.

In Bild 3 sind die Ergebnisse der Auswertungen der Flugversuche dargestellt. In Abhängigkeit von der Belastungszahl beginnt bei einer bestimmten Machschen Zahl der Einfluß der hohen Geschwindigkeit auf den Wirkungsgrad η_u.

Bei der Betrachtung der Kurven zeigt sich, daß es sich nicht lohnt, im Bereich der Werte $M = 0{,}50$ bis $1{,}00$ durch größere Blattbreiten die Belastung der Luftschrauben unter $\overline{c_a} = 0{,}50$ zu bringen. Es ist auch nicht ohne weiteres gesagt, daß eine Vergrößerung der Blattbreite eine Verbesserung bringen muß. Es zeigt sich nämlich, daß die kritische Geschwindigkeit der Profilschnitte, d. h. die Geschwindigkeit, bei der an bestimmten Punkten des Profilumfanges Kompressibilitätseinflüsse auftreten, im äußeren Bereich der Luftschraube in jedem Fall von der Profilgeschwindigkeit überschritten wird. In Bild 4 sind die Verhältnisse für die Fw 200-Luftschraube dargestellt. Eine Vergrößerung der Profiltiefe auf das Doppelte und damit eine Herabsetzung von $\overline{c_a}$ auf die Hälfte — von 0,53 auf 0,26 — bringt keine wesentliche Änderung in den Geschwindigkeitsverhältnissen.

Wenn man demnach an den Profilen der Blattspitze den Einfluß der Kompressibilität auf jeden Fall zu erwarten hat, dann ergibt die Blattiefe die geringste Abminderung aus Kompressibilität, die aus vorgegebenem $c_a \cdot l$ mit c_a für ε_{min} des jeweiligen Profilschnittes bestimmt worden ist.

Ein Vergleich unserer Versuchsergebnisse mit denen von Weinig zeigt wesentliche Abweichungen im Verlauf von η_u. Im Bereich kleiner Machscher Zahlen haben wir überhaupt keinen Einfluß der hohen Geschwindigkeit festgestellt, während Weinig bis herunter zu $M = 0$ für η_u Werte < 1 angibt. Bei hohen Machschen Zahlen ergeben unsere Ermittlungen dagegen erheblich größere Abminderungen für den Luftschraubenwirkungsgrad. Die Gültigkeit der Kurven von Weinig ist jedoch für diesen Bereich bereits in Frage gestellt. Eine gute Übereinstimmung mit unseren Werten ergeben teilweise die amerikanischen Messungen im NACA Rep. 639, die auf die gleichen Beziehungen hin ausgewertet wurden. So stimmt z. B. eine Kurve für

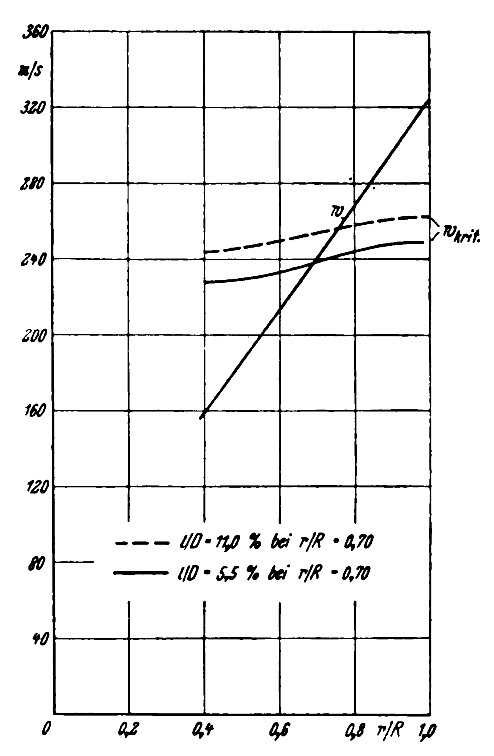


Bild 4. Fw 200 A »Condor«.
Metallluftschraube, Entwurf Focke-Wulf (D = 2,90 m).
Profil- und kritische Geschwindigkeit.

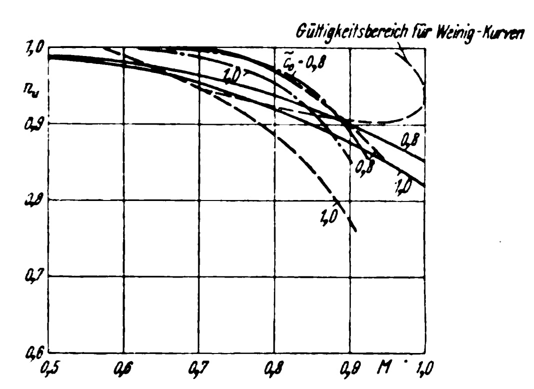


Bild 5. Wirkungsgradverlust über Machscher Zahl der Spitzengeschwindigkeit.

Ergebnisse aus:
——·—— Flugversuchen bei FW,
———— Weinig, Aerodynamik der Luftschraube, Seite 352,
— — — { NACA-Rep. 639, Schraubenblätter 5868-9, zweiflügelig, umgerechnet auf $\bar{c}_a$ nach Weinig.

$\bar{c}_a = 0{,}8$, wie in Bild 5 dargestellt, genau mit unseren Werten überein.

Der auf diese Art ermittelte Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad der Luftschraube gilt für jede beliebige Luftschraube, sofern diese für hohe Geschwindigkeiten entworfen ist. Es müssen also die Luftschraubenprofile möglichst dünn sein, ihre größte Dicke muß nach 40% der Tiefe und weiter verschoben sein, und als allerwichtigstes muß die richtige Steigungsverteilung vorhanden sein. Unter richtiger Steigungsverteilung sei folgendes verstanden:

Mit den in Nähe der Blattspitze zunehmenden Profilgeschwindigkeiten muß der c_a-Wert der einzelnen Profilschnitte abnehmen entsprechend dem kleinsten ε-Wert bei hohen Machschen Zahlen. Eine c_a-Verteilung von nach außen über dem Radius abnehmendem c_a-Wert ergibt eine annähernd konstante Steigung nach der Spitze zu. Jeder andere Steigungsverlauf ergibt ungünstigere Werte. —

Welche Auswirkung diese Abweichungen haben können, soll an Hand eines Beispiels erläutert werden. Bei der Fw 200-A haben wir sowohl eine nach obigen Gesichtspunkten entworfene Luftschraube geflogen, als auch eine normale Hamilton-Schraube, die durch Ändern — in diesem Fall Vergrößern der Grundeinstellung — der Leistungsaufnahme angepaßt war. Die Werte der beiden Schrauben sind in Bild 6 dargestellt. Trotzdem die Hamilton-Schraube breiter war — der $\bar{c}_a$-Wert war 0,45 gegenüber 0,53 beim Fw-Entwurf — ergab sich ein Geschwindigkeitsunterschied von rd. 13 km/h, d. h. ein Wirkungsgradunterschied von 10% zugunsten des Fw-Entwurfes. Den wesentlichen Einfluß auf dieses Ergebnis hatte neben den verschiedenen Dicken der Profile vor allem die üngünstige Steigungsverteilung der Hamilton-Schraube, d. h. eine c_a-Verteilung mit nach dem Ende des Luftschraubenblattes hin zunehmenden c_a-Werten.

Unter Zugrundelegung der hier erläuterten Betrachtungen und Überlegungen ergeben sich allgemein breitere Luftschrauben, als sie bisher üblich waren. Es erhebt sich daher die Frage, wie diese Luftschrauben sich in den übrigen Betriebszuständen verhalten. Beim Start erzielt man mit breiten Luftschrauben immer einen Gewinn, vor allem im ersten Bereich des Anrollens, bei dem der Standschub maßgeblich ist. Beim Abheben und Steigen ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede, da die Profilschnitte der Luftschrauben in jedem Fall im Bereich eines annähernd konstanten ε-Wertes arbeiten. Im Reiseflug, bei dem man bislang noch keinen Einfluß der Machschen Zahl hat, kann man den Wirkungsgrad der dafür zu breiten Luftschraube dadurch verbessern, daß man auf einer Vollgaskurve fliegt,

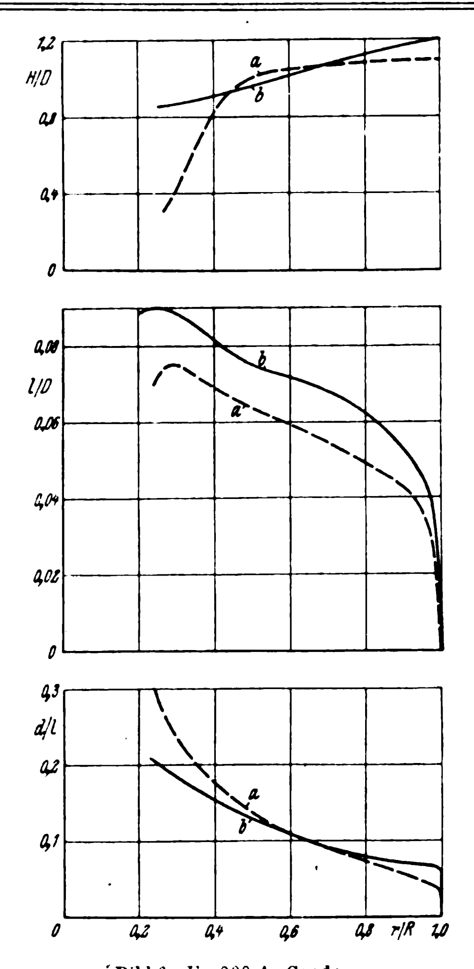


Bild 6. Fw 200 A »Condor«.
Steigungs-, Tiefen- und Dickenverlauf von zweiflügeligen Metall-Verstelluftschrauben.
a) Entwurf Focke-Wulf, $D = 2{,}90$ m.
b) Entwurf Junkers-Hamilton, $D = 2{,}90$ m.

statt auf einer Drosselkurve. Dadurch erhöht man die Belastung der breiten Luftschraube und damit ihren Wirkungsgrad. Motorseitig erzielt man überdies noch den besseren spez. Brennstoffverbrauch.

Zusammenfassung.

Es wurde über Auswertungen von Flugmessungen berichtet, aus denen der Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben ermittelt werden konnte. Entsprechend dem Vorschlag von Weinig wird hierbei ein Wirkungsgrad η_u eingeführt, der, unabhängig von den übrigen bei Luftschrauben angewendeten Wirkungsgraden, nur diesen Einfluß der Machschen Zahl erfaßt.

Die Zahlenunterlagen wurden dadurch gewonnen, daß die bei Luftschrauben-Drehzahlsteigerung sich scheinbar ergebende Vergrößerung der Widerstandsfläche des Flugzeuges als Wirkungsgradeinfluß η_u ausgewertet wurde. Der so gewonnene Verlauf von η_u zeigt, im Gegensatz zu den Annahmen von Weinig, den Beginn des Einflusses erst oberhalb einer Machschen Zahl von 0,6; und bei Annäherung an $M = 1{,}0$ eine erheblich stärkere Zunahme. — Weiter wurde anhand eines Beispiels der Einfluß der Profiltiefe und Profildicke des Luftschraubenblattes und der Steigungsverteilung auf den Wirkungsgrad untersucht.

Die vorstehenden Ausführungen beziehen sich nur auf Luftschrauben, die lediglich durch hohe Umfangsgeschwindigkeit in den Bereich kritischer Machscher Zahlen kommen, eine sinngemäße Beziehung gilt naturgemäß auch für Luftschrauben, die durch Steigerung der Umfangs- und Fluggeschwindigkeit der Kompressibilität der Luft unterliegen.

Ausrollstrecke, Bremsbeanspruchung und Überschlagmöglichkeit beim Landen.

Von G. Mathias und K. Schaaff.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Im folgenden wird untersucht, von welchen Größen die Ausrollstrecke eines landenden Flugzeuges abhängt, welche Arbeit in den Radbremsen aufgenommen werden muß, um es nach einer vorgegebenen Strecke zum Stillstand zu bringen, und unter welchen Bedingungen es während des Ausrollens zu einem Überschlag ansetzt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Anlaß zu dieser Untersuchung gab die Frage, von welchen Größen die in den Radbremsen aufzunehmende Ausrollenergie abhängt, und unter welchen Bedingungen ein Flugzeug während des Ausrollens der Gefahr eines Überschlages ausgesetzt ist.

Der Ausrollvorgang werde begrenzt durch die Strecke vom endgültigen Aufsetzen des Flugzeuges bis zum Stillstand. Es wird also dabei vorausgesetzt, daß das Flugzeug, nachdem es einmal den Boden berührt hat, nicht nochmals vom Boden abhebt. Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend damit, daß der Auftrieb beim Ausrollen stets kleiner, höchstens gleich dem Auftrieb beim Aufsetzen ist. Außerdem soll der im Fahrwerk aufgespeicherte Anteil der Stoßenergie nicht dazu ausreichen, beim Zurückfedern das Flugzeug nochmals vom Boden zu entfernen.

Zur Berechnung des Ausrollvorganges und der Arbeitsaufnahme in den Bremsen wird unterstellt, daß Auftrieb und Widerstand bis zur Geschwindigkeit Null dem Quadrat der Geschwindigkeit verhältig sind, ferner daß die Reibungszahlen, solange sie nicht durch Bremsbetätigung beeinflußt werden, von der Geschwindigkeit unabhängig sind. Die Einflüsse von Bodenwind und Schraubenschub werden der Einfachheit wegen vernachlässigt, obwohl ihre Berücksichtigung keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bringt; die Ergebnisse werden hierdurch ihrem Wesen nach nicht beeinträchtigt. Weiterhin wird von einer Berücksichtigung des Bodeneinflusses auf Auftrieb und Widerstand des Flügels und Leitwerks abgesehen, da sie für die grundsätzlichen Zusammenhänge ohne Belang ist und in Zahlenrechnungen unschwer eingeführt werden kann.

Beginnt ein Flugzeug beim Ausrollen einen Überschlag, dann kann man den ganzen Ausrollvorgang in zwei Abschnitten betrachten: Zuerst das Ausrollen in Dreipunktlage bis zum Beginn der Drehung, und dann den Bewegungsverlauf während der Drehung selbst. In diesem Bericht wird nur der erste Teil, also das Ausrollen in Dreipunktlage untersucht und dabei die Bedingungen angegeben, unter denen es überhaupt zu einer Längsneigungsänderung kommen kann. Die Dynamik des Drehvorganges selbst soll in einem späteren Bericht dargestellt werden.

II. Bezeichnungen (siehe auch Bild 7):

Außer den üblichen Bezeichnungen bedeuten:

s = $s(v)$ Ausrollweg als Funktion der Rollgeschwindigkeit,

s_r = Gesamtausrollstrecke,

r_R = Halbmesser der Haupträder,

r_F = Entfernung Haupträderdrehachse bis zum neutralen Angriffspunkt der Luftkräfte am Flügel,

r_S = Entfernung Haupträderdrehachse bis Schwerpunkt,

r_{SR} = Entfernung Bodenauflagepunkt der Haupträder bis Schwerpunkt,

r_{Sp} = Entfernung Haupträderdrehachse bis Spornauflagepunkt,

r_H = Hebelarm des Höhenleitwerksauftriebes bezogen auf die Haupträderdrehachse,

$\varkappa_F$ = Winkel zwischen r_F und der Senkrechten durch die Haupträderdrehachse,

$\varkappa_S$ = Winkel zwischen r_S und der Senkrechten durch die Haupträderdrehachse,

$\varkappa_{SR}$ = Winkel zwischen r_{SR} und der Senkrechten durch den Radauflagepunkt,

μ_r = Rollreibungszahl der Haupträder,

μ_b = Bremsreibungszahl am Radumfang,

μ_h = Haftreibungszahl am Radumfang,

μ_R = Gesamtreibungszahl der Haupträder,

μ_{Sp} = Gesamtreibungszahl des Sporns,

μ = Gesamtreibungszahl aller Räder,

E_0 = Anfangsenergie im Zeitpunkt des Aufsetzens,

E_W = Energieanteil, der durch den Luftwiderstand aufgebraucht wird,

E_R = Energieanteil, der während des Ausrollens in Formänderungs- und Lagerreibungsarbeit umgewandelt wird,

E_B = Energieanteil, der in den Bremsen aufzunehmen ist.

III. Berechnung der Ausrollstrecke.

Der Bewegungsverlauf beim Ausrollen eines Heckradflugzeuges ist durch die Gleichung

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} + W + \mu_r P_R + T_B + \mu_{Sp} P_{Sp} = 0 \quad . \quad . \quad (1a)$$

bestimmt. Dabei bedeuten $\mu_r \cdot P_R$ und $\mu_{Sp} \cdot P_{Sp}$ die Kräfte entgegen der Bewegungsrichtung, die an den Haupträdern und am Sporn von der Verformung des Bodens und der Reifen und von der Radlagerreibung beim Rollen berühren. Mit T_B sei die verzögernde Tangentialkraft zwischen Radreifen und Boden bezeichnet, die durch eine zusätzliche Bremsbetätigung entsteht. Da man

$$T_B = \mu_b P_R$$

setzen kann, geht der Einfluß der Bremsbetätigung in gleicher Weise wie der Einfluß der Rollreibung in die Bewegungsgleichung ein, so daß mit

$$\mu_R = \mu_r + \mu_b$$

der Bewegungsverlauf durch die Gleichung

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} + W + \mu_R P_R + \mu_{Sp} P_{Sp} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

gegeben ist.

Die Größe der Bodenkräfte P_R und P_{Sp} wird bestimmt durch die Gleichgewichtsbedingung (siehe Bild 7)

$$G - A_F - A_H - P_R - P_{Sp} = 0,$$

so daß die Ausrollgleichung die Form erhält

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} + W + \mu_R (G - A_F - A_H) - (\mu_R - \mu_{Sp}) P_{Sp} = 0 \quad (1c)$$

Die Größe von P_{Sp} kann aus der Gleichgewichtsbedingung der Momente bestimmt werden, es läßt sich jedoch voraussehen, daß das Glied $(\mu_R - \mu_{Sp}) \cdot P_{Sp}$ im Kräftehaushalt des Ausrollvorganges im allgemeinen keine maßgebliche Rolle spielen kann, so daß es an dieser Stelle vernachlässigt oder dem Haupträderanteil $\mu_R \cdot P_R$ zugeschlagen gedacht werde. Hierdurch entfällt weiterhin die Berechtigung, die Auftriebskräfte am Höhenleitwerk A_H gesondert zu berücksichtigen, da sie im Kräftebild eine ähnliche untergeordnete Rolle spielt wie die Spornkraft. Sie werde daher an dieser Stelle mit dem Flügelauftrieb A_F zu einer Gesamtauftriebskraft A zusammengefaßt.

Der so vereinfachte Ansatz für das Kräftespiel während des Ausrollens erhält hiermit die Form (μ statt μ_R geschrieben)

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} + W + \mu (G - A) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1d)$$

Der vollständige Ansatz (1c) wird später bei der Behandlung des Momentengleichgewichtes wieder herangezogen werden.

Aus Gl. (1d) erhält man mit

$$W = c_{w_r} F \varrho v^2/2,$$
$$A = c_{a_r} F \varrho v^2/2,$$
$$G = c_{a_L} F \varrho v_L^2/2$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = -\left(\frac{c_{w_r} - \mu c_{a_r}}{c_{a_L}} \frac{v^2}{v_L^2} + \mu\right) g \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Unter Beachtung der Anfangsbedingung $s = 0$ für $v = v_L$ ergibt sich die Ausrollstrecke abhängig von der Ausrollgeschwindigkeit zu

$$s(v) = \frac{v_L^2}{2g} \frac{c_{a_L}}{c_{w_r} - \mu c_{a_r}} \ln \left[\frac{c_{w_r} + \mu (c_{a_L} - c_{a_r})}{(c_{w_r} - \mu c_{a_r})\left(\frac{v}{v_L}\right)^2 + \mu c_{a_L}} \right] \quad (3)$$

Setzt man $v = 0$, dann erhält man nach einer Umformung mit $c_{w_r}/c_{a_r} = \varepsilon_r$ die Gesamtausrollstrecke in der Form

$$s_r = \frac{v_L^2}{2g} \sigma_r = \frac{v_L^2}{2g} \cdot \frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \mu} \ln \left[1 + \frac{\varepsilon_r - \mu}{\mu\, c_{a_L}/c_{a_r}}\right] \quad . \; . \quad (4a)$$

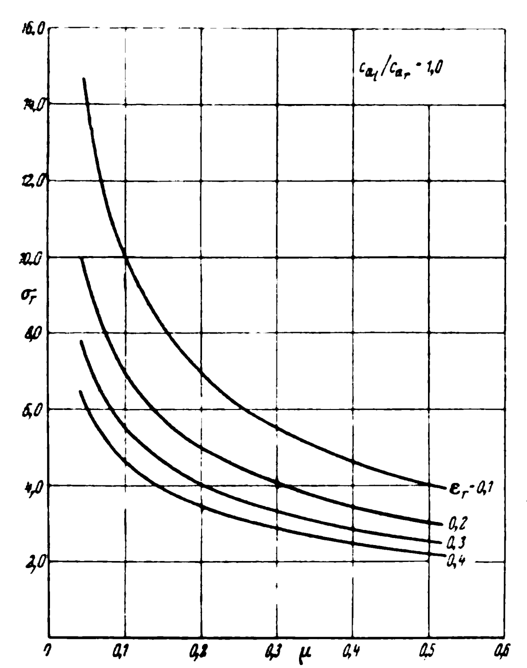


Bild 1. Einfluß von ε_r und μ auf den reduzierten Ausrollweg.

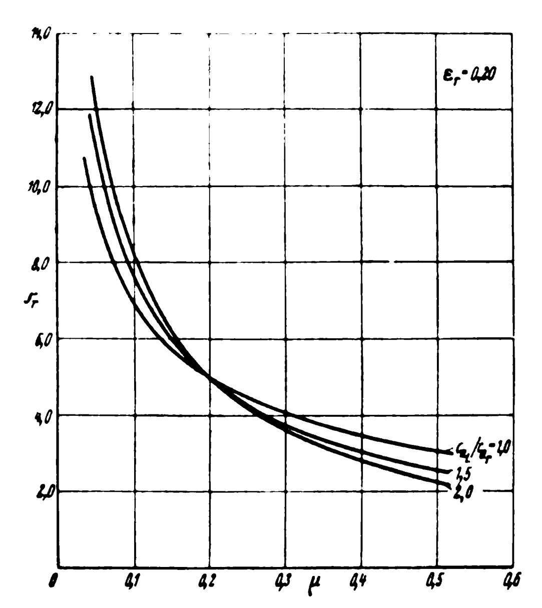


Bild 2. Einfluß von c_{a_L}/c_{a_r} und μ auf den reduzierten Ausrollweg.

Die Größe

$$\sigma_r = \frac{s_r}{v_L^2/2g} = \frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \mu} \ln \left[1 + \frac{\varepsilon_r - \mu}{\mu\, c_{a_L}/c_{a_r}}\right], \quad . \; . \quad (4b)$$

die einen maßfreien »reduzierten Ausrollweg« darstellt, erfaßt die Einflüsse der Reibung (μ), der Luftkraftrichtung (ε_r) und der Fahrwerksanordnung und Landetechnik (c_{a_L}/c_{a_r}).

Bei einer Dreipunktlandung mit »tangentialem« Aufsetzen ohne Sinkgeschwindigkeit ist $c_{a_L} = c_{a_r}$, so daß sich für diesen Sonderfall

$$\sigma_{r_L} = \frac{1}{\varepsilon_r - \mu} \ln \frac{\varepsilon_r}{\mu}$$

ergibt.

Die Größe σ_r werde als Funktion von μ mit den Parametern ε_r und c_{a_L}/c_{a_r} dargestellt. Sind ε_r und c_{a_L}/c_{a_r} Festwerte, dann zeigt Bild 1 und 2, wie mit zunehmendem Wert von μ der Wert von σ_r abnimmt. Aus Bild 1 ist außerdem zu entnehmen, wie eine Änderung von ε_r die Größe σ_r beeinflußt. Eine Vergrößerung von ε_r, sei es durch Vergrößerung des Widerstandes oder Verkleinerung des Auftriebes beim Rollen am Boden, bringt immer eine Verkleinerung von σ_r. Daß Vergrößerung des Widerstandes eine Verkürzung der Ausrollstrecke mit sich bringt, ist ohne weiteres verständlich. Da Verkleinerung von c_{a_r} eine Erhöhung des am Fahrwerk wirksamen Gewichtsanteiles bedeutet, so erhöht sich damit, bei festem Wert von μ, die Reibungskraft und die Ausrollstrecke wird auch dadurch verkleinert. Nach Bild 2 nimmt σ_r bei einer Zunahme von c_{a_L}/c_{a_r} nur dann zu, wenn $\mu < \varepsilon_r$, und es nimmt ab, wenn $\mu > \varepsilon_r$. Für den Sonderfall $\mu = \varepsilon_r$ erhält man direkt aus Gl. (2) als Lösung $\sigma_r = 1/\mu = 1/\varepsilon_r$, d. h. für diesen Fall ist σ_r und damit auch die Ausrollstrecke von dem Verhältnis c_{a_L}/c_{a_r} unabhängig.

Bei einem Heckradflugzeug, das in Dreipunktlage aufsetzt, wird c_{a_L}/c_{a_r} meistens gleich oder nur wenig größer als 1 sein. Bei einem Bugradflugzeug wird sowohl bei einer »abgefangenen«, als auch bei einer »nichtabgefangenen« Landung der Wert von c_{a_L}/c_{a_r} meist wesentlich größer als 1 werden.

Vergleicht man nun die Ausrollstrecken eines Heckrad- und eines Bugradflugzeuges miteinander, so kann man nicht ohne weiteres sagen, welche Bauart bei gleichen μ-Werten die kürzere Ausrollstrecke hat. Obgleich der Wert von σ_r für $\mu > \varepsilon_r$ bei einem Bugradflugzeug ($c_{a_L}/c_{a_r} > 1$) kleiner ist als beim Heckradflugzeug ($c_{a_L}/c_{a_r} \approx 1$), kann doch die Ausrollstrecke des Bugradflugzeuges größer sein als die des Heckradflugzeuges, sobald nämlich von der Möglichkeit »unabgefangener« Landungen beim Bugradflugzeug Gebrauch gemacht wird.

Mit μ gleich der Rollreibungszahl allein erhält man den Ausrollweg für ein ungebremstes Flugzeug. Mit μ gleich der Gleitreibungszahl zwischen Radreifen und Boden erhält man den Ausrollweg für festgebremste Räder. Den kürzesten Ausrollweg erhält man dann, wenn das Flugzeug rollt und die Räder bis zur Haftreibungsgrenze gebremst werden, so daß sie sich gerade noch drehen ohne zu gleiten. Wie weit die Bremsung des Ausrollens getrieben werden kann, hängt im wesentlichen von zwei Grenzbedingungen ab, von der thermischen Arbeitsaufnahmefähigkeit der Radbremsen und von der Sicherheit des Flugzeuges gegen Kopfstand oder gar Überschlag am Ende des Ausrollvorganges.

IV. Arbeitsaufnahme in den Bremsen.

Die bei der Landegeschwindigkeit $v = v_L$ vorhandene Bewegungsenergie des Flugzeuges $E_0 = G\,\frac{v_L^2}{2g}$ wird während des Ausrollvorganges umgewandelt. Ein Teil wird durch die Arbeit des Luftwiderstandes während des Ausrollens, ein Teil durch die Rollreibungsarbeit (Walkarbeit der Reifen, Formänderungsarbeit des Bodens, Radlagerreibungswärme) aufgezehrt. Wenn hierbei die gesamte Bewegungsenergie verbraucht wird, dann kommt das Flugzeug ohne Anwendung von Bremsen zum Stillstand. Die Länge des Ausrollweges ist jedoch ohne Betätigung der Bremsen meist zu groß, so daß zum Abkürzen des Ausrollweges ein Teil der Bewegungsenergie in den Bremsen in Wärmeenergie umgewandelt werden muß. Bis zum Ende des Ausrollens wird also die Anfangsenergie in drei Anteilen umgesetzt:

$$E_0 = E_W + E_R + E_B.$$

Da Widerstand und Auftrieb während des Ausrollens nicht konstant bleiben, so ist

$$E_W = \int_0^{s_r} W\,ds = c_{w_r} F \frac{\varrho}{2} \int_0^{s_r} v^2\,ds$$

$$E_R = \int_0^{s_r} \mu_r\,(G - A)\,ds = \mu_r\,(G\,s_r - c_{a_r} F \frac{\varrho}{2} \int_0^{s_r} v^2\,ds).$$

Um die einzelnen Arbeitsanteile berechnen zu können, löst man Gl. (3) nach v^2 auf und erhält durch Integration

$$\int_0^{s_r} v^2\,ds = \frac{v_L^4}{2g}\left[\frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \mu} - \mu\left(\frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \mu}\right)^2 \ln\left[1 + \frac{\varepsilon_r - \mu}{\mu\,c_{a_L}/c_{a_r}}\right]\right.$$

$$\left. = \frac{v_L^4}{2g}\,c_{a_L}/c_{a_r}\,\frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Hierbei sind die Reibungszahl μ und der reduzierte Ausrollweg σ_r für feste Werte von ε_r und c_{a_L}/c_{a_r} durch den in Gl. (4a) gegebenen und in Bild 1 und 2 dargestellten Zusammenhang voneinander abhängig. Für den Sonderfall $\mu = \varepsilon_r$ erhält man die einfache Form

$$\int_0^{s_r} v^2\,ds = \frac{v_L^4}{2g}\,\frac{1}{2\,\varepsilon_r}.$$

Die Radbremsen haben während des Ausrollens bis zum Stillstand an Bewegungsenergie aufzunehmen

$$E_B = E_0 - E_W - E_R$$

$$= G\,\frac{v_L^2}{2g} - c_{w_r} F \frac{\varrho}{2} \int_0^{s_r} v^2\,ds - \mu_r\,(G\,s_r - c_{a_r} F \frac{\varrho}{2} \int_0^{s_r} v^2\,ds).$$

Teilt man beide Seiten durch

$$E_0 = G\,\frac{v_L^2}{2g} = c_{a_L} F\,\frac{\varrho}{2}\,\frac{v_L^4}{2g},$$

dann erhält man den Bruchteil der Anfangsenergie, den die Bremsen aufzunehmen haben, in der Form

$$E_B/E_0 = 1 - \varepsilon_r\,\frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu} - \mu_r\left(\sigma_r - \frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}\right) \quad . \; . \; (6)$$

Der zweite Summand dieser Gleichung ist der Bruchteil der gesamten Bewegungsenergie, der durch den Luftwiderstand aufgenommen wird. Der dritte Doppelsummand ist der-

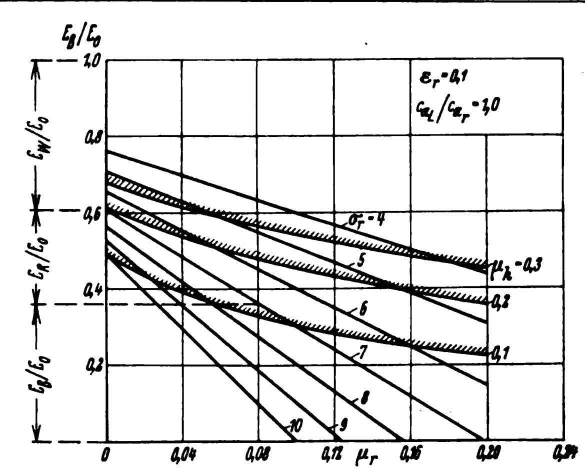


Bild 3. Die in den Bremsen aufzunehmende Arbeit als Funktion der Rollreibungszahl μ_r mit dem reduzierten Ausrollweg als Parameter für $\varepsilon_r = 0{,}10$ und $c_{a_L}/c_{a_r} = 1{,}0$.

jenige Bruchteil, der durch die rollende Reibung an den Rädern aus Gewicht minus Auftrieb aufgebraucht wird. Die Abhängigkeit der Luftkraftanteile von der Gesamtreibungszahl μ im Faktor $\frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}$ ist darin begründet, daß die Gesamtreibungszahl den Geschwindigkeitsverlauf und damit auch die Länge des Ausrollweges bestimmt, wie in Abschnitt III gezeigt wurde.

Die Bremsen dürfen beim Ausrollen nicht beliebig stark angezogen werden, da sonst die Räder »blockiert« werden und dadurch überhaupt keine Energie in die Bremsen übertragen werden kann. Mit $\mu_b = \mu_h$, der Haftreibungszahl, wird die Höchstenergie $E_{B\,max}$ erreicht, die in die Bremsen während des Ausrollens überhaupt übertragen werden kann:

$$E_{B\,max} = \mu_h \int_0^{s_r} (G - A)\,ds = \mu_h\,(G\,s_r - c_{a_r} F \frac{\varrho}{2} \int_0^{s_r} v^2\,ds).$$

Teilt man beide Seiten wieder durch die Gesamtenergie E_0, dann wird die höchste anteilige Arbeitsaufnahme in den Bremsen durch die Gleichung dargestellt

$$E_{B\,max}/E_0 = \mu_h\left(\sigma_r - \frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Die Gleichungen (15) und (16) lassen sich in zweifacher Weise abbilden: Einmal kann E_B/E_0 als Funktion von μ_r mit σ_r als Parameter, Bild 3, und einmal als Funktion von σ_r mit μ_r als Parameter, Bild 4, dargestellt werden. Aus beiden Arten der Abbildung läßt sich der Anteil der Bewegungsenergie entnehmen, der zum Erreichen einer vorgegebenen Ausrollstrecke bei einer vorgegebenen Rollreibungszahl durch die Bremsen in Wärme umgewandelt werden muß. Außerdem läßt sich gleichzeitig auch der Anteil der Luftwiderstandsarbeit und die Rollreibungsarbeit ablesen.

Betrachtet man in Gl. (6) E_B/E_0 als Funktion von μ_r mit σ_r als Parameter, dann wird E_B/E_0 in Bild 3 durch eine Geradenschar dargestellt. Die Abschnitte auf der E_B/E_0-Achse sind dabei durch $\mu_r = 0$ bestimmt. Die Schnittpunkte der Geradenschar mit der μ_r-Achse sind durch $E_B/E_0 = 0$ gegeben. In Bild 4a, b, c ist $[E_B/E_0]$ als Funktion von σ_r mit μ_r als Parameter für drei verschiedene Gleitzahlen durch Kurvenscharen dargestellt. Aus Gl. (6) ergibt sich

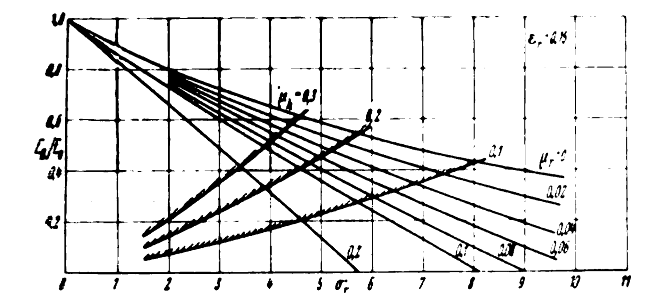
$$[E_B/E_0]_{\mu_r = 0} = 1 - \varepsilon_r\,\frac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

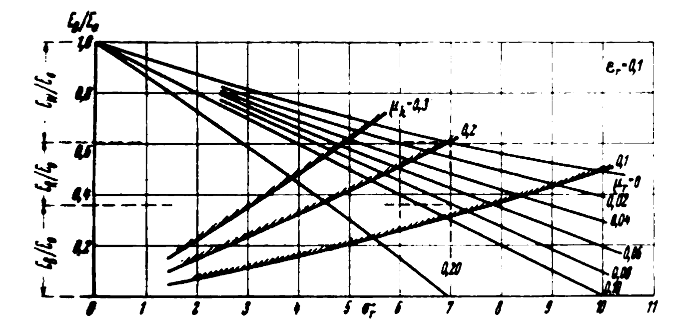
das sind als Funktion von σ_r aufgefaßt in Bild 3 die Schnittpunkte der σ_r-Geradenschar auf der E_B/E_0-Achse und in Bild 4a, b, c die Kurven mit dem Parameter $\mu_r = 0$.

Für $E_B/E_0 = 0$ erhält man aus Gl. (6)

$$\mu_r = \frac{1 - \varepsilon_r\,\dfrac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}}{\sigma_r - \dfrac{1 - \mu\,\sigma_r}{\varepsilon_r - \mu}} = \mu,$$







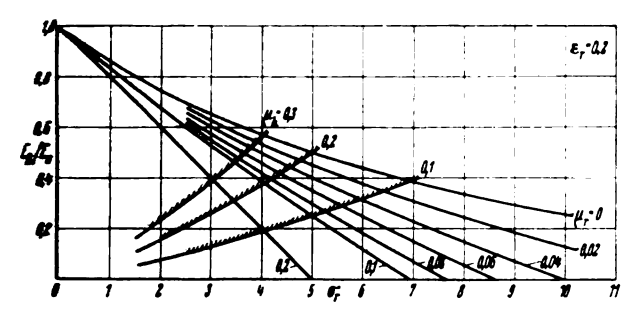


Bild 4 a, b, c. Die in den Bremsen aufzunehmende Arbeit als Funktion des reduzierten Ausrollweges mit der Rollreibungszahl μ_r als Parameter für $c_{aL}/c_{ar} = 1,0$.

d. h. die Schnittpunkte auf der μ_r-Achse in Bild 3 und auf der σ_r-Achse in Bild 4a, b, c sind durch den Zusammenhang $\sigma_r = f(\mu)$ nach Gl. (4a) bestimmt.

Die Gl. (7) ist in Bild 3 und 4a, b, c durch die geränderten Grenzkurven veranschaulicht.

In Bild 3 und 4a sei zur Erläuterung ein Beispiel eingezeichnet:

Das Flugzeug rolle auf einem Flugplatz mittlerer Bodenbeschaffenheit aus ($\mu_r = 0{,}08$). Soll das Flugzeug nach einer Ausrollstrecke von $s_r = 7{,}0 \frac{v_L^2}{2g}$ zum Stillstand kommen, dann wird während des Ausrollens 0,395 der Anfangsenergie E_0 durch den Luftwiderstand aufgezehrt; $0{,}245\, E_0$ werden durch die Rollreibung usw. umgesetzt und $0{,}360\, E_0$ sind in den Radbremsen aufzunehmen. Ist dabei die Haftreibungszahl zwischen Rad und Boden $\mu_h < 0{,}12$ (z. B. durch Nässe oder Schnee), etwa $\mu_h = 0{,}10$, dann kann aber nur $E_{B\max} = 0{,}325\, E_0$ aufgenommen werden, d. h. die verlangte Ausrollstrecke von $s_r = 7{,}0 \frac{v_L^2}{2g}$ kann wegen der zu kleinen Haftreibungszahl überhaupt nicht eingehalten werden. — Ist bei härterem Boden $\mu_r = 0{,}04$, dann bleibt bei der gleichen vorgeschriebenen Ausrollstrecke von $s_r = 7{,}0 \frac{v_L^2}{2g}$ die Energieabnahme durch den Luftwiderstand die gleiche, während jetzt durch die Rollreibung nur noch $0{,}120\, E_0$ umgesetzt wird, also $0{,}485\, E_0$ in den Bremsen aufgenommen werden muß. Dabei muß die Haftreibungszahl $\mu_h \geq 0{,}16$ sein.

Kann ein größerer Ausrollweg zugelassen werden, dann wird der Energieumsatz durch den Luftwiderstand und die Rollreibung größer, während die in den Bremsen aufzunehmende Energie verkleinert wird. So ist z. B. bei $\mu_r = 0{,}06$ und einem Ausrollweg von $s_r = 10{,}0 \cdot \frac{v_L^2}{2g}$ nur noch $0{,}19\, E_0$ in den Bremsen aufzunehmen, da $0{,}51\, E_0$ vom Luftwiderstand aufgezehrt wird und $0{,}30\, E_0$ während des Ausrollens infolge der Rollreibung verloren geht. Dabei muß die notwendige Haftreibungszahl μ_h nur größer als 0,02 sein, um die in den Bremsen aufzunehmende Energie auch vom Boden her zu übertragen. Aus Bild 3 und 4a, b, c läßt sich also auch der überhaupt erreichbare Ausrollweg entnehmen, der durch die vorhandenen Roll- und Haftreibungszahlen bedingt ist: Bei vorgegebenen Werten von μ_r und μ_h in Bild 3 sind nur diejenigen »reduzierten Ausrollwege« σ_r erreichbar, deren Parameter gerade die Ordinate von μ_r unterhalb der μ_h-Kurve schneidet. In Bild 4a, b, c ist der kürzeste mögliche Ausrollweg durch den Abschnitt auf der σ_r-Achse bestimmt, der durch den Schnittpunkt der μ_r- und μ_h-Kurve gegeben ist.

Erfahrungsgemäß kann beim Ausrollen auf Eis oder gefrorenem Schnee nur ein verhältnismäßig großer Ausrollweg erreicht werden, da sowohl μ_r als auch μ_h klein sind. Beim Ausrollen auf nassem aber weichem (z. B. lehmigem) Boden wird der kürzeste Ausrollweg schon kleiner, da hier zwar μ_h noch klein, der μ_r-Wert jedoch bereits größer ist. Noch kürzer kann der Ausrollweg bei Rollen auf trockenem Beton werden, da hier μ_r zwar klein, μ_h aber sehr groß ist und eine gute Ausnützung der Bremsen gestattet. Bei Ausrollen in trockenem lockerem Ackerboden wird sich wohl der kürzeste Ausrollweg ergeben, da in diesem Fall die Roll- und Haftreibungszahl groß sind. Alle diese Möglichkeiten mit den zugehörigen Aufteilungen der Aufsetzenergie E_0 lassen sich aus Bild 3 und 4 ablesen.

Bild 3 und 4a sind für Werte von $\varepsilon_r = 0{,}1$ und $c_{aL}/c_{ar} = 1{,}0$ gezeichnet. Für andere Werte ergeben sich andere Lagen der Geraden- bzw. Kurvenschar, die für $\varepsilon_r = 0{,}15$, $c_{aL}/c_{ar} = 1{,}0$ und $\varepsilon_r = 0{,}20$; $c_{aL}/c_{ar} = 1{,}0$ in Bild 4b und 4c dargestellt sind. Allgemein genügt es den Einfluß einer ε_r- und c_{aL}/c_{ar}-Änderung auf $\mu = f(\sigma_r)$ und $[E_B/E_0]_{\mu_r=0} = f(\sigma_r)$ zu untersuchen, um sich über die Wirkung ein Bild zu machen.

Die Abhängigkeit von $\mu = f(\sigma_r)$ von ε_r und c_{aL}/c_{ar} wurde bereits in Abschnitt III besprochen und in Bild 1 und 2 dargestellt. Die Änderung von $[E_B/E_0]_{\mu_r=0} = f(\sigma_r)$ mit ε_r und c_{aL}/c_{ar} ist in Bild 5 und 6 veranschaulicht.

Aus Bild 5 ist klar zu ersehen, wie stark mit zunehmender Ausrollstrecke die noch durch Reibung umzusetzende Energie abnimmt. Mit zunehmendem Wert von ε_r wird bei gleicher Rollstrecke die bereits vom Luftwiderstand aufgenommene Energie größer. Bild 6 zeigt nochmals $[E_B/E_0]_{\mu_r=0}$ als Funktion von σ_r mit c_{aL}/c_{ar} als Parameter. Hierbei wird ersichtlich, daß mit Zunahme von c_{aL}/c_{ar} der den Bremsen zufallende Anteil der Anfangsenergie $[E_B/E_0]_{\mu_r=0}$ auch zunimmt. Hierbei ist allerdings darauf zu achten, daß bei Vergrößerung von c_{aL} die Anfangsenergie E_0 selbst abnimmt, so daß trotz Zunahme von $[E_B/E_0]_{\mu_r=0}$ der in den Bremsen aufzunehmende Energie*betrag* abnimmt.

Die beim Landen vorhandene Bewegungsenergie ist bei gegebener Flügelfläche und Auftriebsbeizahl dem Quadrat des Landegewichtes oder der 4. Potenz der Landegeschwindigkeit verhältig. Ein Vergleich zwischen Bugrad- und Heckradflugzeug ohne genauere Festlegung über die Größe der Landegeschwindigkeit und auch über die vorhandenen Werte von c_{aL}, c_{ar} und ε_r kann nicht stichhaltig sein. Da das Bugradflugzeug meist mit kleineren Anstellwinkeln als das Heckradflugzeug ausrollt, wird der von dem Luftwiderstand übernommene Anteil der Landeenergie beim Bugradflugzeug kleiner als beim Heckradflugzeug. Umgekehrt ist aber die Arbeitsverminderung durch die Rollreibung beim Bugradflugzeug wegen der sofort nach dem Aufsetzen entstehenden Auftriebsverminderung größer als beim Heckradflugzeug. Im allgemeinen ergibt sich, daß bei kleinen Werten von μ_r der in den Bremsen aufzunehmende Bruchteil der Anfangsenergie für gleiche Ausrollstrecke beim

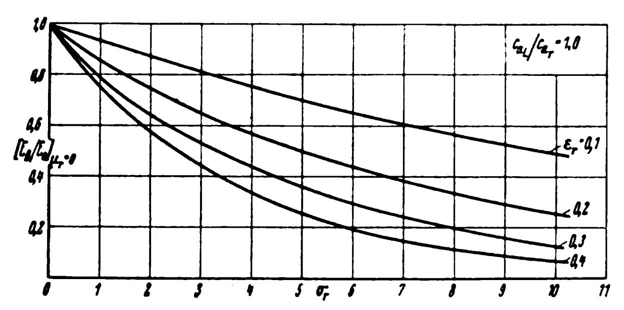


Bild 5. Die in den Bremsen aufzunehmende Arbeit bei Rollreibung 0 als Funktion des reduzierten Ausrollweges mit ε_r als Parameter.

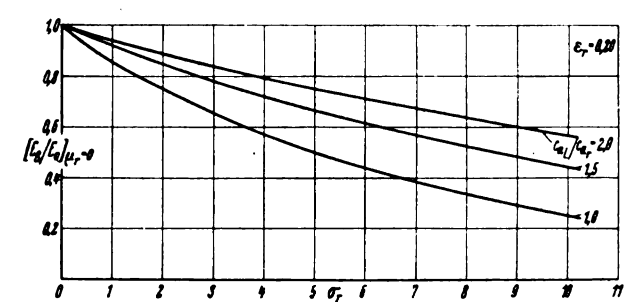


Bild 6. Die in den Bremsen aufzunehmende Arbeit bei Rollreibung 0 als Funktion des reduzierten Ausrollweges mit c_{a_L}/c_{a_r} als Parameter.

Bugradflugzeug größer ist als beim Heckradflugzeug, daß also zum Erreichen gleicher Ausrollstrecken die Bremsen beim Bugradflugzeug mehr beansprucht werden als beim Heckradflugzeug.

V. Die Möglichkeit eines Überschlages.

Die Bedingungen, unter denen ein Heckradflugzeug während des Ausrollens zu einem Überschlag ansetzt, erhält man aus der Gleichung der Momente aller am Flugzeug wirkenden Kräfte um die Hauptträderachse, da das Flugzeug beim Überkippen sich um diese Achse zu drehen beginnt. Die weitere Kippbewegung, die hier nicht untersucht werden soll, erfolgt bei festgebremsten Rädern durch Abwälzen auf dem Radumfang, hat also ebenfalls die Räderachse als fortschreitenden Drehmittelpunkt.

Wenn das Flugzeug auf Fahrwerk und Sporn gleichförmig verzögert ausrollt, können die Auflagekräfte aus dem Momentengleichgewicht bestimmt werden. Es werden sich, falls die Verzögerung nicht allzu groß ist, Auflagekräfte am Fahrwerk und Sporn ergeben, die beide von unten nach oben gerichtet sind. Ergibt sich nun rechnerisch eine Auflagekraft am Sporn, kurz Spornkraft genannt, die von oben nach unten gerichtet ist, so muß das Flugzeug sich um die Hauptträderachse zu drehen beginnen, da eine solche von oben nach unten gerichtete Auflagekraft vom Boden nicht ausgeübt werden kann. Die Richtung der Spornkraft ist also ein Kennzeichen dafür, ob das Flugzeug überzukippen beginnt oder nicht.

Die Gleichung der Momente um die Hauptträderachse lautet (Bild 7):

$$-M_0 - A_F r_F \sin \varkappa_F + W r_F \cos \varkappa_F + G r_s \sin \varkappa_s + \frac{G}{g}\frac{dv}{dt} r_s \cos \varkappa_s - (\mu_R P_R + \mu_{sp} P_{sp}) r_R - P_{sp} r_{sp} - A_H r_H = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Dabei bedeuten: Der erste Summand das freie Moment des Flugzeuges bei $c_a = 0$, der zweite und dritte Summand das Moment von Auftrieb und Widerstand des Tragwerks angreifend in dessen Neutralpunkt, der vierte und fünfte Summand das Gewichtsmoment und das durch die Verzögerung hervorgerufene Moment der Massenkraft, und die letzten Summanden bedeuten die Momente der verzögernden Bodenkräfte, der Auflagekraft am Sporn und des Höhenleitwerksauftriebes um die Hauptträderachse. Der Schraubenschub ist in Gl. (9) nicht berücksichtigt worden; er bildet mit seiner Beschleunigungswirkung auf den

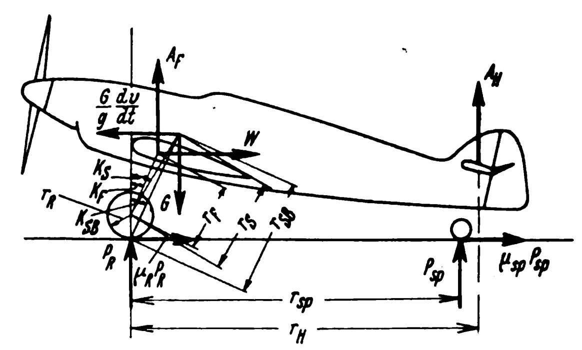


Bild 7. Die Kräfte am Flugzeug.

Schwerpunkt ein Kräftepaar mit meist so kleinem Hebelarm, daß sein vor- oder rückkippendes Moment gegenüber den anderen Momentenanteilen im allgemeinen vernachlässigt werden kann.

Unter Berücksichtigung der Gl. (1c) ergibt sich daraus die Größe der Spornkraft zu

$$P_{sp} = \frac{m_g - m_u \mu_R - m_v v^2 + m_{uv} \mu_R v^2}{r_{sp}\left[1 - (\mu_R - \mu_{sp}) \dfrac{r_s \cos \varkappa_s + r_R}{r_{sp}}\right]}, \; . \; . \; (10a)$$

wobei der Zähler der rechten Seite nach Summanden geordnet ist, die von μ_R und v^2 unabhängig sind, solche die nur von μ_R, nur von v^2 und von μ_R und v^2 gleichzeitig abhängen.

Es bedeuten demnach

$$m_g = G\, r_s \sin \varkappa_s,$$

$$m_u = G\,(r_s \cos \varkappa_s + r_R),$$

$$m_v = \left\{\left[c_{a_F} r_F \sin \varkappa_F + c_{a_H} \frac{F_H}{F} r_H + c_w (r_s \cos \varkappa_s - r_F \cos \varkappa_F) + c_{m_0} t\right] \frac{1}{r_s \sin \varkappa_s}\right\} F \frac{\varrho}{2} r_s \sin \varkappa_s$$

$$= c_{m_r} F \frac{\varrho}{2} r_s \sin \varkappa_s,$$

$$m_{uv} = \left\{c_{a_F} + c_{a_H} \frac{F_H}{F}\right\} F \frac{\varrho}{2} (r_s \cos \varkappa_s + r_R)$$

$$= c_{a_r} F \frac{\varrho}{2} (r_s \cos \varkappa_s + r_R).$$

Gl. (10a) gestattet, die Spornkraft in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mit den Reibungszahlen als Parameter darzustellen.

Es zeigt sich nun, daß in dem Nenner der Gl. (10a) die Größe

$$(\mu_R - \mu_{sp}) \frac{r_s \cos \varkappa_s + r_R}{r_{sp}} \ll 1,$$

somit gegenüber 1 zumindest für die weiteren grundsätzlichen Betrachtungen vernachlässigt werden darf; die sich dadurch ergebenden Änderungen im Spornkraftverlauf sind nur gering, insbesondere sind aber alle Aussagen über den Beginn des Vorkippens, also für den Fall $P_{sp} = 0$ ohnehin von der Größe des Nenners unabhängig.

In Bild 8 ist die so vereinfachte Gleichung

$$P_{sp} = \frac{1}{r_{sp}} [m_g - m_u \mu_R - m_v v^2 + m_{uv} \mu_R v^2] \qquad (10b)$$

als Funktion der laufenden Rollgeschwindigkeit mit dem Parameter μ_R dargestellt. Hierbei zeigt sich, daß sich die Kurven für alle Werte von μ_R in einem Punkte schneiden. In diesem Büschelpunkt ist also die Spornkraft P_{sp} von der Reibungszahl unabhängig. Die dazugehörige Geschwindigkeit v_b erhält man aus Gl. (10b), wenn dort der Faktor von μ_R

$$-m_u + m_{uv} v_b^2 = 0$$

gesetzt wird. Daraus ergibt sich

$$v_b = \sqrt{\frac{m_u}{m_{uv}}} = \sqrt{\frac{G}{c_{a_r} F \varrho/2}} = v_L \sqrt{\frac{c_{a_L}}{c_{a_r}}}.$$

Ist $c_{a_L} = c_{a_r}$, dann ist $v_b = v_L$, d. h. schwebt das Flugzeug in Dreipunktlage aus und setzt praktisch ohne Sinkgeschwindigkeit auf, dann ist im Augenblick des Aufsetzens die

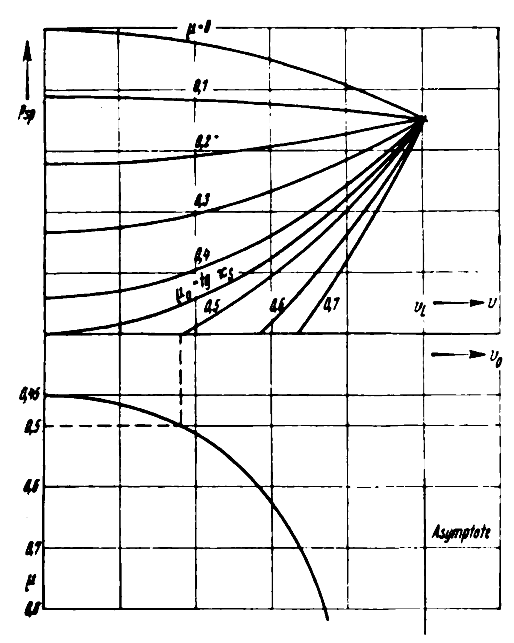


Bild 8. Der Sporndruck P_{Sp} als Funktion der Geschwindigkeit v und die μ-Werte, bei denen Abheben des Spornes eintritt, als Funktion der zugehörigen Geschwindigkeit v_0.

Ausrollwegverkürzung durch äußerste Ausnutzung der Bremsmöglichkeit mit veränderlichem μ_R.

Beispiel 1. $\mu_R = 0{,}6$ $\quad v_L \geq v \geq v_0 = 30$ m/s $\quad s_{r_1} = 175$ m

$$\mu_R = \operatorname{tg} \varkappa_{sR} \frac{1 - \frac{c_{m_r}}{c_{a_L}} \left(\frac{v_0}{v_L}\right)^2}{1 - \frac{c_{a_r}}{c_{a_L}} \left(\frac{v}{v_L}\right)^2} \qquad v \leq v_0 \qquad s_{r_2} = 105 \text{ m}$$

$s_r = 280$ m

Beispiel 2. $\mu_R = \operatorname{tg} \varkappa_{sR} =$ konst. $\quad v_L \geq v \geq 0$ $\quad s_r = 345$ m

Spornkraft von der Reibungszahl μ_R unabhängig. Für den Fall einer Spornlandung mit anschließendem Vorkippen auf die Räder ist $c_{a_L} > c_{a_r}$, d. h. der ausgezeichnete Wert von v_b, bei dem die Spornkraft von μ_R unabhängig ist, ist größer als die Landegeschwindigkeit, bei der bereits im Augenblick der Dreipunktberührung die Räder belastet sind und daher die Roll- und Bremsreibung wirksam werden können.

Während des Ausrollens nimmt nun, je nach der Größe der Verzögerung, die Spornkraft zu oder ab. Für $\mu_R = 0$ nähert sich die Spornkraft mit abnehmender Geschwindigkeit stetig dem Wert der sogenannten ruhenden Spornlast, während für $\mu_R \neq 0$ die Spornkraft je nach der Größe von μ_R verschiedenen Werten zustrebt, um dann nach Beendigung des Ausrollens mit dem Verschwinden der Verzögerung sprunghaft ebenfalls den Wert der ruhenden Spornlast zu erreichen.

Der Wert von P_{Sp} ist dann von der Geschwindigkeit unabhängig, wenn, wie sich wiederum aus Gl. (10b) ergibt, der Faktor von v^2 verschwindet, d. h.

$$-m_v + m_{\mu v} \mu_R = 0.$$

Daraus folgt

$$\mu_R = \frac{m_v}{m_{\mu v}} = \frac{c_{m_r}}{c_{a_r}} \cdot \frac{r_S \sin \varkappa_S}{r_S \cos \varkappa_S + r_R}.$$

Die Spornkraft ergibt sich damit zu

$$P_{Sp} = G \frac{r_S \sin \varkappa_S}{r_{Sp}} \left[1 - \frac{c_{m_r}}{c_{a_r}}\right],$$

ist also im wesentlichen durch den veränderlichen Höhenleitwerksauftrieb c_{aH} in dem Ausdruck für c_{m_r} veränderlich.

Das Längenverhältnis $\frac{r_S \sin \varkappa_S}{r_S \cos \varkappa_S + r_R}$ läßt sich nun ersetzen durch das Längenverhältnis $\frac{r_{SR} \sin \varkappa_{SR}}{r_{SR} \cos \varkappa_{SR}} = \operatorname{tg} \varkappa_{SR}$, wo r_{SR} den Abstand des Schwerpunktes vom Bodenberührungspunkt der Räder und $\varkappa_{SR}$ den zwischen r_{SR} und der Lotrechten eingeschlossene Winkel bezeichnen.

Ist nun

$$\mu_R < \frac{c_{m_r}}{c_{a_r}} \operatorname{tg} \varkappa_{SR},$$

dann nimmt die Spornkraft während des Ausrollens zu; ist

$$\mu_R > \frac{c_{m_r}}{c_{a_r}} \operatorname{tg} \varkappa_{SR},$$

dann nimmt die Spornkraft während des Ausrollens ab. Den Wert von $\mu_R = \mu_0$, bei dem gerade für $v = 0$ auch $P_{Sp} = 0$ wird, erhält man ebenfalls aus Gl. (9), und zwar ist

$$\mu_0 = \frac{m_g}{m_\mu} = \operatorname{tg} \varkappa_{SR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus dieser Gleichung ist auch zu entnehmen, daß der Wert von μ_0 von der Größe der Spornkraft bei v_b unabhängig ist.

Wenn ein Flugzeug in Dreipunktlage mit von Null verschiedener Spornkraft ausrollt, dann wird es auch bei stärkstem Bremsen nicht sofort zu einem Überschlag ansetzen, sondern erst eine gewisse Strecke zurücklegen. Bleibt trotz Bremsbetätigung die Gesamtreibungszahl $\mu_R < \operatorname{tg} \varkappa_{SR}$, dann wird das Flugzeug überhaupt nicht überkippen. Das wird insbesondere dann der Fall sein, wenn das Flugzeug mit Luftschrauben ausgerüstet ist, die für Auslaufbremsung durch Blattverstellung eingerichtet sind; hierdurch kann bereits ein so kurzer Ausrollweg erreicht werden, daß eine stärkere Betätigung der Bremse und damit eine Erhöhung von μ_R nicht notwendig ist. Ist dagegen $\mu_R > \operatorname{tg} \varkappa_{SR}$, dann wird noch während des Ausrollens bei einer Geschwindigkeit $v_0 < v_L$ die Spornkraft Null werden und das Flugzeug wird, falls μ_R etwa durch Lösen der Bremsen nicht verkleinert wird, beim weiteren Ausrollen vorkippen. Den Zusammenhang zwischen μ_R und v_0 erhält man aus Gl. (10b), wenn dort $P_{Sp} = 0$ gesetzt wird.

Der überhaupt kürzeste Ausrollweg in Dreipunktlage ohne Vorkippen wird dann erreicht, wenn beim Verschwinden des Sporndruckes die Bremsen allmählich so weit gelöst werden, daß während des weiteren Ausrollens die Spornkraft gerade auf Null gehalten wird. Beginnt das Flugzeug mit einem Wert $\mu_R =$ konstant $> \operatorname{tg} \varkappa_{SR}$ auszurollen, dann nimmt im ersten Teil der Ausrollstrecke (s_{r_1}) die Spornkraft nach Gl. (10b) bis auf Null ab. Da nun so große Reibungszahlen auf normalen Flugplätzen nur bei zusätzlichem Bremsen wirksam werden, so kann man durch Lösen der Bremsen den μ-Wert allmählich so weit verkleinern, daß die Spornkraft während der weiteren Ausrollstrecke (s_{r_2}) gerade Null bleibt.

Mit einem so angenommenen Verlauf der Reibungszahl

$$\mu_R = \text{konst.} > \operatorname{tg} \varkappa_{SR} \quad \text{für } v > v_0,$$

und (aus Gl. (10a) mit $P_{Sp} = 0$)

$$\mu_R = \frac{m_g - m_v v^2}{m_\mu - m_{\mu v} v^2} = \operatorname{tg} \varkappa_{SR} \frac{1 - \frac{c_{m_r}}{c_{a_L}} \left(\frac{v}{v_L}\right)^2}{1 - \frac{c_{a_r}}{c_{a_L}} \left(\frac{v}{v_L}\right)^2} \quad \text{für } v < v_0 \quad (12)$$

erhält man die stärkste überhaupt mögliche Ausrollwegverkürzung ohne Vorkippen des Flugzeuges.

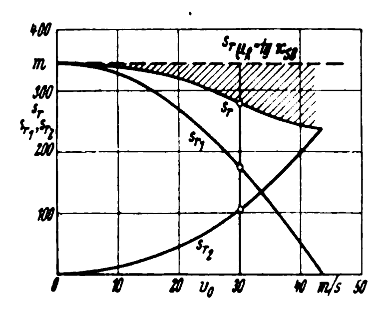
Die Längen von s_{r_1} und s_{r_2} sind Funktionen von μ_R bzw. von v_0. Integriert man Gl. (2) nicht von $v = v_L$ bis $v = 0$, sondern nur bis $v = v_0$, dann erhält man den ersten Teil der Ausrollstrecke (s_{r_1}) als Funktion von v_0

$$s_{r_1} = \frac{v_L^2}{2g} \cdot \frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \mu} \ln \left[\frac{\varepsilon_r + \mu_R (c_{a_L}/c_{a_r} - 1)}{(\varepsilon_r - \mu)\left(\frac{v_0}{v_L}\right)^2 + \mu_R \, c_{a_L}/c_{a_r}}\right].$$

Dieser Zusammenhang ist in Bild 9 für ein neuzeitliches Hochleistungsflugzeug dargestellt.

Ist z. B. $\mu_R = 0{,}6$ dann verschwindet die Spornkraft bei einer Rollgeschwindigkeit von $v_0 = 30$ m/s und bei einem bis dahin zurückgelegten Weg $s_{r_1} = 175$ m, während für $\mu_R = 0{,}5$ die Spornkraft erst bei $v_0 = 20$ m/s verschwindet und der Weg $s_{r_1} = 275$ m beträgt.





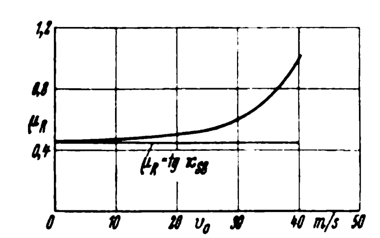


Bild 9. Die Teilausrollstrecken s_{r_1} und s_{r_2} und der μ_R-Verlauf als Funktion der Geschwindigkeit v_0, bei der der Sporndruck verschwindet.

Während des zweiten Teiles der Ausrollstrecke soll nun die Spornkraft gleich Null bleiben, d. h. der Wert von μ muß sich entsprechend den in Gl. (12) gegebenen Zusammenhang für $v < v_0$ ändern. Es ist danach in Gl. (2) μ_R durch die rechte Seite der Gl. (12) zu ersetzen. Es ergibt sich dann

$$v \frac{d v}{d s} = -\left(\frac{c_{w_r} - \operatorname{tg} \varkappa_{SB} \, c_{m_r}}{c_{a_L}} \left(\frac{v}{v_L} \right)^2 + \operatorname{tg} \varkappa_{SB} \right) g.$$

Das ist aber formal dieselbe Gleichung wie Gl. (2), nur ist an Stelle von μ_R der Wert $\operatorname{tg} \varkappa_{SB}$ und an Stelle von c_{a_r} die Größe c_{m_r} getreten. Die Länge von s_{r_2} erhält man jetzt durch Integration von $v = v_0$ bis $v = 0$. Es ergibt sich dann wiederum als Funktion von v_0

$$s_{r_2} = \frac{v_L^2}{2 g} \frac{c_{a_L}/c_{a_r}}{\varepsilon_r - \operatorname{tg} \varkappa_{SB} \, c_{m_r}/c_{a_r}} \times$$

$$\times \ln \left[\frac{(\varepsilon_r - \operatorname{tg} \varkappa_{SB} \, c_{m_r}/c_{a_r}) \left(\frac{v_0}{v_L} \right)^2 + \operatorname{tg} \varkappa_{SB} \, c_{a_L}/c_{a_r}}{\operatorname{tg} \varkappa_{SB} \, c_{a_L}/c_{a_r}} \right].$$

Dieser Zusammenhang ist ebenfalls in Bild 9 dargestellt. Für einen Anfangswert von $\mu_R = 0{,}6$ mit $v_0 = 30$ m/s hat der zweite Teil der Ausrollstrecke mit nach Gl. (12) veränderlichem μ die Länge von $s_{r_2} = 105$ m; bei $\mu_R = 0{,}5$ mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20$ m/s wird bis zum Stillstand nur noch die Strecke $s_{r_2} = 45$ m zurückgelegt.

Die Summe von $(s_{r_1} + s_{r_2})$ ist dann der Gesamtausrollweg, der als Funktion von v_0 ebenfalls in Bild 9 als Kurve eingetragen ist. Der Ausrollweg, wie er sich mit $\mu_R = \operatorname{tg} \varkappa_{SB}$ ergeben würde, wird mit $v_0 = 0$ erreicht. Die Ausrollwegverkürzung durch volle Ausnutzung der Bremsmöglichkeiten ohne Vorkippen als Funktion von v_0 gegenüber einer Bremsung mit $\mu_R = \operatorname{tg} \varkappa_{SB}$ gleichbleibend ist durch Schraffung veranschaulicht.

Die bisherige deutsche Sicherheitsvorschrift gegen Vorkippen fordert für die Fahrwerkslage bei bremsbaren Heckradflugzeugen einen Mindestwinkel von 12° zwischen der Schwererichtung und der Verbindungslinie zwischen vorderster Schwerpunktslage und Bodenberührungspunkt der Räder bei Waagerechtlage der Flugzeuglängsachse. Die Erkenntnisse über die Möglichkeiten eines beginnenden Überschlages lassen diese Vorschrift als nicht stichhaltig erscheinen. Waagerechtlage ist als Bezugszustand schon deshalb unzweckmäßig, weil sie bei der Landung praktisch sehr unwahrscheinlich ist. Wenn dieser Zustand bei normalen Platzverhältnissen tatsächlich einmal vorkommen sollte, etwa bei einer Blindlandung, und wenn das Fahrwerk ihn übersteht, dann hat das Flugzeug stets noch genügend Vorwärtsgeschwindigkeit, um durch Höhenleitwerkswirkung alsbald in Dreipunktlage kommen zu können; wenn er sich jedoch erst während des Ausrollens oder gar gegen Ende der Ausrollstrecke einstellt, ohne bereits im Entstehen unterbunden zu werden, dann ist es wohl fast immer zu spät, da nun Trägheitswirkungen den weiteren dynamisch meist unstabilen Bewegungsablauf bestimmen. Die zulässige Größe der Auslaufbremsung und die Möglichkeit beginnenden Überkippens ist vielmehr abhängig von dem Rücklagewinkel des Schwerpunktes gegenüber dem Radauflagepunkt bei Dreipunktslage des Flugzeuges. Hierdurch erhalten die Fahrgestellhöhe und die Spornhöhe den ihr zukommenden unmittelbaren Einfluß auf den maßgebenden Rücklagewinkel, der durch die bisherige Bestimmung unterdrückt wird. Es wäre zu begrüßen, wenn die bisherige Vorschrift für Waagerechtlage des Flugzeuges durch eine dynamisch richtigere für Dreipunktlage ersetzt würde.

VI. Zusammenfassung.

Die Länge der Ausrollstrecke eines Flugzeuges ist dem Quadrat der Landegeschwindigkeit verhältig. Außerdem hängt der Ausrollweg von dem Luftwiderstand beim Ausrollen, von der Größe der Bodenreibung und dem während des Ausrollens wirksamen Gewichtsanteil sowie von der Art der Bremsbetätigung ab, die durch die Wärmeaufnahmefähigkeit der Bremsen begrenzt ist.

Wird bei einer Landung ein bestimmter Ausrollweg gefordert, der höchstens erreicht werden darf, dann nimmt die in den Bremsen zu vernichtende Bewegungsenergie bei gegebener Flügelfläche und Auftriebsbeizahl mit dem Quadrat des Landegewichtes oder mit der 4. Potenz der Landegeschwindigkeit zu und hängt außerdem noch von den während des Ausrollens wirkenden Luftkräften und von den Reibungszahlen ab. Es kommt dabei außer auf die Größe des Luftwiderstandes auch noch wesentlich auf das Verhältnis der Auftriebsbeiwerte beim Landen und Rollen an. Diese Tatsache ist besonders bei einem Vergleich der Landeeigenschaften zwischen einem Bugrad- und einem Heckradflugzeug zu beachten.

Sind die Flugzeugradbremsen so bemessen, daß die Wärmeaufnahmefähigkeit keine Grenze für die Bremsbetätigung bildet, dann darf ein Flugzeug nicht beliebig stark gebremst werden, da sonst die Möglichkeit besteht, daß es während des Ausrollens nach vorn überkippt. Das wird immer dann eintreten, wenn während des Ausrollens, d. h. bis zum Stillstand, das Verhältnis der durch die Roll- und Bremsreibung wirkenden verzögernden Kraft zum Gewicht größer wird als der Tangens des Winkels, der durch die Verbindungslinie vom Bodenberührungspunkt der Haupträder zum Schwerpunkt mit der Lotrechten gebildet wird. Die verzögernde Kraft ist aber nach dem Aufsetzen auch bei noch so großen ausnutzbaren Roll- und Bremsreibungszahlen infolge des anfangs vorhandenen Auftriebes immer klein, so daß die Gefahr des Überkippens für das Flugzeug erst gegen Ende des Ausrollens eintritt. Da so große verzögernde Kräfte im allgemeinen nur durch Bremsbetätigung erreicht werden, so kann man den Überschlag verhindern, indem man von dem Augenblick an, an dem der Sporndruck auf den Boden verschwindet, die Bremsen wieder löst.

Der kürzeste Ausrollweg wird dann erreicht, wenn während des Ausrollens das Flugzeug unter Ausnutzung der vorhandenen Haftreibung erst mit größtmöglicher Bremsbetätigung rollt, und dann nach und nach die Bremsen so gelöst werden, daß das Verhältnis von verzögernder Roll- und Bremsreibungskraft zum Gewicht immer kleiner als der Tangens des oben angegebenen Winkels bleibt.

Nach diesen Erkenntnissen erscheint es wünschenswert, daß der in den deutschen Sicherheitsvorschriften über die Fahrwerkslage geforderte Mindestwinkel zwischen der vordersten Schwerpunktslage und der Senkrechten durch den Radauflagepunkt bei Waagerechtlage der Rumpflängsachse durch die physikalisch sinnvollere Festlegung dieses Winkels bei Dreipunktlage des Flugzeuges ersetzt wird.

Sinkgeschwindigkeit nach Abfangen.

Von J. Cassens und H. Schaefer.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Es werden die Geschwindigkeitsverhältnisse beim Landevorgang eines Flugzeuges einer näheren Betrachtung unterzogen. Die unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen aufgestellten mechanischen Bewegungsgleichungen werden integriert und führen auf eine Näherungsformel für die Größe der vertikalen Sinkgeschwindigkeit. Vor dem theoretischen Teil wird zunächst einmal die Bedeutung dieser Rechnungen für den Sinkgeschwindigkeitsbegriff erörtert.

Gliederung.

I. Der Sinkgeschwindigkeitsbegriff.

Von J. Cassens, Bremen.

Die nachfolgenden theoretischen Untersuchungen sind angestellt worden, um den Begriff der Sinkgeschwindigkeit, der für die Berechnung der Landestöße von ausschlaggebender Bedeutung ist, einmal sorgfältig zu überprüfen. Nach den Vorschriften für die Festigkeit von Flugzeugen ist die für die Arbeitsaufnahme maßgebliche Stoßgeschwindigkeit abhängig von der Sinkgeschwindigkeit w_s, die man aus der Formel bestimmen kann:

$$w_s = \frac{c_{w_l}}{c_{a_l}} \cdot v_l = \frac{c_{w_l}}{c_{a_l}} \cdot \sqrt{\frac{G/F}{c_{a_l} \cdot \varrho_0/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei

$$c_{w_l} = c_{w_0} + k \cdot \frac{F}{\pi b^2} \cdot c_{al}^2 \text{ ist.}$$

Hierin bedeuten:

c_{w_0} = Widerstandsbeizahl für $c_a = 0$,
k = 1,2 für Eindecker,
= 1,0 für Doppeldecker.

k soll die Abweichung der wirklichen von der elliptischen Auftriebsverteilung und außerdem die gegenseitige Beeinflussung zwischen Ober- und Unterflügel beim Doppeldecker berücksichtigen. Der Index »l« deutet an, daß die bei der Landung herrschenden Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte zu wählen sind; d. h. also nach der Vorschrift bei 0,9 $c_{a\,max}$. Danach ist nun die am Stoßdämpfer wirkende Geschwindigkeit abhängig von

$$\frac{c_w}{c_a^{3/2}} \text{ und } \sqrt{G/F} .$$

Bei allen Landungen muß grundsätzlich unterschieden werden zwischen Landungen ohne vorhergehendes und nach zuvor erfolgtem Abfangen. Die im theoretischen Teil ermittelten Zusammenhänge gelten nur für sog. Dreipunktlandungen und Radlandungen nach vorherigem Abfangen. Der Flugzeugführer ist bekanntlich nicht immer in der Lage, seinen Gleitflug vor der Landung so zu beenden, daß das Flugzeug in dem Augenblick in eine horizontale Bahn gebracht wird, wenn die Räder sich unmittelbar über dem Boden befinden. Vielmehr wird der Führer das Flugzeug lieber eine kurze Entfernung über dem Boden so abfangen, daß das Flugzeug eine ungefähr horizontale Bahn erreicht.

Nach diesem Manöver hat der Führer nur noch in beschränktem Umfange Einfluß auf die Sinkbewegung des Flugzeugs, denn das Flugzeug folgt nach dem sog. »Abfangen« ballistischen Gesetzen, die im theoretischen Teil beschrieben sind. Der Flugzeugführer kann die Bahn des Flugzeugs wesentlich nur durch Gasgeben beeinflussen. Gasgeben bedeutet aber eine Unterbrechung des Landevorganges.

Für die Stoßgeschwindigkeit, die das Fahrwerk dann bei der Landung aufzunehmen hat, ist also in erster Linie der Verschätzungsfehler des Flugzeugführers verantwortlich. Verschätzt sich der Führer wenig in der Höhe, so erfährt das Flugzeug in seinen Reifen und in seinem Stoßdämpferaggregat geringe Beanspruchungen. Der Raddruck wächst während der Landung vom Betrage 0 stetig auf den Betrag der ruhenden Radlast. Verschätzt sich jedoch der Flugzeugführer in der zum Abfangen kurz über dem Boden zweckmäßigen Höhe, so wird das Stoßdämpferaggregat entsprechend dem Schätzungsfehler beansprucht.

In den Bereichen, die normalerweise für den Landevorgang betrachtet werden müssen, gilt die auf S. 81 angegebene Näherungsformel ganz ausgezeichnet.

Hier ist also

$$v_z = \sqrt{2 \cdot g \cdot z \cdot \frac{c_w}{c_a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Danach ist die Sinkgeschwindigkeit einmal von dem Schätzungsfehler des Flugzeugführers, d. h. der Höhe z, abhängig und zweitens von dem Verhältnis $\frac{c_w}{c_a}$. Eine Abhängigkeit von der Flächenbelastung des Flugzeuges besteht hier nicht.

Weiterhin zeigt die Untersuchung, wie die Flugzeuge bei ihren Landungen innerhalb gewisser Grenzen mit allen möglichen Geschwindigkeiten auftreffen können, daß sie aber nach erfolgtem Abfangen nie den stationären Zustand der Sinkgeschwindigkeit erreichen. Diese unendlich vielen Möglichkeiten, die es für die Auftreffgeschwindigkeit eines Flugzeuges gibt, sind aus dem Beispiel Bild 13 gut zu erkennen. Nach etwa 7 m Höhenverlust erreicht die Sinkgeschwindigkeit den Wert der stationären Sinkgeschwindigkeit; bei 28 m Höhenverlust herrscht eine Sinkgeschwindigkeit, die etwa um 60 vH höher liegt als der stationäre Wert. Man kann annehmen, daß sich die stationäre Sinkgeschwindigkeit erst nach weit über 100 m Höhenverlust einstellt.

Radlandungen ohne Abfangen kommen größtenteils dadurch zustande, daß sich der Flugzeugführer ebenfalls in der Entfernung des Flugzeuges vom Boden verschätzt hat. Während er bei zu hohem Abfangen dem Boden näher zu sein meint, glaubt er sich vor der Radlandung ohne Abfangen vom Boden weiter entfernt, als er in Wirklichkeit ist. Die Landung geschieht dann bei der Einleitung des Abfangens.

Dieser Vorgang kann selbstverständlich weder durch Formel (1) noch durch Formel (2) erfaßt werden. Vielmehr muß hier in ähnlicher Weise eine Fehlerbetrachtung stattfinden über die möglichen Fehler des Flugzeugführers. Es ist angebracht, dafür eine konstante Zahl einzusetzen, unabhängig von der Art des Flugzeuges, da man bekanntlich bei jedem Flugzeug im Gleitflug beliebige Sinkgeschwindigkeiten erreichen kann, und zwar bis zu einer Größe, die kein Stoßdämpferaggregat mehr erträgt. Vielleicht aber wäre hier eine Beziehung zur Landegeschwindigkeit am Platze.

II. Berechnung der Flugbahn und der Geschwindigkeiten beim Abfangen.

Von H. Schaefer, Braunschweig[1]).

Bezeichnungen.

c_a (c_w) Polare des gesamten Flugzeugs,
F Bezugsfläche für die Beiwerte c_a und c_w,
G Gewicht des Flugzeugs,
g Beschleunigung der Erdschwere,
$m = \frac{G}{g}$,
$\frac{1}{R}$ Krümmung der Flugbahn,
γ Winkel der Bahntangente gegen die Horizontale (bei absteigender Bahn positiv),
s vom Beginn des Abfangens ($\gamma = 0$; $v = v_0$) an zurückgelegter Weg,
$\sigma = s \Big/ \frac{v_0^2}{2g}$,
v Bahngeschwindigkeit,
$v_0^2 = \frac{G}{c_a \frac{\varrho}{2} F}$,
$u = \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\text{Auftrieb}}{\text{Gewicht}} \sim$ Lastvielfaches,
v_z Vertikalkomponente der Geschwindigkeit,
z Fallhöhe,
$\zeta = z \Big/ \frac{v_0^2}{2g}$ red. Fallhöhe.

1. Ansatz der Bewegungsgleichungen.

Wir vereinfachen unsere Aufgabenstellung, indem wir nur die Bahn des Flugzeugschwerpunktes untersuchen. Dieser bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse des Flugzeugs in ihm vereinigt wäre und die folgenden drei Kräfte (Schraubenschub Null!) an ihm angriffen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Auftrieb } A = c_a \frac{\varrho}{2} v^2 F, \\ &\text{Widerstand } W = c_w \frac{\varrho}{2} v^2 F, \\ &\text{Gewicht des Flugzeugs } G \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ Bild 1.}$$

Der Beschleunigungsvektor wird dargestellt durch seine Komponenten

$$\text{in Bahnrichtung: } \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds}$$

$$\text{normal zur Bahn: } \frac{v^2}{R} = v^2 \frac{d\gamma}{ds}.$$

[1]) z. Z. der Abfassung dieser Arbeit bei der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

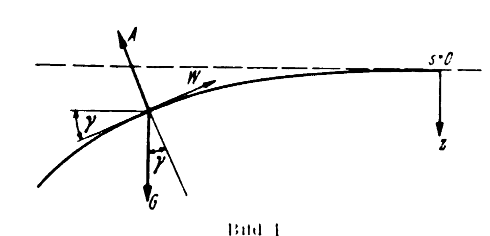


Bild 1.

Hiermit lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{G}{g} \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = - c_w \frac{\varrho}{2} v^2 F + G \sin\gamma \quad \ldots \quad (1\text{a})$$

$$\frac{G}{g} v^2 \frac{d\gamma}{ds} = - c_a \frac{\varrho}{2} v^2 F + G \cos\gamma \quad \ldots \quad (1\text{b})$$

Die Bewegung des Flugzeugs wird von dem Augenblick an verfolgt, wo A gerade gleich G ist[2]). Die diesem Zustand entsprechende Geschwindigkeit v_0 ist horizontal gerichtet ($\gamma = 0$) und errechnet sich bei gegebenem Anstellwinkel aus

$$G = c_a \frac{\varrho}{2} v_0^2 F.$$

Bei Einführung der beiden dimensionslosen Größen

$$s \Big/ \frac{v_0^2}{2g} = \sigma \text{ und } \frac{v^2}{v_0^2} = u$$

geht das Gleichungssystem (1) über in

$$\frac{du}{d\sigma} = - \frac{c_w}{c_a} u + \sin\gamma \quad \ldots \ldots \quad (2\text{a})$$

$$2u \frac{d\gamma}{d\sigma} = - u + \cos\gamma \quad \ldots \ldots \quad (2\text{b})$$

in dem nur noch dimensionslose Größen vorhanden sind.

Die Anfangsbedingungen lauten, unserer Aufgabe entsprechend:

für $\sigma = 0$ ist $u = 1$ und $\gamma = 0$.

Es folgt dann:

$$\text{aus (2a): } \left.\frac{du}{d\sigma}\right|_{\sigma = 0} = - \frac{c_w}{c_a},$$

$$\text{aus (2b): } \left.\frac{d\gamma}{d\sigma}\right|_{\sigma = 0} = 0.$$

Das Ziel unserer Untersuchungen ist, die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit, die Sinkgeschwindigkeit v_z, in Abhängigkeit von der Fallhöhe z nach dem Abfangen ($\sigma = 0$) zu gewinnen. Wenn durch Integration der Gl. (2) $u(\sigma)$ und $\gamma(\sigma)$ bekannt sind, so wird wegen $\frac{dz}{ds} = \sin\gamma$

$$z \Big/ \frac{v_0^2}{2g} = \zeta = \int_0^\sigma \sin\gamma \, d\sigma \ldots \ldots \ldots (3)$$

und wegen $v_z = v \sin\gamma$

$$\frac{v_z}{v_0} = \sqrt{u} \sin\gamma, \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

so daß wir letzten Endes die Parameterdarstellung $v_z = v_z(s)$ und $z = z(s)$ erhalten, mit der sich v_z als Funktion von z zeichnen läßt.

Unsere Aufgabe ist somit gelöst, wenn die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen (2a) und (2b) geleistet ist.

2. Integration der Bewegungsgleichungen.

Unsere Ausführungen beruhen sämtlich auf der Annahme, daß während der ganzen Bewegung des Flugzeugs nach dem Abfangen ($v = v_0$) der Anstellwinkel konstant bleibt. $\frac{c_w}{c_a}$ demnach unabhängig vom Bahnneigungswinkel γ ist.

Da ein Versuch, u und γ aus (2a) und (2b) als irgendwelche bekannte Funktionen von σ zu gewinnen, mißlingt, muß die Integration des Systems (2) numerisch durchgeführt werden.

Die Division von (2a) durch (2b) eliminiert σ und liefert die einzige Gleichung

$$\frac{du}{u\,d\gamma} = 2 \frac{\frac{c_w}{c_a} u - \sin\gamma}{u - \cos\gamma}, \ldots \ldots \ldots (5)$$

die zwar für eine numerische Behandlung unbrauchbar ist, jedoch einen guten qualitativen Einblick in die Abhängigkeit der Größe u von γ gibt.

Deutet man u und γ als Fahrstrahl bzw. Winkel in einem Polarkoordinatensystem (u, γ), so ist $\frac{du}{u\,d\gamma}$ der tg des

[2]) Hier besitzt die Flugbahn eine waagerechte Wendetangente.

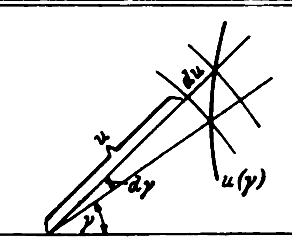


Bild 2.

Winkels, den die Lösungskurven $u(\gamma)$ von (5) mit den Kreisen $u =$ konst. bilden, Bild 2.

Aus (5) erkennt man, daß dieser Winkel auf dem Kreise $u = \frac{c_a}{c_w} \sin\gamma$ Null ist, dagegen 90° auf dem Kreise $u = \cos\gamma$. Noch allgemeiner kann man sagen, daß die Lösungskurven $u(\gamma)$ von (5) mit den Koordinatenlinien $u =$ konst. den Winkel α bilden, in dem Augenblick, wo sie den Kreis

$$2\left(\frac{c_w}{c_a} u - \sin\gamma\right) = \operatorname{tg}\alpha\,(u - \cos\gamma) \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

schneiden. Man nennt (6) deshalb auch Isokline der Differentialgleichung (5). In Bild 3 findet man die Isoklinen $\alpha = 0°$ und 90° gezeichnet. Sie schneiden sich in 2 Punkten, durch die, wie man an (6) erkennt, auch sämtliche anderen Isoklinen hindurchgehen.

Man gewinnt jetzt ein Bild von dem qualitativen Verlauf der Lösungskurven $u(\gamma)$, wenn man, von einem beliebigen Punkt ausgehend, die Isoklinen in den zu ihnen gehörigen Richtungen[3]) passiert. Man erkennt dabei, daß sämtliche Lösungskurven in den »Strudelpunkt« (u_{st}, γ_{st}) hineingezogen werden, dem natürlich der Gleitwinkel γ_{st} mit der zugehörigen stationären Sinkgeschwindigkeit $v_{st} = v_0 \sqrt{u_{st}}$ entspricht[4]).

Durch Nullsetzen der Beschleunigungen auf den linken Seiten von (2a) und (2b) wird

$$\operatorname{tg}\gamma_{st} = \frac{c_w}{c_a}; \; u_{st} = \cos\gamma_{st} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2$$

und nach (4)

$$\left(\frac{v_z}{v_0}\right)_{st} = \sqrt{u_{st}} \sin\gamma_{st} \approx \frac{c_w}{c_a}.$$

Wenn man bedenkt, daß zum Fahrstrahl u der Winkel γ gehört, so erkennt man, daß u die Richtung der Geschwindigkeit des Flugzeugs anzeigt. Die Länge von u ist ein Maßstab für ihre Größe. Einer Lösungskurve $u(\gamma)$ von (5), wie sie in Bild 4 gezeichnet ist, entspricht demnach die Flugbahn in Bild 5 (konstanter Anstellwinkel, Schraubenschub Null!).

Bild 6 und 7 zeigen qualitativ die Verhältnisse, wie sie bei unserer hier behandelten Aufgabe vorliegen.

Praktisch kommt jedoch nur die Flugbahn bis etwa zum Punkte A in Frage.

Wir wenden uns jetzt der numerischen Lösung des Gleichungssystems (2) zu. Wir gehen hierbei folgendermaßen vor:

Zunächst verschaffen wir uns eine Näherung

$$u = u_0(\sigma); \; \gamma = \gamma_0(\sigma)$$

(wie, wird weiter unten gezeigt), die wir in die rechten Seiten von (2) einsetzen. Durch Integration

$$\left.\begin{aligned} u_1(\sigma) &= \int_0^\sigma \left(\sin\gamma_0 - \frac{c_w}{c_a} u_0\right) d\sigma + 1 \\ \gamma_1(\sigma) &= \frac{1}{2}\int_0^\sigma \left(\frac{\cos\gamma_0}{u_0} - 1\right) d\sigma \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

[3]) Die zu einer beliebigen Isokline gehörigen Richtungen lassen sich durch eine sehr einfache geometrische Konstruktion gewinnen.

[4]) Eine nähere Untersuchung der Singularitäten der Differentialgleichung (5) zeigt, daß für $\frac{c_w}{c_a} = 0$ ein »Wirbelpunkt«, für $\frac{c_w}{c_a} > \sqrt{8}$ ein »Knotenpunkt« vorhanden ist. Im letzteren Fall verläuft die Bewegung aperiodisch. In der Umgebung des Punktes $u = 0$ verhalten sich die Lösungskurven wie $u = \frac{\text{konst.}}{\cos^2\gamma}$.

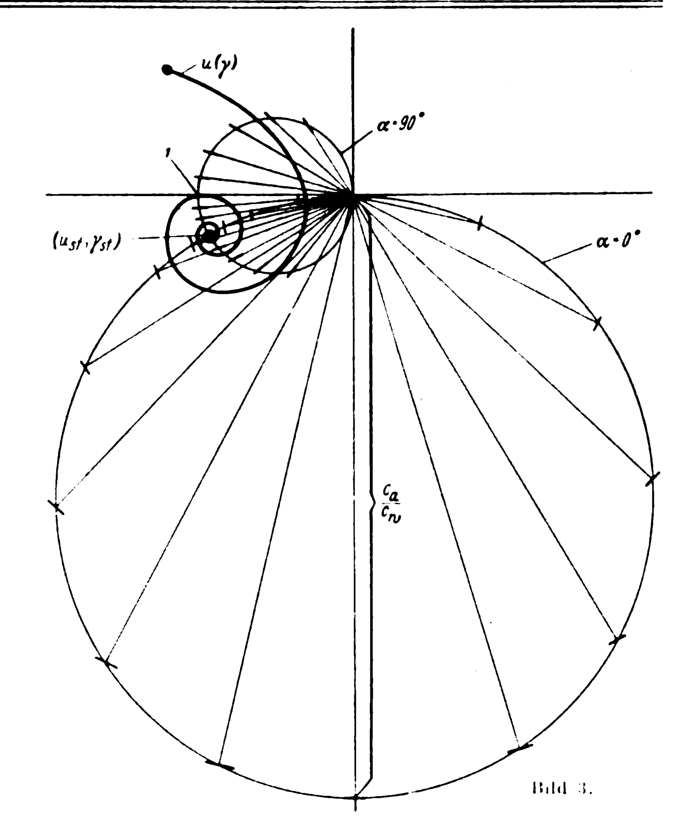


Bild 3.

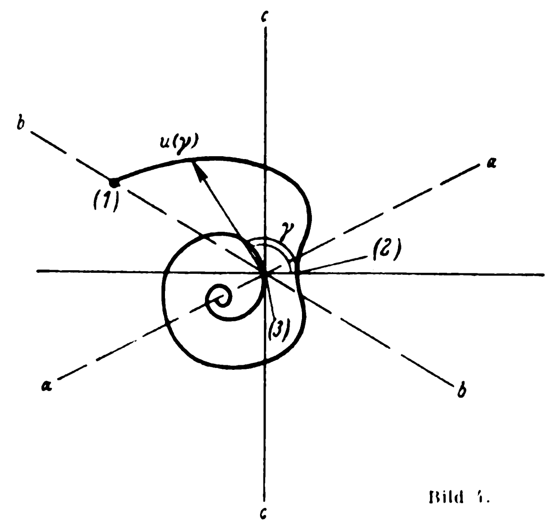


Bild 4.

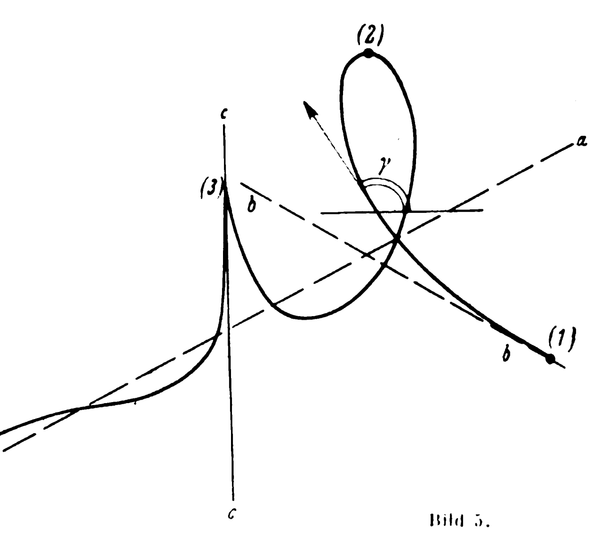


Bild 5.

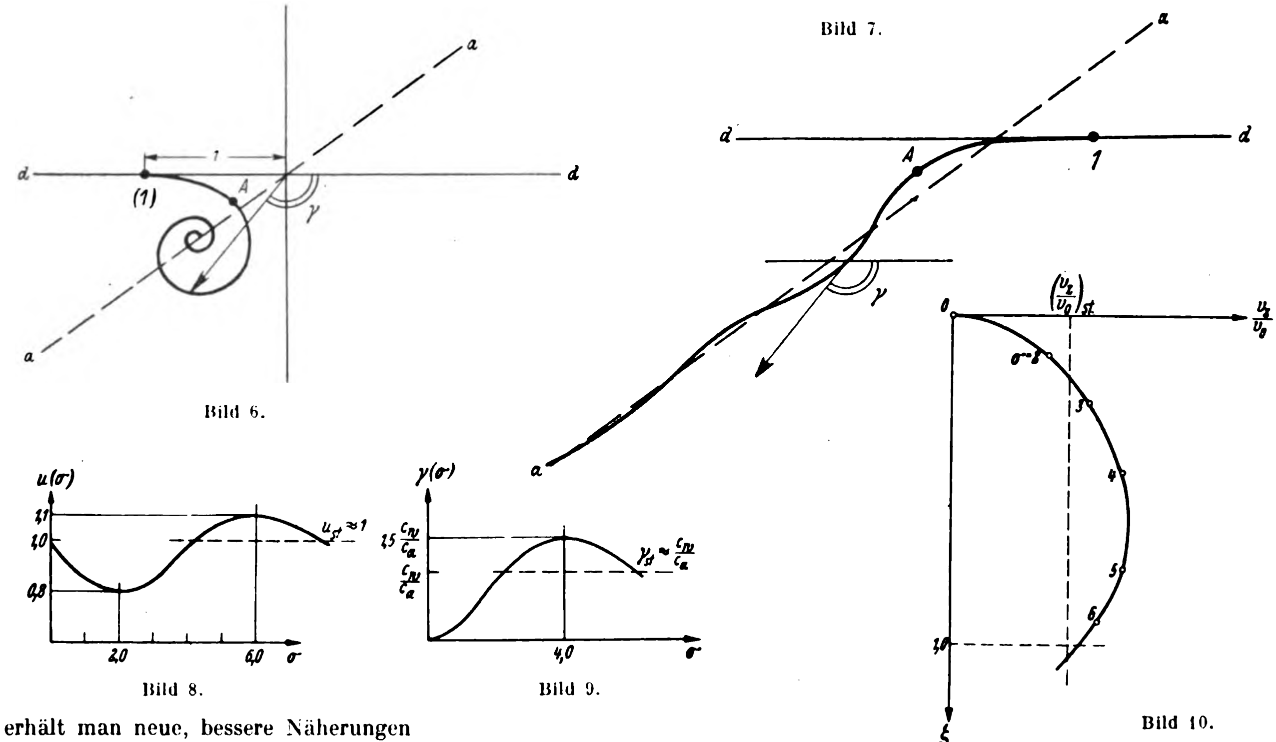


Bild 6. Bild 7. Bild 8. Bild 9. Bild 10.

erhält man neue, bessere Näherungen

$$u = u_1(\sigma);\ \gamma = \gamma_1(\sigma),$$

mit denen man eine neue Integration durchführt. Man wiederholt diese Iteration solange, bis zwei aufeinanderfolgende Näherungen sich nur noch innerhalb der Grenzen der verlangten Genauigkeit unterscheiden.

Der ungefähre Verlauf von $u(\sigma)$ und $\gamma(\sigma)$ ist in Bild 8 und 9 beschrieben, wobei die Zahlenangaben nur ein Bild der Größenordnungen vermitteln sollen.

Die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fallhöhe errechnet sich dann nach (3) und (4), Bild **10**.

Diese Kurve besitzt als Geschwindigkeit-Wegkurve im Nullpunkt eine waagerechte Tangente.

Sämtliche Integrationen werden numerisch durchgeführt, am vorteilhaftesten mit Simpsonscher Regel und Rechenmaschine.

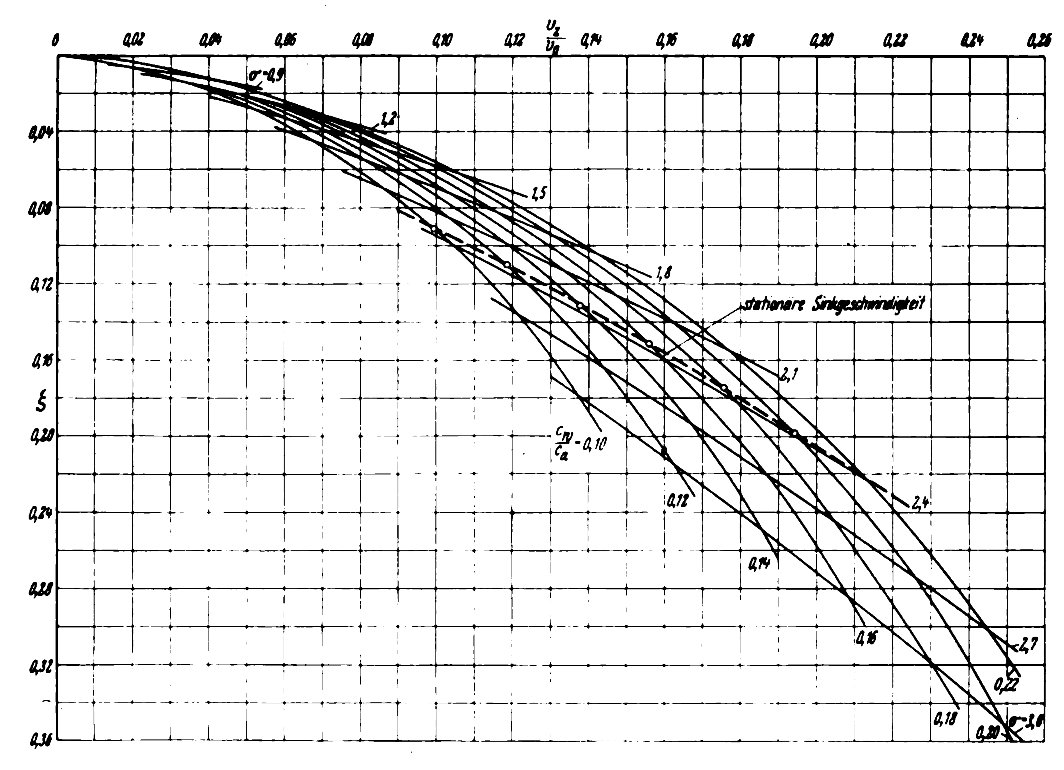


Bild 11. Sinkgeschwindigkeit nach Abfangen.

$v_0^2 = \frac{G}{F\cdot\frac{\varrho}{2}\cdot c_a}$ [m² s⁻²]

Fallhöhe $z = \zeta\cdot\frac{v_0^2}{2g}$ [m]

Weg $s = \sigma\cdot\frac{v_0^2}{2g}$ [m]

Näherungsformel: $\frac{v_z}{v_0} = \sqrt{\frac{c_w}{c_a}\cdot\zeta}$

$v_z = \sqrt{\frac{c_w}{c_a}\,2gz}$ [m s⁻¹].

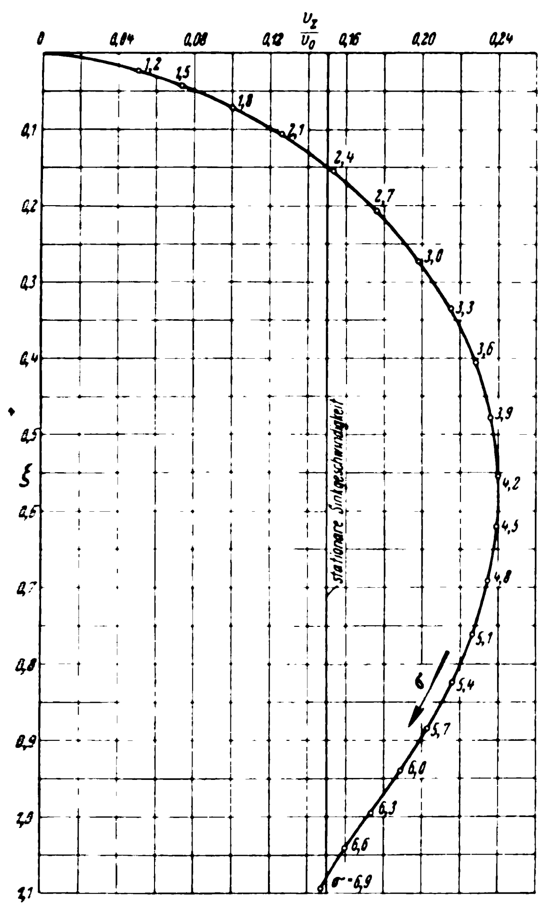


Bild 12. Sinkgeschwindigkeit nach Abfangen.

$\frac{v_z}{v_0}$ red. Sinkgeschw., $v_0^2 = \frac{G}{c_a \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot F}$

ζ red. Fallhöhe,

$\sigma = s \Big/ \frac{v_0^2}{2g}$ red. Weg, $\frac{c_w}{c_a} = 0{,}152.$

Es ist noch nachzutragen, wie man sich Näherungslösungen $u_0(\sigma)$ und $\gamma_0(\sigma)$ besorgen kann.

Es bestehen hier zwei Möglichkeiten:

a) Man setzt Potenzreihen in σ an, die man nach einigen Gliedern abbricht:

$$u = 1 + a_1 \sigma + a_2 \sigma^2 + a_3 \sigma^3 + \ldots$$
$$\gamma = \qquad b_2 \sigma^2 + b_3 \sigma^3 + \ldots$$

Die Beiwerte a_i und b_i bestimmt man durch Einsetzen dieser Reihen in (2) und durch Vergleich gleich hoher σ-Potenzen. Es zeigt sich jedoch, daß die zahlenmäßige Auswertung der Reihen viel Zeit kostet. Deshalb wurde von der zweiten Möglichkeit Gebrauch gemacht.

b) Man entwickelt nach Potenzen des Parameters $\frac{c_w}{c_a} = \varphi$:

$$u = 1 + \varphi f_1(\sigma) + \varphi^2 f_2(\sigma) + \ldots$$
$$\gamma = \quad \varphi g_1(\sigma) + \varphi^2 g_2(\sigma) + \ldots$$

und führt diese Reihen in (2) ein, wobei hierin noch zu setzen ist $\sin\gamma \sim \gamma$ und $\cos\gamma \sim 1 - \frac{\gamma^2}{2}$. Die Funktionen f_i und g_i bestimmen sich dann aus Differentialgleichungen 2. Ordnung, die für die Beiwerte der höheren φ-Potenzen allerdings recht kompliziert werden. Man erkennt jedoch, daß bereits schon die einfache Näherung:

$$\gamma_0 = \varphi\left(1 - \cos\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$$
$$u_0 = 1 - \varphi\left[\sqrt{2}\left(\sin\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 2\gamma_0\right]$$

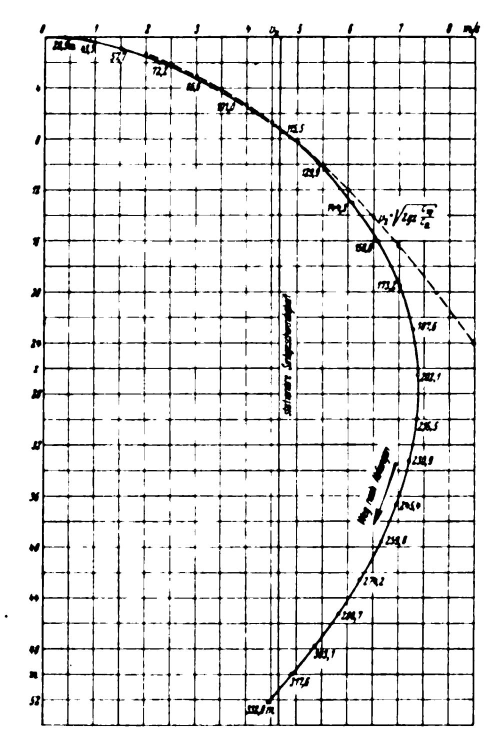


Bild 13. Fw 159. Sinkgeschwindigkeit nach Abfangen.
Landeklappen und Fahrwerk ausgefahren, Schrauben festgebremst.

$c_w = 0{,}258$ $\qquad \frac{c_w}{0{,}9\, c_{a_{max}}} = 0{,}152$
$0{,}9\, c_{a_{max}} = 1{,}70$ $\qquad G = 2250$ kg
$F = 20{,}2$ m²

recht brauchbar ist. Eine Verbesserung dieser ersten Näherung durch Iteration, wie oben beschrieben, ist jedoch immer unerläßlich.

Die Lösung unserer Aufgabe ist in Form eines Kurvenblattes dargestellt[5]), Bild 11.

In einem besonderen Falle (Fw 159) wurde die Integration sehr weit getrieben, weil es interessierte, um wieviel die größte auftretende Sinkgeschwindigkeit die stationäre übertreffen kann, Bild 12 und 13.

Eine die Ergebnisse dieser Rechnungen zusammenfassende Näherungsformel, die im Bereiche der üblichen Sinkgeschwindigkeiten nur einen Fehler bis zu 5 vH hat, lautet:

$$\frac{v_z}{v_0} = \sqrt{\frac{c_w}{c_a} \cdot \zeta}$$
$$v_z = \sqrt{\frac{c_w}{c_a} \cdot 2gz}$$

Sie zeigt, daß die Sinkgeschwindigkeit kurz nach dem Abfangen praktisch unabhängig ist von Luftdichte, Gewicht und Flächenbelastung des Flugzeugs.

Die Annahme eines konstanten Anstellwinkels während der Bewegung des Flugzeugs nach dem Abfangen bringt eine wesentliche Vereinfachung der ohnehin schon umfangreichen numerischen Rechnung und scheint überdies den tatsächlich auftretenden Verhältnissen am nächsten zu kommen.

Grundsätzlich bestehen natürlich keine Schwierigkeiten bei einer etwaigen Berücksichtigung einer vorgeschriebenen Änderung von c_w und c_a mit dem Bahnneigungswinkel. Man soll sich jedoch darüber klar sein, ob ein solcher Genauigkeitsaufwand im Hinblick auf die sonstigen Umstände des Problems zu rechtfertigen ist.

[5]) Die umfangreichen Integrationen, die im Dezember 1937 abgeschlossen wurden, führte Frl. Bartens durch.

Bemerkungen zur Häufigkeit der Böenbelastung am Tragwerk.

Von H. Krumbholz.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Die von der DVL auf Grund von Flugmessungen aufgestellte Böenstatistik wird kurz erläutert und kritisch betrachtet. Es wird gezeigt, in welchem Ausmaß die bisherige Böenstatistik zu ungünstig ist und zu unrichtiger Beurteilung der untersuchten Bauteile führen kann. Es werden Vorschläge zur Änderung des Auswerteverfahrens gemacht.

Gliederung.

I. Einleitung.

In der Arbeit »Die erforderliche Zeit- und Dauerfestigkeit von Flugzeugtragwerken« (H. W. Kaul; Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung) wird über die Ergebnisse der bei der DVL im Flugbetrieb durchgeführten Beanspruchungsmessungen berichtet. Ziel dieser Messungen war festzustellen, mit welcher Häufigkeit das Auftreten bestimmter Beanspruchungshöhen infolge Böen und Kunstflug innerhalb einer gegebenen Betriebsstundenzahl zu erwarten ist. Als Maß der Beanspruchung des Tragwerks wurde die Beschleunigung im Flugzeugschwerpunkt eingeführt. Die Ergebnisse dieser Häufigkeitsuntersuchungen dienen seit einiger Zeit als Grundlage für systematische Ermüdungsversuche (Mehrstufenversuche) und gelten als Richtlinien zum Nachweis der Zeitfestigkeit von Tragwerk-Bauteilen. Im folgenden wird gezeigt, daß die aus den Ergebnissen der Flugmessungen abgeleitete Böenstatistik — nur von dieser soll hier die Rede sein — hinsichtlich der Tragwerkbeanspruchung zu ungünstig ist und daß die auf dieser Statistik fußenden Zeitfestigkeitsversuche zu unrichtiger Beurteilung der Bauteile führen. Im folgenden werden nach einer kurzen Darstellung der oben angeführten Arbeit die Grundlagen der Böenstatistik kritisch betrachtet und Vorschläge zur Abänderung gemacht.

II. Grundlagen der Böenstatistik.

1. Die »Einheitsverteilung«.

Auf einer größeren Reihe von Meßflügen auf sechs verschiedenen Flugzeugmustern bei verschiedenen Böigkeitsgraden wurden die Beschleunigungen im Flugzeugschwerpunkt gemessen. Der gesamte gemessene Beschleunigungsbereich wurde in gleich große Klassenintervalle Δn eingeteilt (n: Lastvielfaches), die Anzahl der in einem solchen Klassenintervall liegenden Beschleunigungsspitzen gezählt und dem Mittelwert des Intervalls zugeordnet. Es ergibt sich somit für eine bestimmte Meßreihe ein Verteilungspolygon nach Bild 1 mit angenäherter Symmetrie um die Abszisse $n = 1$ (Waagerechtflug). Um die Polygone miteinander vergleichen zu können, wird für die Abszisse jeweils die auf die Gesamtzahl der Meßwerte bezogene relative Häufigkeit eingeführt. Aus diesen in verschiedenen Meßflügen gewonnenen Verteilungspolygonen wird schließlich eine gemittelte »Einheitsverteilung« in folgender Weise bestimmt:

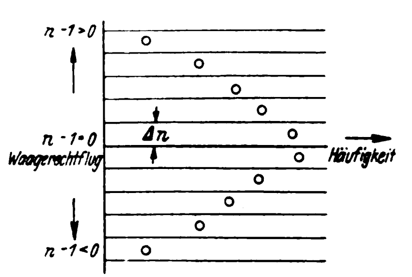


Bild 1. Verteilungspolygon.

Zunächst wird für jedes der sechs bei den Meßflügen verwendeten Flugzeugmuster das mittlere Verteilungspolygon — unter Berücksichtigung sämtlicher in der Gesamtmeßzeit bei verschiedenen Böigkeitsstärken und bei verschiedenen Flügen aufgenommenen Meßwerte — aufgestellt. Aus den so gewonnenen sechs Polygonen wird die »Einheitsverteilung« derart festgelegt, daß sie für alle Klassen mit Ausnahme der dem arithmetischen Mittel $\Delta n = 0$ unmittelbar benachbarten Klasse eine äußere Einhüllende darstellt. Eine Umhüllung der Meßwerte im ganzen Bereich ist deshalb nicht möglich, weil die Summe der relativen Häufigkeiten gleich »Eins« sein muß, Bild 2. Von der Klassenteilung unabhängig ist die Summenkurve, die angibt, mit welcher (relativen) Häufigkeit ein bestimmter Bruchteil des Böenzusatzlastvielfachen überschritten wird.

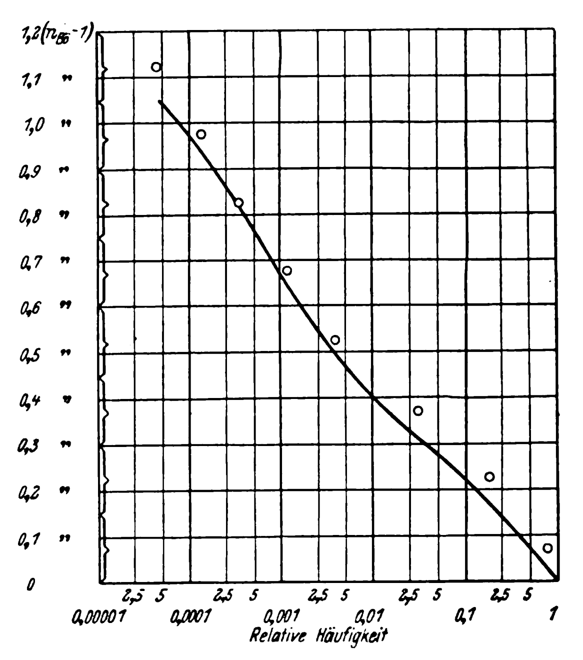


Bild 2. Einheitsverteilung der Böenbeanspruchungen nach Kaul.
○ Polygonpunkte für die Klassenteilung $\Delta n = 0{,}15\,(n_{Bö} - 1)$
$n_{Bö}$ nach BVF im Reiseflug.
—— Summenkurve.

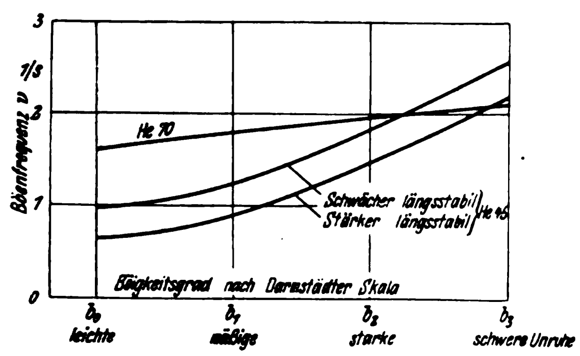


Bild 3. Anzahl der registrierten Böen (Böenfrequenz) in Abhängigkeit vom Böigkeitsgrad für He 70 und He 45 bei $v_R = 270$ km/h (nach Kaul).

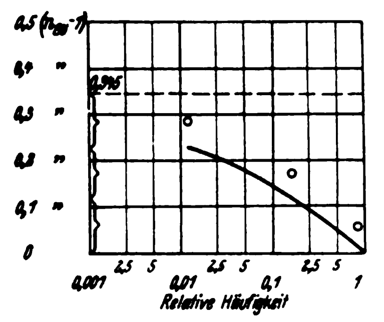


Bild 4. Häufigkeitsverteilung beim Böigkeitsgrad b_0, gemessen auf He 45.

o Polygonpunkte für die Klassenteilung $\Delta n = 0{,}115\,(n_{B_0} - 1)$ n_{B_0} nach BVF im Reiseflug.

—— Summenkurve.

2. Die Lastwechselzahl.

Außer der Verteilung der relativen Häufigkeiten muß die in einer gegebenen Betriebsstundenzahl zu erwartende Böenzahl bekannt sein. Hierzu wird die mittlere Anzahl der in der Zeiteinheit registrierten aufwärts und abwärts gerichteten Böen — die mittlere Böenfrequenz — bestimmt. Die Böenfrequenz zeigte sich in den Meßflügen proportional der Fluggeschwindigkeit. Sie ist ferner abhängig von den Flugeigenschaften (Böenempfindlichkeit) und vom Böigkeitsgrad der Atmosphäre, Bild 3. Der Einfluß des Böigkeitsgrades ist nach den Messungen überraschend gering. So ergibt sich nach Bild 3 für die He 70 bei der Reisegeschwindigkeit $v_R = 270$ km/h eine Steigerung der Böenfrequenz von $1{,}63\ s^{-1}$ bei schwächster auf nur $2{,}12\ s^{-1}$ bei stärkster Böigkeit. Im gewogenen Mittel, d. h. bei Berücksichtigung der im Zeitraum von zwei Jahren in Adlershof beobachteten Anteile der einzelnen Böigkeitsgrade (s. w. u.), errechnet sich — unter Zugrundelegung der ungünstigeren Werte der vergleichsweise böenempfindlichen He 70 — die mittlere Böenfrequenz $\nu = 1{,}68\ s^{-1}$ bei $v_R = 270$ km/h. Für $v_R = 350$ km/h und 100 Betriebsstunden ergibt sich somit die Lastwechselzahl $N = 392\,000$. (In der Arbeit von Kaul wird für $v_R = 350$ km/h mit dem Näherungswert $\frac{\nu}{2} = 1\ s^{-1}$ statt $1{,}09\ s^{-1}$ und dementsprechend mit $N = 360\,000$ gerechnet; Bild 5, gestrichelte Summenkurve.)

III. Bemerkungen zur Böenstatistik und Änderungsvorschläge.

Wie unter II, 1 erläutert, liegen der »Einheitsverteilung« an sechs verschiedenen Flugzeugmustern aufgestellte Verteilungspolygone zugrunde, von denen jedes unter Berücksichtigung sämtlicher auf mehreren Meßflügen bei verschiedenen Böigkeitsgraden gewonnenen Meßwerte bestimmt worden ist. Wie folgendes Beispiel (Meßflüge mit He 45) zeigt, wurden die Meßflüge vorwiegend an Tagen mit mittlerer Böigkeit (mäßige bis starke Unruhe) durchgeführt:

Böigkeitsgrad nach Darmstädter Skala	Meßzeit in min	Anteil an Gesamtmeßzeit %
b_0 (=) leichte Unruhe	54	11,5
b_1 (=) mäßige »	220	46,8
b_2 (=) starke »	169	35,9
b_3 (=) schwere »	27,5	5,8
Σ	470,5	100,0

Die Form des für die Gesamtflugzeit gewonnenen mittleren Verteilungspolygons wird hier also weitgehend von den Böigkeitsgraden b_1 und b_2 bestimmt, die auf den Flügen mit der He 45 insgesamt während 82,7% der Gesamtflugzeit vorlagen. Für die anderen verwendeten Flugzeugmuster sind entsprechende Zahlenangaben nicht veröffentlicht, es liegt jedoch nahe, daß auch hier die Böigkeitsgrade b_1 und b_2 aus meßtechnischen Gründen bevorzugt worden sind.

Die an den verschiedenen Flugzeugmustern bestimmten Verteilungspolygone wären für die Aufstellung einer »Einheitsverteilung« nur dann geeignet, wenn im Jahresmittel etwa dieselben Anteile der einzelnen Böigkeitsgrade vorlägen wie auf den Meßflügen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie nachstehende Zusammenstellung der von der DVL und dem Reichsamt für Wetterdienst (Ergebnis von 7 Wetterflugstellen) gemachten Beobachtungen zeigt:

Zahlen in %

Böigkeitsgrad	Beobachtungen der DVL			Beobachtungen des Reichswetterdienstes		
	Juli 35 bis Juni 36	Juli 36 bis Juni 37	Juli 35 bis Juni 37	Jan. bis Dez. 1935	Jan. bis Dez. 1936	Jan. 35 bis Dez. 36
ruhig	3,2	0,6	1,9	69,5	72,8	71,1
b_0	48,0	57,7	52,9	6,5	5,4	6,0
b_1	38,9	35,8	37,3	16,1	15,1	15,6
b_2	8,9	5,6	7,3	7,4	6,2	6,8
b_3	1,0	0,3	0,6	0,5	0,5	0,5

Beide Beobachtungen stimmen darin überein, daß der weitaus größte Anteil zusammen von den beiden untersten Böigkeitsgraden »ruhig« und b_0 gestellt wird. Innerhalb der beiden untersten Grade zeigt sich jedoch ein großer Unterschied der Böigkeitsbewertung, der dadurch zu erklären ist, daß eine scharfe Unterscheidung von »ruhig« und b_0 in vielen Fällen aus subjektiven Gründen nicht möglich ist.

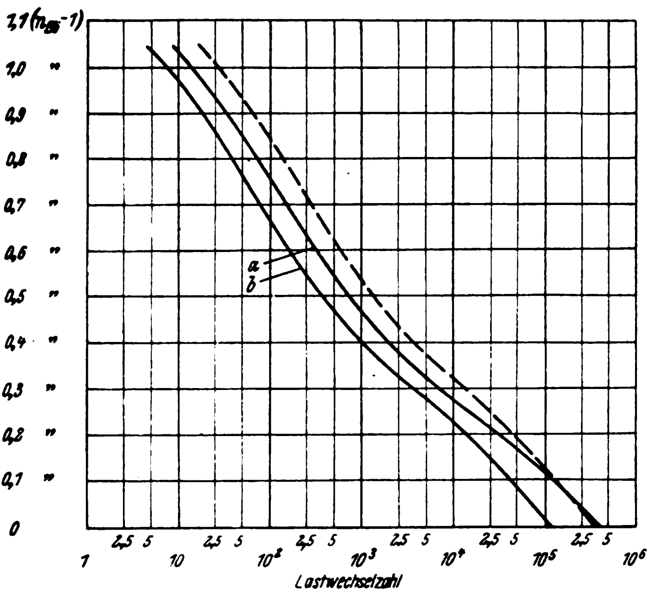


Bild 5. Summenkurven der Böenbeanspruchung für 100 Flugstunden und $v_R = 350$ km/h.

—— nach Abschnitt III mit Wetterbeobachtungen a) der DVL, b) des Reichsamts für Wetterdienst,

– – – nach Böenstatistik der DVL mit $\nu/2 = 1\ s^{-1}$

Wie in II, 2 ausgeführt wurde, ist in der Böenstatistik der Anteil der verschiedenen Böigkeitsgrade im Jahresmittel lediglich in der mittleren Böenfrequenz berücksichtigt, die jedoch nur wenig vom Böigkeitsgrad abhängt, Bild 3. Danach ist die Lastwechselzahl und damit bei gegebener Einheitsverteilung die Böenbeanspruchung innerhalb einer gewissen Betriebszeit praktisch unabhängig vom Zustand der Atmosphäre — eine offensichtlich unrichtige Folgerung. In der Statistik nicht beachtet und wesentlich ist nun, daß die Häufigkeitsverteilung maßgeblich von dem Böigkeitsgrad beeinflußt wird. Ein bei geringerer Böigkeit gemessenes Verteilungspolygon weist eine Zunahme der kleinen und eine Abnahme der großen Beanspruchungen auf. Es stellt nun offenbar eine für die Beurteilung der Zeitfestigkeit ungünstige Kombination dar, wenn man der nur für stärkere Böigkeitsgrade aufgestellten »Einheitsverteilung« eine Lastwechselzahl zuordnet, die auch die geringsten, bei schwacher Böigkeit auftretenden Beanspruchungen einschließt. Durch eine solche Kombination wird der Häufigkeitsanteil der größeren Beanspruchungen erheblich zu hoch gegriffen.

Im folgenden wird der Versuch gemacht, an Hand der veröffentlichten Unterlagen einen zahlenmäßigen Überblick über die Änderung zu geben, die die Beanspruchung bei Annahme einer vom Böigkeitsgrad abhängigen Häufigkeitsverteilung erfährt. Zugrunde gelegt wird zunächst die »Einheitsverteilung« bzw. die Summenkurve nach Bild 2, die jedoch nur noch für die Böigkeitsgrade b_1 bis b_3 Gültigkeit haben soll. Mit den oben angegebenen Wetterbeobachtungen wird dann im Jahresmittel unter Benutzung der für die He 70 bei den Böigkeiten b_1 bis b_3 gemessenen Böenfrequenzen, Bild 3, die Lastwechselzahl für $v_R = 350$ km/h: $\frac{\nu}{2} = 0{,}53$ nach den Wetterbeobachtungen der DVL und $\frac{\nu}{2} = 0{,}274$ nach denen des Reichsamts für Wetterdienst.

Für den Böigkeitsgrad b_0 wird ein besonderes Verteilungspolygon vorgeschlagen. In der Veröffentlichung von Kaul ist für b_0 nur ein einziges auf der He 45 erflogenes Polygon mitgeteilt, das für eine endgültige zahlenmäßige Schlußfolgerung selbstverständlich nicht ausreicht. Immerhin gibt die Häufigkeitsverteilung, Bild 4, den grundsätzlichen Verlauf sicherlich richtig wieder. Man beachte, daß bei dieser schwachen Böigkeit oberhalb des Bereiches, der sich von 0,230 ($n_{Bö} - 1$) bis 0,345 ($n_{Bö} - 1$) erstreckt, keine Beanspruchungen mehr festgestellt worden sind.

Die zugehörige mittlere Böenfrequenz (Jahresmittel) ergibt sich mit den ungünstigen Werten der He 70 für $v_R = 350$ km/h zu $\frac{\nu}{2} = 0{,}557\ \mathrm{s}^{-1}$ nach den Wetterbeobachtungen der DVL und zu $\frac{\nu}{2} = 0{,}064\ \mathrm{s}^{-1}$ nach denen des Reichsamts für Wetterdienst. Die Begründung dieses großen Unterschiedes in der Wetterbeobachtung wurde bereits oben gegeben. In dem großen bei der DVL beobachteten Anteil des Böigkeitsgrades b_0 sind sicherlich auch solche Zustände der Atmosphäre enthalten, die noch geringere Beanspruchungen verursachen, als nach Bild 4 gemessen worden sind.

Rechnet man mit diesen Lastwechselzahlen die Summenkurven von Bild 2 und 4 auf 100 Flugstunden um und addiert die Abszissen (Lastwechselzahlen) beider Kurven, so erhält man die in Bild 5 dargestellten (ausgezogenen) Summenkurven. Zum Vergleich ist noch diejenige Summenkurve der Böenstatistik, die sich nach der »Einheitsverteilung«, Bild 2, und mit $\frac{\nu}{2} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ ergibt, gestrichelt angegeben. Bei Zugrundelegung der ungünstigeren Wetterbeobachtungen der DVL erreicht die Lastwechselzahl gegenüber der bisherigen Statistik oberhalb der Laststufe 0,2 ($n_{Bö} - 1$) im groben Mittel nur den halben Wert, mit den Daten des Reichsamts für Wetterdienst im ganzen Bereich nur etwa den 0,3fachen Wert. Da nach den Beobachtungen des Reichsamts für Wetterdienst der Anteil der »ruhigen« Tage sehr groß, eine scharfe Trennung zwischen den Böigkeitsgraden »ruhig« und b_0 jedoch nicht möglich ist, bleibt allerdings in dieser Summenkurve eine Anzahl sehr geringer Beanspruchungen unberücksichtigt. Diese Vernachlässigung ist so weit erlaubt, als die sehr geringen Wechsellasten keinen Einfluß auf die Zeitfestigkeit mehr haben. Selbstverständlich können die beiden in diesem Abschnitt abgeleiteten Summenkurven, da nur wenige Meßergebnisse benutzt werden konnten, zahlenmäßig nicht als endgültig angesehen werden; sie zeigen aber dennoch die grundsätzliche Änderung, die eine Auswertung der Meßergebnisse nach vorstehenden Gedankengängen bringen würde.

In den bisherigen Untersuchungen wurden der Bestimmung der mittleren Böenfrequenz zur Gewinnung einer oberen Grenze die Meßergebnisse der böenempfindlichen He 70 zugrunde gelegt, Bild 3. Bei der Bestimmung der Lastwechselzahl sind demnach auch solche sehr geringen Böenbeanspruchungen mitgezählt worden, die auf einem weniger böenempfindlichen Muster gar nicht mehr registriert werden. Zu beachten ist nun, daß eine größere Böenempfindlichkeit die Lastwechselzahl naturgemäß nur in den kleinsten Laststufen vergrößert, die für die Zeitfestigkeit geringere Bedeutung haben. Will man also eine zu ungünstige Beurteilung der Zeitfestigkeit vermeiden, so darf die große Lastwechselzahl eines böenempfindlichen Flugzeugmusters nur einer solchen Häufigkeitsverteilung zugeordnet werden, in der die größere Böenempfindlichkeit durch Verlagerung der Häufigkeiten nach den kleineren Laststufen hin berücksichtigt ist. Es ist zu erwarten, daß bei Anpassung der Häufigkeitsverteilung an die Böenempfindlichkeit die Änderung der Summenkurve ebenso bedeutend wird, wie sie sich nach Bild 5 infolge der Anpassung an die Böigkeitsgrade der Atmosphäre ergeben hat.

Gegenüber der Böenstatistik, die hinsichtlich der »Einheitsverteilung« und der Lastwechselzahl weitaus auf der sicheren Seite liegt, zeigen die Meßergebnisse, die im planmäßigen Flugbetrieb der Deutschen Lufthansa gewonnen worden sind, naturgemäß eine erheblich geringere Beanspruchung. In Bild 6 sind die auf 100 Betriebsstunden und die Reisegeschwindigkeit $v_R = 350$ km/h umgerechneten Summenkurven aus den bisher ausgewerteten Versuchsreihen aufgetragen (nach Jahrbuch 1938 der Luftfahrtforschung, Ergänzungsband S. 310; die neueren Messungen an Fw 200 wurden kürzlich von der DVL zur Verfügung gestellt). Außer der Summenkurve der Böenstatistik, vgl. Bild 5, ist zum Vergleich noch die von Kaul für Flugzeuge

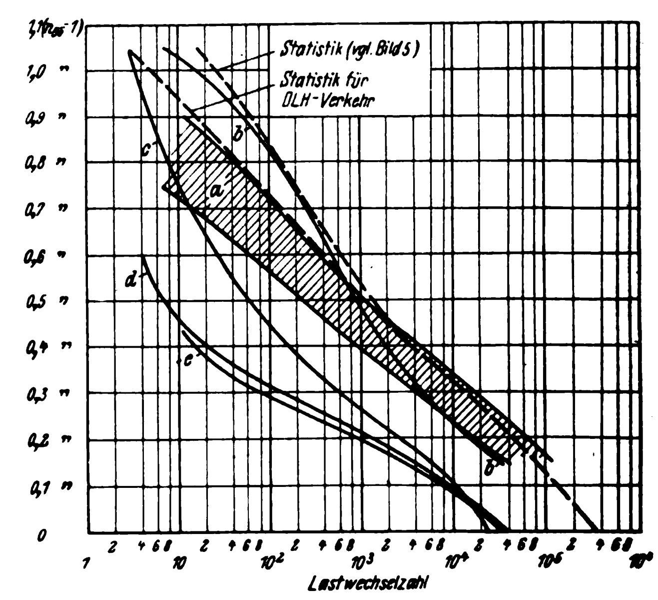


Bild 6. Summenkurven aus Messungen der DVL im Verkehr der Deutschen Lufthansa für 100 Flugstunden und $v_R = 350$ km/h.
a) Streubereich von 4 Meßreihen (85, 125, 205, 250 h) F 24 und G 24
b) He 70 (32 h),
c) Ha 139 (92 h),
d) FW 200 (250 h),
e) FW 200 (140 h), Teilergebnis von d).

des DLH-Verkehrs vorgeschlagene Summenkurve angegeben, die bei (praktisch) gleicher Lastwechselzahl ein »weicheres« Verteilungsgesetz befolgt. Abgesehen von den Messungen an der He 70, bei denen wegen der vergleichsweise kurzen Meßzeit Zufälligkeiten eine größere Rolle spielen können, liegen die Beanspruchungen in den übrigen Meßreihen erheblich unter der Statistik. Bei den Beanspruchungsmessungen an der Fw 200 (250 h) beträgt der Unterschied oberhalb der Laststufe 0,2 ($n_{Bö} - 1$) sogar zwei Größenordnungen.

In dieser Differenz kommen die oben besprochenen, in der Statistik nicht beachteten Einflüsse des Böigkeitsgrades und der Böenempfindlichkeit auf die Häufigkeitsverteilung und die Lastwechselzahl zum Ausdruck. Eine Auswertung der Meßergebnisse im Sinne der oben dargelegten Vorschläge — wobei gegebenenfalls noch einige ergänzende Messungen notwendig werden — ermöglicht, unter den stark divergierenden Meßreihen des DLH-Verkehrs einen zahlenmäßigen Zusammenhang von allgemeinerer Bedeutung herzustellen.

IV. Zusammenfassung.

Nach einer kurzen Darstellung der durch systematische Flugmessungen der DVL aufgestellten Böenstatistik werden deren Ergebnisse kritisch betrachtet. Zeitfestigkeitsversuche, die aus dieser Statistik abgeleitet werden, ergeben für die untersuchten Tragwerkbauteile im Vergleich zur Wirklichkeit zu ungünstige Beanspruchungen. Die Häufigkeitsverteilung der Böenstatistik, die »Einheitsverteilung«, Bild 2, bei deren Aufstellung die stärkeren Böigkeitsgrade der Atmosphäre bevorzugt worden sind, darf nicht mit einer Lastwechselzahl kombiniert werden, die auch die bei schwächster Böigkeit auftretenden geringen Beanspruchungen einschließt. Durch diese Kombination fällt der Anteil der größeren Laststufen wesentlich zu groß aus. — An Stelle der Einheitsverteilung wird eine andere Häufigkeitsverteilung vorgeschlagen, die sich aus einem für stärkere Böigkeitsgrade und einem für schwächere Böigkeitsgrade gültigen Anteil zusammensetzt. Das Ergebnis eines Zahlenbeispiels, Bild 5, zeigt eine bedeutende Verringerung der Lastwechselzahl gegenüber der bisherigen Statistik. (Wegen des Fehlens der erforderlichen Unterlagen kommt allerdings dem Zahlenbeispiel mehr grundsätzliche als exakte ziffernmäßige Bedeutung zu.) — Eine weitere günstigere Beurteilung der Tragwerkfestigkeit kommt zustande, wenn man beachtet, daß bei wachsender Böenempfindlichkeit eines Flugzeuges mit der Erhöhung der Lastwechselzahl eine günstigere Häufigkeitsverteilung verbunden ist, da die bei wachsender Böenempfindlichkeit zusätzlich registrierten Böen nur in das Gebiet der kleinen Laststufen fallen.

Tafel einiger Knickbiegefälle.

Von J. Cassens.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Zum besseren Verständnis der Tafeln für die Berechnung von Knickbiegung werden zunächst die Methoden besprochen, nach denen die Fälle berechnet sind. Erwähnt wird die Bedeutung des Knickmoduls bei der Knickbiegung. Im Anschluß daran folgen die Tafeln, aus denen man für Knickbiege-Aufgaben die Werte für Momente, Durchbiegungen, Endtangenten usw. entnehmen kann.

Gliederung.

I. Erläuterung zu den Methoden.

Die Bauweisen im Flugzeugbau unterscheiden sich von den Bauweisen in anderen Anwendungsgebieten der Technik durch die Wahl schlanker Träger. Da der Flugzeugbau erst entwickelt wurde zu einer Zeit, wo z. B. die Bautechnik bereits zu gewissen Standardformen gekommen war, ist es nicht verwunderlich, daß die statische Berechnung im Flugzeugbau gerade von dieser Seite entscheidend beeinflußt wurde. Es ist aber auffällig, daß z. B. Müller-Breslau die Knickbiege-Untersuchungen in seinem Werk »Graphische Statik der Baukonstruktionen« an seine Beschäftigung mit dem Flugzeugbau anschließt. Die schlanken Holme verspannter Tragdecks, die schlanken Stäbe der Stahlrohrrümpfe und der Rippen gestatten nicht mehr, die Stäbe in grob genäherter Rechnung 1. auf Biegung und 2. auf Knikkung zu rechnen, sondern man mußte die Untersuchung dem tatsächlichen Lastzustand entsprechend ansetzen, nämlich als gleichzeitig wirkende Knickung und Biegung, eben als Knickbiegung. Welche Bedeutung seinerzeit die Untersuchung der Knickbiegung hatte, geht aus der Durchsicht älterer Jahrgänge der Zeitschrift für Flugtechnik und Motor-Luftschiffahrt (ZFM) hervor. Beispielsweise wurden im Jahre 1918/19 diese Fragen von Gümbel, Pröll, Trefftz, Müller-Breslau, Reißner, Ratzersdorfer, Arnstein, Koenig usw. behandelt. Die Autoren beschäftigen sich aber eigentlich nur mit der Aufgabe, die in dieser Zusammenstellung unter Nr. 4 aufgeführt ist bzw. mit entsprechenden Anwendungen.

Der moderne Flugzeugbau wendet sich in seinen Hauptträgern allerdings wieder mehr gedrungenen Systemen zu. Doch auch hierbei gibt es Knickbiege-Aufgaben zu lösen. Daher lohnt es sich noch heute, eine Tafel von Knickbiegefällen zusammenzustellen. Dabei sind die Formen, für die Knickbiegung zu rechnen ist, viel reichhaltiger.

Die Knickbiegung und ihr Gegenteil, die Zugbiegung, behandelt den Fall, daß an einem Stab gleichzeitig Längs- und Querkräfte wirken. Aus der Hütte und anderen Taschenbüchern sind Tafeln bekannt, in denen für biegende Kräfte am geraden Stab mit konstanter Biegesteifigkeit Querkräfte, Momente, Durchbiegungen und verschiedenes anderes geordnet sind. Zu diesen dort wirkenden Kräften tritt noch der Einfluß des Momentes $P \cdot y$ hinzu, wobei P die Längskraft und y die Durchbiegung an irgendeiner Stelle bedeutet.

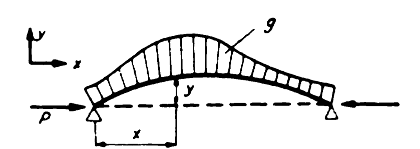


Bild 1. Träger auf 2 Stützen, belastet durch die Längskraft P und durch die querwirkenden Kräfte g.

Bekanntlich lautet die Beziehung zwischen Krümmungsradius ϱ und biegenden Kräften folgendermaßen:

$$+\frac{1}{\varrho} = \sim \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{M_x}{E J},$$

wenn M_x das von der Trägerordinate x abhängige Moment aller biegenden Kräfte darstellt, $E \cdot J$ die Biegesteifigkeit und y die Durchbiegung der neutralen Achse bedeutet. Bild 1. Das Moment M_x sei zerlegt in einen Anteil, der nur von den Querlasten herrührt ($\mathfrak{M}_x$) und einen Anteil, der nur von den Längskräften P beeinflußt wird, so daß sich ergibt $M_x = \mathfrak{M}_x + P \cdot y$. Durch Einsetzen in die vorhergehende Beziehung erhält man damit:

$$k^2 \cdot y'' + y = -\frac{\mathfrak{M}_x}{P} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

mit $k^2 = \frac{E \cdot J}{P}$ [1]). Die Lösung der Differentialgleichung geschieht am einfachsten durch folgenden Ansatz: Für die homogene Differentialgleichung setzt man $y = C \cdot e^{a \cdot x}$; die Werte C sind später zu bestimmende Koeffizienten, die die Randbedingungen der Aufgabe erfüllen müssen, während a die Verbindung zwischen dem Ansatz und der Ausgangsgleichung (1) herstellt. Zur Bestimmung der vollständigen Differentialgleichung macht man entweder Potenzansätze, deren Koeffizienten man durch Vergleich bestimmt oder aber man macht andere Ansätze, z. B. trigonometrische, je nach dem Charakter der rechten Seite von (1). Auf diese Weise sind die meisten in der Tafel genannten Aufgaben gelöst. Man sieht aus der rechten Seite der Gl. (1), daß das Superpositionsgesetz gilt für alle Lasten, die quer zur neutralen Achse wirken. Dabei ist jeder Lastzustand so zu berechnen, daß dabei die Längskraft P wirkt.

In geschickter Weise kann das Superpositionsgesetz Anwendung finden bei der Berechnung eines Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit und Längskraft, wobei der Träger von mehreren, beliebig vielen Einzellasten quer belastet ist. Man braucht dazu nur Ausdrücke für Durchbiegungen und Momente eines Trägers, der von **einer** Einzellast quer belastet ist; wie man es in den Tafeln unter Nr. 13 findet.

Bei einer Einzellast Q_0 ist das Moment und die Durchbiegung links von der Einzellast

$$M_x = Q_0 \cdot k \cdot \frac{\sin \eta}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi;$$

$$y = \frac{Q_0}{P}\left(k \frac{\sin \eta}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi - \frac{d}{l} \cdot x\right)$$

[1]) Die Untersuchungen gelten für konstante Biegesteifigkeit $E \cdot J$ und konstante Längskraft P.

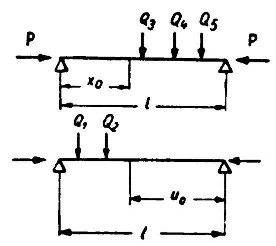


Bild 2. Durch die Längskraft P und die Einzellasten Q_1 : Q_5 belasteter Träger auf 2 Stützen.

und rechts von der Einzellast

$$M_u = Q_0 \cdot k \cdot \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha} \cdot \sin \psi;$$

$$v = \frac{Q_0}{P}\left(k \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha} \cdot \sin \psi - \frac{b}{l} \cdot u\right).$$

Ist also ein Träger außer durch die Längskraft P noch durch Q_3, Q_4 und Q_5 quer belastet, Bild 2, so ist das Moment an der Stelle $x_0\left(\varphi_0 = \frac{x_0}{k}\right)$

$$M_{x_0} = \frac{k \cdot \sin \varphi_0}{\sin \alpha}(Q_3 \cdot \sin \eta_3 + Q_4 \cdot \sin \eta_4 + Q_5 \cdot \sin \eta_5)$$

und die Durchbiegung y_0:

$$y_0 = \frac{k \cdot \sin \varphi_0}{P \cdot \sin \alpha}(Q_3 \cdot \sin \eta_3 + Q_4 \cdot \sin \eta_4 + Q_5 \cdot \sin \eta_5) -$$

$$- \frac{x_0}{P \cdot l}(Q_3 \cdot d_3 + Q_4 \cdot d_4 + Q_5 \cdot d_5).$$

Infolge der Querlasten Q_1 und Q_2 bei der Längskraft P, Bild 2, ist das Moment an der Stelle $u_0 = l - x_0\left(\psi_0 = \frac{u_0}{k}\right)$

$$M_{u_0} = \frac{k \cdot \sin \psi_0}{\sin \alpha}(Q_1 \cdot \sin \zeta_1 + Q_2 \cdot \sin \zeta_2)$$

und die Durchbiegung v_0

$$v_0 = \frac{k \cdot \sin \psi_0}{P \cdot \sin \alpha}(Q_1 \cdot \sin \zeta_1 + Q_2 \cdot \sin \zeta_2) - \frac{u_0}{P \cdot l}(Q_1 \cdot b_1 + Q_2 \cdot b_2).$$

Wenn jetzt gleichzeitig Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 wirken, so ist das Moment in $x_0 = l - u_0$

$$M_{x_0}, u_0 = M_{x_0} + M_{u_0}$$

und die Durchbiegung δ an dieser Stelle $x_0 = l - u_0$ ist:

$$\delta = y_0 + v_0.$$

Diese Aufgabe ist natürlich wesentlich schwieriger, wenn an den Stellen, an denen die Querkräfte angreifen, auch noch Längskräfte eingeleitet werden. Hier kommt man am besten weiter mit der Anwendung einer erweiterten Clapeyronschen Gleichung, wie sie Müller-Breslau in seiner graphischen Statik II, 2, S. 643uff. (Verlag Kröner 1925), anführt. Beispiele für solche Aufgaben findet man in der Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1920 S. 283uff. »Zur Berechnung der Tragflächenholme« von H. Müller-Breslau.

Eine zweite Methode zur Berechnung von Knickbiegung sei hier deswegen vermerkt, weil die Endergebnisse in wesentlich anderer Form erscheinen. Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen kommen nicht vor, statt dessen erscheint ein Quotient, der den Einfluß der Längskraft P im Nenner ausdrückt, z. B. berechnet Bleich das Mittenmoment bei einem Träger, der wie im Fall Nr. 3 belastet ist, nach der Formel

$$M_{\max} = \frac{g \cdot l^2}{8}\left(1 + \frac{1{,}032}{P_E/P - 1}\right) = \frac{g \cdot l^2}{8} \cdot \frac{P_E/P + 0{,}032}{P_E/P - 1}.$$

Von Vorteil ist die Methode aber nur bei symmetrischen Lastfällen. Man findet die Methode dargestellt in Fr. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, Springer, Berlin 1924.

Eine dritte Methode Knickbiegungen zu berechnen, geht davon aus, den Ausdruck der »passiven Arbeit«[2] zur Anwendung zu bringen. Der Gedanke erscheint zunächst bestechend, weil dabei die Arbeit der Längskräfte $\times$ der Durchbiegung in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Die Durchführung dieser Methoden bereitet aber auch eine ganze Reihe von Schwierigkeiten.

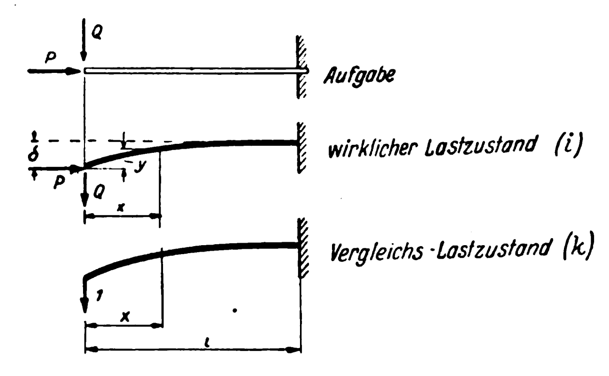


Bild 3. Eingespannter Träger belastet durch die Längskraft P und die Querkraft Q.

Nach dem genannten Prinzip berechnet sich die Durchbiegung eines Trägers aus der Beziehung

$$1 \cdot \delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{E J} dx.$$

Wir erläutern das Verfahren am besten an dem in Bild 3 dargestellten Beispiel.

Man berechnet die Arbeit, die im Träger geleistet wird, wenn auf dem durch die Last 1 durchgebogenen Träger noch die tatsächliche Last Q und P aufgebracht wird. Man erhält den Ausdruck:

$$1 \cdot \delta = \int_0^l \frac{(Q \cdot x + P \cdot y) \cdot (1 \cdot x)}{E J} \cdot dx$$

oder

$$\delta = \int_0^l \frac{(Q \cdot x)(x)}{E J} dx + \int_0^l \frac{(P \cdot y)(x)}{E J} dx.$$

Das erste Integral ist dasselbe, das sich bei Berechnung der Trägerdurchbiegung bei der Querlast Q ergibt; es sei δ_0 genannt. Das zweite Integral ist eine Funktion der gesuchten Durchbiegung δ.

Damit kann man die Beziehung umformen

$$\delta \cdot \left(1 - \int_0^l \frac{P \cdot \frac{y}{\delta} \cdot x}{E J} dx\right) = \delta_0 \quad . . . . . (2)$$

Der Ausdruck

$$\int_0^l \frac{P \frac{y}{\delta} \cdot x}{E J} \cdot dx$$

kann durch Probieren gefunden werden. Man macht für y einen Ansatz, also z. B.

$$\frac{y}{\delta} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l}\right).$$

Dieser Ansatz erfüllt u. a. die Randbedingungen für die Durchbiegung bei $x = 0$ und $x = l$ sowie für die Tangente bei $x = l$.

Bei konstantem P und $E \cdot J$ erhält man

$$\frac{P}{E J}\int_0^l x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right) \cdot dx = \frac{P}{E J} \frac{4 l^2}{\pi^2} = 4 \cdot \frac{P}{P_E}; \quad P_E = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}.$$

Man sieht hier ohne weitere Proben des für y gemachten Ansatzes, daß das Ergebnis eine sehr gute Näherung darstellt. Es ergibt sich daher:

$$\delta\left(1 - 4 \frac{P}{P_E}\right) = \delta_0; \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - 4 \frac{P}{P_E}}.$$

[2]) Auch Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit genannt (siehe z. B. Föppl, Drang und Zwang, Verlag Oldenbourg, München 1924 Bd. 1, Seite 61).

Bei sehr kleinen δ_0-Werten bekommt man auch dann noch eine nennenswerte Durchbiegung δ, wenn der Nennerausdruck ebenfalls sehr klein wird. Wird der Nenner gleich Null, so hat man einen Ausdruck für die Stabilitätsbedingung dieser Aufgabe, die im übrigen ja allgemein bekannt ist. Es ergibt sich

$$P_k = \frac{P_E}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{E J \pi^2}{l^2}.$$

Zugbiegung läßt sich nach diesem Verfahren ebenfalls sehr einfach rechnen. Der Ausdruck (2) lautet für den Fall, daß P eine Zugkraft ist,

$$\delta\left(1 + \int_0^l \frac{P \frac{y}{\delta} \cdot x}{E J} d x\right) = \delta_0 \quad . . . . . \quad (2a)$$

Ob ein Knickbiegefall nach diesem Verfahren einfach oder schwierig zu berechnen ist, hängt ganz davon ab, ob man beim Ansatz für das $\frac{y}{\delta}$ Glück hat oder nicht. Man kann dabei die Fourier-Analyse benutzen, indem man den Ausdruck für die Durchbiegung ohne den Einfluß von Längskräften nach Fourier analysiert.

Wenn man nach dieser Methode das Mittenmoment bei einem Träger berechnet, der wie im Fall Nr. 3 belastet ist, so erhält man zunächst für die Durchbiegung in der Mitte

$$\delta_m = \frac{5}{384} \frac{g l^4}{E J} \frac{P_E/P}{P_E/P - 1}$$

und für das Mittenmoment

$$M_{max} = \frac{g l^2}{8} \frac{P_E/P + 0{,}0281}{P_E/P - 1}$$

ein Ergebnis, das mit dem nach der Bleichschen Methode gut übereinstimmt.

II. Der Knickmodul bei der Knickbiegung.

Es kommt hier und da vor, daß verhältnismäßig kurze Stäbe auf Knickbiegung zu berechnen sind, bei denen das $\sigma = \frac{P}{F}$ höher liegt als der Knickpunkt zwischen Tetmayer-Geraden und Euler-Hyperbel im $\sigma_k = f(\lambda)$-Diagramm. Für solche Fälle hat es sich als praktisch erwiesen, in den Knickbiegeformeln den E-Modul durch den Knickmodul zu ersetzen[3]). Für den Grenzfall sehr kleiner Querlasten ist das Verfahren einwandfrei. Würde man nämlich in solchem Falle den E-Modul in der Knickbiegerechnung einsetzen, so würde man nach der Euler-Hyperbel eine viel zu große Sicherheit gegenüber der Knicklast errechnen. Aus reinen Knickversuchen ist aber bekannt, daß der Stab ja nur eine Last nach der Tetmayer-Geraden aufnehmen kann.

Bei verhältnismäßig geringen Längsspannungen $\frac{P}{F}$ kann man immer den E-Modul einsetzen, auch wenn dabei gewisse Teile des Querschnittes, infolge Biege- und Längsspannung zusammen, Werte erreichen, die im Tetmayerbereich liegen. In solchen Fällen tritt ein umgekehrter Effekt ein wie bei der reinen Knickung gedrungener Stäbe. nämlich es kommt eine Erscheinung zur Auswirkung, die man den Biegefaktor genannt hat. Der Biegefaktor berücksichtigt die Erfahrung mit Biegeversuchen, bei denen man feststellte, daß das gemessene M_{Br} größer war, als wenn man es errechnet nach dem Ausdruck $\sigma_B \cdot W$, wobei σ_B die Werkstoffestigkeit aus Zugversuchen bedeutet.

[3]) Siehe die Arbeit des Verfassers: Knick-Biege-Versuche. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 10, S. 306/313.

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P \cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ($P k^2$ facher Wert)	Momente $\begin{cases} M_x \\ M_x = -E \cdot J \frac{d^2 y}{dx^2} \\ \text{Besondere Momente} \end{cases}$	Die Konstanten A und B Stab knickt aus bei:
1	$\varphi = \frac{x}{k}$; $\alpha = \frac{l}{k}$; $k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$	**Druckbiegung** $P \cdot y = B \cdot \sin\varphi - M_0 \frac{x}{l}$ $P k y' = B \cos\varphi - M_0 \frac{k}{l}$ $P k^2 \cdot y'' = -B \cdot \sin\varphi$ $y'_l = \frac{M_0}{P \cdot l}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right)$ $y'_r = -\frac{M_0}{P \cdot l}\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)$ **Zugbiegung** $P \cdot y = B \cdot \mathfrak{Sin}\,\varphi + M_0 \frac{x}{l}$ $P \cdot k y' = B \cdot \mathfrak{Cof}\,\varphi + M_0 \frac{k}{l}$ $P k^2 y'' = + B \cdot \mathfrak{Sin}\,\varphi$ $y'_l = + \frac{M_0}{P \cdot l}\left(1 - \frac{\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}\right)$ $y'_r = - \frac{M_0}{P \cdot l}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{Tg}\,\alpha} - 1\right)$	**Druckbiegung** $M_x = M_0 \cdot \frac{x}{l} + P \cdot y$ $M_x = B \cdot \sin\varphi = \frac{M_0}{\sin\alpha} \cdot \sin\varphi$ $M_{\max} = \frac{M_0}{\sin\alpha}$ (wenn $\alpha > 90^0$ ist) An der Stelle $x_0 = k \cdot \frac{\pi}{2}$ **Zugbiegung** P = Zug $M_x = M_0 \frac{x}{l} - P \cdot y$ $M_x = -B \cdot \mathfrak{Sin}\,\varphi = + \frac{M_0}{\mathfrak{Sin}\,\alpha} \cdot \mathfrak{Sin}\,\varphi$	**Druck** $B = \frac{M_0}{\sin\alpha}$ **Zug** $B = -\frac{M_0}{\mathfrak{Sin}\,\alpha}$ $\alpha = 180^0$
2		$P \cdot y = B \cdot \sin\varphi - Q \cdot x$ $P \cdot k y' = B \cdot \cos\varphi - Q \cdot k$ $P k^2 y'' = -B \sin\varphi$	$M_x = Q \cdot x + P \cdot y$ $M_x = B \cdot \sin\varphi = \frac{Q \cdot k}{\cos\alpha} \cdot \sin\varphi$ $M_{\max} = M_E = Q \cdot k \cdot \operatorname{tg}\alpha$	$B = \frac{Q\ k}{\cos\alpha}$ $\alpha = 90^0$
3		$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2}(l\,x - x^2) - g\,k^2$ $P k y' = -A \sin\varphi + B \cos\varphi - \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x)$ $P k^2 y'' = -A \cos\varphi - B \sin\varphi + g\,k^2$	$M_x = \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) + P \cdot y$ $M_x = A \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - g\,k^2$ $M_{\max} = g\,k^2\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$ in der Mitte	$A = + g\,k^2$ $B = + g\,k^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 180^0$
4		$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \sin\varphi$ $- \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) - M_1 - (M_2 - M_1)\frac{x}{l} - g\,k^2$ $P k y' = -A \sin\varphi + B \cos\varphi$ $- \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x) - (M_2 - M_1)\frac{k}{l}$ $P k^2 y'' = -A \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + g\,k^2$	$M_x = \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) + M_1 + (M_2 - M_1)\frac{x}{l} + P \cdot y$ $M_x = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - g\,k^2$ $M_{\max}$ bei $\operatorname{tang}\frac{x}{k} = \frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi_0$ an der Stelle $x_0 = k \cdot \varphi_0$ $M_{\max} = \frac{A}{\cos\varphi_0} - g\,k^2 = g\,k^2\left(\frac{1}{\cos\varphi_0} - 1\right) + \frac{M_1}{\cos\varphi_0}$	$A = + g\,k^2 + M_1$ $B = \frac{g\,k^2 + M_2}{\sin\alpha} - \frac{g\,k^2 + M_1}{\operatorname{tg}\alpha}$; oder $B = \frac{M_2 - M_1 \cos\alpha}{\sin\alpha} + g\,k^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 180^0$
5	Gesucht: M_E	$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi$ $- \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) + M_E\left(1 - \frac{x}{l}\right) - g\,k^2$ $P \cdot k \cdot y' = -A \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi - \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x) - M_E \cdot \frac{k}{l}$ $P k^2 y'' = -A \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + g\,k^2$	$M_x = \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) - M_E\left(1 - \frac{x}{l}\right) + P \cdot y$ $M_{\max}$ bei $\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \frac{B}{A} = \operatorname{tang}\varphi_0$ an der Stelle $x_0 = k \cdot \varphi_0$ $M_x = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - g\,k^2$ $M_E\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = g\,l^2\left(\frac{1 - \cos\alpha}{\alpha \cdot \sin\alpha} - \frac{1}{2}\right)$ $M_{\max} = \frac{A}{\cos\varphi_0} - g\,k^2 = g\,k^2\left(\frac{1}{\cos\varphi_0} - 1\right) - \frac{M_E}{\cos\varphi_0}$	$A = + g\,k^2 - M_E$ $B = + g\,k^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{M_E}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\alpha = 257^0\ 30'$

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P\cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ (Pk^2 facher Wert)	Momente $\begin{cases} M_x \\ M_x = -E\cdot J\,\frac{d^2\cdot y}{dx^2} \\ \text{Besondere Momente}\end{cases}$	Die Konstanten A und B Stab knickt aus bei:
6	M_E, g, P, x, l Gesucht: M_E	$P\cdot y = A\cdot\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi - \frac{g}{2}(l\cdot x - x^2) + M_E - g k^2$ $P k y' = -A\sin\varphi + B\cos\varphi - \frac{g k}{2}(l - 2x)$ $P\cdot k^2 y'' = -A\cos\varphi - B\cdot\sin\varphi + g k^2$	$M_x = \frac{g}{2}(l\cdot x - x^2) - M_E + P\cdot y$. In der Mitte: $M_x = A\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi - g k^2$ $\quad M_M = g k^2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$ $M_E = g k^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) = g k^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$ oder $M_E\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = g l^2\cdot\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha\cdot\sin\alpha} - \frac{1}{2}\right)$	$A = +g k^2 - M_E$ $B = (g k^2 - M_E)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 360^0$
7	M_1, M_2, P, x, l_1, l, l_3 Längskraft nur im Feld l. Gesucht M_1 und M_2 $y'_{x=0} = y'_1$; $y'_{x=l} = y'_2$ Im Feld l_1: J_1; $E.J_1 = B_1$ Im Feld l_3: J_3; $E.J_3 = B_3$ Im mittleren Feld: $K = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$; $\varphi = \frac{x}{K}$; $\alpha = \frac{l}{K}$	$P\cdot y = A\cdot\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi$ $\quad - \frac{g}{2}(l\cdot x - x^2) + M_1 + (M_2 - M_1)\frac{x}{l} - g k^2$ $P\cdot k y' = -A\sin\varphi + B\cdot\cos\varphi$ $\quad - \frac{g k}{2}(l - 2x) + (M_2 - M_1)\cdot\frac{k}{l}$ $P k^2\cdot y'' = -A\cos\varphi - B\cdot\sin\varphi + g k^2$	$M_x = \frac{g}{2}(l\cdot x - x^2) - M_1 - (M_2 - M_1)\frac{x}{l} + P\cdot y$ $M_x = A\cdot\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi - g k^2$ Aus $P\cdot k y_1'$ und $P\cdot k y_2'$ ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für M_1 und M_2 $M_1\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + M_2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = g l^2\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) - y_1'\cdot P\cdot l$ $M_1\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) + M_2\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = g l^2\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) - y_2'\cdot P\cdot l$ Hier ist $y_1' = \frac{M_1\cdot l_1}{3 B_1}$; $y_2' = \frac{M_2\cdot l_3}{3 B_3}$ $M_1\left[P\cdot l\cdot\frac{l_1}{3B_1} + 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right] + M_2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = g l^2\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$ (1) $M_1\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) + M_2\cdot\left[P\cdot l\frac{l_3}{3B_3} + 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right] = g l^2\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$ (2)	$A = +g k^2 - M_1$ $B = +g k^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{M_2 - M_1\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $N_D = 0$ N_D = Nennerdeterminante
8	Schwach gekrümmter Stab P, f, x, l Gleichung der Krümmung für $P = 0$: $u = f\cdot\sin\pi\cdot\frac{x}{l}$ P_E = Eulerlast = $E J\frac{\pi^2}{l^2}$; $\alpha = \frac{l}{k}$	$P\cdot y = \frac{P\cdot f}{\frac{P_F}{P} - 1}\cdot\sin\pi\frac{x}{l} + A\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi$ $P k\cdot y' = \frac{P\cdot f}{\frac{P_E}{P} - 1}\cdot\frac{\pi}{\alpha}\cdot\cos\pi\frac{x}{l} - A\sin\varphi + B\cdot\cos\varphi$ $P k^2 y'' = -\frac{P\cdot f}{1 - \frac{P}{P_E}}\cdot\sin\pi\frac{x}{l} - A\cos\varphi - B\cdot\sin\varphi$	$M_x = P\cdot u + P\cdot y$ $M_x = \frac{P\cdot f}{1 - \frac{P}{P_E}}\cdot\sin\pi\frac{x}{l} + A\cdot\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi$ $M_{\max} = \frac{P\cdot f}{1 - \frac{P}{P_E}}$ in der Mitte	$A = 0$; $B = 0$ $\alpha = 180^0$
9	Schwach gekrümmter Stab P, ξ, x, l Gleichung der Krümmung für $P = 0$: $u = \xi\cdot(l\cdot x - x^2)$ mit $\xi = \frac{4f}{l^2}$	$P\cdot y = A\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi - P\cdot\xi(l x - x^2) - 2 P\xi k^2$ $P k y' = -A\cdot\sin\varphi + B\cdot\cos\varphi - P\cdot k\,\xi\,(l - 2x)$ $P k^2 y'' = -A\cdot\cos\varphi - B\cdot\sin\varphi + 2 P k^2\cdot\xi$	$M_x = P\cdot u + P\cdot y$ $M_x = A\cdot\cos\varphi + B\cdot\sin\varphi - 2 P k^2\cdot\xi$ oder: $M_x = 2P\xi\cdot k^2\left(\cos\varphi + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi - 1\right)$ $M_{\max} = 2P\xi k^2\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$ in der Mitte	$A = 2P\xi k^2$ $B = 2P\xi k^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 180^0$

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P \cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ($P k^2$ facher Wert)	Momente M_x $M_x = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$ Besondere Momente	Die Konstanten A und B Stab knickt aus bei:
10	Schwach gekrümmter Stab wie 9 Gleichung der Krümmung für $P=0$; $g=0$ $u=\xi(l \cdot x - x^2)$ mit $\xi = \frac{4f}{l^2}$	$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2}(l\,x - x^2)$ $- P \cdot \xi (l \cdot x - x^2) - k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$ $P\,k\,y' = -A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi$ $- \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x) - P\,\xi \cdot k\,(l - 2\,x)$ $P\,k^2\,y'' = -A \cdot \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$	$M_x = \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) + P \cdot \xi\,(l\,x - x^2) + P \cdot y$ $M_x = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$ $M_{\max} = k^2 (g + 2\,P \cdot \xi) \cdot \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$ in der Mitte	$A = + k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$ $B = k^2 (g + 2\,P\,\xi)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 180^0$
11	Schwach gekrümmter Stab wie 9 Gleichung der Krümmung für $P=0$; $g=0$ $u = \xi \cdot (l \cdot x - x^2)$; $\xi = \frac{4f}{l^2}$ Gesucht: M_E	$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2}(l\,x - x^2)$ $- P \cdot \xi\,(l \cdot x - x^2) + M_E\left(1 - \frac{x}{l}\right) - k^2 (g + 2\,P\,\xi)$ $P \cdot k\,y' = -A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi$ $- \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x) - P\,k\,\xi\,(l - 2\,x) - M_E \frac{k}{l}$ $P\,k^2 \cdot y'' = -A \cdot \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$	$M_x = \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2) + P\,\xi\,(l\,x - x^2) - M_E\left(1 - \frac{x}{l}\right) + P \cdot y$ $M_x = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - k^2 (g + 2\,P\,\xi)$ $M_E \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = (g\,l^2 + 2\,P\,\xi \cdot l^2) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$A = + k^2 (g + 2\,P\,\xi) - M_E$ $B = k^2 (g + 2\,P\,\xi)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{M_E}{\mathrm{tg}\,\alpha}$ $\alpha = 257^0\,30'$
12	Schwach gekrümmter Stab wie 9 Gleichung der Krümmung für $P=0$; $g=0$ $u = \xi\,(l \cdot x - x^2)$; $\xi = \frac{4f}{l^2}$ Gesucht: M_E	$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - \frac{g}{2}(l \cdot x - x^2)$ $- P \cdot \xi\,(l \cdot x - x^2) + M_E - k^2 (g + 2\,P \cdot \xi)$ $P\,k\,y' = -A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi$ $- \frac{g\,k}{2}(l - 2\,x) - P\,k\,\xi\,(l - 2\,x)$ $P\,k^2\,y'' = -A \cdot \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + k^2 (g + 2\,P\,\xi)$	$M_x = \frac{g}{2}(l\,x - x^2) + P\,\xi\,(l\,x - x^2) - M_E + P \cdot y$ $M_x = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - k^2 (g + 2\,P\,\xi)$ $M_E = k^2 (g + 2\,P\,\xi) \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}\right)$ oder $M_E\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = (g\,l^2 + 2\,P\,\xi\,l^2)\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$ In der Mitte: $M_M = k^2 (g + 2\,P\,\xi) \times \left(\frac{\alpha}{2 \sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$	$A = + k^2 (g + 2\,P \cdot \xi) - M_E$ $B = [k^2 (g + 2\,P\,\xi) - M_E] \times \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ $\alpha = 360^0$
13	$\varphi = \frac{x}{k}$; $\psi = \frac{u}{k}$; $\zeta = \frac{b}{k}$; $\eta = \frac{d}{k}$ $\alpha = \zeta + \eta = \frac{l}{k}$; $k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$	$P \cdot y = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi - Q \frac{d}{l} \cdot x - M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M_2 \frac{x}{l}$ $P\,k\,y' = -A_1 \cdot \sin\varphi + B_1 \cdot \cos\varphi - Q \frac{d}{l} \cdot k + M_1 \frac{k}{l} - M_2 \frac{k}{l}$ $P\,k^2\,y'' = -A_1 \cdot \cos\varphi - B_1 \cdot \sin\varphi$ $P \cdot v = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi - Q \frac{b}{l} \cdot u - M_1 \frac{u}{l} - M_2\left(1 - \frac{u}{l}\right)$ $P\,k\,v' = -A_2 \cdot \sin\psi + B_2 \cdot \cos\psi - Q \frac{b}{l} \cdot k - M_1 \frac{k}{l} + M_2 \frac{k}{l}$ $P\,k^2\,v'' = -A_2 \cdot \cos\psi - B_2 \cdot \sin\psi$	$M_x = Q \frac{d}{l} \cdot u + M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_2 \frac{x}{l} + P \cdot y$; $M_u = Q \frac{b}{l}\,u + M_1 \frac{u}{l} + M_2\left(1 - \frac{u}{l}\right) + P \cdot v$ $M_x = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi$; $M_u = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi$ Bei Q ist das Moment: $M_Q = Q \cdot k \frac{\sin\zeta \cdot \sin\eta}{\sin\alpha} + M_1 \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} + M_2 \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha}$ Falls Q in der Mitte und $M_1 = M_2 = M_a$, gilt: $M_Q = Q \cdot k \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + M_a \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$	$A_1 = M_1$; $A_2 = M_2$ $B_1 = Q \cdot k \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - \frac{M_1}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{M_2}{\sin\alpha}$ $B_2 = Q \cdot k \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} + \frac{M_1}{\sin\alpha} - \frac{M_2}{\mathrm{tg}\,\alpha}$ $\alpha = 180^0$

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P \cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2 y}{d x^2}$ ($P k^2$ facher Wert)	Momente $\begin{cases} M_x \\ M_x = -E \cdot J \frac{d^2 \cdot y}{d x^2} \\ \text{Besondere Momente} \end{cases}$	Die Konstanten A und B — Stab knickt aus bei:
14	$\varphi = \frac{x}{k}; \psi = \frac{u}{k}; \zeta = \frac{b}{k}; \eta = \frac{d}{k}$ $\alpha = \zeta + \eta = \frac{l}{k}; k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$ Gesucht: M_1	$P \cdot y = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi \quad Q \frac{d}{l} \cdot x + M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ $P k y' = -A_1 \cdot \sin\varphi + B_1 \cdot \cos\varphi - Q \frac{d}{l} \cdot k - M_1 \frac{k}{l}$ $P k^2 y'' = -A_1 \cdot \cos\varphi - B_1 \cdot \sin\varphi$ $P \cdot v = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi - Q \frac{b}{l} \cdot u + M_1 \frac{u}{l}$ $P k v' = -A_2 \cdot \sin\psi + B_2 \cdot \cos\psi - Q \frac{b}{l} \cdot k + M_1 \frac{k}{l}$ $P k^2 v'' = -A_2 \cdot \cos\psi - B_2 \cdot \sin\psi$	$M_x = Q \frac{d}{l} x - M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + P \cdot y; \quad M_u = Q \frac{b}{l} \cdot u - M_1 \frac{u}{l} + P \cdot v$ $M_x = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi; \quad M_u = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi$ $M_1\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - \frac{d}{l}\right)$	$A_1 = -M_1; \; A_2 = 0$ $B_1 = Q \cdot k \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} + \frac{M_1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $B_2 = Q \cdot k \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{M_1}{\sin\alpha}$ $\alpha = 257^\circ 30'$
15	$\varphi = \frac{x}{k}; \; \psi = \frac{u}{k};$ $\zeta = \frac{b}{k}; \; \eta = \frac{d}{k}$ $\alpha = \zeta + \eta = \frac{l}{k}; \; k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$ Gesucht M_1 und M_2	y- und v-Werte wie unter 13. Jedoch M_1 und M_2 erhalten entgegengesetzte Vorzeichen.	$M_x = Q \frac{d}{l} x - M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M_2 \frac{x}{l} + P \cdot y$ $M_u = Q \frac{b}{l} \cdot u - M_1 \frac{u}{l} - M_2\left(1 - \frac{u}{l}\right) + P \cdot v$ $M_x = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi \quad M_u = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi$ $M_1\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + M_2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - \frac{d}{l}\right) \quad (1)$ $M_1\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) + M_2\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{b}{l}\right) \quad (2)$ $M_Q = Q \cdot k \frac{\sin\zeta \cdot \sin\eta}{\sin\alpha} - M_1 \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - M_2 \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha}$	$A_1 = -M_1; \; A_2 = -M_2$ $B_1 = Q \cdot k \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} + \frac{M_1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{M_2}{\sin\alpha}$ $B_2 = Q \cdot k \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{M_1}{\sin\alpha} + \frac{M_2}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\alpha = 360^\circ$
16	Gesucht: M_1 und M_2; P nur im Feld »l« $y'_1 = y'_{(x=0)}; \; v'_3 = v'_{(u=0)}$ Im Feld $l_1 : J_1$ Im Feld $l_3 : J_3$ Im mittleren Feld: $k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}; \; \alpha = \frac{l}{k}$	y- und v-Werte wie unter 13. Jedoch M_1 und M_2 erhalten entgegengesetzte Vorzeichen.	$M_x = Q \cdot \frac{d}{l} \cdot x - M_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M_2 \frac{x}{l} + P \cdot y;$ $M_u = Q \frac{b}{l} \cdot u - M_1 \frac{u}{l} - M_2\left(1 - \frac{u}{l}\right) + P \cdot v$ $M_x = A_1 \cdot \cos\varphi + B_1 \cdot \sin\varphi$ $M_u = A_2 \cdot \cos\psi + B_2 \cdot \sin\psi$ $M_1\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + M_2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - \frac{d}{l}\right) \quad P \cdot l \cdot y_1' \quad (1a)$ $M_1\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) + M_2\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{b}{T}\right) \quad P \cdot l \cdot y_3' \quad (2a)$ Hier ist: $y_1' = \frac{M_1 \cdot l_1}{3 \cdot E J_1}; \; y_3' = \frac{M_2 \cdot l_3}{3 \cdot E J_3}$ $M_1\left(P \cdot l \cdot \frac{l_1}{3 \cdot E J_1} + 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + M_2\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\eta}{\sin\alpha} - \frac{d}{l}\right) \quad (1)$ $M_1\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right) + M_2\left(P \cdot l \cdot \frac{l_3}{3 \cdot E J_3} + 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = Q \cdot l\left(\frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{b}{l}\right) \quad (2)$	$A_1 = -M_1; \; A_2 = -M_2$ $B_1 = Q \cdot k \frac{\sin\eta}{\sin\alpha} + \frac{M_1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{M_2}{\sin\alpha}$ $B_2 = Q \cdot k \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} - \frac{M_1}{\sin\alpha} + \frac{M_2}{\operatorname{tg}\alpha}$ $N_n = 0$ N_n = Nennerdeterminante

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P \cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ($P k^2$ facher Wert)	Momente M_x $M_x = -E \cdot J \frac{d^2 y}{d x^2}$ Besondere Momente	Die Konstanten A und B Stab knickt aus bei:
17	Momente für $P = 0$ $\alpha_1 = \frac{a_1}{k}$; $\alpha_2 = \frac{a_2}{k}$; $\alpha_3 = \frac{a_3}{k}$	$M_1 = M_{01} + P \cdot y_1$; $y_1 = \frac{M_1}{P} - \frac{M_{01}}{P}$ $M_2 = M_{02} + P \cdot y_2$; $y_2 = \frac{M_2}{P} - \frac{M_{02}}{P}$ $M_1\left(\frac{\nu_1'}{P \cdot a_1} + \frac{\nu_2'}{P \cdot a_2}\right) - M_2 \frac{\nu_2''}{P \cdot a_2} - \frac{y_1}{a_1} - \frac{y_1 - y_2}{a_2} = 0$ $M_1 \cdot \frac{\nu_2''}{P \cdot a_2} + M_2\left(\frac{\nu_2'}{P \cdot a_2} + \frac{\nu_3'}{P \cdot a_3}\right) - \frac{y_2}{a_3} - \frac{y_2 - y_1}{a_2} = 0$ Erweiterte Clapeyronsche Gleichung nach Müller-Breslau, Graphische Statik II. Bd., 2. Abteilung 1925, S. 643.	$M_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2} a_2 - M_2 \cdot \frac{\alpha_2}{\sin \alpha_2} = M_{01}\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) - M_{02}$ $-M_1 \frac{\alpha_2}{\sin \alpha_2} + M_2 \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3} \cdot \alpha_2 = -M_{01} + M_{02}\left(1 + \frac{a_2}{a_3}\right)$ Die Gleichungen aufgelöst, ergibt: $M_1 = Q_1 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} + Q_2 \cdot k \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$ $M_2 = Q_1 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} + Q_2 \cdot k \cdot \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_3}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$ [Nach Analogie (ohne Knickbiegung) $M_{01} = Q_1 \frac{(a_2 + a_3) \cdot a_1}{l} + Q_2 \frac{a_1 \cdot a_3}{l}$ $M_{02} = Q_1 \frac{a_1 \cdot a_3}{l} + Q_2 \frac{(a_1 + a_2) a_3}{l}$]	$\nu' = 1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ $\nu'' = \frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1$
18	$\alpha_1 = \frac{a_1}{k}$; $\alpha_2 = \frac{a_2}{k}$; $\alpha_3 = \frac{a_3}{k}$ $\alpha_4 = \frac{a_4}{k}$; $\alpha = \frac{l}{k}$	Ohne Knickbiegung $M_{01} = A \cdot a_1 = Q_1 \frac{a_1(a_2 + a_3 + a_4)}{l} + Q_2 \frac{a_1(a_3 + a_4)}{l} + Q_3 \frac{a_1 a_4}{l}$ $M_{02} = A(a_1 + a_2) - Q_1 \cdot a_2 = Q_1\left[\frac{a_1(a_2 + a_3 + a_4)}{l} + \frac{a_2(a_2 + a_3 + a_4)}{l} - \frac{a_2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{l}\right] + Q_2 \frac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)}{l} + Q_3 \frac{(a_1 + a_2) a_4}{l}$ $M_{02} = Q_1 \cdot \frac{a_1(a_3 + a_4)}{l} + Q_2 \frac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)}{l} + Q_3 \frac{(a_1 + a_2) a_4}{l}$ $M_{03} = Q_1 \frac{a_1 \cdot a_4}{l} + Q_2 \frac{(a_1 + a_2) \cdot a_4}{l} + Q_3 \frac{(a_1 + a_2 + a_3) a_4}{l}$	Analog mit Knickbiegung $M_1 = Q_1 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)} + Q_2 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin \alpha} + Q_3 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_4}{\sin \alpha}$ $M_2 = Q_1 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin \alpha} + Q_2 \cdot k \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin \alpha} + Q_3 \cdot k \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \sin \alpha_4}{\sin \alpha}$ $M_3 = Q_1 \cdot k \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_4}{\sin \alpha} + Q_2 \cdot k \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \alpha_4}{\sin \alpha} + Q_3 \cdot k \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \sin \alpha_4}{\sin \alpha}$	
19	$Q = p \cdot b$ $\varphi = \frac{x}{k}$; $\psi = \frac{u}{k}$; $\zeta = \frac{b}{k}$; $\eta = \frac{d}{k}$ $\alpha = \zeta + \eta = \frac{l}{k}$ $R_1 = Q\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b}{l}\right)$; $R_2 = Q \frac{b}{2l}$	1) $P \cdot y = A \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi - \mathfrak{M}_x - p \cdot k^2$ $P \cdot k \cdot y' = -A \sin \varphi + B \cos \varphi - Q_x \cdot k$ $P k^2 y'' = -A \cos \varphi - B \sin \varphi + p \cdot k^2$ 2) $P \cdot v = C \cos \psi + D \sin \psi - \mathfrak{M}_u$ $P \cdot k \cdot v' = -C \sin \psi + D \cos \psi - Q_u \cdot k$ $P \cdot k^2 \cdot v'' = -C \cos \psi - D \sin \psi$	$M_x = Q \frac{b}{2}\left(2 \frac{x}{b} - \frac{x}{l} - \frac{x^2}{b^2}\right) + P \cdot y$; $M_u = Q \frac{b}{2}\left(1 - \frac{b}{l}\right) \cdot \frac{u}{d} + P \cdot v$ $M_x = \mathfrak{M}_x + P \cdot y$ $M_u = \mathfrak{M}_u + P \cdot v$ In »1« $M_1 = p k^2 \cdot \frac{1 - \cos \zeta}{\sin \alpha} \cdot \sin \eta$ $M_x = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi - p k^2$; $M_u = D \cdot \sin \psi$	$A = +p k^2$ $B = p k^2 \frac{\cos \eta - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ $C = 0$ $D = p k^2 \frac{1 - \cos \zeta}{\sin \alpha}$

Nr.	Aufgabe Abbildung Bezeichnungen	Durchbiegung y (P facher Wert) Tangente $\frac{dy}{dx}$ ($P \cdot k$ facher Wert) 2. Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ ($P k^2$ facher Wert)	Momente $\begin{cases} M_x \\ M_x = -E \cdot J \frac{d^2y}{dx^2} \\ \text{Besondere Momente} \end{cases}$	Die Konstanten A und B Stab knickt aus bei:
20	$\zeta = \frac{a}{k}$; $\eta = \frac{b}{k}$ $\varphi = \frac{x}{k}$	$P \cdot y = A \cdot \cos\varphi + B \cdot \sin\varphi - Q \cdot x + P \cdot x \cdot y_1'$ $P \cdot k \cdot y' = -A \sin\varphi + B \cos\varphi - Q \cdot k + P \cdot k\, y_1'$ $P \cdot k^2 \cdot y'' = -A \cos\varphi - B \sin\varphi$ $y_1' = \frac{M_1}{P \cdot b}\left(1 - \frac{\eta}{\operatorname{tg}\eta}\right)$ Zwischenwerte im Bereich (1)—(2) sind zu behandeln wie unter Nr. 1.	$M_{(1)} = M_0 + Q \cdot a + P \cdot \delta$ $M_{(1)} = \frac{M_0}{\cos\zeta} + Q \cdot k \cdot \operatorname{tg}\zeta + P \cdot a\, y_1'$ $M_{(1)} = \frac{M_0/\cos\zeta + Q \cdot K \cdot \operatorname{tg}\zeta}{1 - a/b \cdot \left(1 - \frac{n}{\operatorname{tg}\eta}\right)}$	$A = M_0$ $B = M_0 \cdot \operatorname{tg}\zeta + \frac{Q \cdot k}{\cos\zeta}$
21	$\varphi = \frac{x}{k}$; $\psi = \frac{u}{k}$; $\zeta = \frac{b}{k}$; $\eta = \frac{d}{k}$ $\alpha = \zeta + \eta = \frac{l}{k}$; $k = \sqrt{\frac{EJ}{P}}$	Linke Seite; Bereich »b« $P \cdot y = B_1 \cdot \sin\varphi - \frac{M}{l} \cdot x$ $P k y' = -B_1 \cos\varphi - \frac{M}{l} \cdot k$ $P k^2 y'' = -B_1 \sin\varphi$ Rechte Seite; Bereich »d« $P \cdot v = B_2 \cdot \sin\psi - \frac{M}{l} \cdot u$ $P \cdot k v' = B_2 \cos\psi - \frac{M}{l} \cdot k$ $P k^2 \cdot v'' = B_2 \sin\psi$	Bereich »b« $M_x = \frac{M}{l} \cdot x + P \cdot y$ $M_x = B_1 \cdot \sin\varphi$ Bereich »d« $M_u = \frac{M}{l} \cdot u + P \cdot v$ $M_u = B_2 \cdot \sin\psi$ Bei M ist das Moment: $M_1 = M \frac{\cos\eta \cdot \sin\zeta}{\sin\alpha}$ $M_2 = \frac{\cos\zeta \cdot \sin\eta}{\sin\alpha}$	$B_1 = M \frac{\cos\eta}{\sin\alpha}$ $B_2 = M \frac{\cos\zeta}{\sin\alpha}$ $\alpha = 180^0$

Untersuchungen zur Erfassung des Biegungs- bzw. Beulungseinflusses bei Spannungsmessungen an nur einseitig zugänglichen Schalenkonstruktionen.

Von A. Dose.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Einseitig auf der Beplankung geschlossener dünnwandiger Schalenkonstruktionen vorgenommene Dehnungsmessungen führen oft zu Ergebnissen, die infolge der an diesen Körpern bei Belastung leicht auftretenden Beulungserscheinungen durch Biegedehnungen stark entstellt sind. Es wird gezeigt, wie man auf verhältnismäßig einfache Weise nahezu richtige Werte für die Spannung in der Mittelschicht erhalten und somit ein Bild der Spannungsverteilung gewinnen kann, das mit dem auf Grund der statischen Berechnung gefundenen vergleichbar ist.

Gliederung.

A. Einleitung.

Die Brauchbarkeit der Ergebnisse einzelner an dünnwandigen Schalenkonstruktionen des Flugzeugbaues mit den üblichen instrumentellen Hilfsmitteln etwa zur Prüfung von Berechnungsgrundlagen durchgeführter Dehnungsmessungen wird oftmals in Frage gestellt infolge des störenden Einflusses der durch mehr oder weniger erhebliche Beulung der Beplankung entstehenden Biegedehnungen. Die heutige Bauweise der Flugzeugzellen läßt es nämlich in vielen Fällen nicht zu, durch zweiseitige Messungen die Biegedehnungen zu eliminieren. Dabei können diese selbst dann von beträchtlichem Ausmaße sein, wenn mit dem Auge merkliche Verformungen der Haut nicht wahrgenommen werden. Die gebräuchlichen Dehnungsmesser liefern also nicht immer zuverlässige Werte für die Dehnungen in der Mittelschicht.

Es ergibt sich somit die Aufgabe, geeignete Wege zur Eliminierung der Biegedehnungen aufzufinden.

Die folgende Abhandlung beschäftigt sich zunächst mit der Größe der Biegedehnung in Abhängigkeit von gewissen Parametern, sodann mit einer Zusatzvorrichtung zu einem Dehnungsmesser, die es ermöglicht, diesen Anteil zu bestimmen und hierauf durch Abzug von der Dehnungsmesseranzeige auszuschalten.

B. Theoretisches.

a) Dehnungsunterschied zwischen Mittelebene und Randfaser.

Die Größe der Biegedehnung läßt sich am leichtesten an Hand von Bild 1 erfassen. Ein Blech von der Stärke d sei auf einen Radius R in der Mittelschicht, die hierbei keinerlei Dehnung erfahren möge, gebogen und mit ε die an der Oberfläche auftretende Biegedehnung bezeichnet.



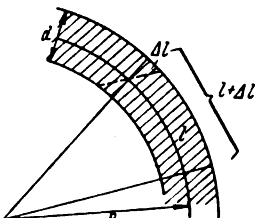


Bild 1. Zur Ableitung der Gl. (1).

Dann folgt aus Bild 1 unter der Annahme eines linearen Verteilungsgesetzes für die Biegedehnungen die Beziehung:

$$\frac{l}{R} = \frac{l + \Delta l}{R + d/2}.$$

Folglich:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Den weiteren Betrachtungen sei nun die Voraussetzung zugrunde gelegt, daß die innere Seite der Schalenkonstruktionen nicht zugänglich ist. Eine Feststellung über den Grad der Durchbiegung der Haut kann demnach nur von der Außenseite her erfolgen.

Wir denken uns jetzt auf der gekrümmten Fläche einer Schale ein Meßinstrument angesetzt mit zwei festen, s mm voneinander entfernten Spitzen und einem beweglichen Mittelstift, dessen Lage sich je nach der Stärke der Wölbung der Fläche relativ zu den beiden anderen Spitzen verschiebt, vgl. Bild 2. Ist nun innerhalb dieser Strecke die Gestalt der Fläche mit ausreichender Genauigkeit durch einen Kreis wiederzugeben, so wird s eine Sehne dieses Kreises. Als Maß für die Durchbiegung der Oberfläche in der betreffenden Meßrichtung kann man alsdann die Pfeiltiefe f ansetzen, für die nach Bild 3 folgende Gleichung gilt:

$$(r - f)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2.$$

Folglich:

$$r = \frac{f^2 + (s/2)^2}{2f} = R + d/2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

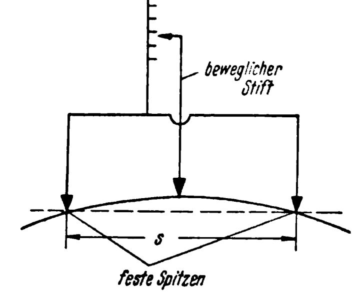


Bild 2. Krümmungsmesser.



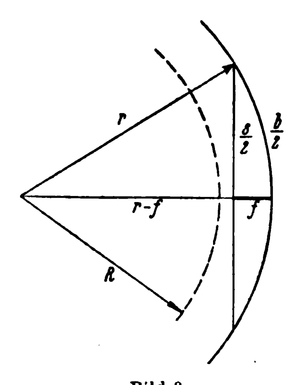


Bild 3.
Zur Berechnung der Pfeiltiefe f.

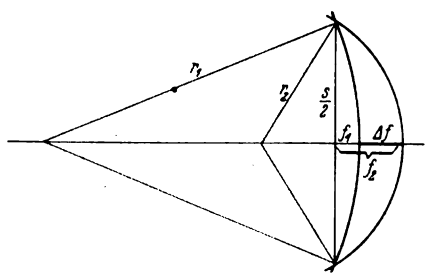


Bild 4. Erläuterung zur Gl. (8).

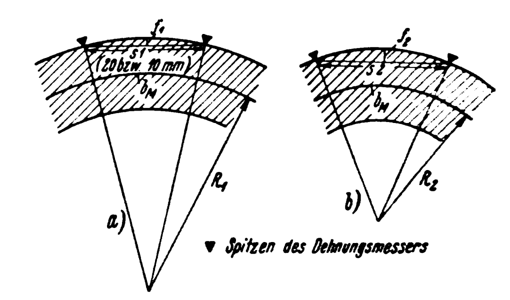


Bild 5. Erläuterung zum Rechenbeispiel.
a Zustand 1, b Zustand 2.

oder bei genügend kleinem f

$$R \approx \frac{(s/2)^2}{2f} - d/2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nach Gl. (3) läßt sich also der Krümmungsradius der neutralen Schicht aus der Pfeiltiefe f, die mit dem in Bild 2 angedeuteten Instrument gemessen werden kann, errechnen.

Die Vereinigung der Gl. (1) und (2) liefert folgende Beziehung:

$$\varepsilon = \frac{d \cdot f}{f^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d \cdot f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wird in Gl. (4) wiederum das Glied mit f^2 vernachlässigt, so ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{d \cdot f}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d \cdot f}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ist $\frac{d \cdot f}{(s/2)^2} < 1$, so erhält man durch Reihenentwicklung aus

Gl. (5): $$\varepsilon = \frac{d \cdot f}{(s/2)^2} \cdot \left[1 + \frac{d \cdot f}{(s/2)^2} + \ldots\right]$$

mithin

$$\boxed{\varepsilon \approx \frac{d \cdot f}{(s/2)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Hier ist f positiv anzusetzen bei konvexer Krümmung der betrachteten Oberfläche, vgl. Bild 3.

Der Fehler der einfachen Formel (6) ist unter den gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen sehr klein, wie aus der nachstehenden Zahlentafel hervorgeht, in welcher für d und s bestimmte Werte angenommen sind.

Zahlentafel 1. Fehler der Gl. (6).
($d = 1$ mm, $s/2 = 10$ mm)

f in mm	$\varepsilon \cdot 10^4$ n. Gl. (1 + 2)	$\varepsilon \cdot 10^4$ n. Gl. (6)	$\Delta\varepsilon \cdot 10^4$
0,1	10,01	10,0	0,01
0,01	1,0001	1,0	0,0001
0,001	0,100001	0,1	0,000001

Nimmt die Durchbiegung der Fläche unter irgendwelchen Lasten von einem Wert f_1 auf einen Wert f_2 zu, so beträgt der Zuwachs an Biegedehnung, vgl. Bild 4:

$$\varepsilon = \frac{d}{(s/2)^2} (f_2 - f_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$= \frac{d}{(s/2)^2} \Delta f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Man kann nun den in Bild 2 dargestellten Krümmungsmesser mit einem Dehnungsmesser kombinieren. Zu dem Zwecke denken wir uns die beiden festen Spitzen so beweglich angeordnet, daß sie — nach starrer Verbindung mit dem zu untersuchenden Gegenstand — den Dehnungen des Körpers nachgeben. Der Abstandsänderung der beiden Spitzen entsprechend, wäre dann Gl. (7) streng genommen in der Form

$$\varepsilon = d \left[\frac{f_2}{\left(\frac{s_2}{2}\right)^2} - \frac{f_1}{\left(\frac{s_1}{2}\right)^2}\right]$$

zu schreiben.

Wie aus dem Weiteren hervorgeht, ist jedoch die Differenz der beiden Strecken s_1 und s_2 meistens vernachlässigbar klein; demnach bleibt Gl. (8) weiterhin anwendbar.

Um einen Überblick über die Größe der insgesamt bei der Herleitung der Gl. (8) gemachten Vernachlässigungen zu erhalten, ist folgendes Beispiel durchgerechnet worden:

Der Krümmungsradius R_1 eines Blechstreifens von der Stärke 1 mm gehe bei fortgesetzter dehnungsloser Verbiegung der Mittelschicht in den Wert R_2 über, vgl. Bild 5, alsdann läßt sich der Zuwachs an Oberflächen-Biegedehnung sehr leicht mit Hilfe der Formel (1) errechnen. Es ergibt sich für

$$R_1 = 999{,}5 \text{ mm} \quad \text{u.} \quad R_2 = 199{,}5 \text{ mm}$$
$$\varepsilon_1 = 0{,}000500 \qquad \varepsilon_2 = 0{,}002506$$

und mithin nach Gl. (1)

$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = +0{,}002006 = +20{,}06 \cdot 10^{-4} \quad \ldots \quad (9)$$

Im Zustande 1 des Körpers sei eine Meßstrecke von

I) 20 mm, II) 10 mm (Sehnenlänge)

vorhanden gewesen. Unverändert bleibt beim Übergang vom Zustand 1 in den Zustand 2 nach Voraussetzung die Bogenlänge b_M der Mittelschicht.

Die Größen $f_{1,2}$; $s_{1,2}$ besitzen dann folgende Werte:

a)		b)	
$f_1 =$	0,05000 mm	$f_1 =$	0,01250 mm
$f_2 =$	0,25096 »	$f_2 =$	0,06275 »
$\Delta f = f_2 - f_1 =$	+0,20096 mm	$\Delta f = f_2 - f_1 =$	+0,05025 mm
$s_1 =$	20,00000 »	$s_1 =$	10,00000 »
$s_2 =$	20,03205 »	$s_2 =$	10,01904 »
$s_2 - s_1 =$	+0,03205 mm	$s_2 - s_1 =$	+0,01904 mm

Mithin ergibt sich nach der Annäherungsformel (8):

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ \varepsilon = +0{,}002010 = +20{,}10 \cdot 10^{-4} \\ \text{II)}\ \varepsilon = +0{,}002010 = +20{,}10 \cdot 10^{-4} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen (9) und (10) erweisen sich als belanglos ($\leq 0{,}2\%$).

b) Einfluß der Sehnenverkürzung.

Bei den vorliegenden Krümmungsverhältnissen ist es jedoch wichtig, noch folgendes zu beachten: In Wirklichkeit gibt ein Dehnungsmesser allein die Längenveränderung der Sehne an. Infolgedessen würde im obigen Falle auch bei einer dehnungslosen Deformation der Mittelschicht ein daselbst angebracht gedachtes Meßinstrument einen Ausschlag anzeigen, dessen Ursache die Veränderung der Meßlänge durch die Ausbiegung ist. Bei zunehmender Krümmung wird stets eine scheinbare negative Dehnung angezeigt.

Im nachstehenden werden Formeln und Kurven zur Bestimmung der Größe der Sehnenverkürzung gegeben: Bei einer Durchbiegung f der Meßstrecke s tritt eine scheinbare Dehnung, vgl. Bild 6, auf:

$$\varepsilon = \frac{s - x}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

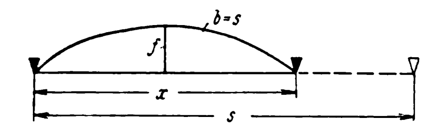


Bild 6. Zur Entstehung eines scheinbaren ε bei Biegung. ▽ Ausgangsstellung der Spitzen des Meßinstruments, ▼ Stellung nach Eintreten der Krümmung.

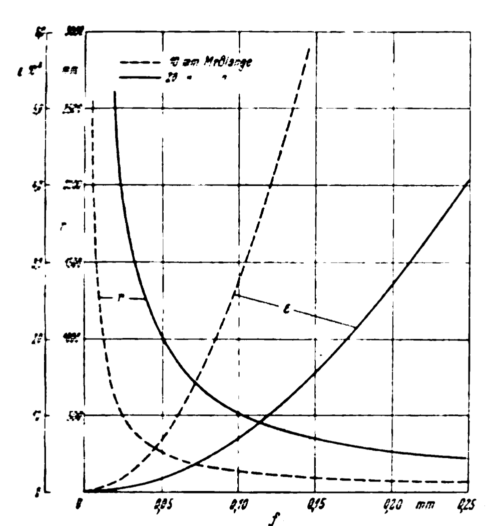


Bild 7. Bei starker Ausbiegung der Haut vom Dehnungsmesser angezeigtes scheinbares ε.

Es gilt dann folgende Beziehung, n. Bild 2:

$$\sin\left[\frac{180}{\pi}\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{2f}{f^2+(x/2)^2}\right]^0=\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{2f}{f^2+(x/2)^2}\quad . . (12)$$

die durch Annäherung leicht aufzulösen ist und x und somit nach Gl. (11) das gesuchte ε als Funktion von f gibt.

Ferner liefert die Gl. (2)

$$r=\frac{f^2+(s/2)^2}{2f}$$

als Funktion von f. Diese Gleichung deckt sich bei genügend kleinem f sehr nahe mit einer gleichseitigen Hyperbel, hingegen liefern die Gl. (11) und (12) zusammen genommen angenähert eine Parabel, deren Formel lautet:

$$\varepsilon\approx\frac{2}{3}\,\frac{f^2}{(s/2)^2}\quad . . . . (13)$$

Die transzendente Gl. (12) [+ Gl. (11)] kann im folgenden Bereich mit einem Fehler $|d\varepsilon|\cdot 10^4 < 0{,}05$ durch die Formel (13) ersetzt werden:

Meßlänge 10 mm $\quad 0 < |f| < \sim 0{,}3$ mm

» 20 mm $\quad 0 < |f| < \sim 0{,}6$ mm.

Die Kurven von Bild 7 sind auf Grund der vorstehenden Gleichungen berechnet worden.

In dem oben durchgeführten Beispiel würden die ins Auge gefaßten Meßinstrumente eine bezogene Dehnung

$$\left.\begin{aligned}\text{I)}\ \varepsilon &= \frac{s_2-s_1}{s_1} = +0{,}001602 = +16{,}02\cdot 10^{-4}\\ \text{II)}\ \varepsilon &= \quad » \quad = +0{,}001904 = +19{,}04\cdot 10^{-4}\end{aligned}\right\}\quad (14)$$

gegenüber $+20{,}06\cdot 10^{-4}$ nach Gl. (9) geliefert haben. Dieser merkliche Unterschied wird beseitigt, wenn man die aus den Kurven von Bild 7 zu entnehmenden Korrektionswerte $(-\Delta\varepsilon)$:

$$\left.\begin{aligned}&\text{I)}\ \varepsilon_2 = -4{,}23\cdot 10^{-4} && \text{II)}\ \varepsilon_2 = -1{,}02\cdot 10^{-4}\\ &\quad\ \varepsilon_1 = -0{,}16\cdot 10^{-4} && \quad\ \ \varepsilon_1 = -0{,}04\cdot 10^{-4}\\ \hline &\quad\ \Delta\varepsilon = -4{,}07\cdot 10^{-4} && \quad\ \ \Delta\varepsilon = -0{,}98\cdot 10^{-4}\end{aligned}\right\}\quad (15)$$

an die Zahlen der Gl. (14) anbringt. Man erhält so praktisch völlige Übereinstimmung mit Gl. (9) bzw. (10).

Da der Einfluß der Sehnenverkürzung demnach sehr groß sein kann, so empfiehlt es sich, bei kleineren Krümmungsradien diese ihrem Werte nach mit einem geeigneten Instrument, vgl. Bild 2, festzustellen und das aus Bild 7 sich ergebende scheinbare ε zu berücksichtigen oder zu kleineren Meßstrecken überzugehen. Ohne Einfluß auf das Ergebnis ist es dagegen, ob in (14) im Nenner s_1 durch den Bogen a) $b = 20{,}00034$, b) $b = 10{,}00004$ ersetzt wird.

In vielen Fällen wird es jedoch hinreichend sein, bei Dehnungsmessungen nur die Größen Δf zu bestimmen und sich somit auf die Anwendung der Gl. (8) zu beschränken.

c) Eindringen der Meßspitzen.

Es ist aber noch erforderlich, den Korrektionsfaktor, der infolge des Eindringens der Meßspitzen in die Haut in Gl. (8) anzusetzen ist, ausfindig zu machen. Bei allen Versuchen zur Bestimmung von Dehnungen wird man einen möglichst kleinen und stets gleichen, dennoch einen festen Sitz des Instruments verbürgenden Anpreßdruck anstreben. Sicherlich sind die Eindringungstiefen der Spitzen von um so größerem Einfluß, je kleiner die jeweilige Blechstärke ist. Im übrigen können diese z. B. von der Art und Dicke der Plattierschicht bei Blechen aus Al-Cu-Mg-Legierungen abhängig sein.

Die Bestimmung solcher Faktoren soll jedoch einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben.

d) Veränderlichkeit der Krümmung.

Die vorstehenden Betrachtungen hatten stets zur Voraussetzung, daß der betreffende Gegenstand innerhalb der Meßstrecke des Dehnungsmessers seiner Form nach einem einfachen Kreisbogen entsprach. Die nachfolgenden Zeilen sind der Frage gewidmet, inwieweit es berechtigt ist, die erlangten Gleichungen, insbesondere Gl. (8), auf Beultiefenkurven, die im Bereiche der Meßstrecke des Dehnungsmessers stetig veränderliche Krümmungsradien besitzen, anzuwenden. Es geht ferner darum, festzustellen, welche Meßlänge unter diesen Umständen bereits unzulässig große Fehler zeitigen würde.

Zur Klärung dieses Problems wurden einige Rechnungen für die beiden Meßlängen von 10 bzw. 20 mm, die dem an vielen Forschungsstätten anzutreffenden Dehnungsmesser von Huggenberger (Typus A) zu eigen sind, angestellt.

Bild 8 gibt einen Ausschnitt aus den Beultiefenkurven einer in der Druckrichtung versteiften zylindrischen Duraluminteilschale (Wandstärke der Beplankung = 0,6 mm) wieder. In etwas vereinfachter Form seien nun für die weiteren Untersuchungen diese Verhältnisse nachgeahmt, und zwar auf folgende Weise:

Ein ursprünglich ebener Blechstreifen von der Dicke $d = 1$ mm werde so gebogen, daß seine Mittelschicht — ohne irgendeine Dehnung zu erfahren — der Gleichung

$$y = A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\quad . . . . (16)$$

mit $A = 1{,}5$ mm, $\lambda = 100$ mm (vgl. Bild 9) genügt.

Wie der Augenschein sogleich lehrt, treten hier ähnlich extreme Krümmungen, wie sie dem früheren Rechenbeispiel zugrunde liegen, auf.

Die Aufgabe zerfällt nun in zwei Teile:

I. Genaue Berechnung der an der Oberfläche auftretenden Biegedehnung mittels Integration,

II. Berechnung der nach Gl. (1) bzw. (8) für denselben Bereich resultierenden Dehnung.

Dieser letztere Weg sei später kurz mit »Dreipunktmethode« bezeichnet. Beide Rechnungen sollen zu Vergleichszwecken einmal für die Normalmeßlänge l der Huggenberger-Tensometer von 20 mm, das andere Mal für $l = 10$ mm durchgeführt werden.

Um den Umfang der Rechnungen einzuschränken, werden dieselben nur an einer Stelle der Sinuskurve durchgeführt, und zwar im Gebiet größter Änderung von $\frac{1}{\varrho}$, wenn ϱ den Krümmungsradius bedeutet. Aus Bild 10 entnimmt man, daß nahe bei 65° die gesuchte Stelle der Funktion $1/\varrho$ liegt.

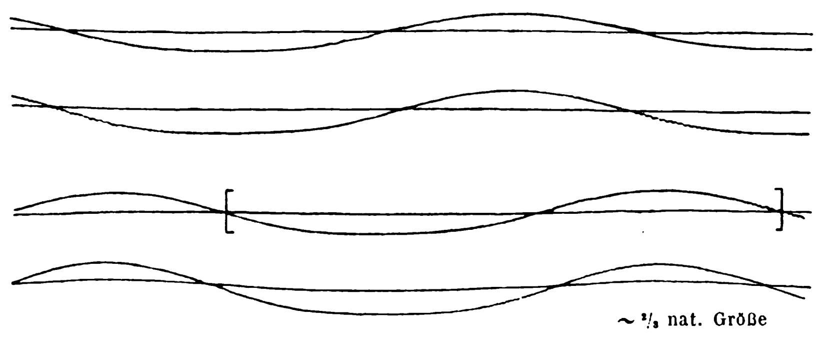


Bild 8 (links). Beultiefenkurven einer gedrückten zylindrischen Teilschale aus Fliegwerkstoff 3116.5 (Beulung zwischen den Aussteifungen, Überhöhung der Originalkurven 2,7 : 1).

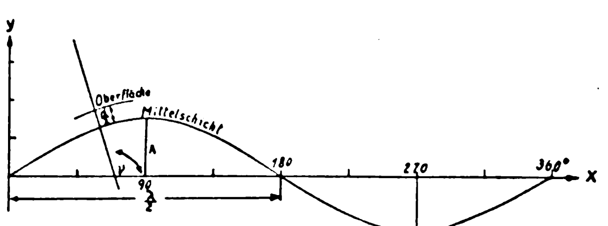


Bild 9. Bezeichnungen in Gl. (16).

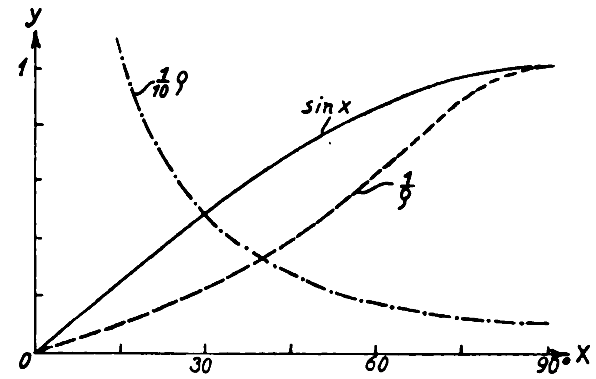


Bild 10. Krümmungsverhältnisse der Kurve $y = \sin x$.

I. Integralmethode. Die Dehnung an der Oberfläche läßt sich leicht in bestimmter Form herleiten. Aus Bild 11 folgert man sogleich:

$$\frac{d\,\Delta b}{d\,\nu} = d/2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Die gesamte Verlängerung des Bogens beträgt dann:

$$\Delta b = \frac{d}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\,\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

für ein durch die Ziffern 1, 2 gekennzeichnetes Intervall. Nun gilt für den Normalenwinkel ν die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\nu = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)} \qquad \text{[vgl. Gl. (16)].}$$

Mithin:

$$\frac{1}{\cos^2\nu}\,d\,\nu = -\frac{2\pi/\lambda\cdot\sin\left(2\pi/\lambda\cdot x\right)}{A\,2\pi/\lambda\cdot\cos^2\left(2\pi/\lambda\cdot x\right)}\cdot d\,x$$

und

$$d\,\nu = -\frac{A\cdot\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}{1+A^2\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}\cdot d\,x \quad \ldots \quad (19)$$

Folglich wird aus Gl. (18):

$$\Delta b = -\frac{d}{2}\,\frac{A\,4\pi^2}{\lambda^2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}{1+A^2\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}\cdot d\,x \quad (20)$$

Mit Hilfe der Transformation

$$\left.\begin{aligned} z &= A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right),\\ d\,z &= -A\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)d\,x \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

findet man dann:

$$\Delta b = \frac{d}{2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{1+z^2}\,d\,z = \left[\frac{d}{2}\operatorname{arc\,tg} z\right]_{z_1}^{z_2} \quad \ldots \quad (22)$$

Schließlich erhält man durch Wiedereinsetzen der Gl. (21_1) in (22)

$$\Delta b = \left\{\frac{d}{2}\operatorname{arc\,tg}\left[A\,\frac{2\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)\right]\right\}_{x_1}^{x_2} \quad \ldots \quad (23)$$

und die bezogene Dehnung wird:

$$\varepsilon_{\text{Integr.}} = \frac{\Delta b}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

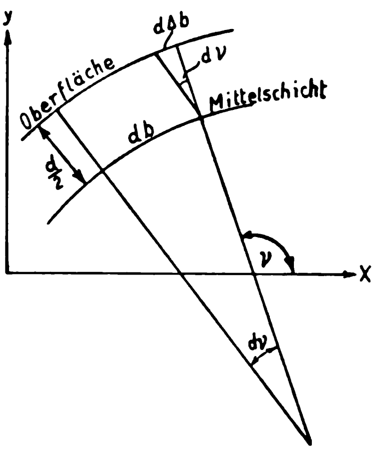


Bild 11. Zur Herleitung der Biegedehnung an der Oberfläche des sinusförmig gebogenen Bleches.

wo b aus der Sinuskurve zu

$$b = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,d\,x = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+A^2\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}\,d\,x \quad (25)$$

folgt.

Gl. (25) läßt sich auf das elliptische Integral II. Gattung

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

zurückführen:

$$b = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{A^2\,4\pi^2}{\lambda^2} - A^2\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}\,d\,x$$

$$= \sqrt{1+\frac{A^2\,4\pi^2}{\lambda^2}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\frac{A^2\,4\pi^2/\lambda^2}{1+A^2\,4\pi^2/\lambda^2}\cdot\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,x\right)}\,d\,x.$$

Setzt man noch:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,x, \quad d\,\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,d\,x,$$

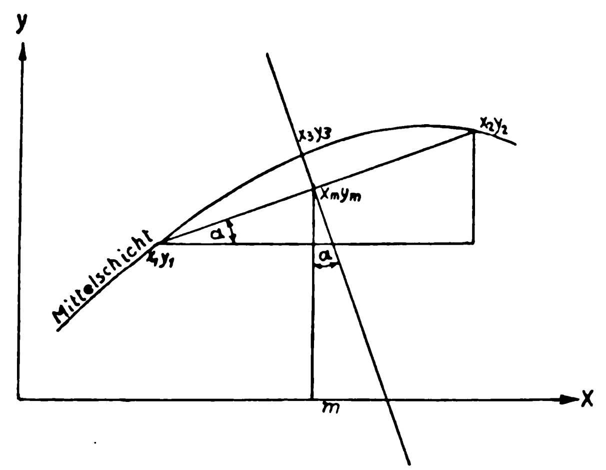


Bild 12. Erläuterung zur Dreipunktmethode.

so wird

$$b = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \sqrt{1 + \frac{A^2 4\pi^2}{\lambda^2}} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \quad (26)$$

wenn man zur Abkürzung

$$k^2 = \frac{A^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}}{1 + \frac{A^2 4\pi^2}{\lambda^2}} \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

schreibt.

Durch die Gl. (23), (24), (25) ist somit die in einem bestimmten Meßbereich auftretende Dehnung gegeben.

II. Dreipunktmethode. Den Rechnungsvorgang dieser Methode können wir am besten an Hand von Bild 12 erläutern. Anstatt mit Gl. (8) zu arbeiten, sei auf Gl. (1) zurückgegangen, nach welcher die gesuchte Biegedehnung aus dem Krümmungsradius der Mittelschicht gefunden wird. Zu diesem Wert gelangt man auf die folgende Weise: Die den Bogen b [Gl. (25)] der Mittelschicht begrenzenden Punkte mögen die Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) besitzen. Zu bestimmen sind dann zunächst die Koordinaten des Punktes $P_3\,(x_3, y_3)$ in Bild 12, der einerseits auf dem Mittellot der Sehne P_1P_2, andererseits auf der Sinuskurve liegt. Die Gleichung des Lotes lautet:

$$x = -\frac{m}{y_m} \cdot y + x_m + m, \quad \ldots \ldots (28)$$

wobei

$$\frac{m}{y_m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

ist.

Den Schnittpunkt P_3 findet man durch Einsetzen von Gl. (28) in Gl. (16). Die Auflösung dieser transzendenten Gleichung durch Approximation liefert y_3, sodann Gl. (28) das zugehörige x_3. Durch die Punkte $P_{1,2,3}$ ist nunmehr ein Kreis zu legen, dessen Radius gesucht ist. Der Mittelpunkt des Kreises habe die Koordinaten x_M, y_M; es gelten dann die folgenden drei Gleichungen:

$$(x_n - x_M)^2 + (y_n - y_M)^2 = R^2; \; n = 1, 2, 3 \quad . \; . \quad (30)$$

aus denen x_M, y_M und R errechnet werden können.

Somit ist auch $\varepsilon_{\text{Dreip.}}$ bekannt.

Die folgenden Darlegungen berichten über das Ergebnis der numerischen Rechnungen. Wie bereits betont, soll die durch die Gl. (16) gegebene Beultiefenkurve an der dem Winkel $\alpha = 65^0$ entsprechenden Stelle einer näheren Betrachtung unterzogen werden. Zahlentafel 2 gibt die Rechnungsunterlagen für die Mittelschicht.

Man entnimmt der Zahlentafel, daß sich der Krümmungsradius der Sinuskurve innerhalb des betrachteten Stücks zwischen den Werten 46,40 und 17,04 cm bewegt. Die Rechnungen beziehen sich nun, wie angedeutet, einerseits auf eine Meßstrecke von nahe 20, andererseits von $\sim$10 mm Länge, indem als Grenzpunkte gewählt wurden:

a) 20 mm Meßstrecke: $x_1 = 6$, $y_1 = 0{,}5522$ mm; $x_2 = 26$, $y_2 = 1{,}4970$ »

b) 10 mm Meßstrecke: $x_1 = 11$, $y_1 = 0{,}9561$ mm; $x_2 = 21$, $y_2 = 1{,}4529$ »

Die Gl. (23) und (25) ergeben für das angeführte Intervall:

a) $\Delta b = 0{,}04666$ mm, $b = 20{,}0301$ » b) $\Delta b = 0{,}02453$ mm, $b = 10{,}0134$ » [1]).

Folglich nach Gl. (24):

a) $\varepsilon_{\text{Integr.}} = 0{,}002330$ b) $\varepsilon_{\text{Integr.}} = 0{,}002450$ . . (31)

Nach der Dreipunktmethode wird

a) $R = 207{,}55$ mm b) $R = 202{,}42$ mm,

welche Werte nach Zahlentafel 2 dem zu $x = 16$ gehörenden R sehr nahe liegen.

Mithin nach Gl. (1) mit $d/2 = 0{,}5$ mm

a) $\varepsilon_{\text{Dreip.}} = 0{,}002409$ b) $\varepsilon_{\text{Dreip.}} = 0{,}002470$ . . (32)

Der Vergleich der Ergebnisse (31), (32) läßt Differenzen in Höhe von:

a) $\Delta\varepsilon = 0{,}000079$ b) $\Delta\varepsilon = 0{,}000020$
oder $\Delta\varepsilon_{20} = 3{,}4\%$ $\Delta\varepsilon_{10} = 0{,}8\%$

des wahren Wertes erkennen.

Im Hinblick auf die nicht unbeträchtliche Verbiegung des Bleches kann man das Untersuchungsergebnis dahin zusammenfassen, daß die normale Meßlänge von 20 mm der vielfach gebräuchlichen Huggenberger-Tensometer (Typus A) nur in sehr extremen Verhältnissen versagen wird.

Daß im übrigen der für die Beulkurve gewählte Sinusansatz die Krümmungsverhältnisse der zu Beginn ins Auge gefaßten wirklichen Beulkurven, Bild 8, gut wiedergibt, läßt eine harmonische Analyse des in dem angeführten Lichtbild näher gekennzeichneten Kurvenstücks ersehen. Unter Benutzung von 12 Ordinaten wurde folgende Reihe gefunden:

[1]) Die Werte für die elliptischen Integrale sind aus den Legendreschen Tafeln (herausgegeben von F. Emde, Stuttgart 1931) durch Interpolation gewonnen worden.

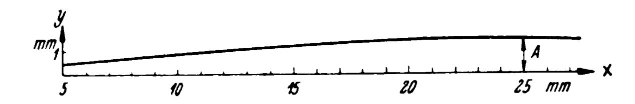


Bild 13. Bogenstück (s. Zahlentafel 2) der Mittelschicht (vergr.).

Zahlentafel 2. Daten für die Mittelschicht (Gl. 16) im Bereiche der Meßstelle.

x mm	$\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)^0$	y mm	R cm	$1/R$ cm^{-1}
6	21,6	0,5522	46,40	0,0216
7	25,2	0,6387	40,11	0,0249
8	28,8	0,7227	36,00	0,0278
9	32,4	0,8037	31,84	0,0314
10	36,0	0,8817	28,99	0,0345
11	39,6	0,9561	26,74	0,0374
12	43,2	1,0268	24,86	0,0402
13	46,8	1,0935	23,29	0,0429
14	50,4	1,1558	22,05	0,0454
15	54,0	1,2135	21,02	0,0476
16	57,6	1,2665	20,12	0,0497
17	61,2	1,3145	19,37	0,0516
18	64,8	1,3572	18,74	0,0534
19	68,4	1,3947	18,21	0,0549
20	72,0	1,4267	17,78	0,0562
21	75,6	1,4529	17,47	0,0572
22	79,2	1,4735	17,22	0,0581
23	82,8	1,4882	17,04	0,0587
24	86,4	1,4970	16,95	0,0590
25	90,0	1,5000	16,89	0,0592
26	93,6	1,4970	16,95	0,0590
27	97,2	1,4882	17,04	0,0587

$$
\left.\begin{aligned}
y_{\mathrm{mm}} = & -0{,}216 + 0{,}358 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& -0{,}165 \cos\left(2\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + 0{,}028 \cos\left(3\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& -0{,}010 \cos\left(4\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + 0{,}007 \cos\left(5\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& -0{,}002 \cos\left(6\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& -1{,}634 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) - 0{,}120 \sin\left(2\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& -0{,}024 \sin\left(3\frac{2\pi}{\lambda}x\right) + 0{,}004 \sin\left(4\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\
& + 0{,}002 \sin\left(5\frac{2\pi}{\lambda}x\right)
\end{aligned}\right\} \quad (33)
$$

deren weitaus größtes Glied

$$y = -1{,}634 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad (\lambda = 111{,}9 \text{ mm}) \quad . \; . \; (34)$$

ist.

C. Krümmungsmesser als Zusatzvorrichtungen zu Dehnungsmessern — Anwendung.

Die vorstehenden Untersuchungen haben die Möglichkeit der Bestimmung der Biegedehnung durch Beobachtung der Pfeiltiefe aufgezeigt. Zu dem Zwecke einer praktischen Anwendung ist es nur notwendig, an den Dehnungsmessern eine Zusatzvorrichtung anzubringen, die die Durchbiegung der Meßoberfläche mit genügender Genauigkeit zu erfassen gestattet. In der Versuchsabteilung der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H. wurden solche Ergänzungsapparate zu Huggenberger-Tensometern mit 20 mm Meßlänge gebaut. Es wird die Bewegung eines in der Mitte dieser Meßstrecke befindlichen, mit geringer Kraft gegen die Unterlage drückenden Taststiftes in etwa 125facher Übersetzung von einem Zeiger auf einer Skala wiedergegeben. Zurzeit befinden sich überdies Instrumente mit größerer Übersetzung ($i \approx 450$) in Arbeit.

Wesentliches Kennzeichen der eingeschlagenen Methode ist es, daß die Krümmungsmessungen gleichzeitig mit den Dehnungsmessungen vorgenommen werden[2]). Die Verwendung des von Dr. A. Huggenberger, Zürich, herausgebrachten Apparates sowie anderer nach einem ähnlichen Prinzip arbeitender Verfahren zur Bestimmung von Biegedehnungen[3]) dürfte sich aus mehreren Gründen bei Versuchen an dünnwandigen Schalenkonstruktionen nicht empfehlen.

Es seien auf der Oberfläche einer Schale Dehnungsmessungen nach der bekannten Wys'schen Methode mit 4 Meßrichtungen a, b, c, d angestellt worden, wo $a \perp c$, $b \perp d$ und Winkel $(a, b) = 45^0$ ist, alsdann erkennt man unmittelbar aus dem Eulerschen Satz über die Krümmung einer Fläche, nach welchem

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

ist, daß die errechneten Biegedehnungen bzw. die gemessenen Pfeiltiefen einer entsprechenden Summenformel angenähert gehorchen müssen, also nach Gl. (8) auch

$$\Delta f_a + \Delta f_c = \Delta f_b + \Delta f_d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

Zu beachten ist nun, daß bei erheblichen Krümmungen bzw. Krümmungsänderungen die mittels eines Dehnungsmessers gefundenen ε-Werte wegen des in Bild 7 dargelegten Effekts die Invarianzbedingung der ε-Summe zweier senkrecht aufeinander stehender Richtungen an einem Punkte — von Meßfehlern ganz abgesehen — nicht erfüllen können, wie an Hand eines Versuchs mit einem Huggenberger-Instrument von 20 mm Meßlänge mit eingebautem Krümmungsmesser vor Augen geführt sei. Gegenstand des Versuchs war ein Stahlblech 120 × 350 × 0,5 mm, das — am Scheitel eines aus Holz gefertigten Bogens befestigt — durch eine einfache Gewichtsbelastung ($P = 0$ bis 2 kg) zu einer starken Verbiegung ($R \approx 200$ mm) gezwungen wurde. Die Ablesungen an dem Tensometer wurden bei den Lasten 0 kg und 2 kg vorgenommen. Die Oberfläche des Bleches war vor Beginn des Versuches in der Umgebung der Meßstelle poliert worden. Das Versuchsergebnis ist in Zahlentafel 3 zusammengestellt.

Wie man sieht, wird von den durch die Messung erhaltenen ε-Werten der Bedingung $\varepsilon_a + \varepsilon_c = \varepsilon_b + \varepsilon_d$ erst nach Anbringung der aus Gl. (15) folgenden Korrektionen hinreichend genügt.

In welchem Maße die Biegedehnungen das gesuchte Spannungsverteilungsbild entstellen können, sei noch durch eine an einem Flügelholmsteg (Al-Cu-Mg-Legierung, $s = 0{,}75$ mm) erlangte Messung belegt: Aus den unkorrigierten ε-Werten ergaben sich die in Bild 14b bildlich dargestellten Hauptspannungswerte, hingegen zeitigten die in bezug auf Beulung [n. Gl. (8)] korrigierten ε-Werte das in Bild 14a eingetragene Ergebnis. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Zahlentafel 4 enthalten.

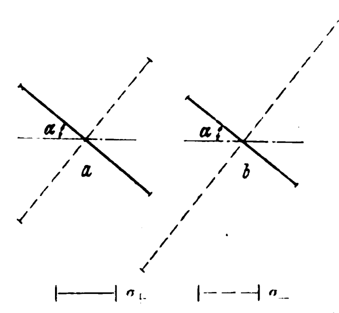


Bild 14. Hauptspannungen für 1,0 P_{xi}, $E = 70 \cdot 10^4$ kg/cm², $\mu = 0{,}3$.
a) Aus in bezug auf Beulung korrigierten ε-Werten,
b) aus unkorrigierten ε-Werten.

[2]) DRP. angemeldet.
[3]) Siehe Rötscher-Jaschke, Auswertung von Dehnungsmessungen, Berlin 1939, S. 88 bis 91.

Zahlentafel 3. Dehnungsmessungen an einem Stahlblech (Fliegwerkstoff 1263.1, $d \approx 0{,}5^+$ mm) bei starker Krümmungsänderung.

	Meßrichtung							Bemerkungen
	a	c	b	d	$a + c$	$b + d$	Δ %*)	
Δf mm	+ 0,205	+ 0,003	+ 0.111	+ 0,097	+ 0,208	+ 0,208	0	Krümmungsmesser
Δf mm	+ 0,200	+ 0,002	+ 0,108	+ 0,094	+ 0,202	+ 0,202	0	$\frac{1}{1000}$ mm Uhr
f_1 mm	+ 0,044	+ 0,003	+ 0,013	+ 0,033	+ 0,047	+ 0,046	1	$\frac{1}{1000}$ mm Uhr
f_2 mm	+ 0,249	+ 0,006	+ 0,124	+ 0,130	+ 0,255	+ 0,254	0,2	$f_1 + \Delta f_{\text{Krümmungsmesser}}$
$\Delta \varepsilon \cdot 10^4$	+ 4,00	0	+ 1,01	+ 1,05	+ 4,00	+ 2,06	—	(n. Gl. 13)
$\varepsilon \cdot 10^4$	+ 7,87	+ 0,02	+ 5,14	+ 4,24	+ 7,89	+ 9,38	8,6	Tensometer
$\varepsilon_{\text{Korr.}} \cdot 10^4$	+ 11,87	+ 0,02	+ 6,15	+ 5,29	+ 11,89	+ 11,44	1,9	$\varepsilon + \Delta \varepsilon$

*) $\Delta\% = \frac{(a + c) - (b + d)}{\Sigma (a + c + b + d)} \cdot 100$

Zahlentafel 4. Zahlenwerte zu Bild 14.

	a)	b)
$\sigma_1 =$	— 678 kg/cm²	— 1060 kg/cm²
$\sigma_2 =$	+ 558 »	+ 460 »
$\tau_{max} =$	618 »	760 »
$\alpha =$	— 37,5°	— 36,4°

Auch im Falle einfacher Längsspannungen in Streben usw. sichert die Meßmethode die Erreichung einwandfreier Spannungen an nicht beiderseits zugänglichen Stellen.

D. Zusammenfassung.

Es wird ein Instrument angegeben, das der Erfassung des Biegungs- bzw. Beulungseinflusses bei Spannungsmessungen an nur einseitig zugänglichen Schalenkonstruktionen dient. Die ersten Kapitel behandeln die Abhängigkeit der Biegedehnung von gewissen Parametern. Weitere Untersuchungen betreffen die Fehler des Meßverfahrens bei starken bzw. innerhalb des Meßbereichs veränderlichen Krümmungen der Beplankung. Aus den bereits vorliegenden Messungsergebnissen wird zum Schluß ein Beispiel mitgeteilt.

Über den Einfluß von Bohrungen mit Gewinden und Kerbverzahnungen auf die Zeit- und Dauerfestigkeit von Leichtmetall-Flachstäben.

Von H. Bürnheim VDI.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Die Untersuchungen hatten den Zweck, die Kerbempfindlichkeitszahlen von Flachstäben aus Leichtmetallen mit zylindrischen Bohrungen bei Zugursprungsbeanspruchung zu ermitteln. Insbesondere interessierte dabei die Veränderung der Kerbwirkungszahlen mit der Lastspielzahl. Die Untersuchungen wurden mit dem gleichen Ziel auf entsprechende Flachstäbe mit belasteten Bohrungen (Zuglaschen) ausgedehnt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Über die Dauerhaltbarkeit von Flachstäben mit zylindrischen »freien« Bohrungen — d. h. solchen, die keinen Bolzen oder Niet aufnehmen sollen, also keinen Lochleibungsdruck erhalten — sind in den letzten Jahren eine Anzahl Veröffentlichungen erschienen, aus denen man Angaben über die Kerbwirkungszahlen β_k[1]) der gebohrten Proben entnehmen kann. Auch über die Größe der Formziffern α_k[2]) steht eine Anzahl aus spannungsoptischen oder sonstigen Modellmessungen und Feindehnungsmessungen stammender Werte zur Verfügung, so daß die Berechnung der Dauerhaltbarkeit von Bauteilen an Stellen mit Bohrungen dem Konstrukteur im allgemeinen keine Schwierigkeiten bereitet. Auch über die Dauerhaltbarkeit von Stabköpfen oder Zuglaschen, d. h. Flachstäben, deren Bohrungen durch einen Bolzen belastet sind, sind in letzter Zeit einige Angaben veröffentlicht worden, aus denen hervorgeht, daß die Kerbwirkungszahlen bei den belasteten Bohrungen erheblich größer sind als bei nicht belasteten. So fanden z. B. Thum und Bruder für St. 70.11 einen Anstieg der β_k-Werte von 1,23 bei der freien Bohrung auf 2,8 bis 3,42 beim Stabkopf je nach seiner Ausführung[3]). Alle diese Angaben beziehen sich ausschließlich auf zylindrische Bohrungen, nicht aber auf Gewindelöcher und auf Löcher mit nicht kreisförmigem Querschnitt.

Außerdem wurden in den meisten Fällen nur die Dauerfestigkeiten und nicht die ganzen Wöhlerkurven angegeben, so daß auch nur die Kerbwirkungszahlen für die Dauerhaltbarkeitswerte, nicht aber entsprechende Verhältniszahlen für die Zeitfestigkeiten berechnet werden können. Nun interessieren im Flugzeugbau, soweit es sich um die Zelle handelt, weniger die Dauerhaltbarkeiten der Bauelemente, als vielmehr die bei bestimmten geforderten Belastungshäufigkeiten ertragbaren Spannungen, also die Zeitfestigkeiten. Da es ferner hier und da vorkommt, daß in wiederholt beanspruchten Konstruktionsteilen Gewindelöcher, eckige oder kerbverzahnte Löcher nötig sind, ist es wichtig zu wissen, ob und wieviel die für solche Fälle geltenden Zeit- und Dauerfestigkeiten größer oder kleiner sind als die von Bauteilen mit zylindrischen Bohrungen.

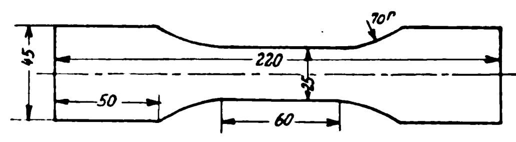


Bild 1. A. Nichtgebohrte Stäbe.

II. Versuchsproben.

Es wurden daher Versuche durchgeführt, durch die an Flachstäben aus zwei der im Flugzeugbau am meisten verwendeten Leichtmetalle geklärt werden sollte, inwieweit die Zeit- und Dauerfestigkeit der zylindrischen unbelasteten Bohrung durch andere Lochformen im Lastspielbereich zwischen 10^4 und 10^7 beeinflußt wird. Da anzunehmen war, daß die Bohrungen mit Kerbverzahnung eine größere Verminderung der Dauerfestigkeit verursachen würden als eckige Löcher, wurden von diesen Formen nur kerbverzahnte Bohrungen untersucht. Außerdem wurden Versuche mit Gewindelöchern und, zur Beschaffung von Bezugswerten, auch solche mit zylindrischen Bohrungen und ungebohrten längsgeschmirgelten Flachstäben durchgeführt.

Diese Untersuchungen an Stäben mit freien Bohrungen wurden ergänzt durch Versuche mit belasteten Bohrungen, also zuglaschenartigen Flachstäben. Diese Versuchskörper waren einfache zweischnittige Bolzenverbindungen, bei denen die mittlere Zuglasche den zu prüfenden gelochten Flachstab darstellte.

Alle Proben hatten eine Breite von 40 mm; die Größe der Bohrungen war so gewählt, daß bei allen drei Lochformen eine Verminderung der Probenbreite im Prüfquerschnitt um 10 mm eintrat. Das Verhältnis Lochdurchmesser : Stabbreite betrug demnach $d/B = 0{,}25$. Die zugehörige Formziffer ist bei der freien zylindrischen Bohrung nach Henning α_k[4]) = 2,55. Die Kerbverzahnung 8 × 10 Kr 231 wurde durch Ausstanzen der Zähne aus den vorgebohrten Löchern auf einer Ölpresse hergestellt. Die Gewindelöcher M 10

---

1) $\beta_k = \dfrac{\text{Dauerfestigkeit bei idealer Formgebung}}{\text{Dauerfestigkeit des gekerbten Probestabes}}$.

2) $\alpha_k = \dfrac{\text{Spannungsmaximum bei ideal elastischem Verhalten}}{\text{rechnerische Spannung an der Kerbstelle aus } P/F}$.

3) Thum und Bruder, Gestaltung und Dauerhaltbarkeit von geschlossenen Stabkopfen ... Deutsche Kraftfahrtforschung Heft 20.

4) s. Lehr, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen.



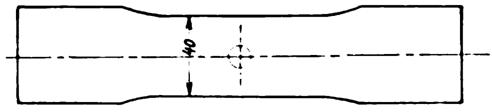


Bild 2. B. Stäbe mit zylindr. Bohrungen 10 mm Dmr.

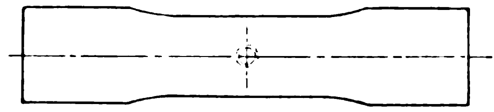


Bild 3. C. Stäbe mit Gewindelöchern M 10.

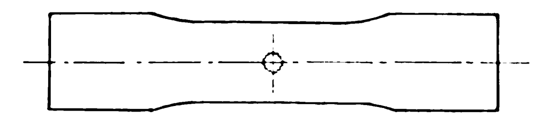


Bild 4. D. Stäbe mit kerbverzahnten Bohrungen. Kerbverz. 8 × 10 Kr 231.

Bild 2 bis 4. Proben mit unbelasteten »freien« Bohrungen.

wurden mit drei Gewindebohrern unter reichlicher Zugabe von Schmiermittel geschnitten. Die entsprechenden Probestabformen für die Proben mit unbelasteten Bohrungen sind in Bild 2 bis 4 und mit belasteten Bohrungen in Bild 5 und 6 dargestellt.

Die Oberflächen der gelochten Proben wurden nicht bearbeitet, sie behielten ihre Walzhaut; die Elektronproben waren außerdem auf der Oberfläche gebeizt. Die seitlichen Flächen waren mit Schmirgelpapier Nr. 0 geglättet und ihre Kanten ebenso wie die Kanten der zylindrischen Bohrungen leicht gebrochen. Der Sitz zwischen den Bohrungen und den Bolzen bei den Zuglaschen entsprach etwa dem Haftsitz nach DIN 777. Die nicht gebohrten Flachproben, Bild 1, wurden solange mit Schmirgelpapier 0—3/0—5/0 langsgeschmirgelt, bis die Walz- bzw. Beizhaut soeben verschwunden war.

III. Versuchswerkstoffe und Durchführung.

Die Versuche wurden mit je zwei Leichtmetallen durchgeführt, und zwar mit Duralumin nach Fliegn. 3116.5 und Elektron AZM nach Fliegn. 3510.1. Die Versuchswerkstoffe lagen in Blechen von 6 mm Stärke vor und hatten die in Zahlentafel 1 angeführten Analysen und Festigkeitswerte. Die für die Zuglaschenversuche benötigten Scherbolzen bestanden aus CrMo-Stahl von 90 kg/mm² Festigkeit (Fliegn. 1452.5).

Als Prüfmaschine wurde ein 3-t-Fliehkraftpulser benutzt, der mit einer Lastwechselfrequenz von 25 Hz lief. Die Untersuchungen wurden mit Zugursprungsbeanspruchungen durchgeführt; die Mittelspannung, die durch eine Vorspannfeder erzeugt wurde, war also gleich dem Spannungsausschlag ($\sigma_m = \pm\, \sigma_a$). Als Grenzlastspielzahl wurde aus zeitlichen Gründen allgemein 10^7 angesetzt.

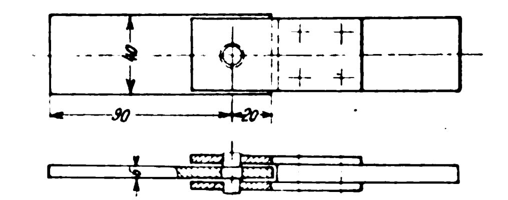


Bild 5 und 6. Proben mit belasteten Löchern (Zuglaschen).

E. Bohrung und Bolzen 10 mm Dmr.
F. Bohrung und Bolzen Gewinde M 10.
G. Bohrung und Bolzen Kerbverz. 8 × 10 Kr 231.

Zahlentafel 1.

		Duralumin 3116.5	Elektron 3510.1	
Analyse	Al	Rest	6,98	%
	Cu	3,81	—	%
	Mg	0,73	Rest	%
	Mn	0,60	0,4	%
	Fe	0,37	—	%
	Si	0,54	—	%
	Zn	—	1,05	%
Festigkeit	σ_B	42,6	31,5	kg/mm²
	$\sigma_{0,2}$	29,4	21,5	kg/mm²
	δ_5	19,9	14,4	%
	σ_{urz}	15,0	14,0	kg/mm²

IV. Versuchsergebnisse.

a) Proben aus Duralumin.

Die Versuchskurven sind in Bild 7 für die freien Bohrungen und in Bild 8 für die belasteten Bohrungen zusammengestellt. In Bild 7 fällt zunächst auf, daß von den gelochten Stäben solche mit zylindrischen Bohrungen die am höchsten liegende Wöhlerkurve ergeben, während die der kerbverzahnten Proben am tiefsten verläuft. Die Verminderung der Dauerfestigkeit der Lochproben durch die Verzahnung beträgt etwa 20%. Obwohl beide Kurven im Bereich geringerer Lastspielzahlen immer mehr divergieren, bleibt die prozentuale Minderung ungefähr gleich. Bei den Gewindelöchern beträgt die Minderung nur 11% und wird im Zeitfestigkeitsbereich noch geringer.

Die Wöhlerlinien der Proben mit belasteten Bohrungen liegen erheblich tiefer als derjenigen mit freien Bohrungen (Bild 8 und Zahlentafel 2). Die Dauerhaltbarkeiten sind auf weniger als die Hälfte gesunken. Im Bereich kleiner Lastspielzahlen werden die Minderungen allmählich prozentual geringer. Die deutlichen Unterschiede im Verlauf der drei Wöhlerlinien der freien Bohrungen verwischen bei den belasteten ziemlich stark, wobei sich die Reihenfolge nicht ändert. Die Kurven liegen jetzt unter sich so nahe

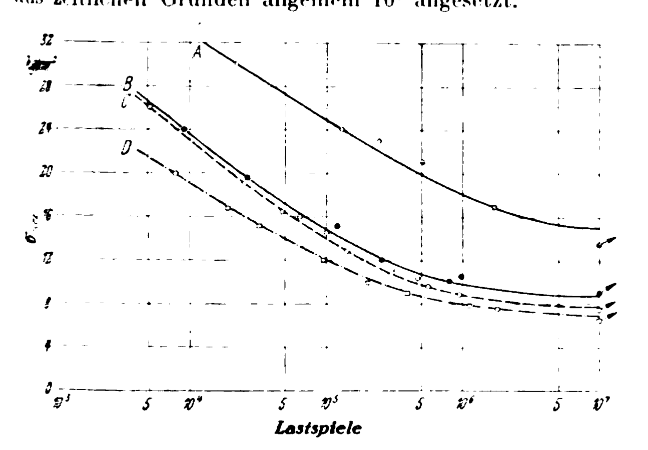


Bild 7. Duralumin 3116.5. Freie Bohrungen.

A. Ungebohrte Stäbe.
B. Zylindrische Bohrungen 10 mm Dmr.
C. Gewindelöcher M 10.
D. Kerkverz. Bohrungen 8 × 10 Kr 231.

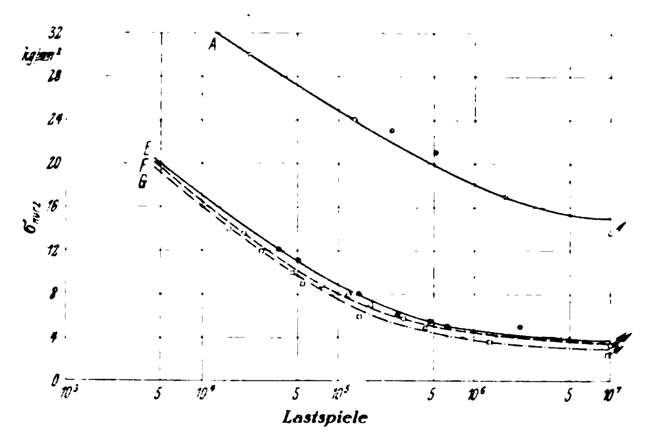


Bild 8. Duralumin 3116.5. Belastete Bohrungen.

A. Ungebohrte Stäbe.
E. Zylindr. Bohrungen 10 mm Dmr.
F. Gewindelöcher M 10.
G. Kerbverz. Bohrungen 8 × 10 Kr 231.

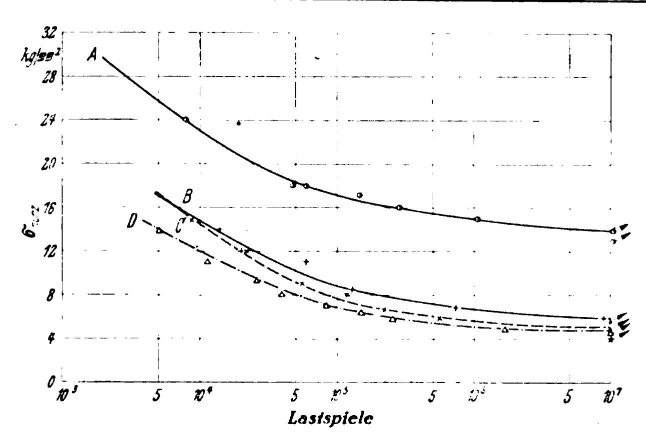


Bild 9. Elektron 3510.1. Freie Bohrungen.
A. Ungebohrte Stäbe.
B. Zylindr. Bohrungen 10 mm Dmr.
C. Gewindelöcher M 10.
D. Kerbverz. Bohrungen 8 × 10 Kr 231.

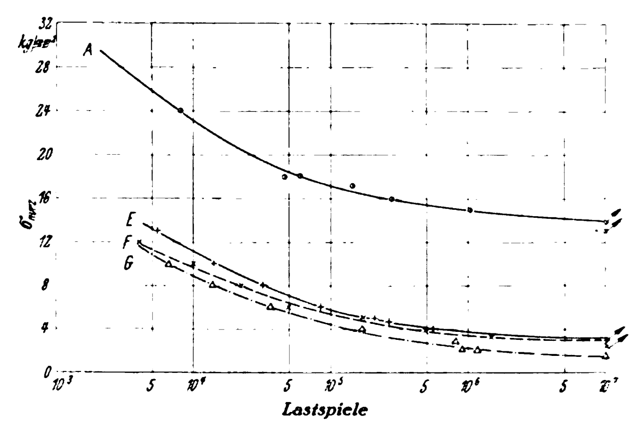


Bild 10. Elektron 3510.1. Belastete Bohrungen.
A. Ungebohrte Stäbe.
E. Zylindr. Bohrungen 10 mm Dmr.
F. Gewindelöcher M 10.
G. Kerbverz. Bohrungen 8 × 10 Kr 231.

beieinander, daß die Streuwerte der einen vielfach in den Bereich der beiden anderen fallen. Die Minderung durch die Verzahnung beträgt trotzdem noch 20% bei 10^7 Lastspielen.

b) Proben aus Elektron.

Die mit den Stäben aus Elektron AZM erhaltenen Wöhlerkurven sind in Bild 9 und 10 zusammengestellt. Bei den Flachstäben mit freien Bohrungen finden wir grundsätzlich die gleiche Tendenz wie bei den entsprechenden Versuchen mit Duralstäben, nur verlaufen die Kurven im ganzen erheblich niedriger. Die Minderung der Zeit- und Dauerfestigkeit der Proben mit zylindrischen Bohrungen durch die Verzahnung beträgt bei Elektron etwa 18%, durch das Gewinde 12% und weniger.

Bei den Zuglaschen aus Elektron fallen die Wöhlerkurven für zylindrische Bohrungen und Gewindelöcher oberhalb 10^5 Lastspielen nahezu zusammen, während sie unterhalb dieser Zahl auseinanderlaufen. Die Kurve der kerbverzahnten Zuglaschen liegt im ganzen wesentlich tiefer als die beiden anderen. Ihre Divergenz wird besonders auffällig bei höheren Lastspielzahlen. Die Minderung bei 10^7 gegenüber der zylindrischen Bohrung beträgt über 50%. Sie wird bei niedrigeren Lastspielzahlen geringer.

V. Auswertung.

In Zahlentafel 2 und 3 sind außer den Zeit- und Dauerfestigkeiten für einige Belastungshäufigkeiten die Verhältniszahlen Zugursprungsspannung der Proben ohne Bohrung zu Zugursprungsspannung der Proben mit Bohrung (σ_{urz} : $\sigma_{n\,urz}$) angegeben. Dieses Verhältnis ist im Falle der Dauerfestigkeit mit der Kerbwirkungszahl β_k identisch. Im folgenden wird der Einfachheit halber auch bei niedrigeren Lastspielzahlen der Ausdruck Kerbwirkungszahl beibehalten, obwohl nach dem Arbeitsblatt 5 des Fachausschusses für Maschinenelemente beim VDI dieser Begriff nur als das Verhältnis der beiden Dauerfestigkeiten definiert ist. Um einen Eindruck über die Ausnutzung der statischen Zugfestigkeit des Werkstoffs zu erhalten, wurden weiter die Verhältniszahlen Zugfestigkeit zu Zugursprungsspannung der gebohrten Proben $\sigma_B : \sigma_{n\,urz}$ ausgerechnet und in die Zahlentafel aufgenommen. Im Bild 11 sind die Kerbwirkungszahlen für alle Probenformen über den Lastspielzahlen 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 aufgezeichnet worden. Aus dieser Darstellung geht folgendes hervor: Bei den Stäben mit belasteten Bohrungen findet im Gegensatz zu denen mit unbelasteten Bohrungen allgemein ein starkes Ansteigen der Kerb-

Zahlentafel 2. Duralumin 3116.5.

Lastwechsel	Freie Bohrungen												Belastete Bohrungen (Zuglaschen)									
	A			B			C			D			E			F			G		
	σ_{urz}	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$
10^7	15	1	2,84	8,8	1,7	4,84	7,8	1,92	5,46	7	2,14	6.2	3,8	3,95	11,2	3,6	4,18	11,8	3	5	14,2
10^6	18	1	2,37	9,8	1,84	4,35	8,8	2,04	4,84	8	2,25	5,33	4,8	3,75	8,88	4,5	4,0	9,5	3,8	4,75	11,2
10^5	24,9	1	1,7	14,7	1,69	2,8	14	1.78	3,04	12	2,07	3,55	8,8	2,83	4,84	7,9	3,14	5,4	7,5	3,32	5,7
10^4	33	1	1,29	23,5	1,4	1,81	23	1,43	1,85	19	1,73	2,24	17	1,94	2,51	16,5	2,0	2,6	16	2,06	2,67

A ungebohrte längsgeschmirgelte Stäbe, *B, E* Stäbe mit zylindrischen Löchern, *C, F* Stäbe mit Gewinde-Löchern, *D, G* Stäbe mit kerbverzahnten Löchern.

Zahlentafel 3. Elektron 3510.1.

Lastwechsel	Freie Bohrungen												Belastete Bohrungen (Zuglaschen)									
	A			B			C			D			E			F			G		
	σ_{urz}	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$	$\sigma_{n\,urz}$	$\frac{\sigma_{urz}}{\sigma_{n\,urz}}$	$\frac{\sigma_B}{\sigma_{n\,urz}}$
10^7	14	1	2.25	5,9	2,37	5,35	5,2	2,69	6,06	4,8	2,91	6,58	3,2	4,37	9,85	3,0	4,66	10,5	1,5	9,3	21
10^6	14,9	1	2.11	6,8	2,19	4.64	5,5	2,7	5,74	5,1	2,92	6,18	3,7	4.02	8.52	3,5	4,25	9,0	2,2	6,77	14,3
10^5	17,1	1	1,84	8,9	1,92	3,54	7,7	2,22	4.09	6,8	2,52	4,64	5,7	3	5,53	5,3	3,22	5.95	4,4	3,88	7,2
10^4	23,1	1	1,36	14,7	1,57	2,14	14,5	1,59	2.17	11,9	1,94	2,65	11,1	2,07	2,84	9,7	2,37	3,26	8,8	2,62	3,58

A ungebohrte längsgeschmirgelte Stäbe. *B, E* Stäbe mit zylindrischen Löchern, *C, F* Stäbe mit Gewinde-Löchern, *D, G* Stäbe mit kerbverzahnten Löchern.

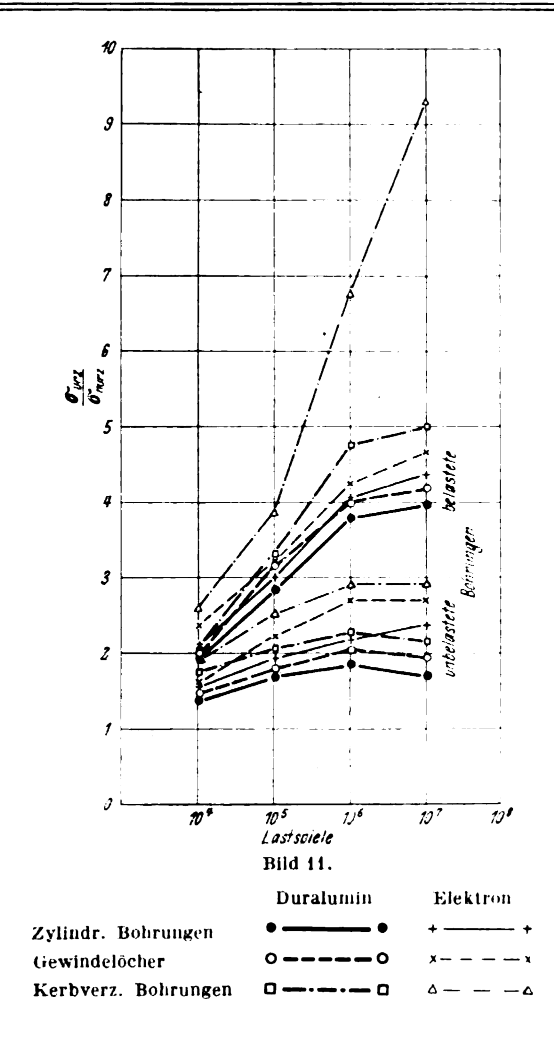


Bild 11.

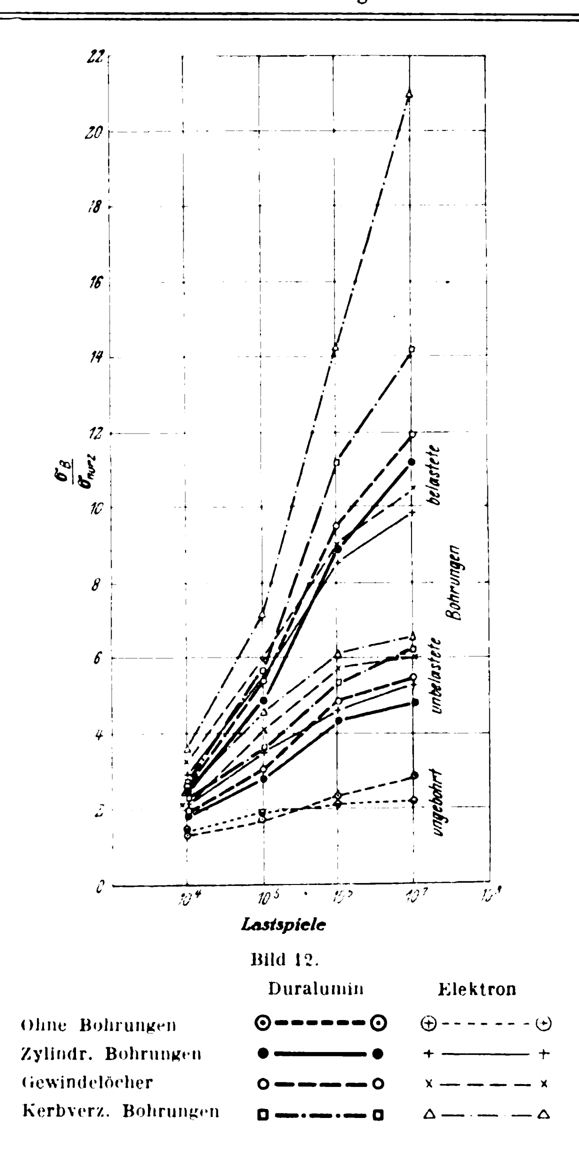


Bild 12.

wirkungszahlen β_k mit der Lastspielzahl statt. Die kerbverzahnten Bohrungen bewirken eine größere Erhöhung der Kerbwirkung als die Gewindelöcher, was besonders bei den Zuglaschen aus Elektron AZM in Erscheinung tritt. Auffällig ist, daß dieses ungünstige Verhalten der Kerbverzahnung bei den unbelasteten Bohrungen aus Elektron bei weitem nicht in dem Maße zu bemerken ist.

Aus der Aufzeichnung der Verhältniszahlen $\sigma_B : \sigma_{n\,urz}$ in Bild 12 sieht man, daß im längsgeschmirgelten, nicht gebohrten Zustand die beiden Werkstoffe hinsichtlich der Ausnutzung ihrer statischen Zerreißfestigkeit nicht allzusehr voneinander abweichen. Bei den Proben mit unbelasteten Bohrungen hingegen ist für alle drei Formen die Ausnutzung der statischen Zugfestigkeit beim Dural deutlich etwas besser als beim Elektron. Bei den Zuglaschen mit zylindrischen Bohrungen und Gewindelöchern ist teilweise bei höheren Lastspielzahlen Elektron überlegen, während im Zeitfestigkeitsbereich kein klarer Unterschied zwischen den beiden Werkstoffen vorhanden ist. Bemerkenswert ist auch hier das ungünstige Verhalten der kerbverzahnten Zuglaschen aus Elektron.

VI. Bruchformen.

Zum Schluß sei noch einiges über die besonders bei den kerbverzahnten Zuglaschen recht interessanten Dauerbruchformen bemerkt. Bei den Stäben mit unbelasteten Bohrungen traten die Dauerbrüche in bekannter Weise bei allen drei Formen im kleinsten Lochquerschnitt auf, Bild 13 und 15. An den Zuglaschen wurde bei zylindrischen Bohrungen und Gewindelöchern grundsätzlich die gleiche Bruchlage beobachtet. Bei den kerbverzahnten Zuglaschen hingegen lagen die Brüche nicht mehr im kleinsten Querschnitt, also in Richtung des auf der Längsachse senkrecht stehenden Bohrungsdurchmessers, sondern parallel zu ihm nach der Einspannung der Lasche hin verschoben, Bild 14, 16 und 17a; letzteres Bild stammt aus einer anderen Untersuchung. Außer dem Bruch im Zugquerschnitt der Laschen sind manchmal noch mehrere Biegebrüche der vor dem Hauptbruchquerschnitt liegenden Zähne festzustellen. Häufig wurden auch mehrere von verschiedenen Zähnen ausgehende Anrisse im Zugquerschnitt gefunden, Bild 17a. Ob die Zugbrüche oder die Biegebrüche der Zähne primär sind, konnte nicht festgestellt werden. Die Ursache für die Verlagerung des Zugbruches dürfte die Tatsache sein, daß die zwischen dem kleinsten Querschnitt ($A - A$), Bild 17a, und dem Bruchquerschnitt ($B - B$) liegenden Zähne sich hauptsächlich an der Kraftübertragung auf den Bolzen beteiligen, wobei die nach der Einspannung zu liegenden den größten Kraftanteil übernehmen. Die nach dem Stangenkopfbogen zu liegenden Zähne werden immer geringere Lastanteile bekommen, so daß in Kraftrichtung gesehen eine ähnliche Lastverteilung in den Zähnen entsteht wie in den Gewindegängen einer zugbelasteten Schraube. Infolge dieser Lastverteilung erfolgt der Dauerbruch nicht im kleinsten Querschnitt, sondern im Querschnitt der am höchsten beanspruchten Zähne. Dabei kann die Beanspruchung der Zähne selbst so groß werden, daß sie Biegebrüche erleiden.

In diesem Zusammenhang sei noch auf die bemerkenswerte Bruchform hingewiesen, die in einer anderen Untersuchung an dauerdruckbeanspruchten Stabköpfen mit kerbverzahnter Bohrung erhalten wurde, Bild 17b, und die die oben angegebene Erklärung für die Bruchlage bestätigt. Auf dem Bild erkennt man deutlich zehn Biegebrüche der hauptsächlich an der Kraftübertragung auf den

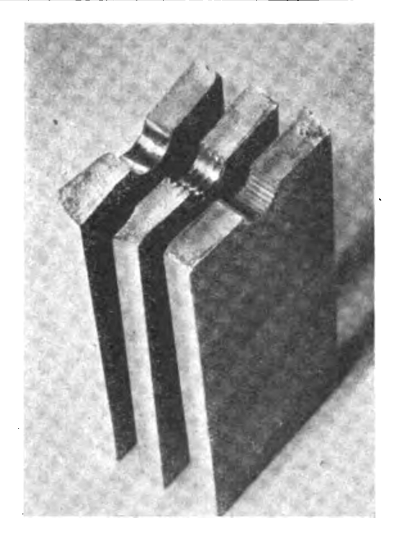


Bild 13. Dauerbrüche an Stäben mit unbelasteten Bohrungen Duralumin 3116.5.

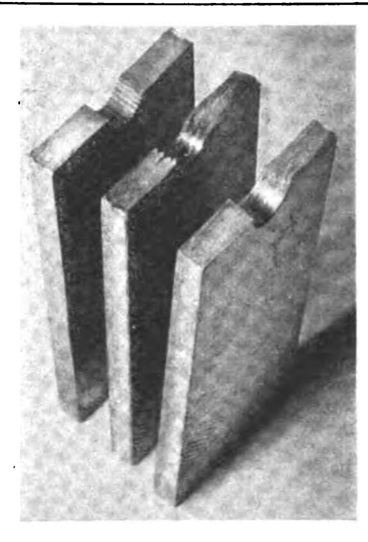


Bild 15. Dauerbrüche an Stäben mit unbelasteten Bohrungen Elektron AZM 3510.1.

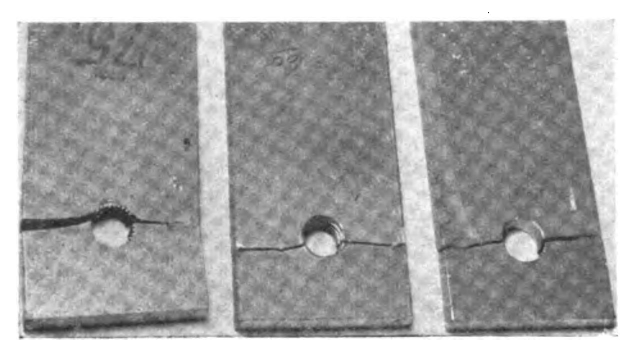


Bild 14. Dauerbrüche an Stäben mit belasteten Bohrungen Duralumin 3116.5.

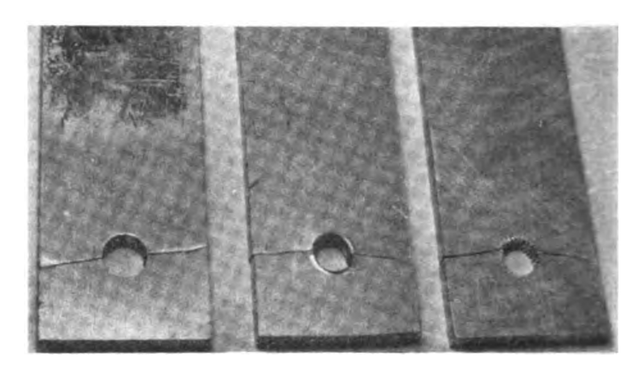


Bild 16. Dauerbrüche an Stäben mit belasteten Bohrungen Elektron AZM 3510.1.

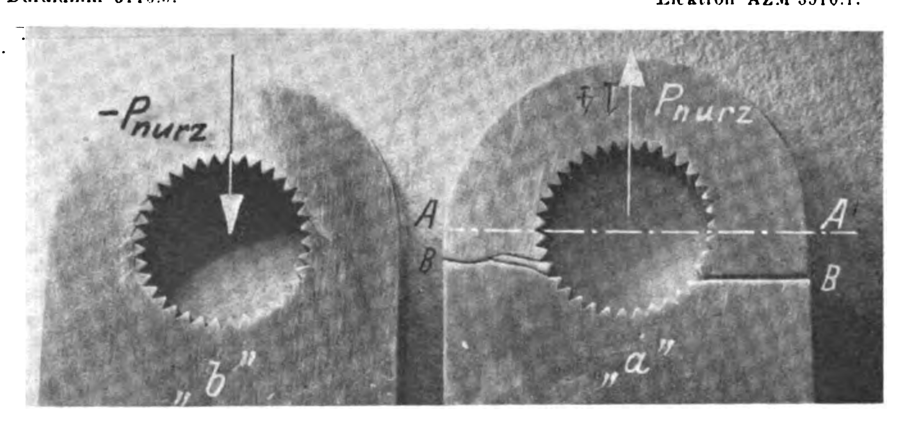


Bild 17. Dauerbrüche an Stabköpfen aus Elektron 3510.1.
a) Bei Zugursprungsbeanspruchung.
b) bei Druckursprungsbeanspruchung.

Bolzen beteiligten Zähne. Es konnte beobachtet werden, wie die einzelnen Zahnbrüche während des Versuchsablaufs nacheinander entstanden, und zwar zuerst an den höchstbelasteten Zähnen. Ein Bruch im Stabquerschnitt war bei Abbruch des Versuches noch nicht eingetreten.

VII. Zusammenfassung.

Es wurden Dauerversuche mit Zugursprungsbelastung an Flachproben aus Duralumin 3116.5 und Elektron AZM 3510.1 mit unbelasteten freien Bohrungen und mit bolzenbelasteten Bohrungen (Zuglaschen) verschiedener Form beschrieben. Aus den Ergebnissen, die in Form von Wöhlerlinien dargestellt sind, wurden die Verhältniszahlen σ_{urz} : $\sigma_{n\,urz}$ (Kerbwirkungszahlen β_k) und $\sigma_B : \sigma_{n\,urz}$ für 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 Lastspiele berechnet.

Es zeigte sich, daß die Kerbwirkung der kerbverzahnten Bohrungen bei beiden Werkstoffen größer als die der Gewindelöcher und diese wieder größer als die der zylindrischen Bohrungen ist, und zwar sowohl bei den unbelasteten Bohrungen als auch bei den Zuglaschen. Bei den belasteten Bohrungen nimmt die Kerbwirkung für alle drei Formen erheblich größere Beträge an als bei den unbelasteten, so daß die Zeit- und Dauerfestigkeit der Zuglaschen erheblich niedriger ist. Das Verhältnis der Dauerfestigkeiten von nicht gebohrten und gebohrten Proben (Kerbwirkungszahl) steigt bei den unbelasteten Bohrungen nur wenig, bei den belasteten stärker mit der Lastspielzahl an. Die Verhältniszahlen $\sigma_B : \sigma_{n\,urz}$ wachsen erheblich mehr mit der Lastspielzahl, besonders bei den Zuglaschen. Bei beiden Darstellungsarten war das sehr ungünstige Verhalten der kerbverzahnten Zuglaschen aus Elektron AZM bemerkenswert.

Weiter wurden einige Bemerkungen zu den Bruchformen gemacht, wobei besonders auf die eigenartige Bruchlage bei den kerbverzahnten Zuglaschen hingewiesen wurde.



Ein Beitrag zur Metallographie der ausscheidungsfähigen Phase $CuAl_2$ in technischen Al-Cu-Mg-Legierungen.

Von R. Mechel.

Bericht der Focke-Wulf-Flugzeugbau GmbH, Bremen.

Ausscheidungen von $CuAl_2$ sind in technischen Al-Cu-Mg-Legierungen dann zu erhalten, wenn Glühungen oberhalb 200° vorgenommen werden. Die Anordnung und Menge der Ausscheidungen ist außer von der Glühtemperatur abhängig von der Vorbehandlung des Werkstoffes. Schroffe Abkühlung von 500° ergibt Zwillingsbildung, an der die ersten Ausscheidungen von $CuAl_2$ nach Glühung bei 200° auftreten. Langsame Abkühlung von 500° und nachträgliches Anlassen läßt ein Gefüge entstehen, das dem des Troostits bei Stahl sehr ähnlich ist. Die ausscheidungsfähige Phase scheidet sich also in hochdisperser Form aus. Die Ausscheidungen sind alle reversibel, d. h. sie können wieder durch Glühung bei 500° in Lösung gebracht werden. Die beim autogenen oder elektrischen Schweißen auf-auftretenden Ausscheidungen neben der Schweißnaht im Werkstoff sind dagegen nicht wieder rückzubilden. Ihre Wirkung auf die Werkstoffeigenschaften ist daher wesentlich und nachhaltig.

Der in diesem Rahmen gegebene Beitrag zur Metallographie technischer Al-Cu-Mg-Legierungen behandelt vornehmlich die Ausscheidungserscheinungen des Kupfers, die sich bei geeigneter Wärmebehandlung aus dem übersättigten Al-Cu-Mischkristall einstellen. Die Zusammensetzung der untersuchten Legierung schwankt in folgenden Grenzen [1]:

Cu = 3,7 bis 4,7%; Mg = 0,4 bis 1,0%; Si = 0,1 bis 0,7%; Mn = 0,3 bis 0,7%; Fe + Ti < 0,5%.

Vorweg sei kurz das für das Verständnis der späteren Ausführungen Notwendige geschildert.

Die im festen Zustande vorhandene Löslichkeit des Kupfers in Al, die mit fallender Temperatur abnimmt, ist bekanntlich die Ursache für die Aushärtungserscheinungen [2] der technischen Al-Cu-Mg-Legierungen. Die Aushärtung tritt nach Unterkühlung der festen Lösung durch Lagern bei Raumtemperatur oder durch Erwärmung auf Temperaturen um 160° auf. Unter Aushärtung wird der im Laufe der Zeit bis auf einen Endwert ansteigende Vorgang der Verfestigung des Werkstoffes bei gleichzeitiger Einbuße an Dehnung verstanden. Selbstaushärtung und Warmaushärtung unterscheiden sich im strukturellen Effekt im wesentlichen dadurch, daß bei der ersteren keinerlei Anzeichen von Ausscheidungen auftreten, während bei der letzteren die Verfestigung durch Ausscheidungen hervorgerufen wird. Zu beachten ist ferner, daß bei der Warmaushärtung einer an sich auch selbstaushärtenden Legierung besonders die Streckgrenze wesentlich gesteigert wird, während die Festigkeit etwa den gleichen Wert behält [3]. Ausgeprägter wird der Streckgrenzenanstieg, wenn der Werkstoff vor dem Tempern gereckt wird.

Die für die Aushärtung maßgeblichen Ausscheidungen sind mikroskopisch nicht sichtbar, es dürfte sich aber sehr wahrscheinlich um einen Zwischenzustand handeln, wie er an einer binären Al-Cu-Legierung [4] festgestellt wurde. Die Selbstaushärtung ist mit Sicherheit durch geordnetes Sammeln des Kupfers im Al-Gitter zu erklären. Diese in homogener Phase verlaufende Ordnung ist einmal durch Erhöhung des elektrischen Widerstandes [5] und zum anderen durch die Unveränderlichkeit des Gitterparameters [6] gekennzeichnet. Ein weiterer Hinweis, daß die beiden Aushärtungen verschiedene Ursachen haben, kann auch aus ihrem Korrosionsverhalten entnommen werden. Die Warmaushärtung zeigt geringere Korrosionsbeständigkeit, da bei ihr Ausscheidungen auftreten, und so auf Grund verschiedenen elektrochemischen Potentials die Bildung von wirksamen Lokalelementen möglich ist.

Aus den bisherigen Erkenntnissen geht also hervor, daß eine sichtbare Gefügeveränderung nicht zu den Begleiterscheinungen der Aushärtung dieser Legierungen gehört. Metallographisch gesehen bietet dieser technisch wichtige Effekt keinerlei Anregungen. Auch die in den technischen Legierungen vorhandenen binären oder ternären intermediären Kristallarten bieten wenig Aufschluß, da sie meistens nicht oder erst bei hohen Temperaturen (über 500°) in Lösung gehen und dadurch unverändert ihren Ort einhalten. Durch diese Unbeweglichkeit in den für technische Al-Cu-Mg-Legierungen einzuhaltenden Temperaturintervallen ist die Bestimmung ihrer Zusammensetzung oft sehr schwierig und ein gefügemäßiger Einfluß auf die Aushärtung bisher nicht beobachtet worden.

Um ein Bild über die Ausscheidungsformen von Cu aus dem übersättigten Mischkristall zu gewinnen, das für die Beurteilung falscher Wärmebehandlung in der Praxis von Nutzen sein kann, müssen Temperaturen und Zeiten gewählt werden, die die technische Qualität des Werkstoffes stark mindern.

Die im nachfolgenden beschriebenen Gefügebilder wurden durch Glühbehandlungen an Blechen aus Al-Cu-Mg-Legierungen erhalten. Um die Reproduzierbarkeit der einzelnen Ausscheidungen zu gewährleisten, wurde von drei Blechdicken, 1, 1,5 und 2 mm, je ein Schliff der gleichen Behandlung unterzogen. Die Glühungen bei 500° wurden im Salzbad vorgenommen. Alle anderen Glühungen bis 300° wurden in einem Luftofen durchgeführt. Sämtliche Schliffe wurden mit einem Ätzmittel nach Keller geätzt[1]).

Der Gefügezustand der im Anlieferungszustand vorliegenden Bleche zeigt, da sie bei Raumtemperaturen ausgehärtet sind, bekanntlich keine Ausscheidungen von $CuAl_2$. Ausgenommen sind primäre Einschlüsse von $CuAl_2$, die im Werkstoff immer vorkommen. Das Vorhandensein von $CuAl_2$-Einschlüssen ist dadurch erklärt, daß Kupferseigerungen und die durch die anderen Beimengungen hervorgerufene Verschiebung der Löslichkeitslinie zu Konzentrationen führen, die oberhalb der Löslichkeit des Kupfers im Al liegen. Da die Diffusion überflüssigen Kupfers zu Stellen geringerer Konzentration nur langsam vor sich geht, verbleiben gewisse Mengen von $CuAl_2$ ungelöst im Werkstoff. Das Kupfer befindet sich also nach dem vorher Gesagten in der Hauptsache in Lösung, und zwar in homogener Phase verlaufender geordneter Ausrichtung. Aus diesem Zustande wurden Schliffe auf 100, 200 und 300° angelassen. Schliffe, die bei 100° 72 h angelassen wurden, zeigten kaum Ausscheidungen. Dagegen genügte ein 24stündiges Anlassen bei 200°, um Ausscheidungen an den Korngrenzen auftreten zu lassen. In Bild 1 und 2 sind bei verschiedener Vergrößerung diese

[1]) Ätzmittel nach Keller: 1. 1 min bei 70° C in 25% HNO_3, 2. ½ Std. in einer 10% Lösung folgender Zusammensetzung: 0,5 g Natriumfluorid, 1 cm³ HNO_3 konz., 2 cm³ HCL konz. und 97 cm³ H_2O.



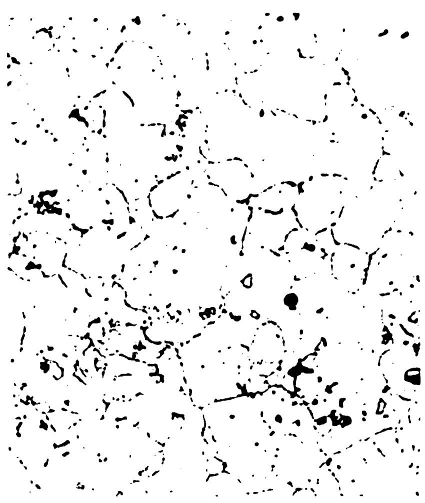


Bild 1. Aus dem Lieferzustand 24/h bei 200° geglüht. In der Hauptsache Ausscheidungen an den Korngrenzen. Vergr. 220 fach.



Bild 2. Stelle aus Bild 1 höher vergrößert. Ausscheidungen treten an den Korngrenzen perlschnurartig auf. Vergr. 500 fach.

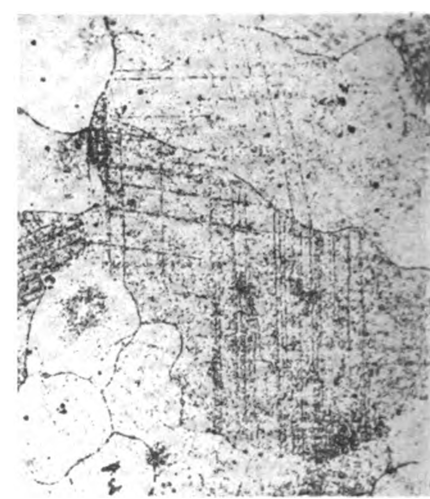
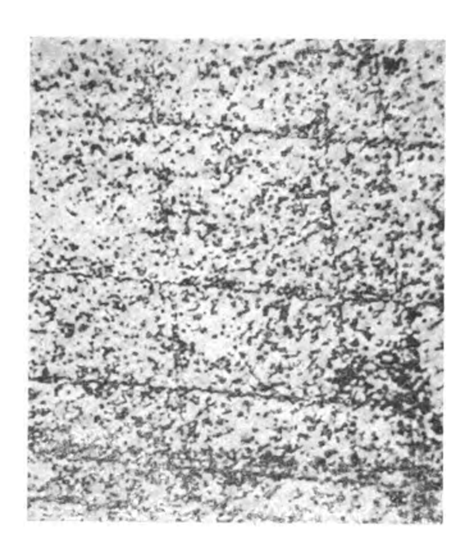


Bild 3. Aus dem Lieferzustand 24/h bei 200° geglüht. Das Korn in der Mitte zeigt vorwiegend Zwillingsstreifen. Vergr. 220 fach.



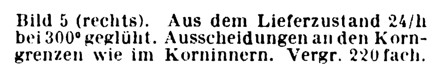
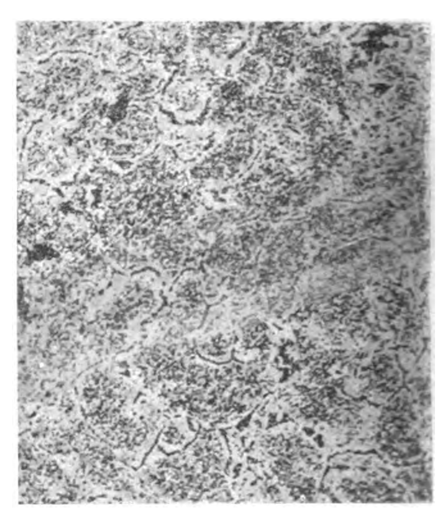


Bild 4 (links). Eine Stelle aus dem Korn von Bild 3 hoch vergrößert. Vergr. 900 fach.

Bild 5 (rechts). Aus dem Lieferzustand 24/h bei 300° geglüht. Ausscheidungen an den Korngrenzen wie im Korninnern. Vergr. 220 fach.



Ausscheidungen dargestellt. Man erkennt bei der hohen Vergrößerung, daß die Ausscheidungen nicht gleichmäßig die Korngrenzen ausfüllen, sondern daß sie in verschiedener Stärke perlschnurartig auftreten. An anderen Schliffen derselben Behandlung wurden auch im Korn Ausscheidungen gefunden, und zwar treten diese in einzelnen Körnern streifenförmig auf, wie dies Wassermann [4] in einer binären Legierung von Al und Cu gefunden hat. Die Streifen werden am deutlichsten bei mittlerer Vergrößerung. Nach E. Schmid sind diese Streifen Abschreckzwillinge, bei denen die Ausscheidungen bevorzugt erfolgen. In Bild 3 ist in der Mitte ein großes Korn mit diesen Ausscheidungen zu sehen. Bei hoher Vergrößerung sind die Ausscheidungen als Partikel zu erkennen, wie dies Bild 4 zeigt. Die Zwillingsbildung und die damit verbundene streifenförmige Ausscheidung läßt sich im allgemeinen bei den untersuchten Blechen verschiedener Lieferfirmen nicht in der Klarheit erzielen, wie es die binäre Al-Cu-Legierung von Wassermann zeigt. Der Effekt kann jedoch hierbei erhöht werden, wenn längere Zeit bei 500° homogenisiert und anschließend in Eiswasser abgeschreckt wird. Außerdem werden die Ausscheidungen an den Zwillingsbegrenzungen deutlicher, wenn die Proben länger als 24 h bei 200° angelassen werden.

Vorwiegend treten jedoch die Ausscheidungen an den Korngrenzen auf, wenn ein Blech auf 200° 24 h erwärmt wird. Vergleicht man die Möglichkeit, daß bei sonst gleicher Vorgeschichte der einzelnen Körner einmal nur an den Korngrenzen, zum anderen aber auch im Korn Ausscheidungen, und zwar durch Zwillingsbildung verursacht, auftreten, so können für die Wahl des Ortes der ersten Ausscheidungen gleiche oder ähnliche Grenzbedingungen angenommen werden. Die Körner befinden sich im Kohäsionsverband sicher niemals ohne jede Spannung, so daß die Korngrenzen als Grenzflächen größter Spannung die Richtung der ersten Ausscheidungen determinieren. In ähnlicher Weise wirken die Grenzflächen der Zwillinge, die im Korn ein durch die Art ihres Entstehens bedingtes neues Spannungsbild ergeben. Für die Stärke der Ausscheidungen an den Korngrenzen ist natürlich noch die additive Wirkung der jeweils zusammenstoßenden Körner maßgebend. Sind also auf Grund von Grenzbedingungen Ausscheidungen bevorzugt aufgetreten, dann wirken diese wieder für die weitere Entmischung als Ziel, so daß vorerst ein Abwandern der Partikel zu den primären Ausscheidungen eintritt. So kann auch Sachs [7] verstanden werden, der, durch Leitfähigkeitsmessungen an einer Al-Mn-Legierung veranlaßt, darauf hinweist, daß die Anwesenheit von Kristallen der ausscheidungsfähigen Phase für die Einstellung des Gleichgewichtes günstig ist. Die durch Grenzbedingungen zuerst entstandenen Ausscheidungen sind dann in diesem Sinne primär, und die stärkste Entmischung findet an den Korngrenzen eines jeden Kornes statt. Bei größerer Beweglichkeit der Partikel ist diese Entmischung besonders deutlich zu sehen.

Werden nämlich Schliffe aus dem Lieferzustand bei 300° 24 h angelassen, so zeigt das Gefüge erhebliche Ausscheidungen. In Bild 5 ist das Gefüge bei mittlerer Vergrößerung zu sehen. Neben den Ausscheidungen an den Korngrenzen, die eine Entmischung in der näheren Umgebung hervorgerufen haben, wie dies die mehr oder weniger starke Aufhellung zeigt, haben sich auch Segregate in den Körnern gebildet.



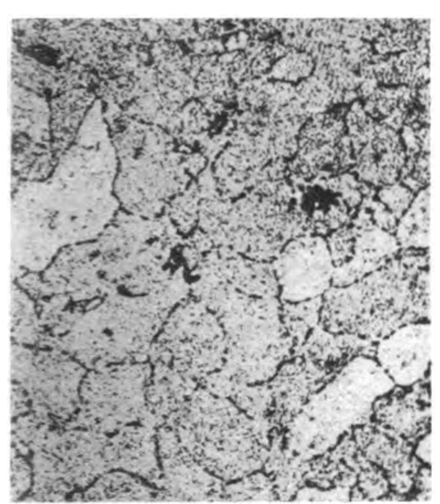


Bild 6. Von 500° in der Luft abgekühlt und anschließend 24/h bei 100° geglüht. Starke Ausscheidungen an den Korngrenzen und richtungsunabhängige im Korn. Vergr. 220 fach.

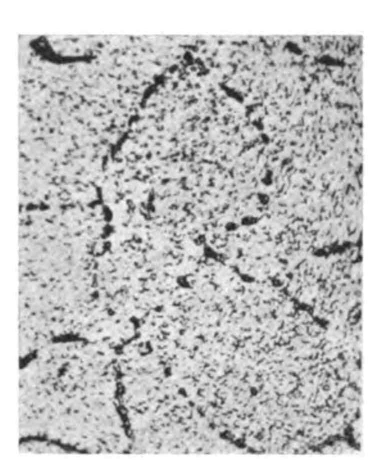


Bild 7. Eine höhere Vergrößerung einer Stelle aus Bild 6. Vergr. 500 fach.

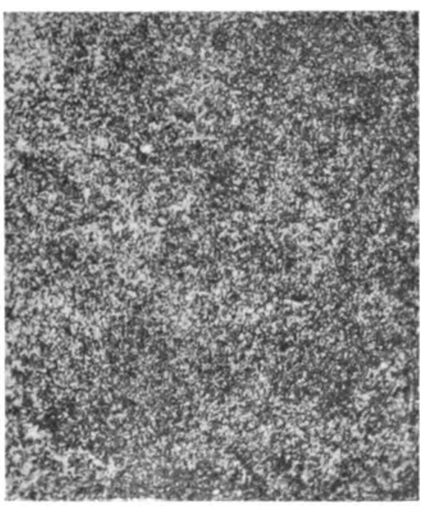
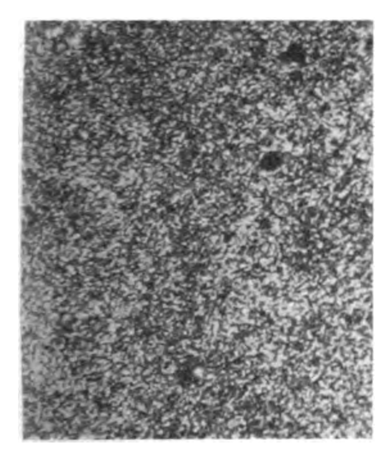


Bild 8. Von 500° in der Luft abgekühlt und anschließend 24/h bei 200° geglüht. Die ausscheidungsfähige Phase tritt gleichmäßig und dicht auf. Vergr. 220 fach.



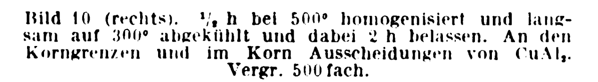
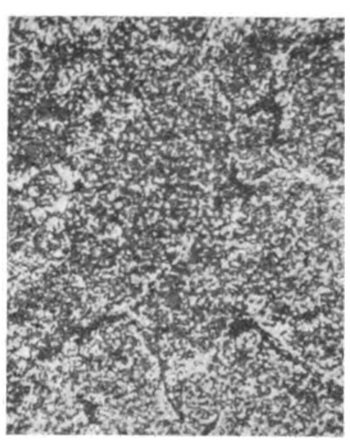


Bild 9 (links). Eine hohe Vergrößerung des im Bild 8 dargestellten Zustandes. Hierbei ist mit Sicherheit keine Auflösung festzustellen. Vergr. 500 fach.

Bild 10 (rechts). ½ h bei 500° homogenisiert und langsam auf 300° abgekühlt und dabei 2 h belassen. An den Korngrenzen und im Korn Ausscheidungen von $CuAl_2$. Vergr. 500 fach.



Dieselben Glühungen an Schliffen, die vorher bei 500° homogenisiert und dann in Wasser abgeschreckt wurden, ergaben die gleichen Ausscheidungen. Es besteht auch kein Anlaß dafür, daß andere Erscheinungen auftreten müßten.

Erheblich schneller und stärker treten Ausscheidungen bei den Schliffen auf, die nach 10 minutigem Glühen bei 500° in Luft abgekühlt werden. In Bild 6 sind bei mittlerer Vergrößerung die Ausscheidungen nach 24 stündigem Glühen bei 100° zu sehen. Neben den Ausscheidungen an den Korngrenzen treten in allen Körnern ebenfalls Segregate auf. Bei höherer Vergrößerung sieht man in Bild 7, daß die Ausscheidungen an den Korngrenzen gröber, aber wie in Bild 2 nicht zusammenhängend sind. Im Korn treten die Ausscheidungen richtungsunabhängig und weniger grob auf. Wird ein Schliff nach vorher beschriebener Behandlung 24 h bei 200° geglüht, dann treten die Ausscheidungen bereits so dicht auf, daß die einzelnen Körner nicht mehr unterschieden werden können. In Bild 8 und 9 ist diese Gefügeerscheinung dargestellt. Auch bei hoher Vergrößerung sind die Ausscheidungen kaum aufzulösen. Diese hochdispersen Ausscheidungen können gefügemäßig mit der Verteilung des Fe_3C im Troostit verglichen werden.

Die Gefügeerscheinungen der beiden letzten Behandlungen lassen sich zwanglos folgendermaßen erklären: Durch die verhältnismäßig langsame Abkühlung an der Luft bereiteten sich die Ausscheidungen vor. Mikroskopische Ausscheidungen sind jedoch nach dieser Behandlung nicht festzustellen. Die Vorbereitung findet ohne Bevorzugung irgendeiner Richtung im ganzen Korn statt; denn auch luftabgekühlte Bleche zeigen Selbstaushärtung, deren Höhe jedoch von der Geschwindigkeit der Luftabkühlung abhängt, d. h. die geordnete Sammlung des Kupfers findet im Mischkristall bereits statt. Streifenförmige Ausscheidungen können nicht auftreten, da die Möglichkeit der Bildung von Abschreckzwillingen fehlt. Da also keine Bevorzugung an irgendeiner Stelle des Mischkristalls für die Ausscheidung besteht, treten sie, abgesehen von der additiven Wirkung an den Korngrenzen, bei 200° gleichmäßig im Korn auf.

Welcher Art nun die bisher beobachteten Ausscheidungen sind, läßt sich aus den vorliegenden Untersuchungen nicht eindeutig sagen. Ob auch bei den komplexen Al-Cu-Mg-Legierungen die Bildung des $CuAl_2$ über den Zwischenzustand geht, wie es Wassermann [4] an einer binären Al-Cu-Legierung nachweisen konnte, ist vorerst nicht zu sagen. Sicher dürften aber die Ausscheidungen bei 300° $CuAl_2$ sein, und die unterhalb dieser Temperatur entstandenen hätten mit jenen immerhin die Wirkung gemeinsam, daß sie die Festigkeit des ausgehärteten Werkstoffes erniedrigen. Man kann ohne einen großen Fehler zu machen von $CuAl_2$-Ausscheidungen allgemein sprechen, da der Zwischenzustand strukturell noch nicht erfaßt ist, und, wenn auch den Vorgang der Entmischung besser beschreibend, doch noch nicht zum gesicherten Wissensgut der Metallkunde gehört.

Wird ein Blech der Al-Cu-Mg-Legierungen nach ½-stündigem Homogenisieren bei 500° im Salzbad langsam auf 300° abgekühlt und dann 2 h dabei belassen, so hat sich das $CuAl_2$ vollkommen ausgeschieden. Im Lichtbild 10 ist dieses Gefüge zu sehen. Man erkennt, daß die Ausscheidungen verhältnismäßig grob sind, und daß die Korngrenzen teilweise durch kompakte Ansammlungen von $CuAl_2$ angedeutet sind.

Die bisher beschriebenen Ausscheidungen sind alle wieder durch Homogenisieren rückzubilden, und zwar genügt ein 10 minutiges Glühen bei 500° im Salzbad, um jede Aus-



Bild 11. Schweißgefüge neben der Schweißnaht. Ausscheidungen von $CuAl_2$ vorwiegend an den Korngrenzen. Vergr. 220fach.



Bild 12. Schweißgefüge wie Bild 11 höher vergrößert. Die Körner zeigen bereits die für das Gußgefüge charakteristische Abrundung. Vergr. 500fach.

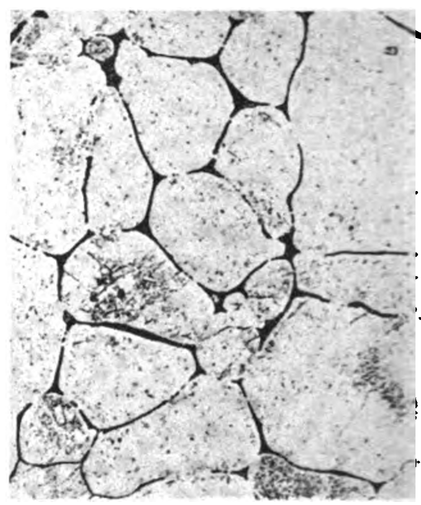


Bild 13. Im Luftofen 3 min bei 560° erhitzt und an der Luft abgekühlt. Das Gefüge ist dem neben der Schweißung entstandenen sehr ähnlich. Vergr. 220fach.

scheidungsform wieder in Lösung zu bringen. Es gibt jedoch Ausscheidungsformen des Kupfers, die durch Glühungen bei 500° bei praktischen Glühzeiten nicht wieder in Lösung gehen. Ein solches Gefüge entsteht, wenn diese Legierung geschweißt wird. Neben der Schweißnaht in der überhitzten Zone scheidet sich das $CuAl_2$ vorwiegend an den Korngrenzen aus, und wie die Abrundung der Körner es zeigt, liegt fast ein Gußgefüge vor. Die an den Korngrenzen auftretende Entmischung ist aber nicht reines $CuAl_2$, sondern dem Zustandsbild entsprechend vorwiegend das Eutektikum Al-$CuAl_2$ mit etwa 33% Kupfer. In Bild 11 und 12 sind in verschiedener Vergrößerung die Ausscheidungen abgebildet. Um festzustellen, welche Temperatur dieses Gefüge entstehen läßt, wurden mehrere Bleche von 500° aufwärts bis 580° im Luftofen etwa 3 min lang überhitzt. Nach dieser Untersuchung liegt die Temperatur bei etwa 560°. In Bild 13 ist das nach Überhitzen bei 560° entstandene Gefüge abgebildet. Man sieht, daß dieses Gefüge dem Überhitzungsgefüge neben der Schweißnaht sehr ähnlich ist. Bei höherer Temperatur treten auch grobe Ausscheidungen im Korn auf. In Bild 14 ist das Gefüge einer Punktschweißung wiedergegeben, die im Übergang von der Schweißlinse zum Blech neben Ausscheidungen an den Korngrenzen auch Entmischungen im Korn zeigt.

Diese Ausscheidungen des $CuAl_2$ gehen, wie schon oben gesagt, bei normalen Glühzeiten nicht wieder in Lösung. Sie können daher als schädlich angesehen werden, weil durch die starke Entmischung des wichtigen Bestandteiles diese Legierung einen guten Teil ihrer Eigenschaften verliert. Die kurze Zeit für die Entmischung reicht jedoch nicht aus, um sämtlichen Cu-Gehalt auszuscheiden, so daß, wenn auch schwächer, eine Nachveredelung möglich ist.

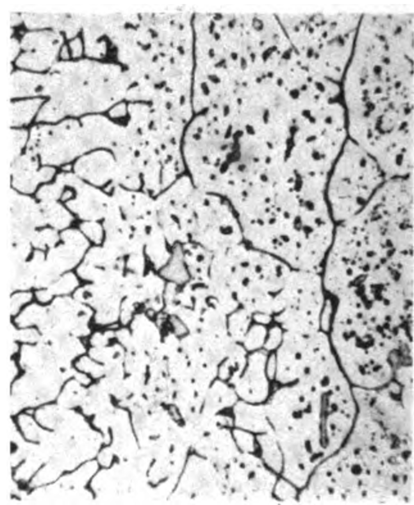


Bild 14. Punktschweißung. Übergang von der Schweißlinse zum Blech. Ausscheidungen von $CuAl_2$ sowohl im Korn als auch an den Korngrenzen. Vergr. 220fach.

Zusammenfassung.

Nach kurzem Eingehen auf den heutigen Stand des Wissens über den Vorgang der Aushärtung bei den technischen Al-Cu-Mg-Legierungen werden die Ausscheidungsformen der ausscheidungsfähigen Phase $CuAl_2$ aus dem übersättigten Al-Cu-Mischkristall nach Glühungen bei verschiedenen Temperaturen beschrieben. Die von Wassermann gefundenen streifenförmigen Ausscheidungen können auch bei technischen Al-Cu-Mg-Legierungen nachgewiesen werden. Durch geeignete Wärmebehandlung wird eine Gefügeform der ausscheidungsfähigen Phase gefunden, die der des Troostits bei Stahl sehr ähnlich ist. Die durch Erwärmung der unterkühlten Lösung auftretenden Ausscheidungen, deren Anordnung und Form durch spezifische Maßnahmen gelenkt werden können, sind in der Regel durch kurzzeitige Glühung um 500° rückzubilden. Im Gegensatz zu diesen reversiblen Gefügeerscheinungen werden Ausscheidungsformen gezeigt, die beim autogenen oder elektrischen Schweißen entstehen, und die im wesentlichen durch Glühungen nicht wieder in feste Lösung gebracht werden können.

Schrifttum.

[1] Flieg-Werkstoff-Handbuch. Werkstoff 3116.
[2] P. D. Merica, R. G. Waltenberg u. H. Scott, Sci. Pap. Bur. Stand. 1919 Nr. 347.
[3] G. Masing, Z. Metallkde. Bd. 22 (1930) S. 90 bis 94.
[4] G. Wassermann, Z. Metallkde. Bd. 30 (1938) S. 62.
[5] W. Fraenkel, Z. Metallkde. Bd. 12 (1920) S. 427 bis 430.
[6] J. u. G. Hengstenberg, Wassermann, Z. Metallkde. Bd. 23 (1931) S. 114 bis 117.
[7] G. Sachs, Praktische Metallkunde, Dritter Teil, Wärmebehandlung. Julius Springer 1935, S. 39, Absatz 2.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 4 SEITE 111 BIS 154 | MÜNCHEN, 22. 4. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen über Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 22. April 1941 Lfg. 4

Jonathan Zenneck.



Am 15. April 1941 begeht Jonathan Zenneck, Dr. rer. nat., Dr.-Ing. e. h., Geheimer Regierungsrat, Professor, seinen 70. Geburtstag.

Als einem Pionier der deutschen Wissenschaft, insbesondere der Physik und der Technik der elektromagnetischen Wellen, spricht ihm die Luftfahrtforschung und Luftfahrttechnik hierzu die herzlichsten Glückwünsche aus. Alle seine Schüler und Freunde werden an diesem Tage seiner gedenken und ihm die besten Wünsche für seinen weiteren Lebensweg darbringen.

Zenneck ist ihnen allen lieb geworden als Lehrer und Forscher und auch als Mensch und Förderer, der manche Stunde des gemeinsamen Zusammenseins nach wissenschaftlichen Besprechungen und Tagungen mit seiner schwäbischen Erzählerkunst so humorvoll gestaltet hat.

Der Beginn seines wissenschaftlichen Werdegangs fiel mit den ersten Versuchen zur Anwendung der elektromagnetischen Wellen für die Nachrichtentechnik zusammen. Sein wissenschaftliches Lebenswerk war vor allem diesem neuen technisch-physikalischen Zweig der Naturwissenschaft gewidmet. Zenneck hat schon an den ersten »drahtlosen« Versuchen in Deutschland wesentlich teilgenommen und hat sich mit dieser Kunst, die den nicht mehr losläßt, der sich ihr einmal verschrieben hat, sein ganzes arbeitsreiches Leben lang beschäftigt. Auch heute, nachdem er seinen Lehrberuf aufgegeben hat, ist er immer noch in alter Frische an der Arbeit und nimmt an der stürmischen Entwicklung der drahtlosen Technik teil.

Von seinem Lebenslauf sei folgendes berichtet:

»In Ruppertshofen, einer kleinen Stadt Württembergs, geboren, genoß Zenneck die übliche Vorschulerziehung, von 1885 ab besuchte er das evangelische theologische Seminar in Maulbronn und von 1887 ab das Seminar in Blaubeuren. Im Anschluß daran besuchte er die Universität Tübingen, wo er im Frühjahr 1894 die höhere Lehramtsprüfung für Württemberg in Mathematik, Naturwissenschaften und Zoologie ablegte. Seine Doktor-Dissertation machte er mit dem Thema ‚Die Anlage der Zeichnung und deren physiologische Ursachen bei Ringelnatter-Embryonen‘.

Im Sommer 1894 widmete er sich zoologischen Studien am Naturhistorischen Museum in London; vom Herbst 1894 an genügte er seiner Militärpflicht beim I. Seebataillon in Kiel, bei dem er später auch Reserveoffizier wurde.

Vom Militär entlassen, gab nun Zenneck sein bisheriges Hauptfach, die Zoologie, auf und wurde Assistent von Ferdinand Braun, der den Lehrstuhl des Physikalischen Instituts in Straßburg inne hatte. Damit begann seine Laufbahn als drahtloser Wissenschaftler. Braun war einer der ersten Gelehrten Deutschlands, der Versuche zur Verwendung der elektromagnetischen Wellen für die Übertragung von Nachrichten zusammen mit Kreisen der Industrie begonnen hatte. Braun übertrug Zenneck die Ausführung dieser Versuche. Gerade am Anfang der drahtlosen Nachrichtentechnik, als die Meßtechnik im Laboratorium noch sehr wenig fortgeschritten war, bestand das Schwergewicht solcher Forschungsarbeit in Reichweitenversuchen. Da das neue Verkehrsmittel naturgemäß für die Verwendung in der Schiffahrt besonders in Betracht kam, weil man die Schiffe nicht mit Drahtleitungen untereinander verbinden konnte, wurden viele praktische Versuche auf Schiffen, Feuerschiffen, Leuchttürmen u. dgl. angestellt. In den Jahren 1899 und 1900 war Zenneck mit Reichweitenversuchen auf der Nordsee beschäftigt, bei denen er oft auch die Feuerschiffe aufsuchen mußte. Hiervon sei folgendes kleine Abenteuer erzählt:

Da es schwierig war, zu den Feuerschiffen hinzukommen, die nur mit einem Lotsenboot, das abhängig von der Tide war, erreicht werden konnten, versuchte Zenneck zu diesem Zweck ‚eine eigene Schiffahrtslinie zu gründen‘. Er verwendete hierzu eine 5-Meter-Jolle und ein Paddelboot, ähnlich den Kajaks der Eskimos. Gleich bei der ersten Fahrt kenterte das Boot, und wir danken es dem Schöpfer heute noch, daß ein Hamburger Dampfer Zenneck damals aufnahm und rettete.

Wer die Nordsee kennt und insbesondere den Aufenthalt auf Feuerschiffen, kann sich vorstellen, wie der junge Zenneck schon damals seinen Mann stehen mußte, nicht nur als Forscher und Verwirklicher technisch-physikalischer

Ideen, sondern auch als richtiger Kerl. Es war Zenneck und seiner unerschütterlichen Willenskraft damals zu danken, daß die Nordseeversuche Brauns erfolgreich abgeschlossen wurden und damit ein Grundstein zu weiteren Fortschritten gelegt werden konnte.

Als die ersten wissenschaftlichen Versuche zum Erfolg geführt hatten und sich nun in der Technik ein fruchtbares Arbeitsfeld für dieses Gebiet ergab, trat die Verlockung für Zenneck auf, in die Industrie überzutreten. Er zog es aber damals vor, als Wissenschaftler und Privatdozent für Physik an die Universität Straßburg zurückzukehren.

Schon vom Beginn seiner Gelehrtentätigkeit an zeigte Zenneck eine erstaunliche Arbeitskraft. Viele Veröffentlichungen zeugen hiervon. Darunter vor allen Dingen das in der ganzen Welt als Grundwerk bekannte Buch: ‚Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie' aus dem Jahre 1905. Daneben hat Zenneck die Entwicklung der Hochfrequenztechnik selbst weiterbetrieben und viele neue Vorschläge hierfür gemacht und veröffentlicht. So wird es interessant sein, daß er schon 1899 über das Prinzip der Frequenzsteigerung durch Organe nicht linearer Charakteristik und 1900 über das gerichtete Senden berichtete.

1905 wurde Zenneck außerordentlicher Professor an der neu gegründeten Hochschule Danzig, verließ aber Danzig schon 1906, um Ordinarius der Physik in Braunschweig zu werden.

Drei Jahre später wurde er Leiter des Physikalischen Laboratoriums der Badischen Anilin- und Sodafabrik (I. G. Farben), wo er die Aufgabe übernahm, für die Stickstoffsynthese den Lichtbogen wirtschaftlich nutzbar zu machen, was bisher den Chemikern und Elektrotechnikern unlösbare Probleme gebracht hatte. Diese Tätigkeit brachte Zenneck viele interessante und ihn bereichernde Erlebnisse. So arbeitete er z. B. längere Zeit in den Werken, die die ‚Badische' in Norwegen baute.

1911 wurde Zenneck zum Ordinarius in Danzig berufen, wo er bis 1913 blieb, um dann als Ordinarius an die Technische Hochschule in München zu gehen. Damals war Zenneck 42 Jahre alt, und es war sicher sein Wunsch, hier in dieser ihm so kongenialen Stadt, nach beinahe 20jähriger wissenschaftlicher Tätigkeit auf den verschiedensten Gebieten und an den verschiedensten Stellen, nunmehr als Forscher und Lehrer sein Lebenswerk zu vollenden. Da kam der Weltkrieg und auch für ihn der Ruf ins Feld. Als Hauptmann im V. Seebataillon nahm er an der Eroberung Antwerpens teil.

Im Dezember 1914 wurde Zenneck beauftragt, im deutschen Interesse nach den Vereinigten Staaten zu gehen, um dort als sachverständiger Zeuge in wichtigen Patentprozessen aufzutreten. Die dort von Telefunken gebaute und betriebene Groß-Funkstation Sayville war unter Einwirkung der Entente patentrechtlich angegriffen worden, um sie als Sicherheit beschlagnahmen und schließen zu können. Es lag im Interesse des Reiches, die wichtige Verbindung Nauen—Sayville aufrechtzuerhalten. Zenneck konnte dies bis zum Eintritt der Vereinigten Staaten in den Krieg durchsetzen und leistete auch hierdurch Deutschland einen wichtigen Dienst.

Mit der Kriegserklärung Amerikas wurde Zenneck interniert und er verbrachte die Jahre bis 1919 in Gefangenenlagern. Hier beschäftigte er sich mit wissenschaftlichen Arbeiten und Vorträgen. Auch seinen Humor verlor Zenneck hier nicht. Ich weiß es aus seinem eigenen Munde, mit welcher Begeisterung er damals als Gärtner seine Kunst zeigte und u. a. Rettiche wachsen ließ von einer Größe (ich glaube, es war Kindskopfgröße), wie sie bisher noch nicht dagewesen waren.

Nach Friedensschluß kehrte er an die Technische Hochschule München zurück. Er erhielt damals noch manchen Ruf, z. B. als Präsident an die Physikalisch-Technische Reichsanstalt. Er lehnte aber jeden ab und widmete sich nun ganz seinem Institut, seiner Forschung und seiner Lehraufgabe in München. Alle, die ihn dort erlebt und bei ihm gelernt haben, wissen, wie fruchtbar und fördernd er dort gewirkt hat. Er war nicht nur der beliebte Lehrer und der anerkannte Forscher, er war vor allen Dingen auch Kamerad. Nach der anstrengenden Lehrtätigkeit trieb er mit seinen Studenten Sport und machte gemeinsame Fahrten mit ihnen. Auch ein großer Jäger war Zenneck, und zwar nicht nur draußen in Wald und Feld, sondern auch abends in der Dämmerstunde, wenn er in traulichem Kreise sein Garn spann.

Auch nachdem Zenneck seine Lehrtätigkeit aufgegeben hat, ist er immer noch als Forscher tätig, und belebt mit seinen anregenden Vorträgen und Diskussionen die wissenschaftlichen Tagungen und Versammlungen. Bei Gründung der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung wurde er zum Ordentlichen Mitglied ernannt. Nach dem Tode Oskar von Millers hat er die Leitung des Deutschen Museums für Meisterwerke Deutscher Technik in München übernommen und übt auch hier noch im späten Alter eine fördernde und gemeinnützige Tätigkeit aus.«

Wer die Fülle der Veröffentlichungen Zennecks betrachtet, bewundert seine wissenschaftliche Leistungsfähigkeit. Seine hauptsächliche Neigung gehört der Experimentalphysik, insbesondere der der elektromagnetischen Schwingungen mit allen Nebenzweigen. Besonders bekannt wurden im letzten Jahrzehnt seine Arbeiten auf dem Gebiet der Ionosphärenforschung mit Hilfe der elektromagnetischen Wellen und die über die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen, mit der er sich schon von Anfang seiner Tätigkeit an beschäftigt hatte.

Zenneck war seit 1907 Mitarbeiter am »Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie«, das nunmehr seit vielen Jahren unter dem Titel »Hochfrequenztechnik und Elektroakustik« von ihm herausgegeben wird. Er ist außerdem Herausgeber von »Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte« und der »Bücherei der Hochfrequenztechnik«.

In Rücksicht auf die große Zahl der Veröffentlichungen Zennecks ist am Schluß nur eine Anzahl der wesentlichsten Arbeiten aufgeführt.

Möge es Jonathan Zenneck noch recht lange vergönnt sein, in alter Frische und Lebendigkeit für seine liebe Wissenschaft und damit für sein deutsches Volk tätig zu sein und zu leben!

W. Hahnemann.

Verzeichnis der wichtigsten Veröffentlichungen von J. Zenneck seit 1898.

Bücher, Abhandlungen.

Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. Verlag Enke, Stuttgart 1905. — Im gleichen Verlag: Leitfaden der drahtlosen Telegraphie, 1909, Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie, zus. mit Rukop, 1925.

Die Verwertung des Luftstickstoffs mit Hilfe des elektrischen Flammenbogens. Vortrag, geh. in Königsberg i. Pr. Verlag Hirzel, Leipzig 1911.

Elektronen- und Ionen-Ströme. Experimentalvortrag. Verlag Springer, Berlin 1923.

Aus Physik und Technik (Vorträge und Aufsätze). Verlag Enke, Stuttgart 1930.

Kulturfördernis durch Technik und Wissenschaft. VDI-Verlag, Berlin 1935. (Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 7, 1.)

Die Entwicklung der Funkentelegraphie. VDI-Verlag, Berlin 1936. (Deutsches Museum, Abhandlungen und Berichte, 8, 6.)

Die Erforschung der höchsten Schichten der Atmosphäre mit Hilfe elektromagnetischer Wellen. Vortrag (Essen, Haus der Technik), 1936. (Vorträge aus dem Haus der Technik e. V., Essen, 1936, 14.)

Wissenschaft und Volk. Akademie der Wissenschaften, München, Beck in Komm., 1938.

Zeitschriften.

Die Zeichnung der Boiden. Z. wiss. Zoologie (1898).

Die genaue Controlle der Wechselzahl eines Drehstromes. Ann. Phys. (1899).



Braunsches Rohr. Ann. Phys. (1899), (1904). — El. Anz. (1904). — Phys. Z. (1909), zus. mit Giesel. (1913). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1924), zus. mit Casper und Hubmann.

Ermittlung der Oberschwingung eines Drehstromes. Ann. Phys. (1899).

Magnetischer Frequenzwandler. Ann. Phys. (1899). — Phys. Z. (1912). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1913). — Phys. Z. (1914), zus. mit Rukop. — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1921) — 1924 zus. mit Casper und Hubmann. — 1926 zus. mit Plendl und Sammer.

Magnetischer Widerstand. Ann. Phys. (1902), (1903).

Über die magnetische Permeabilität in Eisenpulver bei schnellen Schwingungen. Ann. Phys. (1903).

Die Energieverhältnisse in oszillatorischen magnetischen Kreisen. Ann. Phys. (1903).

Fortpflanzung magnetischer Wellen in Eisenzylindern. Ann. Phys. (1903).

Bedeutung der Ansatzdrähte und -platten in der drahtlosen Telegraphie. Phys. Z. (1903).

Abnahme der Amplitude bei Kondensator-Kreisen mit Funkenstrecke. Ann. Phys. (1904).

Theorie und Praxis in der drahtlosen Telegraphie. Phys. Z. (1904).

Gravitation. Enzyklop. d. Mathem. Wiss. (1904).

Über phasewechselnde Oberschwingungen. Ann. Phys. (1906), zus. mit Strasser.

Spektralaufnahmen mit Teleobjektiv. Phys. Z. (1907), zus. mit Wien.

Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie. Ann. Phys. (1907).

Gerichtete Telegraphie (Sender und Empfänger). Phys. Z. (1908). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1909), (1915).

Stickstoffdioxyd. Phys. Z. (1910). — (1911) zus. mit Strasser. — Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. (1911).

Lichtbogenmethode. Ann. Phys. (1914). — Zus. mit Rukop (1914).

On telephonic measurements in a radio receiver. Proceed. I. R. E. (1916).

Messungen an dem Löschfunkensender in Sayville. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1917).

Die Trägheit von Thermodetektoren. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1921).

NF-Modulation. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1922), zus. mit Mauz. (1923), zus. mit Joos. — Phys. Z. (1924), zus. mit Winter-Günther.

Schwingkreis mit Eisenkernspule. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1922), zus. mit Schunk. — (1924), zus. mit Casper und Hubmann. — Phys. Z. (1924). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1925), zus. mit Plendl und Sammer.

Die Nachrichtenübermittlung in Überlandwerken. Mitt. d. Vereinigung der Elektrizitätswerke (1923).

Der Röhrentonsender mit Selbststeuerung. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1923), zus. mit Mauz.

Über das Dämmerungssehen mit Ferngläsern. Ann. Phys. (1924), zus. mit Krüger.

Gekoppelte Kreise. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1924), zus. mit Roßmann.

Wellenausbreitung. E. u. M. (1925). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1926), zus. mit Bäumler. — Jahrb. 1937 d. Dtsch. Luftfahrt-Forschg.

Diskussion über den elektrischen Zustand der oberen Atmosphäre. Proceed. Roy. Soc., London, Bd. A, 111 (1926), S. 1.

Bericht über den Probebetrieb zwischen Canada und England mit Spiegelantennen. Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1927).

Demonstration des Dopplereffekts in der Akustik. Phys. Z. (1928).

Zur Demonstration gekrümmter Lichtstrahlen. Phys. Z. (1928).

Die Bedeutung der drahtlosen Telegraphie für die Wissenschaft. Z. VDI. (1929), Proc. I. R. E. (1929).

Experimentierkunst und Vorführungstechnik im neuzeitlichen physikalischen Unterricht. Z. techn. Phys. (1929).

Das Physikalische Institut der Technischen Hochschule München. Phys. Z. (1929).

Raumakustik. Forschung und Fortschritt (1929). — Ann. Phys. (1934), zus. mit Crone und Seiberth.

Ionosphärenforschung. Forschung und Fortschritt (1931). — Jahrb. d. drahtl. Telegr. (1931), (1932), (1933), zus. mit Goubau. — Hochfrequenztechn. (1934), zus. mit Dieminger und Goubau (1936), zus. mit Crone, Krüger und Goubau. (1936), zus. mit Aschenbrenner und Petersen. — Verhandlg. d. Dtsch. Phys. Ges. (1937). — Ergebn. d. kosm. Physik (1938). — Hochfrequenztechn. (1938), zus. mit Eyfrig, Goubau und Netzer.

Die magnetische Drehung der Polarisationsebene von elektromagnetischen Wellen in ionisierten Gasen. Hochfrequenztechn. (1932), zus. mit Keck.

Zur Frage der Schwachstromgleichrichter. Hochfrequenztechn. (1937).

Bemerkungen zum idealen Wirkungsgrad von Schraubenpropellern.

Von Wilh. Hoff, Berlin-Friedrichshagen.

Auf die Ringelemente des mit unendlich vielen Blättern versehen gedachten und in reibungsfreier, raumbeständiger Flüssigkeit arbeitend vorausgesetzten Schraubenpropellers wird die Bedingung der besten Schubverteilung angesetzt und mit ihr auf eine ideale Strahlantriebsmaschine geschlossen, die über den Blattradius hyperbolisch verteilte Winkelgeschwindigkeiten besitzt und den Vorteil gleichmäßiger Schubverteilung über den Schraubenquerschnitt mit kleinsten Strahl- und Umlaufverlusten verbindet. Diese Maschine wird mit einer Schraube verglichen, die gleiche Winkelgeschwindigkeit bei allen Blattelementen hat. Mittels eines über den Radius gesetzmäßig veränderten induzierten Wirkungsgrades wird die für diese Anordnung bestmögliche Schubverteilung bestimmt. Zuletzt wird die schwachbelastete Schraube miterörtert. Die Zusammenhänge sind in allgemeinen Kurvendarstellungen erläutert.

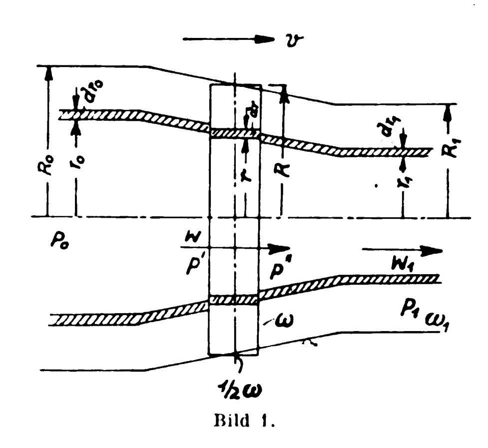


Bild 1.

Gliederung.

Bezeichnungen.

r Radius eines Ringelementes der Schraube,
R Radius der äußeren Begrenzung der Schraube,
S Schraubenschub,
dA Element des Auftriebs,
dT Element der Tangentialkraft,
dM Element des Drehmoments,
N Schraubenleistung,
N_v Verlustleistung,
v Fahrtgeschwindigkeit,
w Geschwindigkeiten parallel zur Schraubenachse,
w^* radiale Komponente der Geschwindigkeit,
ω Winkelgeschwindigkeit des Ringelements des Strahls,
Ω Winkelgeschwindigkeit des Ringelements der Schraube,
Ω_a Winkelgeschwindigkeit der äußeren Begrenzung der Schraube,
$\lambda = \frac{v}{\Omega r}$ Fortschrittsgrad eines Ringelements der Schraube,
$\Lambda = \frac{v}{\Omega_a R}$ Fortschrittsgrad der äußeren Begrenzung der Schraube,
$k_s = \frac{2 S}{\pi \varrho \Omega_a^2 R^4}$ Schubzahl,
$k_l = \frac{2 N}{\pi \varrho \Omega_a^3 R^5}$ Leistungszahl,
ϱ Luftdichte,
$q = \varrho/_2 v^2$ Staudruck,
p Druck,
η_a axialer Wirkungsgrad,
η_u Umlaufwirkungsgrad,
η_i induzierter Wirkungsgrad,
α Verhältnis der Geschwindigkeitszunahme des Strahlelementes am Ort eines Ringelementes der Schraube im Abstand r von der Achse zur Fahrtgeschwindigkeit: $w = (1 + \alpha)\, v$, bzw. $\alpha = \frac{w}{v} - 1$,
β_i induzierter Fortschrittswinkel,
γ Verhältnis der halben Winkelgeschwindigkeitszunahme des Strahlelementes am Orte der Schraube zur Winkelgeschwindigkeit des Blattelements: $\omega = 2\,\gamma\,\Omega$,
δ Verhältnis der halben Geschwindigkeitszunahme im Ringelement am Orte des ausgebildeten Strahls hinter der Schraube zur Fahrtgeschwindigkeit: $w_1 = (1 + 2\,\delta)\, v$,
$\varepsilon = (1 - \eta_{ir})$ Ersatzrechengröße,
$x = \frac{r}{R}$ Radienverhältnis,
C Konstante der besten Schubverteilung,
k Konstante in den Gl. (5, 2), (5, 3) und (5, 4),
J_1, J_{1m}, J_2 Rechnungsgrößen in den Beziehungen (5, 8), (6, 6) und (7, 8).

Indizes:
0 weit vor der Schraube,
1 weit hinter der Schraube,
B zur Betrachtung der Bernoulli-Gleichung gehörig,
Z zum Zentrifugaldruck gehörig,
r zum Ringelement im Abstand r von der Schraubenachse gehörig,
R zur äußeren Schraubenbegrenzung gehörig,
ri zur Strahlachse gehörig,
ra zu einem sehr weiten Außenradius gehörig,
i zur induzierten Strömung gehörig,
m gemittelte Werte.

		Im Strahl weit vorn	In der Vorrichtung Mitte	In der Vorrichtung hinten	Im Strahl weit hinten
Radius		R_0, r_0	R, r	R, r	R_1, r_1
Geschwindigkeit		$w_0 = v$	w	w	w_1
Winkelgeschwindigkeit	der Schraube		Ω, Ω_a		
	des Strahls		$^1/_2\,\omega$	ω	ω_1
Druck		p_0	p'	p''	p_1

I. Einfache Strahltheorie.

Die technische Aufgabe der ihrer Gestalt und Arbeitsweise wegen mit »Schraube« bezeichneten Maschine ist, einen Luftstrahl mit geringsten Verlusten derart zu erzeugen, daß dessen Gegenwirkung den bestmöglichen Schub erzielt. Wird diese Aufgabe durch eine »Strahlantriebsmaschine«, die nicht näher gekennzeichnet und beschrieben, aber keine »Schraube« im gebräuchlichen Sinne zu sein braucht, verwirklicht gedacht, so lassen sich der bestmögliche Schub und die geringsten Strahlverluste mit Hilfe einer einfachen Impulsbetrachtung angeben. Sie treten dann auf, wenn Schub und Verluste gleichmäßig über den Strahlquerschnitt verteilt sind. Drehverluste und Zähigkeitsverluste werden in dieser klassisch gewordenen einfachen Strahltheorie nicht in Ansatz gebracht.

Nachdem F. Bendemann, L. Prandtl und B. Madelung in ihrer Arbeit »Praktische Schraubenberechnung« [1] 1917 auf die Bedeutung des (später [2] so benannten) axialen Wirkungsgrades hingewiesen hatten, benutzten viele späteren Arbeiten über Schrauben die in diesem Wirkungsgrad gegebenen (Bendemann-)Grenzen zum Vergleich mit den praktisch erzielten Ergebnissen und zur Beurteilung ihrer Güte.

In der für vorliegende Arbeit gewählten Bezeichnungsweise gelten nach der einfachen Strahltheorie die Beziehungen:

Schubzahl:

$$k_s = \frac{2\,S}{\pi\,\varrho\,\Omega_a^2\,R^4} = 4\,\Lambda^2\,(1+\alpha)\ \ \alpha = 4\,\Lambda^2\,\frac{(1-\eta_a)}{\eta_a^2} \qquad (1,1)$$

Leistungszahl:

$$k_l = \frac{2\,N}{\pi\,\varrho\,\Omega_a^3\,R^5} = 4\,\Lambda^3\,(1+\alpha)^2\,\alpha = 4\,\Lambda^3\,\frac{(1-\eta_a)}{\eta_a^3} \qquad (1,2)$$

Axialer Wirkungsgrad:

$$\eta_a = \frac{v\,S}{N} = \frac{k_s}{k_l} = \frac{1}{1+\alpha} \quad \ldots\ldots (1,3)$$

Geschwindigkeitsverhältnisse:

$$\alpha = \frac{1-\eta_a}{\eta_a} = \text{konst. über alle Radien der Schraube} \quad (1,4)$$

$$\frac{\delta}{\alpha} = 1 = \text{konst. über alle Radien des Strahls} \quad (1,5)$$

II. Drücke und Geschwindigkeiten in der erweiterten Strahltheorie (Ringelement).

Bei der zur höchsten Wirkung entwickelten Strahlantriebsmaschine, der »Schraube« wird die Leistung durch eine umlaufende Welle eingeführt, deren Achse in Richtung des die Maschine verlassenden und den Schub erzeugenden Strahls liegt. Wegen dieser Kraftumleitung treten zusätzliche Umlaufverluste [3] auf, die durch die Verteilung des wirkenden Drehmoments und der Winkelgeschwindigkeit der Ringelemente der Schraube bestimmt sind.

Die Erscheinungen sind nicht mehr so übersichtlich [4] wie diejenigen der im I. Abschnitt beschriebenen einfachen Strahltheorie und werden zweckmäßig am Ringelement (vgl. Bild 1 mit Zusammenstellung der Bezeichnungen) behandelt, da die Integration über alle Ringelemente der Schraube und im Strahl erhebliche Schwierigkeiten in sich birgt, wie dies A. Betz und H. B. Helmbold ausführlich dargelegt [5] haben.

Für die Untersuchung am Ringelement hat H. Glauert eine anschauliche Ableitung [6] gegeben, die sich unter anderem an eine ältere und neugedruckte Arbeit von N. E. Joukowsky [7] anlehnt. Dieser Glauertschen Ableitung wird hier zunächst im wesentlichen gefolgt.

Von weit vor bis an die Vorderseite der Vorrichtung (Luftschraube) heran, gilt für das Strahlringelement die Bernoulli-Gleichung:

$$p_0 + \frac{1}{2}\,\varrho\,v^2 = p' + \frac{1}{2}\,\varrho\,(w^2 + w^{*2}).$$

Von der Rückseite der Vorrichtung bis weit hinten im Strahl gilt ebenfalls die Bernoulli-Gleichung:

$$p'' + \frac{1}{2}\,\varrho\,(w^2 + w^{*2} + \omega^2 r^2) = p_{1B} + \frac{1}{2}\,\varrho\,(w_1^2 + \omega_1^2 r_1^2).$$

Hieraus der Druckunterschied zwischen den Stellen weit vorne und weit hinten:

$$(p_0 - p_{1B}) = \frac{1}{2}\,\varrho\,(w_1^2 - v^2) + \frac{1}{2}\,\varrho\,(\omega_1^2 r_1^2 - \omega^2 r^2) - (p'' - p') \quad \ldots (2,1)$$

Die Schraubenblattelemente drehen mit Ω. Das Strahlringelement wird dabei in Drehung gesetzt. Die relative Winkelgeschwindigkeit des Blattelements zum drehenden Strahl ist $(\Omega - \omega)$. Infolgedessen ist der an der Luftschraube erzeugte Drucksprung:

$$(p'' - p') = \frac{1}{2}\,\varrho\,[\Omega^2 - (\Omega - \omega)^2]\,r^2 = \frac{1}{2}\,\varrho\,[2\,\Omega - \omega]\,\omega\,r^2 \quad (2,2)$$

Werden (2, 1) und (2, 2) miteinander verbunden, so entsteht:

$$(p_0 - p_{1B}) = \frac{1}{2}\,\varrho\,(w_1^2 - v^2) - \frac{1}{2}\,\varrho\,[2\,\Omega\,\omega\,r^2 - \omega_1^2 r_1^2].$$

Beim Abwandern in den Strahl bleibt die Wirbelstärke erhalten:

$$\omega\,r^2 = \omega_1\,r_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2,3)$$

Alsdann wird (2, 3) eingesetzt und umgeformt:

$$\frac{p_0 - p_{1B}}{q} = \left[\left(\frac{w_1}{v}\right)^2 - 1\right] - \frac{2\,\Omega\,\omega_1\,r_1^2}{v^2} + \frac{\omega_1^2\,r_1^2}{v^2} \qquad (2,4)$$

Der Druckanstieg über den Strahlradius weit hinten ist hiermit:

$$-\frac{1}{q}\cdot\frac{d\,p_{1B}}{d\,r_1} = \frac{d\left[\left(\frac{w_1}{v}\right)^2 - 1\right]}{d\,r_1} - 2\,\frac{d\,[\Omega\,\omega_1\,r_1^2]}{v^2\,d\,r_1} + \frac{d\,[\omega_1^2\,r_1^2]}{v^2\,d\,r_1} \quad \ldots (2,5)$$

Wegen der Strahldrehung entstehen Zentrifugaldrucke, deren Anstieg über den Strahlradius sich ergibt zu:

$$\frac{1}{q}\,\frac{d\,p_{1Z}}{d\,r_1} = \frac{\varrho\,2\,\pi\,r_1\,d\,r_1\cdot 1\cdot\omega_1^2\,r_1^2}{2\,\pi\,r_1\cdot 1\cdot r_1\cdot d\,r_1\cdot\varrho/2\cdot v^2} = \frac{2\,\omega_1^2\,r_1}{v^2} \qquad (2,6)$$

Der Unterschied zwischen dem Anstieg infolge der Zentrifugaldrucks und dem Anstieg infolge der Geschwindigkeitsdrücke bringt den Gesamtdruckanstieg:

$$\frac{1}{q}\,\frac{d\,p_1}{d\,r_1} = \frac{1}{q}\left[\frac{d\,p_{1Z}}{d\,r_1} - \frac{d\,p_{1B}}{d\,r_1}\right] \quad \ldots\ldots (2,7)$$

Werden, was später (vgl. Abschnitt IV) begründet und erörtert werden soll, die Winkelgeschwindigkeiten Ω und ω_1 über den Radius veränderlich angenommen, so wird nach Einsetzen von (2, 5) und (2, 6) und erfolgter Differentiation die Beziehung gewonnen:

$$\frac{1}{q}\,\frac{d\,p_1}{d\,r_1} = + \frac{d\left[\left(\frac{w_1}{v}\right)^2 - 1\right]}{d\,r_1} - \frac{2\,[\Omega - \omega_1]}{v^2}\,\frac{d\,(\omega_1\,r_1^2)}{d\,r_1} - \frac{2\,\omega_1\,r_1^2}{v^2}\,\frac{d\,\Omega}{d\,r_1} \quad \ldots (2,8)$$

und hiermit die Differentialgleichung für die Drucke im Strahl [8]:

$$\frac{d\,p_1}{q} = d\left[\left(\frac{w_1}{v}\right)^2 - 1\right] - \frac{2\,(\Omega - \omega_1)}{v^2}\,d\,(\omega_1\,r_1^2) - \frac{2\,\omega_1\,r_1^2}{v^2}\,d\,\Omega \quad \ldots (2,9)$$

Werden ferner die Überlegungen der einfachen Strahltheorie (vgl. Abschnitt I) auf das Ringelement angewandt, so ist das Schubelement einerseits:

$$d\,S = \varrho\,2\,\pi\,r_1\,d\,r_1\,(w_1 - v)\,w_1 - 2\,\pi\,r_1\,d\,r_1\,(p_0 - p_{1B}) \quad (2,10)$$

und andererseits mit (2, 2):

$$d\,S = 2\,\pi\,r\,d\,r\,(p'' - p') = \frac{1}{2}\,\varrho\,[2\,\Omega - \omega]\,\omega\,r^2\,2\,\pi\,r\,d\,r \quad (2,11)$$

Für jedes Strahlringelement gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$v\,r_0\,d\,r_0 = w\,r\,d\,r = w_1\,r_1\,d\,r_1 \quad \ldots . (2,12)$$

Werden (2, 10) und (2, 11) miteinander verbunden, sowie (2, 4) und (2, 12) eingesetzt, so entsteht:

$$(2\,\Omega - \omega)\,\omega\,r^2 = 2\,w\,(w_1 - v) - \frac{w}{w_1}\,[(w_1^2 - v^2) - (2\,\Omega - \omega_1)\,\omega_1\,r_1^2]$$

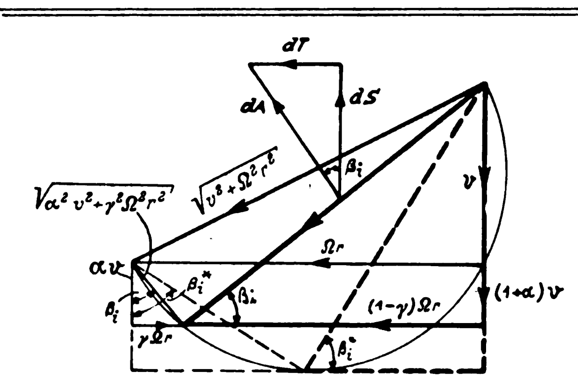


Bild 2.

und umgeformt:

$$\frac{1}{2}\frac{(w_1-v)^2}{v^2}=\left[\frac{(\Omega-1/2\,\omega)}{w}-\frac{(\Omega-1/2\,\omega_1)}{w_1}\right]\frac{w_1\,\omega_1\,r_1^2}{v^2} \quad (2,13)$$

Diese Beziehung (2, 13) für die Geschwindigkeiten ist für jedes Ringelement im Strahl zu erfüllen [9].

Zu beachten ist ferner die Tatsache, daß am Orte der Schraube die Hälfte der endgültigen Winkelgeschwindigkeit des noch nicht zusammengezogenen Strahls erreicht wird.

Für die weiteren Betrachtungen werden die Verhältniszahlen α, δ, γ an Stelle der Geschwindigkeiten und der für das Ringelement am Orte der Schraube geltende Fortschrittsgrad λ eingeführt.

Die Druckgleichung (2, 9) nimmt dann die Form an:

$$\frac{d_{p_1}}{q}=4\left\{(1+2\delta)\,d\delta-\Omega\left[1-2\gamma\frac{(1+2\delta)}{(1+\alpha)}\right]d\left(\frac{\gamma}{\Omega\lambda^2}\right)-\frac{\gamma}{\lambda^2}\frac{d\Omega}{\Omega}\right\} \quad \ldots (2,14)$$

während die Geschwindigkeitsgleichung (2, 13) nunmehr lautet

$$\lambda^2=\frac{\gamma\,(2\,\delta-\alpha)}{\delta^2\,(1+\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots (2,15)$$

Diese Gl. (2, 15) kann nach Bedarf auch nach den Verhältnissen α, δ und γ aufgelöst werden. Bei weiterer Behandlung ist stets zu beachten, daß das Verhältnis δ von der Anordnung benachbarter Ringelemente im Strahl wesentlich mit beeinflußt wird.

III. Geometrische Zusammenhänge und Wirkungsgrad bei der erweiterten Strahltheorie (Ringelement).

Mit Vernachlässigung der radialen Geschwindigkeitskomponenten wird für das Ringelement am Orte der Schraube das in Bild 2 dargestellte Geschwindigkeitsdiagramm gezeichnet. Die Verlustströmung $\sqrt{\alpha^2 v^2+\gamma\,\Omega^2 r^2}$ steht senkrecht zur Hauptanblasströmung. Wie aus dem Bild ersichtlich, wird mit $\alpha=0$ auch $\gamma=0$. Die Verhältnisse α und γ wachsen nach geometrisch bedingtem Zusammenhang an:

$$\gamma=1/2\left(1-\sqrt{1-4\,\lambda^2\alpha\,(1+\alpha)}\right) \quad \ldots (3,1)$$

Der Höchstwert wird mit $\gamma=\frac{1}{2}$ erreicht, wenn $\lambda^2=\frac{1}{4\,\alpha\,(1+\alpha)}$ geworden ist. Dies bedeutet aber, daß auch $\omega=2\,\gamma\,\Omega=\Omega$, also den Höchstwert (Strahldrehung gleich Schraubendrehung) angenommen hat.

Da ferner in der hier vorausgesetzten reibungsfreien Strömung Zähigkeitsverluste nicht auftreten, muß das Auftriebselement dA senkrecht zur Hauptanblasströmung stehen. Bei Beachtung der Komponenten der Verlustströmung ergeben sich aus drei ähnlichen Dreiecken der Darstellung, Bild 2, Zusammenhänge am Ort der Schraube für die

Kräfte: $$\operatorname{tg}\beta_i=\frac{dT}{dS} \quad \ldots\ldots\ldots (3,2)$$

Verlustgeschwindigkeiten: $$\operatorname{tg}\beta_i=\frac{\gamma\,\Omega\,r}{\alpha\,v}=\frac{\gamma}{\alpha\,\lambda} \quad \ldots (3,3)$$

Anblasgeschwindigkeiten: $$\operatorname{tg}\beta_i=\frac{(1+\alpha)\,v}{(1-\gamma)\,\Omega\,r}=\frac{(1+\alpha)}{(1-\gamma)}\cdot\lambda \quad \ldots (3,4)$$

Der induzierte Wirkungsgrad für das Ringelement [10] wird hiermit

$$\eta_{ir}=\frac{v\,dS}{\Omega\,dM}=\frac{v\,dS}{\Omega\,r\,dT}=\lambda\frac{dS}{dT}=\frac{(1-\gamma)}{(1+\alpha)}=\eta_{ar}\cdot\eta_{ur} \quad (3,5)$$

Hierin bedeutet wie im I. Abschnitt, Gl. (1, 3), der axiale Wirkungsgrad

$$\eta_{ar}=\frac{1}{(1+\alpha)}\ \text{bzw.}\ \alpha=\frac{1-\eta_{ar}}{\eta_{ar}} \quad \ldots (3,6)$$

und der Umlaufwirkungsgrad

$$\eta_{ur}=(1-\gamma)\ \text{bzw.}\ \gamma=(1-\eta_{ur}) \quad \ldots (3,7)$$

Nach Gleichsetzen der Beziehungen (3, 3) und (3, 4) für $\operatorname{tg}\beta_i$ können in Verbindung mit Gl. (3, 5) die Verhältniszahlen ausgedrückt werden [11] durch

$$\alpha=\frac{(1-\eta_{ir})\,\eta_{ir}}{\lambda^2+\eta_{ir}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3,8)$$

$$\gamma=\frac{(1-\eta_{ir})\,\lambda^2}{\lambda^2+\eta_{ir}^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3,9)$$

und in Verbindung mit der Beziehung (2, 15)

$$\delta=\frac{(1-\eta_{ir})}{(\lambda^2+\eta_{ir})}\left[1-\sqrt{\frac{\lambda^2\,(1-\eta_{ir})}{\lambda^2+\eta_{ir}^2}}\right] \quad \ldots (3,10)$$

Werden (3, 6) und (3, 8) ineinander überführt, so entsteht

$$\eta_{ar}=\frac{\eta_{ir}^2+\lambda^2}{\eta_{ir}+\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3,11)$$

und entsprechend durch Verbindung von (3, 7) mit (3, 9)

$$\eta_{ur}=\frac{\eta_{ir}+\lambda^2}{\eta_{ir}^2+\lambda^2}\,\eta_{ir} \quad \ldots\ldots (3,12)$$

Für sehr große Fortschrittsgrade (Innenradien!) λ werden $\eta_{ar}=1$ und $\eta_{ur}=\eta_{ir}$; für sehr kleine Fortschrittsgrade (Außenradien!) werden $\eta_{ar}=\eta_{ir}$ und $\eta_{ur}=1$. Die dazwischenliegenden Werte für η_{ar} und η_{ur} sind in ihrer Abhängigkeit von $1/\lambda$ und η_{ir} in Bild 3 dargestellt.

Nach der einfachen Strahltheorie (vgl. Gl. (1, 1)) ist beim Ringelement das Element des Schubs

$$dS=\pi\,\varrho\,\Omega^2\,r^2\,k_s\,r\,dr=4\,\pi\,\varrho\,v^2\,(1+\alpha)\,\alpha\,r\,dr \quad (3,13)$$

Nach Anwendung des Impulssatzes auf die Drehbewegung ist das Element der eingeleiteten Leistung

$$dN=\Omega\,dM=4\,\pi\,\varrho\,v\,\Omega^2\,(1+\alpha)\,\gamma\,r^3\,dr \quad \ldots (3,14)$$

für das Ringelement geltend werden die Schubzahl

$$k_s=\frac{2\,dS}{2\,\pi\,\varrho\,\Omega^2\,r^3\,dr}=4\,\lambda^2\,(1+\alpha)\,\alpha=4\,\lambda^2\frac{(1-\eta_{ir})\,(\lambda^2+\eta_{ir})}{(\lambda^2+\eta_{ir}^2)^2}\,\eta_{ir} \quad \ldots (3,15)$$

und die Leistungszahl

$$k_l=\frac{2\,dN}{2\,\pi\,\varrho\,\Omega^3\,r^4\,dr}=4\,\lambda^3\,(1+\alpha)\,\gamma=4\,\lambda^3\frac{(1-\eta_{ir})\,(\lambda^2+\eta_{ir})}{(\lambda^2+\eta_{ir}^2)^2} \quad \ldots (3,16)$$

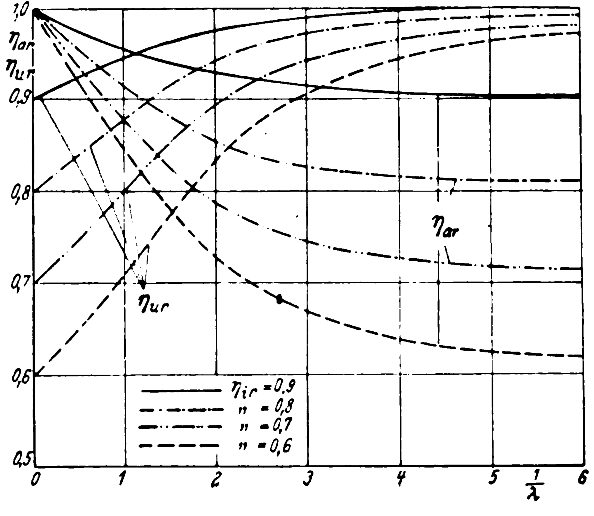


Bild 3.

IV. Die beste Schubverteilung bei der erweiterten Strahltheorie (Ringelement).

Nach Auflösen der Beziehung (3, 5) für den induzierten Wirkungsgrad wird erhalten:

$$\Omega\, d M - v\, d S = \alpha\, v\, d S + \gamma\, \Omega\, d M = d N_v \quad . \; . \; (4,1)$$

Die linke Seite ergibt diejenige Leistung, die bereit gestellt werden muß, um die Verlustleistung im Strahl zu decken, die selbst sich aus den Verlusten der Strömung in Achsrichtung und der Strahldrehung zusammensetzt. Nach Einsetzen von

$$d S = \frac{\alpha\, v}{\gamma\, \Omega\, r}\, d T = \frac{\alpha\, v}{\gamma\, \Omega\, r^2}\, d M \quad . \; . \; . \; . \; (4,2)$$

in Gl. (3, 14) für dM wird die Verlustleistung [12]

$$d N_v = 4\, \pi\, \varrho\, v^3\, (1 + \alpha) \left(\frac{\gamma}{\lambda^2} - \alpha\right) r\, d r \quad . \; . \; . \; (4,3)$$

Die beste Schubverteilung [4] über dem Schraubenquerschnitt ist durch die Bedingung bestimmt, daß einer Schubvermehrung $\Delta\,(dS)$ an einer beliebigen Stelle des Schraubenquerschnitts eine überall gleiche Verlustleistung $\Delta\,(d N_v)$ entspricht.

Unter Benutzung der Gl. (3, 13) ist

$$\Delta\,(d S) = 4\, \pi\, \varrho\, v^2\, (1 + 2\, \alpha)\, \Delta\, \alpha\, r\, d r \quad . \; . \; . \; (4,4)$$

und mit Gl. (4, 3)

$$\Delta\,(d N_v) = 4\, \pi\, \varrho\, v^3 \left[\frac{1}{\lambda^2} (\gamma\, \Delta\, \alpha + (1 + \alpha)\, \Delta\, \gamma) - (1 + 2\, \alpha)\, \Delta\, \alpha\right] r\, d r \quad . \; . \; . \; (4,5)$$

Mit (4, 4) und (4, 5) die Bedingung für die beste Schubverteilung

$$\frac{\Delta\,(d N_v)}{v\, \Delta\,(d S)} = \frac{\gamma\, \Delta\, \alpha + (1 + \alpha)\, \Delta\, \gamma}{\lambda^2\, (1 + 2\, \alpha)\, \Delta\, \alpha} - 1 = C \quad . \; . \; (4,6)$$

Aus der Verbindung der Gl. (3, 3) und (3, 4) wird nach Differentiation gewonnen

$$\lambda^2\, (1 + 2\, \alpha)\, \Delta\, \alpha = (1 - 2\, \gamma)\, \Delta\, \gamma \quad . \; . \; . \; . \; (4,7)$$

und in (4, 6) eingesetzt. Nach Ausscheiden der Verhältniszahlen α und γ nach (3, 8) und (3, 9) wird die Bedingung für die beste Schubverteilung [13] erhalten:

$$(1 + C) = \frac{\gamma}{\lambda^2\, (1 + 2\, \alpha)} + \frac{(1 + \alpha)}{(1 - 2\, \gamma)} =$$

$$= \frac{1 - \eta_{ir}}{\lambda^2 + \eta_{ir}\, (2 - \eta_{ir})} + \frac{\lambda^2 + \eta_{ir}}{\eta_{ir}^2 + \lambda^2\, (2\, \eta_{ir} - 1)} \quad (4,8)$$

Für viele Rechnungen ist es zweckmäßig [14] einzuführen:

$$\eta_{ir} = 1 - \varepsilon.$$

Damit entsteht die Beziehung

$$(1 + C) = \frac{\varepsilon}{\lambda^2 + (1 - \varepsilon^2)} + \frac{\lambda^2 + (1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \lambda^2\, (1 - 2\, \varepsilon)} \quad (4,9)$$

Für Ringelemente mit sehr kleinen λ-Werten (Außenradien!) wird

$$(1 + C) = \frac{(1 + 2\, \varepsilon_a)}{(1 - \varepsilon_a^2)} \quad \text{bzw.}$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{(1 + C)} \left[\sqrt{1 - (1 + C) + (1 + C)^2} - 1\right] \quad (4,10)$$

Für Ringelemente mit sehr großen λ-Werten (Innenradien!) wird

$$(1 + C) = \frac{1}{1 - 2\, \varepsilon_i} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + C)}\right] \quad (4,11)$$

Die Konstante C kann von 0 bis ∞ anwachsen. Hiermit ergeben sich nachstehende Grenzwerte:

C	ε_a	η_{ira}	ε_i	η_{iri}
0	0	1,0	0	1,0
∞	1	0	0,5	0,5

$. \; . \; (4,12)$

Die Abhängigkeit von C, η_{ira} und η_{iri} ist in Bild 4 dargestellt. Ihr sind zusammengehörige Werte von C, η_{ira} und η_{iri} zu entnehmen. Zu beachten ist insbesondere, daß innen der Wert $\eta_{iri} = 0{,}5$ nicht unterschritten wird.

Nach $(1 + \lambda^2)$ aufgelöst, ergibt die Beziehung (4,9) den Zusammenhang

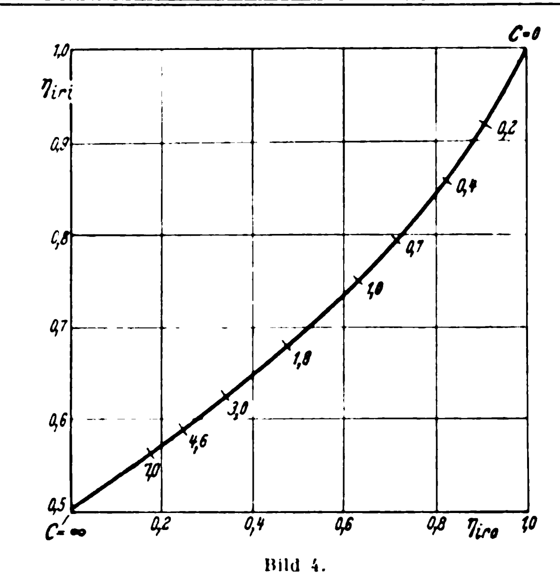


Bild 4.

$$(1 + \lambda^2) = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{[3 + 2\, \varepsilon\, (1 + C)]}{[1 - (1 - 2\, \varepsilon)\, (1 + C)]} \cdot$$

$$\cdot \left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4\, [2 + \varepsilon\, (1 + C)]\, [1 - (1 - 2\, \varepsilon)\, (1 + C)]}{\varepsilon\, [3 + 2\, \varepsilon\, (1 + C)]^2}}\right\} \quad . \; . \; . \; (4,13)$$

Die Bedingung für die beste Schubverteilung kann auf verschiedene Weise erfüllt werden, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll.

V. Schraube mit gleicher Schubverteilung über die Schraubenfläche.

Die »Strahlantriebsmaschine« kann zunächst (obwohl technisch kaum durchführbar) mit über dem Schraubenradius wechselnder Winkelgeschwindigkeit ausgeführt gedacht werden. Wird dabei das Produkt $\Omega\, r$ bei jedem Ringelement konstant gehalten, dann nehmen die Winkelgeschwindigkeiten vom innersten Wert unendlich nach außen hin hyperbolisch ab. Die Geschwindigkeitsdreiecke (vgl. Bild 2) bleiben für alle Ringelemente erhalten, damit sind auch der Fortschrittsgrad λ und der induzierte Wirkungsgrad η_{ir} für alle Ringelemente konstant.

Mit diesen Voraussetzungen ist auch die Bedingung für die beste Schubverteilung (4, 8) für alle Ringelemente erfüllt.

Nach den Gl. (3, 8), (3, 9) und (3, 10) werden auch die Verhältniszahlen α, γ und δ Konstanten für alle Ringelemente.

Die Druckverteilung im Strahl (vgl. Gl. (2, 14)) wird mit $d\, \delta = 0$, $d\, \gamma = 0$ und $d\, \lambda = 0$:

$$\frac{d\, p_1}{q} = -4\, \frac{\gamma}{\lambda^2} \left[\Omega\, (1 - 2\, \gamma)\, \frac{(1 + 2\, \delta)}{(1 + \alpha)}\, d \left(\frac{1}{\Omega}\right) - \frac{d\, \Omega}{\Omega}\right] \quad (5,1)$$

Wenn $\lambda =$ konst. $= \Lambda$ sowie $\Omega = \frac{\Omega_a\, R}{r} = \frac{\Omega_a}{x}$ sind, so wird vereinfacht:

$$\frac{d\, p_1}{q} = + k\, \frac{d x}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5,2)$$

wobei die Konstante k bedeutet:

$$k = 8\, \frac{\gamma^2}{\Lambda^2} \cdot \frac{(1 + 2\, \delta)}{(1 + \alpha)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5,3)$$

Bei Beachtung der Beziehungen (2, 3) und (2, 12) und nach Einsetzung der Ursprungswerte für α, δ, γ, Λ wird erhalten:

$$k = 8\, \frac{\omega_a^2\, \Omega_a^2\, R^2\, w_1\, v}{4\, \Omega_a^2\, v^2\, v \cdot w} = 2\, \frac{\omega_{1a}^2\, R_1^4\, R^2\, R^2}{v^2\, R^4\, R_1^2} = 2 \left[\frac{\omega_{1a}\, R_1}{v}\right]^2 \quad (5,4)$$

Der Wert $\frac{v}{\omega_{1a}\, R_1}$ ist dabei als eine Art Fortschrittsgrad der drehenden Strahlbegrenzung anzusehen.



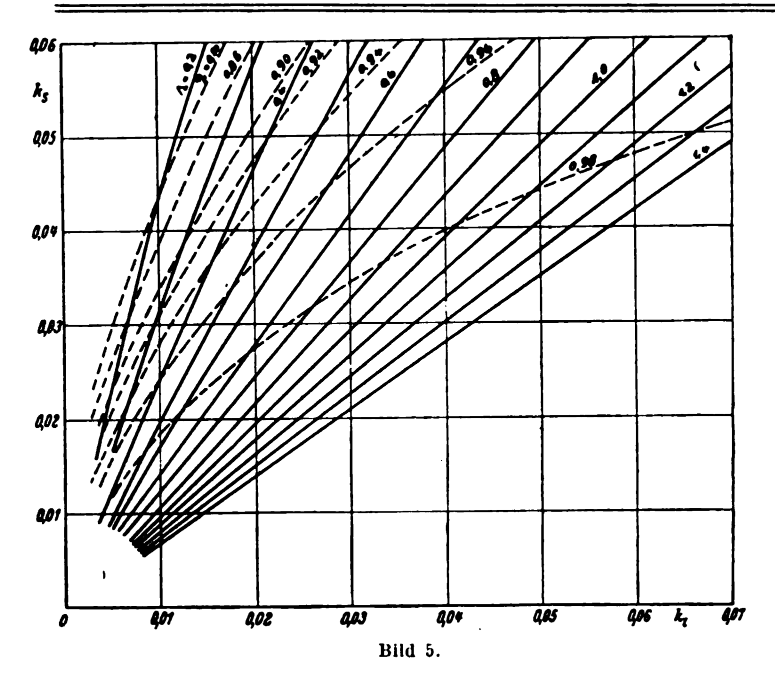


Bild 5.

Am Strahlrand, d. h. für $x = 1$ wird $p_1 = p_{1a}$. Im Strahlinnern wird der Druck

$$\frac{1}{q}\int_{p_{1a}}^{p_1} d\,p_1 = k\int_1^x \frac{d\,x}{x}.$$

Hieraus nach erfolgter Integration

$$\frac{p_1}{q} = \frac{p_{1a}}{q} + k \cdot \ln x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5,5)$$

Da $0 < x < 1$ ist stets $k \ln x < 0$.

Der Druck wächst von

$$\frac{p_{1i}}{q} = \frac{p_{1a}}{q} - k \cdot \infty \text{ im Innern}$$

auf den äußeren Wert $\frac{p_{1a}}{q}$ an.

Die hier vorausgesetzte Anordnung einer Strahlantriebsmaschine ist als »ideal« zu bezeichnen. Sie wäre zu erstreben, wenn, was meist nicht der Fall ist und nur bei Belüftung des Triebwerkes wichtig sein könnte, der Strömung in Nabennähe dieselbe Bedeutung beigelegt werden müßte wie derjenigen weit außen.

Für gewählte Festwerte $\eta_{ir} = \eta_{iR} = \eta_i$ und $\lambda = \Lambda$ werden nach Gl. (3, 15) die Schubzahl

$$k_s = 4\,\Lambda^2 \frac{(1 - \eta_i)}{\eta_i^2} \cdot J_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5,6)$$

und nach Gl. (3, 16) die Leistungszahl

$$k_l = 4\,\Lambda^3 \frac{(1 - \eta_i)}{\eta_i^3} \cdot J_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5,7)$$

Hierin bedeutet die Größe J_1

$$J_1 = \eta_i^3 \frac{(\eta_i + \Lambda^2)}{(\eta_i^2 + \Lambda^2)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5,8)$$

einen Faktor, der mit wachsendem Fortschrittsgrad Λ vom Wert 1 auf den Wert 0 absinkt. Für den Fortschrittsgrad $\Lambda = 0$ gehen die Beziehungen (5, 6) und (5, 7) in die Beziehungen (1, 1) und (1, 2) über.

In der Darstellung, Bild 5, ist die Zusammengehörigkeit der Werte η_i, Λ mit k_s und k_l wiedergegeben. Sie gilt somit für eine Strahlantriebsmaschine mit über die Schraubenfläche gleichmäßig verteiltem Schub und gleichzeitig auftretenden kleinsten Strahl- und Drehungsverlusten. Die Wirkung dieser Strahlantriebsmaschine kommt den Bedingungen der im I. Abschnitt umrissenen einfachen Strahltheorie am nächsten, zu den Strahlverlusten sind die Umlaufverluste, wie es bei der Kraftumleitung sein muß, hinzugetreten.

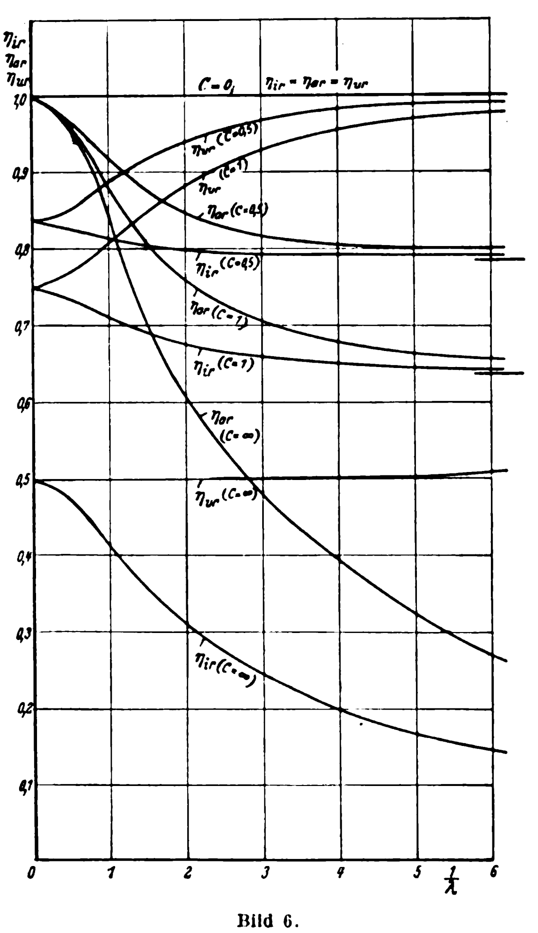


Bild 6.

VI. Schraube mit ungleicher Schubverteilung über die Schraubenfläche.

Die übliche Schraube arbeitet mit für alle Ringelemente gleicher Winkelgeschwindigkeit Ω. Infolgedessen ist der Fortschrittsgrad λ vom Radius abhängig. Innen geht $\lambda \to \infty$ und außen $\lambda \to 0$. Soll die Bedingung für die beste Schubverteilung nach Gl. (4, 8) für bestimmte Festwerte $(1 + C)$ eingehalten werden, so entsprechen den veränderlichen Fortschrittsgraden λ veränderliche induzierte Wirkungsgrade η_{ir}, bzw. Werte ε nach Gl. (4, 13).

Für verschiedene Festwerte C zwischen $C = 0$ und $C = \infty$ wurde in Bild 6 der Verlauf der Wirkungsgrade η_{ir}, η_{ar} und η_{ur} abhängig vom Kehrwert des Fortschrittsgrades $\frac{1}{\lambda}$ eingetragen. Wie schon aus Bild 3 ersehen werden konnte, sind zur Schuberzeugung die äußeren Ringelemente (kleine Fortschrittsgrade λ bzw. große Kehrwerte $1/\lambda$) wichtig; in den inneren Ringelementen entstehen hauptsächlich Umlaufverluste. Zur höheren Schuberzeugung fehlt es an der gesteigerten Winkelgeschwindigkeit. Dies weist darauf hin, daß auf den Nabenbereich einer solchen Schraube zur Schuberzeugung verzichtet werden kann. Trotzdem erfüllt diese Schraube die Bedingung der günstigsten Schubverteilung $C =$ konst.

Ebenso wie η_{ir} über den Radius wechselt, nehmen auch die Wirkungsgrade η_{ar} und η_{ur} verschiedene Werte an. Eine Mittelwertbildung ist nur für Schrauben, deren äußerer Fortschrittsgrad Λ und äußerer induzierter Wirkungsgrad η_{iR} festliegen, möglich, allerdings auch nicht in allgemeiner Form.

Mit $\frac{1}{\lambda} = \frac{r}{R} = x$ wird erhalten

$$\eta_{im} = \frac{\sum_0^R 2\,\pi\,\eta_{ir}\,r\,\Delta\,r}{\pi\,R^2} = 2\sum_0^1 \eta_{ir}\,x\,\Delta\,x \quad . \; . \quad (6,1)$$

und entsprechend

$$\eta_{am} = 2 \sum_0^1 \eta_{ar}\, x\, \Delta x \quad \ldots \ldots \quad (6,2)$$

$$\eta_{um} = 2 \sum_0^1 \eta_{ur}\, x\, \Delta x \quad \ldots \ldots \quad (6,3)$$

Für kleine Streifen $\Delta x = \Lambda \cdot \Delta \left(\frac{1}{\lambda}\right)$ kann die Summenbildung unmittelbar an Bild 6 ausgeführt werden. Mit dem Beispiel

$$\Lambda = 0{,}333 \text{ bzw. } \frac{1}{\Lambda} = 3 \text{ und}$$

$$\eta_{iR} = 0{,}658;\ \eta_{aR} = 0{,}705;\ \eta_{uR} = 0{,}930$$

werden die Mittelwerte

$$\eta_{im} = 0{,}679 \quad \eta_{am} = 0{,}775 \quad \eta_{um} = 0{,}901.$$

Obwohl das Beispiel für den sehr hohen Festwert $C = 1{,}0$ gewählt worden ist, unterscheiden sich die Wirkungsgrade η_{iR} und η_{im} nur sehr wenig (3,5 %) voneinander, desto mehr aber wegen ihres entgegengesetzten Verlaufs die Wirkungsgrade η_{aR} und η_{am} sowie η_{uR} und η_{um}.

Für kleine Festwerte C ist es deshalb ohne zu großen Fehler statthaft, ohne Summenbildung die etwa für $x = 0{,}7$ abgelesenen Werte η_{ir}, η_{ar} und η_{ur} als η_{im}, η_{am} und η_{um} zu verwenden.

Mit veränderlichen Werten η_{ar} und η_{ur} wechseln auch α und γ nach den Beziehungen (3, 8) und (3, 9).

Zur Feststellung der Druckunterschiede in den Schraubenelementringen müßte die Gl. (2, 14) die jeweils gefundenen Werte für α, δ, γ, λ und $d'\delta$, $d\gamma$ und $d\lambda$ eingesetzt werden. Auf diese Untersuchung wird hier verzichtet, da sie sehr umständlich ist und sich nicht grundsätzlich von der im VII. Abschnitt durchgeführten Betrachtung (vgl. Bild 10) unterscheidet. Auf die bekannte [5] wesentliche Schwierigkeit, die in der Anordnung der Ringelemente im Strahl und damit der richtigen Bemessung von δ und $d\delta$ liegt, wurde schon am Schluß des II. Abschnitts verwiesen.

Mit dem Mittelwert η_{im} werden gebildet die Schubzahl

$$k_s = 4\,\Lambda^2 \frac{(1 - \eta_{im})}{\eta_{im}^2} \cdot J_{1m} \quad \ldots \ldots \quad (6,4)$$

und die Leistungszahl

$$k_l = 4\,\Lambda^3 \frac{(1 - \eta_{im})}{\eta_{im}^3} \cdot J_{1m} \quad \ldots \ldots \quad (6,5)$$

Hierin bedeutet entsprechend Gl. (5, 3) der Wert

$$J_{1m} = \eta_{im}^2 \frac{(\eta_{im} + \Lambda^2)}{(\eta_{im}^2 + \Lambda^2)^2} \quad \ldots \ldots \quad (6,6)$$

Da $\eta_{im} > \eta_{iR}$ müssen kleinere Wirkungsgrade η_{iR} gewählt werden, um auf dieselben Schubzahlen und Leistungszahlen des V. Abschnittes zu kommen. Dies ist aber gleichbedeutend mit geringerer Belastung der Schraube im V. Abschnitt bei gegebenem Fortschrittsgrad Λ. Unter Berücksichtigung dieses Unterschieds kann die Darstellung Bild 5 auch zur Erfassung zusammengehöriger Werte η_{im}, Λ, k_s und k_l benutzt werden.

Die Gl. (3, 4) und 3, 5) können auch miteinander verbunden werden zu

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{(1 + \alpha)\, v}{(1 - \gamma)\, \Omega r} = \frac{v}{\eta_{ir}\, \Omega r} \quad \ldots \ldots \quad (6,7)$$

Mit Einführung des Radienverhältnisses $\frac{r}{R} = x$ und des Außenfortschrittsgrades Λ kann die Beziehung auch geschrieben werden

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{\dfrac{v}{\Omega R\, \eta_{ir}}}{\dfrac{r}{R}} = \frac{\dfrac{\Lambda}{\eta_{ir}}}{\dfrac{r}{R}} = \frac{\dfrac{\Lambda}{\eta_{ir}}}{x} \quad \ldots \ldots \quad (6,8)$$

Für das Beispiel $C = 1{,}0$ und $\Lambda = 0{,}333$ sind in Bild 7 die Werte $r/R = x$ als Abszissen und die Werte $\frac{\Lambda}{\eta_{ir}}$ als Ordinaten in demselben Maßstab aufgetragen. Die für die verschiedenen Radien geltenden induzierten Steigungswinkel β_i ergeben sich durch Verbindung zusammengehöriger Werte auf den beiden Koordinaten.

VII. Schwachbelastete Schraube.

Für kleine induzierte Wirkungsgrade, die schwachbelasteten Schrauben entsprechen, ist es statthaft, in der Gl. (4, 9) für die Bedingung der besten Schubverteilung höhere Potenzen gegenüber der ersten Potenz von ε zu vernachlässigen. Nach Wegfall von λ^2 entsteht dann die Beziehung [14]:

$$(1 + C) = \frac{1}{(1 - 2\,\varepsilon)} = \sim (1 + 2\,\varepsilon) = \sim (3 - 2\,\eta_{ir})$$

$$C = \sim 2\,\varepsilon = 2\,(1 - \eta_{ir}) = 2\,(1 - \eta_i) \quad \ldots \quad (7,1)$$

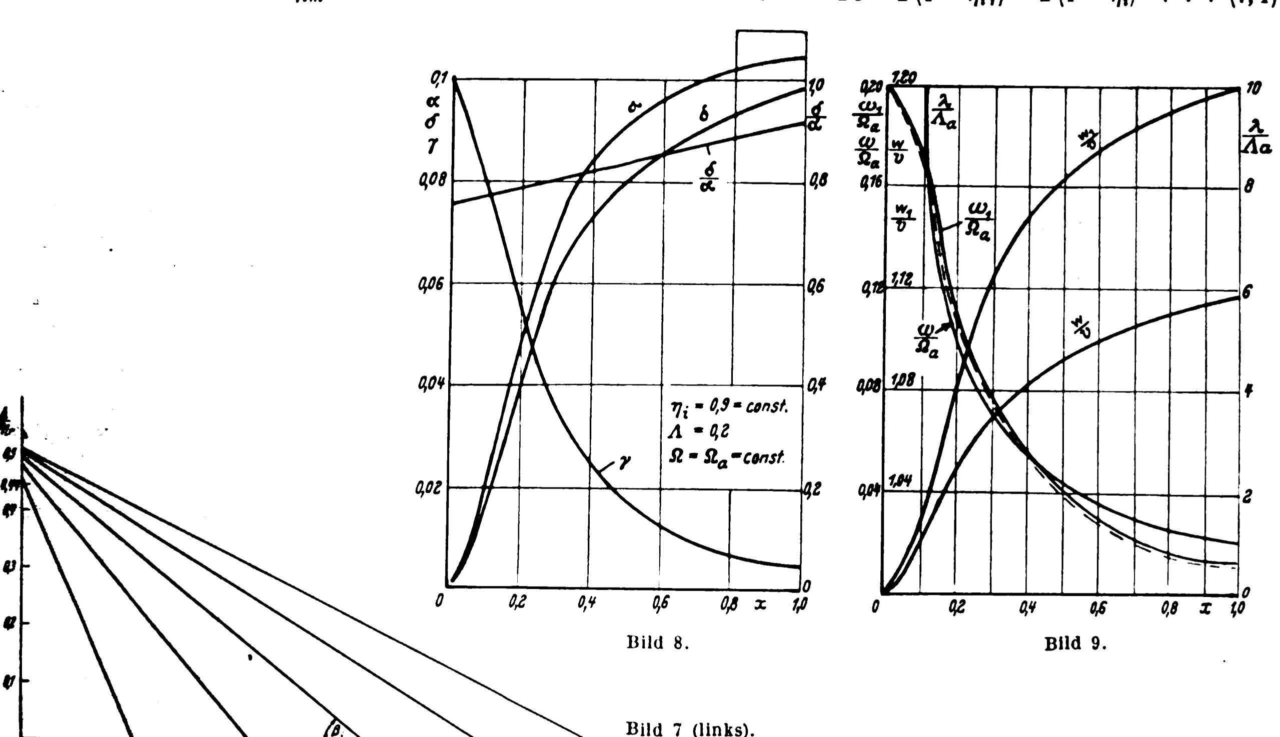
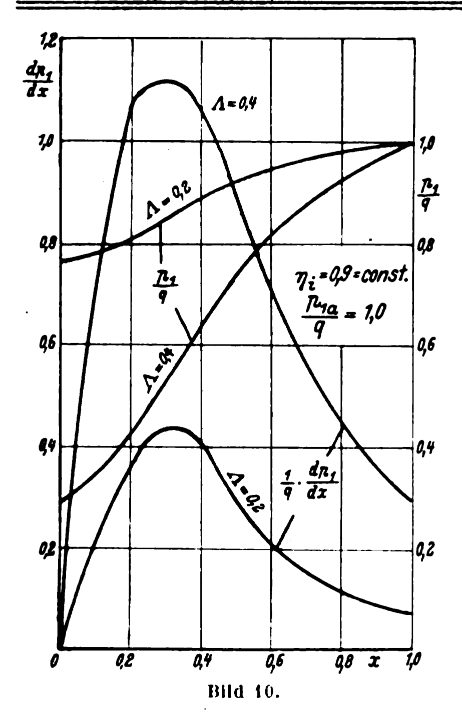
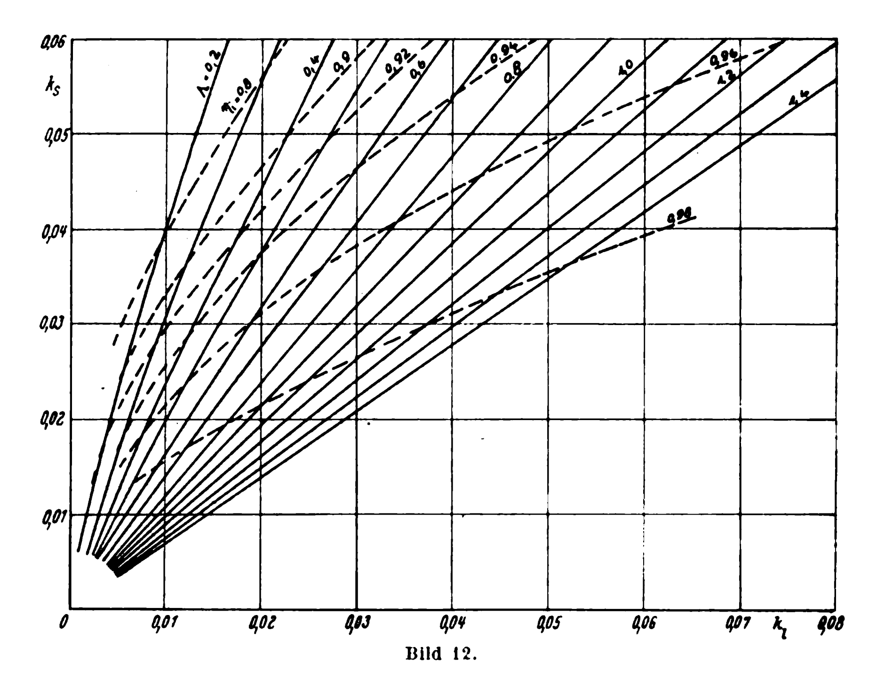


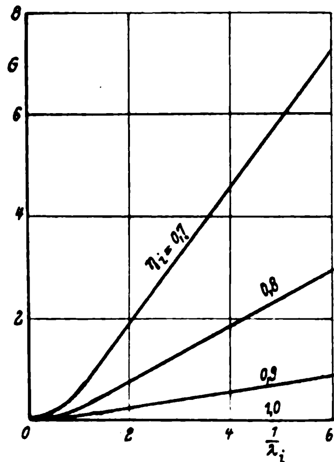
Bild 8.

Bild 9.

Bild 7 (links).


Bild 10.


Bild 12.


Bild 11.

Die Festwerte C sind somit für schwach belastete Schrauben in einfacher Weise an die induzierten Wirkungsgrade gebunden.

Die schwach belasteten Schrauben dieser Art sind häufig Betrachtungen unterzogen worden und sind auf Grund der Arbeit von A. Betz [4] allgemein bekannt geworden.

Zur Vervollständigung der in den vorangegangenen Abschnitten gemachten Betrachtungen wurde in Bild 8 für die Festwerte $\Lambda = 0{,}2$ und $\eta_i = 0{,}9$ der Verlauf der Verhältniszahlen α, δ, δ/α, γ über dem Radienverhältnis r/R aufgetragen. Für dieselben Festwerte sind in Bild 9 die Verhältnisse der Strahlgeschwindigkeiten w/v, w_1/v und der Winkelgeschwindigkeiten ω/Ω_a, ω_a/Ω_a und das Verhältnis der Fortschrittsgrade λ/Λ über dem Radienverhältnis r/R dargestellt.

Zu beachten ist dabei, daß die für den zusammengezogenen Strahl geltenden Werte w_1/v und ω_1/Ω_a über dem Radienverhältnis der Schraube und nicht über demjenigen des Strahls aufgezeichnet sind.

Die Druckgleichung (2, 14) wird unter Einführung von $\Lambda = \frac{R}{r}\Lambda = \frac{\Lambda}{x}$ unter Vernachlässigung des gegenseitigen Einflusses der Elementenringe im Strahl

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dp}{dx} = 4\left\{(1+2\delta)\frac{d\delta}{dx} - \left[1 - 2\gamma\frac{(1+2\delta)}{(1+\alpha)}\right]\left(\frac{x}{\Lambda}\right)^2\left[2\frac{\gamma}{x} + \frac{d\gamma}{dx}\right]\right\} \quad . . . (7,2)$$

Zur Erläuterung dieser Druckgleichung ist in Bild 10 für die Festwerte $\Lambda = 0{,}2$ bzw. $\Lambda = 0{,}4$ und $\eta_i = 0{,}9$ über dem Radienverhältnis $r/R = x$ der Verlauf der Werte $\frac{1}{q}\frac{dp_1}{dx}$ und ihre Integration $\frac{p_1}{q}$ für die Annahme $\frac{p_{1a}}{q} = 1{,}0$ aufgetragen.

Da am Rande ($x = 1$) Druckausgleich, d. h. $\frac{p_1}{q} = 1$ vorhanden sein muß, ergibt sich im Strahlinnern ein Unterdruck, der mit dem Fortschrittsgrad Λ anwächst [15].

Für die in diesem Abschnitt behandelte Schraube ergibt sich die Schubverteilung über dem Radienverhältnis zu

$$\frac{2\frac{dS}{dx}}{\varrho v^2 \pi R^2} = 8\Lambda G \quad . . . . (7,3)$$

und die Leistungsverteilung entsprechend

$$\frac{2\frac{dN}{dx}}{\varrho v^2 \pi R^2} = 8\eta_i \Lambda G \quad . . . . (7,4)$$

wobei der Wert G lautet [16] mit $\lambda_i = \frac{\lambda}{\eta_i}$

$$G = \frac{(1-\eta_i)\left[\eta_i + \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2}{\eta_i^4\left[1 + \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2\right]^2} \quad . . . . (7,5)$$

Aus Bild 11 ist für verschiedene Werte η_i der Verlauf von G in Abhängigkeit vom Kehrwert des induzierten Fortschrittsgrads $\frac{1}{\lambda_i}$ zu erkennen. Er zeigt im wesentlichen eine Gerade [16]. Für viele Rechnungen ist es deshalb bei hohem gleichmäßig verteilt gedachtem induzierten Wirkungsgrad zulässig, einen geradlinigen Verlauf des Schubs, des Drehmoments und der Leistung anzunehmen.

Nach Integration der Beziehung (7, 5) werden gewonnen [17] die Schubzahl

$$k_s = 4\Lambda^2\frac{(1-\eta_i)}{\eta_i^2}J_2 \quad . . . . (7,6)$$

und die Leistungszahl

$$k_l = 4\Lambda^3\frac{(1-\eta_i)}{\eta_i^3}J_2 \quad . . . . (7,7)$$

wobei mit $\frac{\Lambda}{\eta_i} = \Lambda_i$ das Integral bedeutet



$$J_2 = 1 - \Lambda_i^2 (2 - \eta_i) \ln \left[1 + \frac{1}{\Lambda_i^2}\right] + \frac{(1 - \eta_i)}{\left(1 + \frac{1}{\Lambda_i^2}\right)} \qquad (7, 8)$$

Als Gegenstück zu Bild 5 wurde in Bild 12 für die in diesem Abschnitt erörterte Schraube schwacher Belastung ebenfalls die Zusammengehörigkeit von k_s, k_l, η_i und Λ zur Darstellung gebracht. Durch Vergleich ist zu entnehmen, daß, was erwartet werden muß, die Kurven von Bild 5 etwas günstigere Werte erbringen als diejenigen von Bild 12. Die Unterschiede würden größer sein, wenn der zuletzt betrachteten Schraube innen höhere Schubbelastung auferlegt werden könnte.

VIII. Zusammenfassung.

Die Voraussetzungen der einfachen Strahltheorie, die eine gleichmäßige Schubverteilung über die Schraubenfläche und geringste Strahlverluste ergeben, können mit einer Maschine, deren Leistung durch eine drehende Welle mit zur Strömungsrichtung senkrecht stehenden Blättern eingeleitet wird, nicht erfüllt werden. Umlaufverluste treten hinzu.

Werden für die Strahlantriebsmaschine, was allerdings technisch sehr schwer zu verwirklichen ist, hyperbolisch über den Radius verteilte Winkelgeschwindigkeiten der Schraubenelemente angenommen, so bleiben die gleichmäßig verteilten axialen Verluste im Strahl unverändert bestehen. Ebenfalls gleichmäßig verteilte Umlaufsverluste treten hinzu. Ein Unterdruck im Strahl entsteht. Die Maschine ist als »ideal« zu bezeichnen.

Schrauben besitzen aber in allen Ringelementen gleiche Winkelgeschwindigkeit. Die Bedingung bester Schubverteilung mit geringsten Verlusten wird durch eine Anordnung erfüllt, bei welcher der induzierte Wirkungsgrad der Ringelemente zwischen einer inneren und äußeren Grenze sich ändert. Schub und Leistung dieser Schraube werden mit der »idealen« Maschine verglichen; eine etwas schlechtere Wirkung, die wegen des hohen Fortschrittsgrades in der Nähe der Schraubenachse zu erwarten ist, wird festgestellt.

Schwachbelastete Schrauben sind in der Theorie weitgehend erforscht. Ihre Wirkung wird zum Vergleich mit den beiden vorstehend genannten Anordnungen herangezogen.

Die Ableitungen sind durch Darstellungen, insbesondere der Schubzahl k_s und der Leistungszahl k_l in Abhängigkeit vom induzierten Wirkungsgrad η_i und vom äußeren Fortschrittsgrad Λ erläutert.

Für die Durchsicht dieses Aufsatzes danke ich meinem Mitarbeiter G. Buchmann bestens. Denselben Dank erstatte ich Herrn H. B. Helmbold für die von mir erbetene Stellungnahme zu den in dieser Arbeit erörterten Fragen.

IX. Schrifttum.

[1] F. Bendemann und G. Madelung, Praktische Schraubenberechnung mit einem Zusatz von L. Prandtl. Technische Berichte der Flugzeugmeisterei, II. Bd., S. 53ff., 1917.
[2] Th. Bienen und Th. v. Kármán, Theorie der Luftschrauben. Z. VDI Bd. 68 (1924), S. 1237.
[3] A. Betz, Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 11 (1920), S. 105.
[4] A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 1919.
[5] A. Betz und H. B. Helmbold, Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ingenieur-Archiv Bd. 3 (1932), S. 1ff.
[6] H. Glauert, Airplane Propellers, Teil L des IV. Bandes der Aerodynamic Theory von Durand. Verlag Julius Springer, Berlin 1935.
[7] N. E. Joukowski, Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive. Paris 1929.
[8] Schrifttum [6], S. 192, Gl. (1, 9) erweitert.
[9] Schrifttum [6], S. 193, Gl. (1, 13).
[10] Schrifttum [6], S. 198 mitte.
[11] Schrifttum [6], S. 198 unten.
[12] Schrifttum [6], S. 196, Gl. (4,3).
[13] Schrifttum [6], S. 197, Gl. (4, 8).
[14] Schrifttum [6], S. 198 oben.
[15] Schrifttum [5], S. 17, Bild 12.
[16] Schrifttum [6], S. 200, Bild 14.
[17] Schrifttum [6], S. 200 unten, sowie F. Lösch, Über die Berechnung des induzierten Wirkungsgrads stark belasteter Luftschrauben unendlicher Blattzahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1939), S. 323, Gl. (12).

Berechnung der Beanspruchung kreisförmiger Ringspante.

Von H. Fahlbusch und W. Wegner, Hamburg.

Es werden die Beanspruchungen kreisförmiger Ringspante konstanter Biegesteifigkeit, wie sie in dünnwandigen Schalen vorkommen, unter Berücksichtigung einer endlichen Spantquerschnitthöhe ermittelt. Der Rechnungsgang wird für die Grundbelastungsfälle durchgeführt und das Ergebnis in Schaubildern dargestellt.

Gliederung.

I. Bezeichnungen.

P Kraft,
s Blechstärke,
S Statisches Moment,
I Trägheitsmoment,
EI Biegesteifigkeit,
τs Schubfluß,
φ_0 variabler Zentriwinkel,
φ Zentriwinkel,
r Abstand der neutralen Faser vom Kreismittelpunkt,
R Abstand des Schubflusses vom Kreismittelpunkt,
e Abstand des Schubflusses von der neutralen Faser,
x Abstand des Schubmittels vom Kreismittelpunkt,
M Moment,
B Biegemoment,
N Normalkraft,
Q Querkraft,
X statisch Unbestimmte,
δ Last- bzw. Beiwert.

II. Das Spantgleichgewicht.

Für die Einleitung von Querkräften in eine Kreisschale mit großem Verhältnis R/s werden Ringspante angeordnet. Sie sind mit den Einzellasten und den Schubkräften aus der Schale im Gleichgewicht. Jede Belastung läßt sich zerlegen in die durch den elastischen Schwerpunkt der Schale gehende Querkraft und das Moment, Bild 1.

Die Querkraft ruft in der Schale infolge Querkraftbiegung einen sinförmig verteilten Schubfluß hervor, der bis an den Spant heranreicht, Bild 1a.

$$\tau s = \frac{P}{I} S.$$

Ist das Trägheitsmoment der Kreisschale

$$I = \pi R^3 s,$$

so stellt die Funktion

$$\tau s = \frac{P}{\pi R} \sin \varphi$$

den Schubflußverlauf dar.

Der Abstand des Schubmittels einer Kreishälfte für sinförmigen Verlauf vom Kreismittelpunkt beträgt

$$x = \frac{R \int\limits_0^\pi \tau s \, du}{P/2} = \frac{4}{\pi} R \approx 1{,}27 \, R.$$

Der infolge eines Momentes am Spant angreifende Schubfluß ist konstant und hat die Größe, Bild 1b,

$$\tau s = \frac{M}{2 R^2 \pi}.$$

Der Abstand des Schubmittels einer Kreishälfte für konstanten Verlauf vom Kreismittelpunkt beträgt

$$x = \frac{\pi}{2} R \approx 1{,}57 \, R.$$

Der resultierende Schubfluß ist durch folgende Gleichung gegeben, Bild 1c,

$$\tau s = \frac{P}{R \pi} \sin \varphi + \frac{M}{2 R^2 \pi}.$$

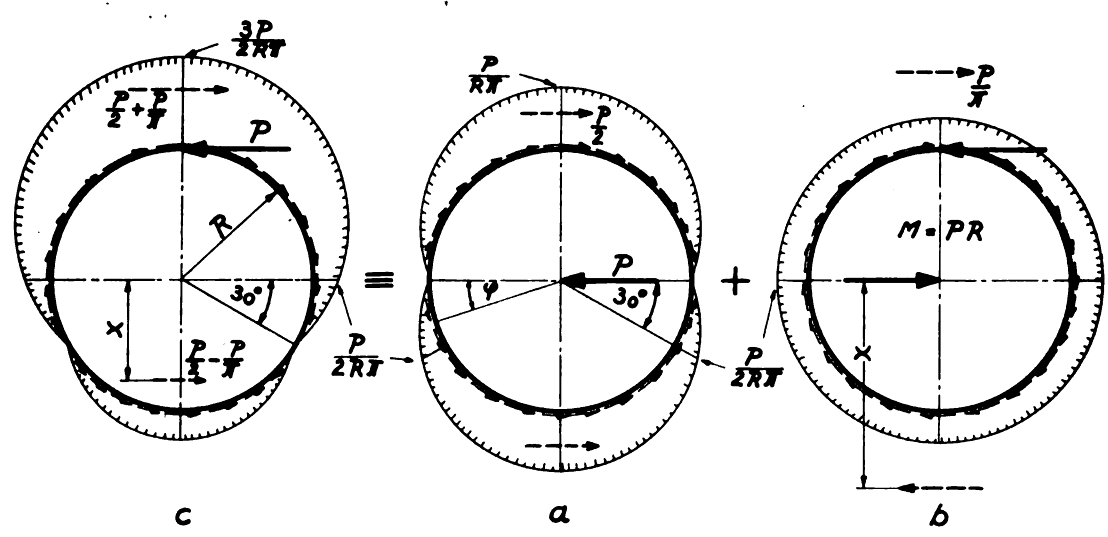


Bild 1. Das Gleichgewicht des Spantes und die Zerlegung in die Grundbelastungen.

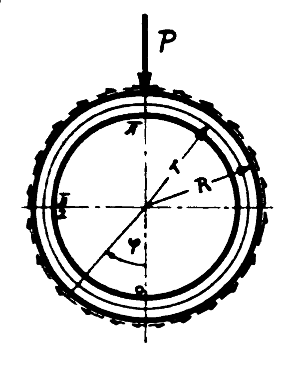


Bild 2. Lastfall A. Radialbelastung.

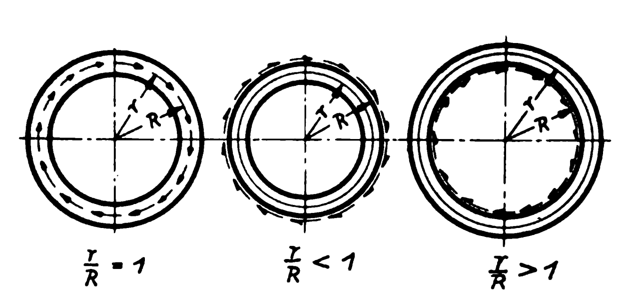


Bild 3. Darstellung des Verhältnisses $\frac{r}{R}$ bei gleichem Schalendurchmesser.

Bild 4. Bestimmung von B_0, N_0 und Q_0 und Vorzeichenfestlegung.

Der Abstand des Schubmittels einer Kreishälfte vom Kreismittelpunkt beträgt auf der einen Seite

$$x = \frac{4+\pi}{\pi+2} R \quad \text{und} \quad x = \frac{4-\pi}{\pi-2} R$$

auf der anderen Seite.

III. Ermittlung der Beanspruchung kreisförmiger Ringspante konstanter Biegesteifigkeit.

Lastfall A.

Belastung durch eine radial gerichtete örtlich angreifende Kraft.

Im allgemeinen ist der Ringspant 3fach statisch unbestimmt, im vorliegenden Fall jedoch und auch in den nachfolgenden Lastfällen kann man durch geschickte Wahl der Schnittufer die Rechnung wesentlich vereinfachen. An der Stelle 0 bei der in Bild 2 dargestellten Belastung ist die statisch Unbestimmte $X_3 = 0$. Die Vorzeichen für die Durchführung der Rechnung sind in Bild 4 festgelegt. Die Spantquerschnitthöhe wird durch das Verhältnis $\frac{r}{R}$ in die Rechnung eingeführt. Nachfolgende Ergebnisse gelten für $\frac{r}{R} \lesseqgtr 1$, Bild 3.

Die Elastizitätsgleichungen lauten

$$\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} = 0,$$
$$\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} = 0.$$

Die Verschiebungsgrößen bestimmen sich allgemein zu:

$$EI\,\delta_{ik} = \int B_i\, B_k\, du.$$

Bestimmung des Biegemomentenverlaufs B_0 im statisch bestimmten Hauptsystem bezogen auf die neutrale Faser, Bild 4.

Das tangential wirkende Schubkraftelement

$$\tau s\, du = \tau s\, R\, d\varphi_0$$

erzeugt im Spantring an der Stelle φ das Biegemoment

$$d B_0 = -\tau s\, du\, e.$$

Der Abstand e ist durch folgende geometrische Beziehung gegeben:

$$e = R - r\,(\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi).$$

Dann ist das Biegemoment B_0 an der Stelle φ:

$$B_0 = -\frac{PR}{\pi}\int_0^{\varphi} \sin\varphi_0\, d\varphi_0 + \frac{Pr}{\pi}\sin\varphi \int_0^{\varphi} \sin^2\varphi_0\, d\varphi_0 + $$
$$+ \frac{Pr}{\pi}\cos\varphi \int_0^{\varphi} \sin\varphi_0 \cos\varphi_0\, d\varphi_0,$$

also

$$B_0 = \frac{P}{\pi}\left(R\cos\varphi + r\,\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - R\right).$$

Ferner ist

$$B_1 = 1 \text{ infolge } X_1 = 1,$$
$$B_2 = r\,(1-\cos\varphi) \text{ infolge } X_2 = 1.$$

Aus Symmetriegründen braucht nur über eine Ringhälfte integriert werden. Es ergeben sich folgende Last- bzw. Beiwerte:

$$EI\,\delta_{10} = \int_0^{\pi} B_1\, B_0\, du = Pr\left(\frac{r}{2} - R\right),$$

$$EI\,\delta_{20} = Pr^2 R\left(\frac{5\,r}{8\,R} - \frac{3}{2}\right),$$

$$EI\,\delta_{11} = r\pi,$$

$$EI\,\delta_{22} = \frac{3}{2} r^3 \pi,$$

$$EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{21} = r^2\pi.$$

Durch Auflösen der Elastizitätsgleichungen erhalten wir die Größe der statisch Unbestimmten:

$$X_1 = -\frac{Pr}{4\pi}, \qquad X_2 = \frac{P}{\pi}\left(\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\right).$$

Der endgültige Biegemomentenverlauf ist dann

$$B = B_0 + X_1 B_1 + X_2 B_2,$$

$$\boxed{B = \frac{Pr}{2\pi}\left(\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi - 1\right)} \quad \ldots \quad (1)$$

Der endgültige Normalkraftverlauf ermittelt sich aus der Gleichung

$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2.$$

Die Normalkraft N_0 im statisch bestimmten Hauptsystem an der Stelle φ erhält man durch Zerlegung des Schubkraftelementes in die Tangentialkomponente und nachfolgende Integration von 0 bis φ, s. Bild 4,

$$dN_0 = -\tau s\, du \cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$N_0 = -\frac{P}{2\pi}\varphi \sin\varphi.$$

Der Normalkraftverlauf im statisch unbestimmten System errechnet sich dann zu

$$\boxed{N = \frac{P}{2\pi}\left(\frac{2R}{r}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\right)} \quad \ldots \quad (2)$$

In ähnlicher Weise erhält man den Querkraftverlauf

$$\boxed{Q = \frac{P}{2\pi}\left(\varphi\cos\varphi + \frac{2R}{r}\sin\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right)} \quad \ldots \quad (3)$$

In Bild 5 bis 7 sind Biegemomenten-, Normalkraft- und Querkraftverlauf über dem Spantumfang aufgetragen. Das Verhältnis $\frac{r}{R}$ ist als Parameter eingeführt, und zwar für $\frac{r}{R} = 1$, $\frac{r}{R} = 1{,}2$, $\frac{r}{R} = 0{,}8$.

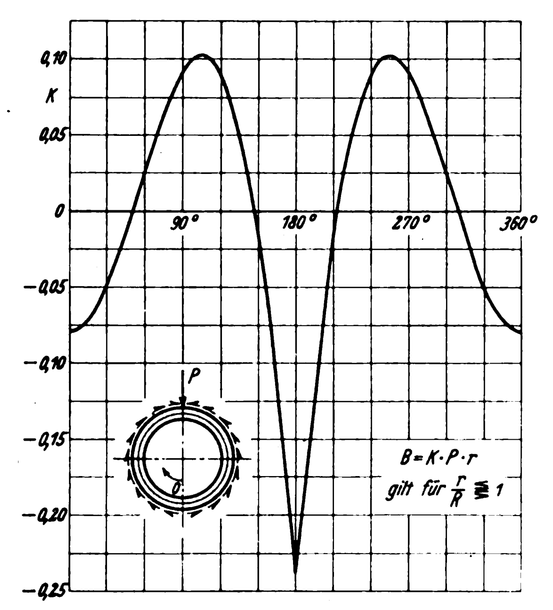


Bild 5. Biegemomente bei Radialbelastung.

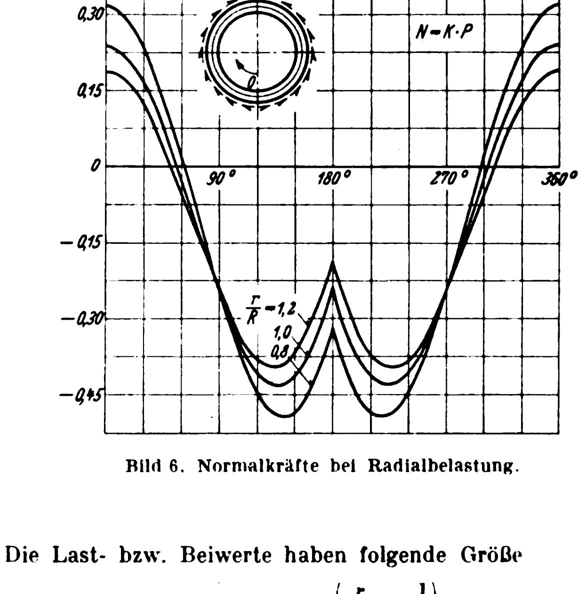


Bild 6. Normalkräfte bei Radialbelastung.

Die Last- bzw. Beiwerte haben folgende Größe

$$EI\,\delta_{30} = M r^2 \left(\frac{r}{4R} - \frac{1}{2}\right).$$

$$EI\,\delta_{33} = \frac{\pi}{2} r^3.$$

Die statisch Unbestimmte errechnet sich zu

$$X_3 = \frac{M}{2r\pi}\left(2 - \frac{r}{R}\right).$$

Der endgültige Biegemomenten-, Normalkraft- und Querkraftverlauf erhält den Wert

$$B = \frac{M}{\pi}\left(\sin\varphi - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$N = -\frac{M}{r\pi}\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$Q = \frac{M}{r\pi}\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\frac{r}{R}\right) \quad \ldots\ldots (6)$$

dargestellt in Bild 9 bis 11.

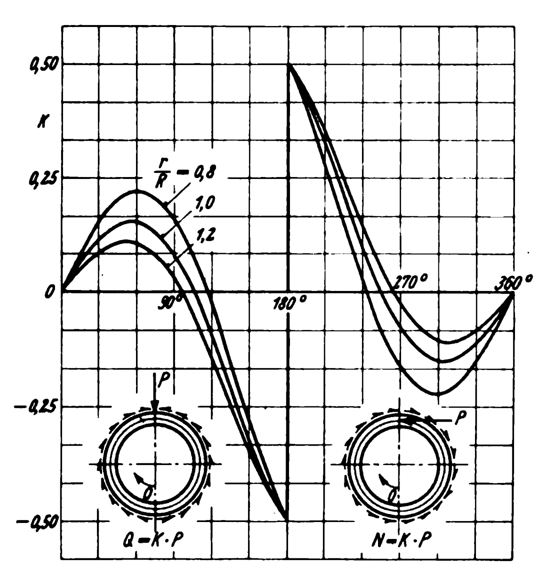


Bild 7. Querkräfte bei Radialbelastung, gleichzeitig Normalkräfte bei Tangentialbelastung (Abstand r).

Lastfall B.

Belastung durch ein in der Schwerlinie des Spantes örtlich eingeleitetes Moment, Bild 8.

Für diese Belastung ist der Spantring an der Stelle 0 einfach statisch unbestimmt. Die statisch Unbestimmten X_1 und X_2 sind gleich Null. Die Elastizitätsgleichung lautet

$$\delta_{30} + X_3\delta_{33} = 0.$$

Der Biegemomenten-, Normalkraft- und Querkraftverlauf im statisch bestimmten Hauptsystem bestimmt sich in analoger Weise wie beim Lastfall A.

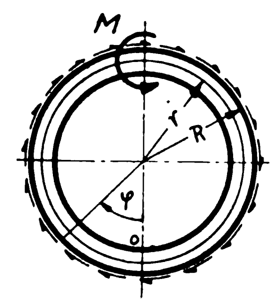


Bild 8. Lastfall B. Momentenbelastung.

$$B_0 = \frac{M}{2\pi}\left(\frac{r}{R}\sin\varphi - \varphi\right),$$

$$N_0 = -\frac{M}{2R\pi}\sin\varphi,$$

$$Q_0 = \frac{M}{2R\pi}(\cos\varphi - 1).$$

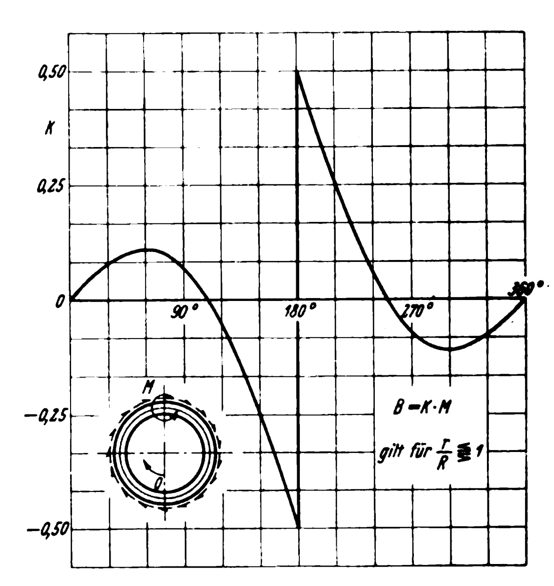


Bild 9. Biegemomente bei Momentenbelastung.

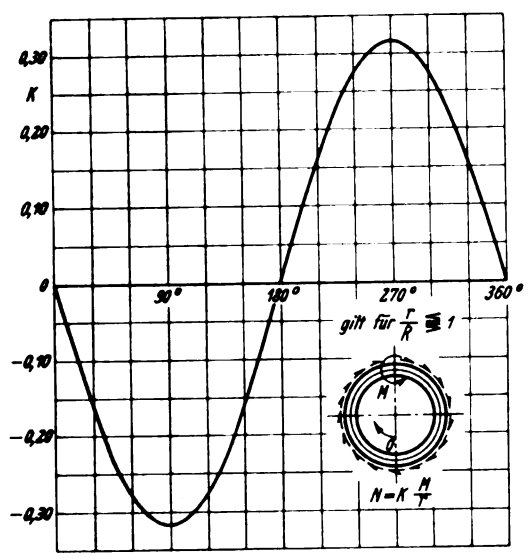


Bild 10. Normalkräfte bei Momentenbelastung.

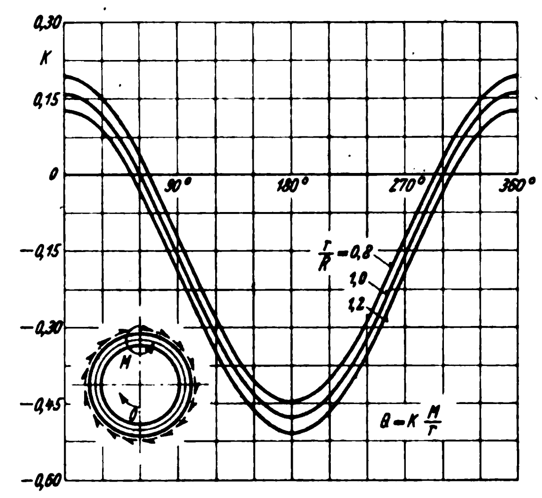


Bild 11. Querkräfte bei Momentenbelastung.

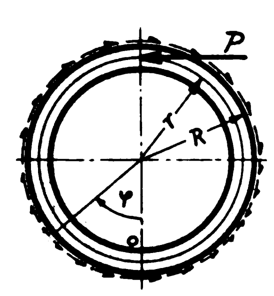


Bild 12. Lastfall C. Tangentialbelastung (Abstand r).

Lastfall C.

Belastung durch eine tangential gerichtete im Abstand r des Spantes örtlich angreifende Kraft, Bild 12.

Auch für diese Belastung ist der Spantring an der Stelle 0 einfach statisch unbestimmt. Der Rechnungsgang erfolgt ähnlich wie bei den vorhergehenden Lastfällen. Die Zwischen- und Endergebnisse lauten:

$$B_0 = \frac{P\,r}{2\pi}\left(\frac{2\,R}{r}\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \sin\varphi + \frac{r}{R}\sin\varphi - \varphi\right),$$

$$N_0 = \frac{P}{2\pi}\left(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{r}{R}\sin\varphi\right),$$

$$Q_0 = \frac{P}{2\pi}\left(\varphi\sin\varphi + \frac{r}{R}\cos\varphi - \frac{r}{R}\right);$$

ferner

$$E\,I\,\delta_{30} = \frac{P\,r^3}{2}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{2\,R} - \frac{5}{4}\right),$$

$$E\,I\,\delta_{33} = \frac{\pi}{2}\,r^3;$$

und

$$X_3 = -\frac{P}{\pi}\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{2\,R} - \frac{5}{4}\right).$$

$$\boxed{B = \frac{P\,r}{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \varphi\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\boxed{N \doteq \frac{P}{2\pi}\left(\varphi\cos\varphi + \frac{2\,R}{r}\sin\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right)} \quad \ldots (8)$$

$$\boxed{Q = \frac{P}{2\pi}\left(\varphi\sin\varphi - \frac{2\,R}{r}\cos\varphi + \frac{5}{2}\cos\varphi - \frac{r}{R}\right)} \quad (9)$$

B und Q sind in Bild 13 und 14 graphisch dargestellt. N hat den gleichen Verlauf wie Q im Lastfall A, s. Bild 7.

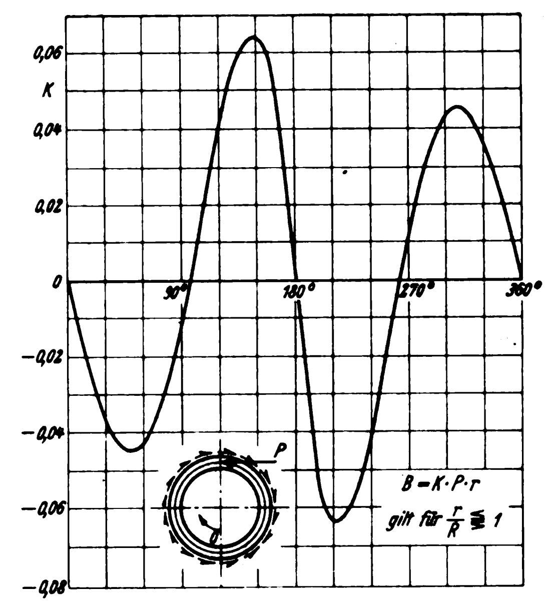


Bild 13. Biegemomente bei Tangentialbelastung (Abstand r).

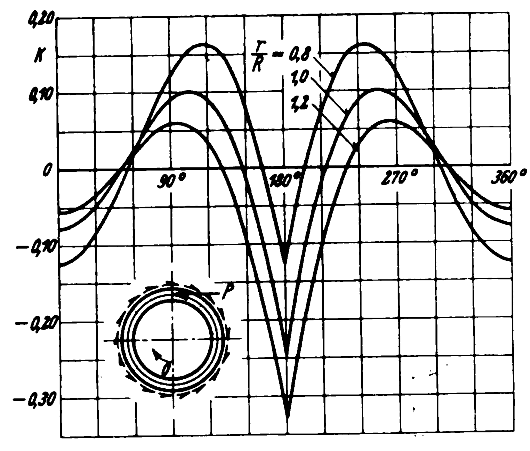


Bild 14. Querkräfte bei Tangentialbelastung (Abstand r).

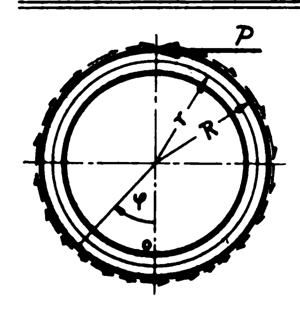
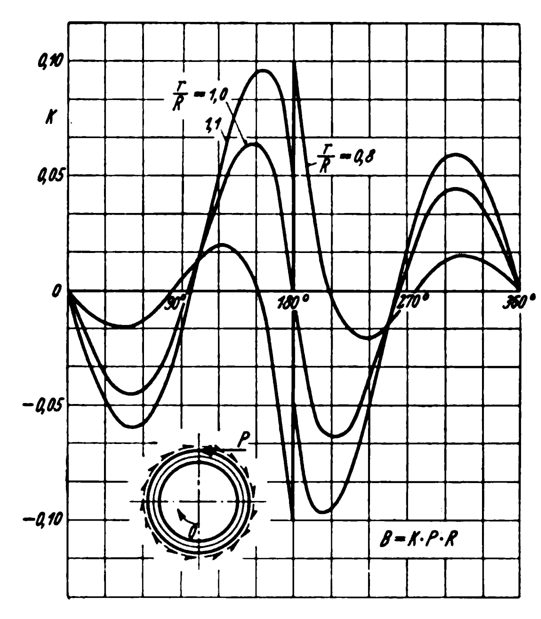


Bild 15 (links). Lastfall D. Tangentialbelastung (Abstand R).

Bild 16 (rechts). Biegemomente bei Tangentialbelastung (Abstand R).



Lastfall D.
Belastung durch eine tangential gerichtete, im Abstand R örtlich angreifende Kraft, Bild 15.

Die Beanspruchungen dieser Spantbelastung erhält man, wenn dem Lastfall C noch ein Moment von der Größe $M = P\,(R - r)$ überlagert wird. B, N und Q haben dann nachfolgenden Verlauf

$$B = \frac{P\,R}{2\,\pi}\left(2 \sin \varphi - \frac{r}{R}\,\varphi \cos \varphi - \frac{r}{2\,R} \sin \varphi - \varphi\right) \quad (10)$$

$$N = \frac{P}{2\,\pi}\left(\varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$Q = \frac{P}{2\,\pi}\left(\varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Bild 16 zeigt den Biegemomentenverlauf. N hat den gleichen Verlauf wie N im Lastfall C für $\frac{r}{R} = 1$ und wie Q im Lastfall A bei $\frac{r}{R} = 1$, s. Bild 7. Q im Lastfall D hat denselben Verlauf wie Q im Lastfall C bei $\frac{r}{R} = 1$, s. Bild 14.

IV. Beispiel.

Es sind die Beanspruchungen eines Ringspantes mit dem Verhältnis $\frac{r}{R} = 1{,}1$ nachfolgender Belastung zu ermitteln, Bild 17.

Durch Zerlegung von P erhalten wir folgende Grundbelastungen:

Lastfall A: 0,9 P = 1800 kg radial wirkend,
» C: 0,4 P = 800 kg tangential wirkend,
» B: 40 mkg.

Die resultierende Biegemomentenlinie findet man entweder rechnerisch durch Überlagerung der Ergebnisse aus den Gl. (1), (7) und (4) oder durch graphische Überlagerung (Durchpausen) der Biegemomentenkurven aus den Grundbelastungen, die in Bild 5, 13 und 9 dargestellt sind. Die gleichen Verfahren wendet man auch zur Ermittlung des resultierenden Normalkraft- und Querkraftverlaufes an. Von größtem Interesse ist die Kenntnis der Längsspannungen aus den Biegemomenten und Normalkräften.

Zahlentafel 1. Werte der im Spant wirkenden Biegemomente aus der rechnerischen Ermittlung in mkg.

Lastfall \ φ°	0	90	180	180	270	360
A	— 47,2	+ 53,9	— 141,5	— 141,5	+ 53,9	— 47,2
B	0	— 3,0	0	0	+ 3,0	0
C	0	+ 2,7	— 20,0	+ 20,0	— 2,7	0
Resultat	— 47,2	+ 53,6	— 161,5	— 121,5	+ 54,2	— 47,2

Zahlentafel 2. Werte der im Spant wirkenden Normalkräfte aus der rechnerischen Ermittlung in kg.

Lastfall \ φ°	0	90	180	180	270	360
A	+ 378	— 450	— 378	— 378	— 450	+ 378
B	0	+ 41	— 400	+ 400	— 41	0
C	0	— 39	0	0	+ 39	0
Resultat	+ 378	— 448	— 778	+ 22	— 452	+ 378

In Zahlentafel 1 und 2 sind einige Zwischenwerte der rechnerischen Ermittlung angegeben. Bild 18 zeigt den endgültigen Biegemomenten- und Normalkraftverlauf im Ringspant.

Zur Dimensionierung der Nietung bzw. der Schweißnaht zwischen Ringspant und Schale braucht man den Schub-

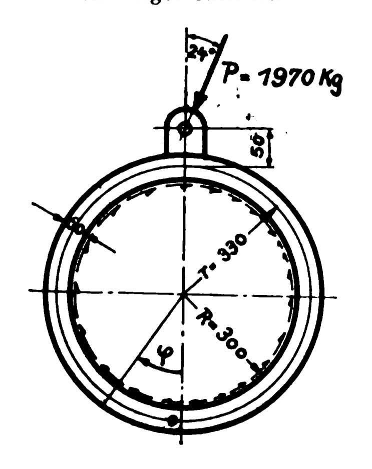


Bild 17 (links). Beispiel für eine Spantbelastung.

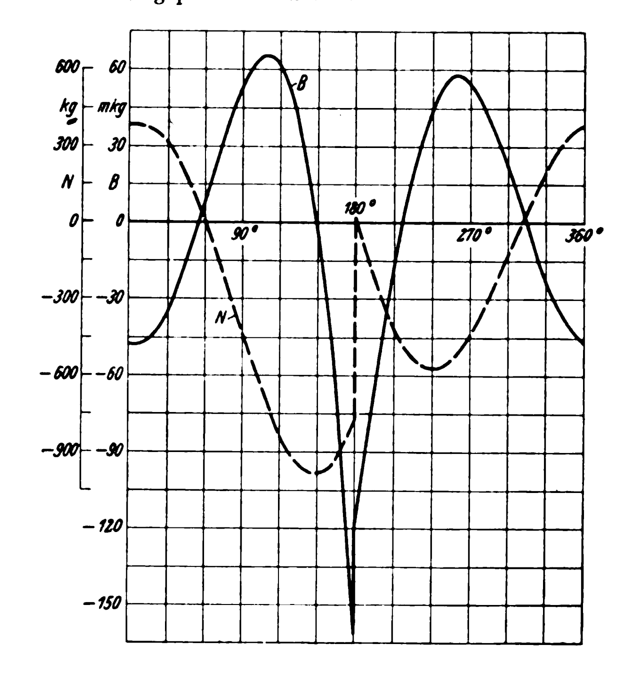


Bild 18 (rechts). Biegemomente und Normalkräfte.

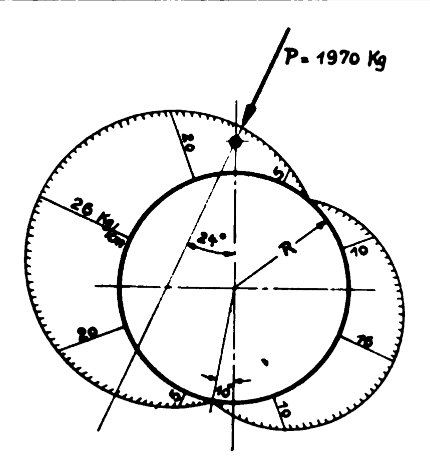


Bild 19. Größe und Verlauf des am Spant angreifenden Schubflusses.

flußverlauf. Er wird nach der im Abschnitt II gezeigten Methode errechnet und hat für die vorliegende Ringspantbelastung den in Bild 19 dargestellten Verlauf. Der maximale Schubfluß beträgt demnach 26 kg/cm.

V. Gültigkeitsbereich.

1. Die Rechnungen und deren Ergebnisse gelten für Ringspante, bei denen die Querschnitthöhe im Vergleich zum Krümmungshalbmesser r klein ist. In diesem Fall verhält sich der gekrümmte Stab ähnlich wie ein gerader. Es wurde daher die Spannungsverteilung nach dem Geradliniengesetz angenommen und ferner vorausgesetzt, daß die Querschnitte eben bleiben. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf die Verschiebungsgrößen wurde vernachlässigt.

2. Die Biegesteifigkeit des Schalenbleches im Vergleich zu der des Ringspantes wurde als klein vorausgesetzt.

3. Die durch die elastische Verformung hervorgerufene Abweichung des Spantumrisses von der Kreisform wurde nicht berücksichtigt.

Bemessung von Luftschraubenflügelfüßen.

Von G. Cordes.

Bericht der Junkers Flugzeug- und -Motorenwerke, A.-G., Dessau, Motorenbau Stammwerk.

Es wird ein Berechnungsverfahren angegeben, das die gleichzeitige Berücksichtigung der dynamischen und statischen Beanspruchung bei der Festlegung der Flügelfußgröße für eine Luftschraube gestattet. Weiter werden je nach der Schwingungsgefährdung und dem vorgesehenen Einsatz der Schraube vier Beanspruchungsklassen unterschieden, die bei gegebener Schraube auf erheblich verschiedene zulässige Motorleistungen führen. Die Auswirkung dieser Betrachtungsweise wird für Dural, Elektron und Kunstharzpreßholz verfolgt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die stetig wachsenden Motorleistungen, sowie neuartige Forderungen wie die Sturzflugbremsung mittels Luftschraube und die damit verbundenen erhöhten Anforderungen an die Festigkeit der Schraube bedingen sorgfältige Überlegungen bei der Wahl der für die Betriebssicherheit maßgebenden Abmessungen. Abgesehen von der Bemessung der Nabe selber, deren Wandstärken z. B. ausreichend stark sein müssen, um eine Verformung infolge der außergewöhnlich großen Luftkräfte bei der Sturzflugbremsung und damit eine Beeinträchtigung der Verstelltätigkeit zu vermeiden, sind vor allem die in Frage kommenden Schaftstärken der Luftschraubenflügel von größtem Interesse. Wenn auch besonders die dynamische Beanspruchung bereits Gegenstand eingehender Untersuchungen war, so ist doch unseres Erachtens die Wechselbeziehung zwischen dynamischer und statischer Belastung, die in der Abhängigkeit der zulässigen Wechselspannungen im Flügelschaft von der Vorspannung zum Ausdruck kommt, nicht genügend berücksichtigt worden. Unter Hervorhebung dieses Gesichtspunktes wird im folgenden die Abhängigkeit der erforderlichen Schaftgröße von der Startleistung des in Frage kommenden Motors und der Beanspruchungsart der Schraube — es werden vier verschiedene Einsatzfälle unterschieden — untersucht, was einen Überblick über die Einsatzfähigkeit verschiedener Größenklassen von Schrauben und einen Einblick in die einzuschlagende Entwicklungsrichtung geben wird.

II. Normalmotor und Normalschraube.

Entsprechend der Tatsache, daß eine für eine bestimmte Leistungsklasse entworfene Schraube festigkeitsmäßig für einen mittleren Wert der Schraubendrehzahl und des in Frage kommenden Durchmessers gerechnet sein muß, um einerseits sicher zu sein, andererseits aber im Gewicht nicht zu hoch zu liegen, wurden für die Abhängigkeit der Drehzahl und des Schraubendurchmessers von der Motorleistung Zusammenhänge festgelegt, die sich aus einer statistischen Sichtung bereits vorliegender oder im Projekt befindlicher Motoren- und Schraubenmuster ergeben.

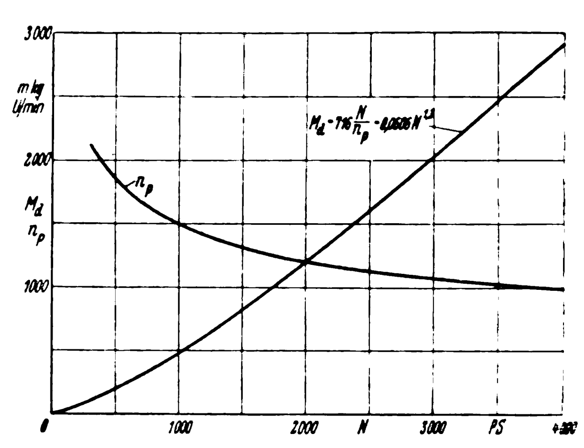


Bild 1. Schraubendrehzahl und Drehmoment an der Propellerwelle in Abhängigkeit von der Startleistung.

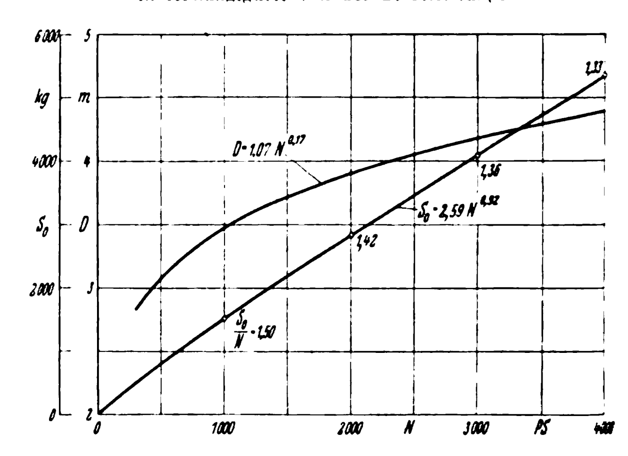


Bild 2. Schraubendurchmesser und Standschub in Abhängigkeit von der Startleistung.

So stellt die in Bild 1 gezeigte Drehzahlkurve als Mittellinie eines gewissen Streubereiches den »Normalmotor« bei verschiedenen Startleistungen dar. Aus Drehzahl n_P und Leistung N ergibt sich das gesamte von der Schraube aufzunehmende Drehmoment M_d. Die so erhaltene Abhängigkeit des Momentes von der Leistung läßt sich in die Form

$$M_{d\,\mathrm{mkg}} = 0{,}0606\, N_{\mathrm{PS}}^{1,3} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

fassen, die für die weiteren rechnerischen Abschätzungen zugrunde gelegt wird.

Die Abhängigkeit des Durchmessers D der »Normalschraube« von der Motorleistung wird in brauchbarer Weise durch

$$D_m = 2\, R_m = 1{,}07\, N_{\mathrm{PS}}^{0,17} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

dargestellt. Sie ist in Bild 2 wiedergegeben und stellt einen guten Mittelwert für die praktisch in Frage kommenden Abmessungen dar. Entsprechend ist auch der eingetragene Standschubverlauf, in den noch die Blattbreite eingeht, als



Mittelwert aufzufassen. Er ergibt sich aus einer Untersuchung des mit üblichen Schrauben praktisch erreichten Standschubes pro Leistungseinheit in Abhängigkeit von der auf die Schraubenkreisfläche bezogenen Leistung. Es ist

$$S_{0\,\mathrm{kg}} = 2{,}59\, N_{\mathrm{PS}}^{0{,}92} \qquad (3)$$

III. Dynamische Beanspruchung.

Unter den oben gemachten Voraussetzungen ist es nun leicht möglich, eine Festigkeitsabschätzung für den ganzen jetzt und in nächster Zukunft in Frage kommenden Leistungsbereich durchzuführen. Wir beginnen mit der Schwingungsbeanspruchung durch die Wechselmomente des Motors, die am einfachsten zu erledigen ist.

Nach DVL-Untersuchungen[1]) besteht für den Flügelschaft Dauerbruchgefahr durch Erreichen einer Wechselspannung von der Größe der Dauerfestigkeit, wenn zwischen dem für den Schaft zum Bruch erforderlichen Wechselmoment M_B, dem Wechselmoment M_{dw} an der Luftschraubenwelle und der Flügelzahl z die Beziehung

$$\frac{M_B\, z}{M_{dw}} = 2{,}2 \qquad (4)$$

besteht. Mit d als Blattschaftdurchmesser und σ_d als Dauerfestigkeit des Flügelwerkstoffes ist $M_B = \frac{d^3 \pi}{32}\, \sigma_d$ (voller Schaftquerschnitt angenommen). M_{dw} drücken wir mit Hilfe des Faktors a in Prozenten des mittleren Gleichdrehmomentes aus: $M_{dw} = a\, M_d$. Lassen wir nun für den Schaft als sicheren Wert nur den 1,8ten Teil der Dauerfestigkeit als Wechselspannung zu, so erhalten wir

$$\frac{\frac{d^3 \pi}{32}\, \sigma_d\, z}{a\, M_d} = 1{,}8 \cdot 2{,}2 \approx 4 \qquad (5)$$

Durch Einsetzen von (1) und Auflösung nach d ergibt sich hieraus ein erforderlicher Schaftdurchmesser

$$d_{\mathrm{mm}} = 13{,}6 \sqrt[3]{\frac{a\, N_{\mathrm{PS}}^{1{,}3}}{z\, \sigma_{d\,\mathrm{kg\,mm}^2}}} \qquad (6)$$

der also ausreichende Bemessung des Flügelfußes bei einem durch a und N charakterisierten Motor gewährleistet.

Liegt außer der Erregung durch das Drehschwingungsmoment der Kurbelwelle, die für die meisten Luftschraubenbrüche verantwortlich zu machen ist, noch eine solche durch pulsierende Momente, hervorgerufen durch Kippbewegungen des Motors, oder durch periodische Luftkräfte, z. B. bei Gegenlaufschrauben, vor, so ist ein entsprechend vergrößerter Beiwert a zu verwenden. Da wegen der schlechten Kontrollierbarkeit dieser zusätzlichen Erregungen die Höhe des erforderlichen Zuschlages im allgemeinen nur geschätzt werden kann, soll hier davon abgesehen werden.

IV. Statische Beanspruchung.

Wir haben nun für Stand und Sturzflug als den ungünstigsten Betriebsbedingungen nachzurechnen, welche Schaftabmessungen mit Rücksicht auf die statische Beanspruchung der Flügel erforderlich sind. Die auftretende Gesamtspannung setzt sich aus einem Zentrifugalkraft- und einem Biegemomentenanteil zusammen. Es lassen sich ähnlich einfache Ausdrücke wie im Fall der Schwingungsbeanspruchung ableiten, wenn man den ersteren Anteil auf Grund folgender Betrachtung erledigt.

a) Zentrifugalkraft.

Im Sturzflug kann mit der gleichen Schraubendrehzahl gerechnet werden wie am Stand, da dann größte Bremskraft erzielt wird. Damit ist die im Schaft auftretende Zentrifugalkraft in beiden Fällen die gleiche. Sie berechnet sich aus Gewicht G bzw. Volumen V und Schwerpunktsradius r_s des Flügels für eine Winkelgeschwindigkeit ω_P zu

[1]) K. Lürenbaum, Schwingungen des Systems Motor-Luftschraube. Schriften d. Deutschen Akademie d. Luftfahrtforschung, Heft 5.

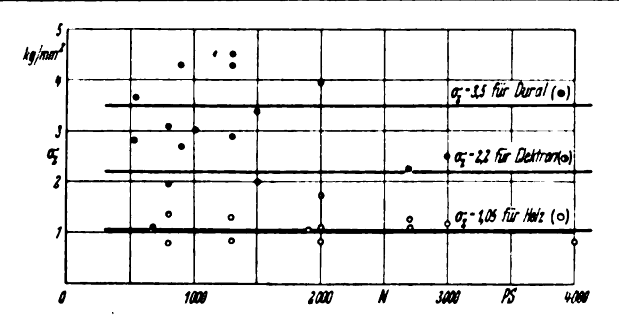


Bild 3. Zentrifugalspannung im Flügelfuß.

$$Z = \frac{G}{g}\, \omega_P^2\, r_s = \varrho\, V\, \omega_P^2\, r_s \qquad (7)$$

Für geometrisch ähnliche Blätter kann $V = A_1\, d^2\, R$ und $r_s = A_2\, R$ gesetzt werden, wo A_1 und A_2 Zahlenfaktoren sind, die von der Blattform abhängen. Damit wird die auftretende Zugspannung

$$\sigma_z = \frac{4\, \varrho\, A_1\, d^2\, R\, \omega_P^2\, A_2\, R}{d^2\, \pi} = A\, \varrho\, (R\, \omega_P)^2 \qquad (8)$$

Da wegen der geringen Unterschiede in den üblichen Blattformen der Zahlenfaktor A nur wenig schwankt und die Umfangsgeschwindigkeit $R\, \omega_P$ bei allen Schrauben wenig veränderlich ist, so hängt die Zugspannung im Mittel nur vom Blattmaterial, nicht von den Abmessungen des Blattes und der Motorleistung ab.

Zur Nachprüfung dieses Ergebnisses wurden die Zugspannungen im Schaft einer größeren Anzahl ausgeführter oder projektierter Schrauben bei Startdrehzahl nachgerechnet und in Bild 3 über der Motorleistung aufgetragen. Bei Holzschrauben zeigt sich in der Tat im ganzen Bereich von 500 bis 4000 PS eine auffallend geringe Streuung von $\left.\begin{matrix}+0{,}3\\-0{,}25\end{matrix}\right|$ kg/mm² um den Mittelwert von 1,05 kg/mm². Bei Elektron beträgt die Streuung $\left.\begin{matrix}+1{,}2\\-1{,}1\end{matrix}\right|$ kg/mm² um den Mittelwert 2,2 kg/mm² und bei Dural $\left.\begin{matrix}+1{,}0\\-1{,}0\end{matrix}\right|$ kg/mm² um den Mittelwert 3,5 kg/mm². In Übereinstimmung mit unseren Folgerungen aus Gl. (8) ist das Verhältnis $\frac{3{,}5}{2{,}2} = 1{,}59$ der Mittelwerte für Dural und Elektron nahezu gleich dem Verhältnis ihrer spezifischen Gewichte $\frac{2{,}8}{1{,}8} = 1{,}56$. Aus dem Verhältnis $\frac{3{,}5}{1{,}05}$ für Duralumin und Holz würde sich entsprechend ein mittleres spezifisches Gewicht von 0,84 g/cm³ für den außerhalb des kritischen Querschnittes liegenden Teil des Holzblattes ergeben.

Für uns haben die geschilderten Verhältnisse den Vorteil, daß wir bei Untersuchung der erforderlichen Schaftgröße in Abhängigkeit von der Leistung nur das Biegemoment infolge der Luftkraft berücksichtigen zu brauchen, indem wir lediglich auf Grund der für die Zugseite geltenden Beziehung $\sigma_{ges} = \sigma_b + \sigma_z$ als für den Blattwerkstoff zulässige Biegespannung σ_b die um obige Mittelwerte σ_z verminderte sichere Gesamtspannung σ_{ges} einsetzen.

b) Luftkraft.

Wir sehen — wie es ja auch bei der Schwingungsbeanspruchung in Gl. (4) der Fall ist — davon ab, daß die gefährdete Schaftstelle sich auf einem gewissen von Null verschiedenen Radius befindet, und rechnen so, als ob sie mit der Schraubenachse zusammenfiele. Dies ist um so mehr berechtigt, als der in die folgende Rechnung eingehende Schraubenradius ja auch nur ein Mittelwert nach Gl. (2) ist, der durch die hier gemachte Annahme noch eine gewisse Sicherheit erhält.

Die resultierende Luftkraft denken wir uns am Radius 0,7 R des Flügels angreifend. Sie setzt sich zusammen aus

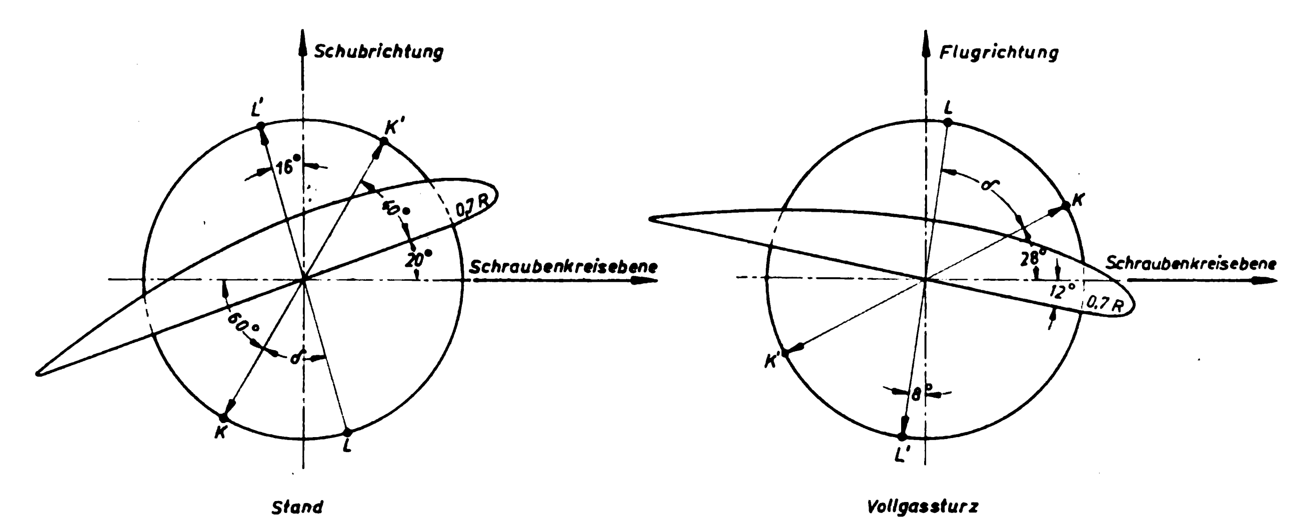


Bild 4. Lage der Hauptbeanspruchungsebenen im Flügelfuß. Zu $K: \sigma_d, \sigma_{m\delta}$; zu $L: \sigma_m, \sigma_{d\delta}$.

der in oder entgegen Flugrichtung wirkenden Schubkraft $S = s\,\frac{S_0}{z}$ und der dazu senkrechten Umfangskraft $T = t\,\frac{M_d}{0{,}7\,R\,z}$. Die uns hauptsächlich interessierenden Belastungsfälle sind

Stand: $s = 1$, $t = 1$,
Sturzflug im Leerlauf: $s = 2$, $t = 0$,
Sturzflug mit Vollgas: $s = 2$, $t = 1$.

Der für Sturzflug gewählte Faktor $s = 2$ stellt dabei einen annehmbaren Wert, aber noch nicht die obere Grenze dar.

Damit ergibt sich aus Moment $0{,}7\,R\sqrt{S^2+T^2}$ und Widerstandsmoment $\frac{d^3\pi}{32}$ die im Schaft auftretende Biegespannung zu

$$\sigma_b = \sigma_{\text{ges}} - \sigma_z = \frac{0{,}7\,R\sqrt{\left(s\,\frac{S_0}{z}\right)^2 + \left(t\,\frac{M_d}{0{,}7\,R\,z}\right)^2}}{\frac{d^3\pi}{32}} \quad . . (9)$$

Einsetzen von (1), (2) und (3) und Auflösung nach d^3 liefert

$$d^3_{\text{mm}} = \frac{9810}{z\,(\sigma_{\text{ges}} - \sigma_z)_{\text{kg/mm}^2}}\, s\, N_{\text{PS}}^{1,1} \sqrt{1 + 0{,}00396\,\frac{t^2}{s^2}\, N_{\text{PS}}^{0,42}} \quad (10)$$

Infolge der Kleinheit des zweiten Summanden unter der Wurzel läßt sich diese sehr gut durch $(1 + 0{,}00198\,\frac{t^2}{s^2}\,N^{0,42})$ annähern. Weiter können wir die Gesamtspannung bei 1,8facher Sicherheit in der Form $\sigma_{\text{ges}} = \frac{\sigma_m}{1{,}8}$ durch die Mittelspannung σ_m ersetzen, die für eine bekannte Wechselspannung aus dem Dauerfestigkeitsschaubild für den verwendeten Blattwerkstoff zu entnehmen ist. Dann erhält man als erforderlichen Schaftdurchmesser

$$d_{\text{mm}} = 21{,}4\sqrt[3]{\frac{s}{z\left(\frac{\sigma_m}{1{,}8} - \sigma_z\right)_{\text{kg/mm}^2}}\left(N_{\text{PS}}^{1,1} + 0{,}00198\,\frac{t^2}{s^2}\,N_{\text{PS}}^{1,5}\right)} \quad (11)$$

Wegen des geringen Einflusses, den das Glied mit t^2 in der Gleichung hat, ergibt sich für Leerlaufsturz und Vollgassturz fast der gleiche Durchmesser, so daß wir uns bei den weiteren Betrachtungen auf einen von beiden Fällen beschränken wollen, und zwar auf den letzteren als den etwas ungünstigeren. Dieser Fall stimmt außerdem mit dem Stand darin überein, daß gleichzeitig dynamische und statische Beanspruchung vorhanden ist.

V. Optimaler Schaftdurchmesser.

Wir haben uns jetzt mit dem inneren Zusammenhang zu befassen, der zwischen den Gl. (6) und (11) besteht und der durch die darin enthaltenen Werte σ_d und σ_m gegeben ist. Dazu müssen wir einige Bemerkungen über die gegenseitige Lage der durch das dynamische bzw. statische Moment maximal beanspruchten Punkte K und L des Schaftumfanges vorausschicken, Bild 4.

Die oben benutzte Gl. (4) findet ihre anschauliche Begründung darin, daß bei den bisher untersuchten gebrochenen Schrauben die Ausgangsstelle des Ermüdungsbruches und damit die schwingungsmäßig am meisten beanspruchte Stelle unter der Blattaustrittskante in einem Winkel von rd. 60° zur Schraubenkreisebene liegt. Bei Zugrundelegung eines mittleren Druckseiten-Steigungswinkels von 20° für das Profil bei 0,7 R im Stand ergibt sich damit ein Winkel von 40° zwischen Profildruckseite und Ebene des Bruchmomentes. Dieser gleiche Winkel kann auch für Vollgassturz angenommen werden, so daß bei einer mittleren Betriebsstellung von —12° die maximale Schwingungsbeanspruchung unter 28° zur Schraubenkreisebene zu erwarten ist. Die Ebene des statischen Momentes ist durch die Richtung der Resultierenden aus Schubkraft S und Umfangskraft T gegeben. Auf Grund der Zusammenhänge in Bild 1 und 2 liegt je nach der Motorleistung diese Resultierende unter 12° bis 20° zur Schubrichtung im Stand bzw. —6° bis —10° zur negativen Flugrichtung im Vollgassturz. Rechnet man auch hier mit mittleren Werten, nämlich 16° bzw. —8°, so findet man für den Winkel δ zwischen den Punkten K und L

im Stand: $\delta = 46°$,
im Sturzflug mit Vollgas: $\delta = 54°$.

Von der vollen Biegespannung σ_b im Punkt L erhalten wir demnach bei linearer Spannungsverteilung nur den Betrag $\sigma_{b\delta} = \sigma_b \cos\delta$ im Punkt K; an Stelle der Mittelspannung

$$\sigma_m = 1{,}8\,(\sigma_b + \sigma_z) \quad . . . . (12)$$

in L tritt diejenige

$$\sigma_{m\delta} = 1{,}8\,(\sigma_b \cos\delta + \sigma_z) \quad . . . . . . (13)$$

in K. Umgekehrt wirkt statt der vollen Wechselspannung σ_d in K nur noch der Anteil $\sigma_{d\delta} = \sigma_d \cos\delta$ in L, wenn wir eine reine Schwingung über »Hochkante« des Flügels zugrunde legen.

Für die Bestimmung des günstigsten Schaftdurchmessers ist bei den heute üblichen Beanspruchungsverhältnissen der Luftschraube fast nur der Punkt K ausschlaggebend. Die hier vorhandenen Spannungswerte σ_d und $\sigma_{m\delta}$ sind durch das Dauerfestigkeitsschaubild des Flügelwerkstoffes miteinander verknüpft. Betrachten wir z. B. das entsprechende Diagramm für Duralumin in Bild 6, so ist hierdurch jeder Mittelspannung $\sigma_{m\delta}$ eine bestimmte Dauerfestigkeit σ_d zugeordnet. Der Arbeitspunkt $\sigma_{m\delta}$, der die bestmögliche Ausnutzung des Werkstoffes ermöglicht, ist nun der, welcher

auf σ_m umgerechnet und in (11) eingesetzt den gleichen Durchmesser ergibt, wie die ihm zugeordnete Dauerfestigkeit σ_d in (6), z. B. der eingezeichnete Punkt $\sigma_{m\delta} = 12{,}1$ kg/mm² mit dem zugehörigen $\sigma_d = \pm 5{,}2$ kg/mm², welcher nach beiden Gleichungen im Fall $z = 4$, $a = \pm 1$, $s = t = 1$, $N = 2000$ PS auf den Durchmesser 133 mm führt. Wählt man einen größeren Durchmesser, etwa 145 mm, so würde diesem nach (11) ein $\sigma_{m\delta}$ von 10,8 kg/mm² und nach (6) ein σ_d von $\pm 4{,}0$ kg/mm² entsprechen, während nach Bild 6 ein $\sigma_d = \pm 5{,}4$ kg/mm² zulässig wäre. Wir hätten also von den Festigkeitseigenschaften des Durals etwas verschenkt. Bei Annahme eines kleineren Durchmessers, etwa 125 mm, steigt $\sigma_{m\delta}$ auf 13,3 kg/mm² und σ_d auf $\pm 6{,}2$ kg/mm², während jetzt nach Bild 6 nur $\sigma_d = \pm 5{,}0$ kg/mm² zulässig wäre. Der Werkstoff ist also überbeansprucht.

Für den Punkt L läßt sich unter der Annahme, daß der Zusammenhang zwischen σ_d und $\sigma_{m\delta}$ nach Bild 6 auch für $\sigma_{d\delta}$ und σ_m gilt, in gleicher Weise ein optimaler Arbeitspunkt σ_m finden, der in (11) eingesetzt auf denselben Durchmesser führt, wie der zu ihm gehörige Wert $\sigma_{d\delta}$, auf σ_d umgerechnet, in (6). Dieser Durchmesser ist heute im allgemeinen kleiner als der für K gefundene, so daß er für die Ausführung nicht in Frage kommt. Im obigen Zahlenbeispiel beträgt er statt 133 mm nur 124 mm. Für künftige Projekte kann er aber ausschlaggebend werden. Die Entscheidung, welcher von den Punkten K und L im einzelnen Fall der Rechnung zugrunde zu legen ist, ergibt sich, wie wir jetzt sehen werden, bei der Bestimmung des besten Arbeitspunktes von selber.

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke (6) und (11), was nach dem obigen für den optimalen Arbeitspunkt entscheidend ist, und Auflösung nach σ_m erhalten wir folgende Abhängigkeit $\sigma_m = f_1(\sigma_d)$:

$$\sigma_m = 7{,}02\,\frac{s}{a}\,\sigma_d \left(N^{-0,2} + 0{,}00198\,\frac{t^2}{s^2}\,N^{0,2}\right) + 1{,}8\,\sigma_z \quad . \quad (14)$$

Ein Vergleich von (14) mit (12) und (13) zeigt, daß für $\sigma_{m\delta}$ eine gleichlautende Beziehung $\sigma_{m\delta} = f_{1\delta}(\sigma_{d\delta}) = f_1(\sigma_{d\delta})$ besteht:

$$\sigma_{m\delta} = 7{,}02\,\frac{s}{a}\,\sigma_{d\delta} \left(N^{-0,2} + 0{,}00198\,\frac{t^2}{s^2}\,N^{0,2}\right) + 1{,}8\,\sigma_z \quad (15)$$

Durch diese beiden Gleichungen sind die Spannungswerte in K und L miteinander verknüpft. Je nachdem nun der letztere oder der erstere Punkt entscheidend für die Schaftbemessung ist, erhält man aus dem durch das Dauerfestigkeitsschaubild gegebenen Zusammenhang eine zweite Gleichung $\sigma_m = f_2(\sigma_d)$ zu (14) oder $\sigma_{m\delta} = f_{2\delta}(\sigma_{d\delta})$ zu (15), indem man die für L geltende Funktion $\sigma_m = f(\sigma_{d\delta})$ in $\sigma_{d\delta}$-Richtung im Maßstab $1 : \frac{1}{\cos\delta}$ verzerrt bzw. die mit ihr identische, für K geltende, Funktion $\sigma_{m\delta} = f(\sigma_d)$ in σ_d-Richtung im Maßstab $1 : \cos\delta$ umrechnet, Bild 5.

Damit ist für einen bestimmten Werkstoff, also bekanntes σ_z, und das oben angegebene δ zu jedem a, s, t und N die Auflösung nach σ_m und σ_d (Spannungssystem L) bzw. $\sigma_{m\delta}$ und $\sigma_{d\delta}$ (Spannungssystem K) graphisch leicht möglich (wobei wohlgemerkt diese vier Größen aus verschiedenen Spannungssystemen nicht durch die Beziehungen (12), (13) und $\sigma_{d\delta} = \sigma_d \cos\delta$ miteinander verknüpft sind). Man trägt dazu in Bild 5 die sowohl der Gl. (14) wie (15) entsprechende Gerade ein und erhält als Schnittpunkt auf der K-Linie den dem optimalen Arbeitspunkt für K entsprechenden $\sigma_{d\delta}$-Wert, auf der L-Linie den dem optimalen Arbeitspunkt für L entsprechenden σ_d-Wert. Den zu $\sigma_{d\delta}$ gehörigen σ_d-Wert findet man direkt über diesem auf der Dauerfestigkeitskurve. Je nachdem nun der auf der Dauerfestigkeitskurve oder der auf der L-Linie liegende σ_d-Wert kleiner ist, bestimmt K oder L die Schaftgröße. Diese wird durch Einsetzen des kleineren σ_d-Wertes in (6) erhalten. Mit Hilfe der in Bild 5 gestrichelt eingezeichneten Linienzüge lassen sich außerdem die zu den Schnittpunkten $\sigma_{d\delta}$ und σ_d gehörigen anderen je drei Spannungswerte sofort ablesen.

Im allgemeinen ist, wie bereits oben angedeutet, der Punkt K der wichtigere. Bei den bis jetzt bekannt gewordenen Luftschraubenbrüchen ist der Anriß immer in seiner Nähe zu finden. L wird bei gegebenem Material um so wichtiger, je größer der Koeffizient von σ_d in (14) bzw. $\sigma_{d\delta}$ in (15) ist, d. h. im wesentlichen je größer $\left|\frac{s}{a}\right|$ ist (Sturzflugbremsung mit schwingungsmäßig wenig beanspruchter Schraube) und, für den in Frage kommenden Leistungsbereich, je kleiner N ist.

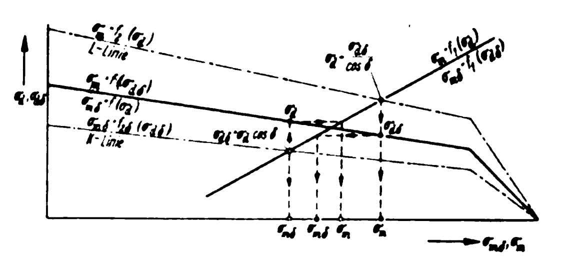


Bild 5. Graphische Bestimmung des günstigsten Arbeitspunktes.

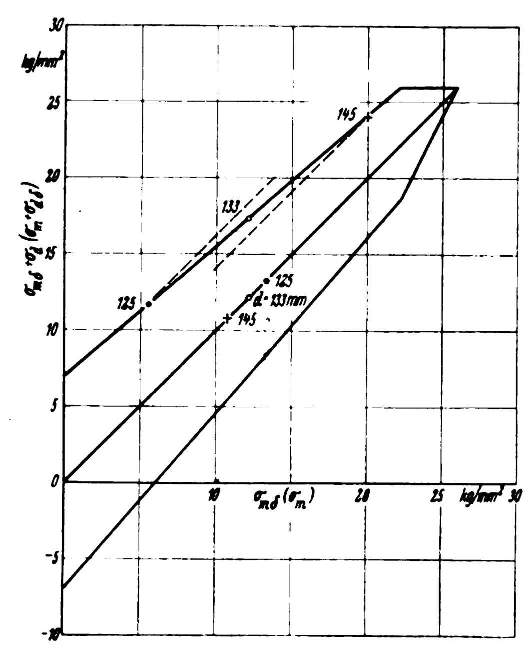


Bild 6. Dauerfestigkeitsschaubild für Duralflügelfüße.

Die dargestellte Rechnung wurde für Duralumin, Elektron und Kunstharzpreßholz (Lignofol) durchgeführt. Die benötigten Dauerfestigkeitsschaubilder, Bild 6 bis 8, wurden dabei mangels anderer Unterlagen nach folgenden Überlegungen aufgestellt. Dauerschwingungsversuche an naturgroßen Flügelfüßen ergaben bei fehlender Vorspannung unter dem Einfluß der in der Einspannung auftretenden Reibkorrosion für Duralumin ± 7 kg/mm², für Elektron ± 5 kg/mm² Festigkeit. (Eine Abhängigkeit von der Schaftgröße, welche bei den praktisch in Frage kommenden Werten so wie so gering ist, wurde außer acht gelassen, um die Rechnung möglichst einfach zu halten.) Für diese Dauerfestigkeit wurde mit wachsender Zugvorspannung ein linearer Abfall bis zur Streckgrenze von 26 bzw. 20 kg/mm² angenommen, der proportional demjenigen war, der sich an Flachbiegestäben für den gleichen Werkstoff bei allerdings erheblich höheren Dauerfestigkeiten infolge der anderen Abmessungen und des Fehlens von Reibkorrosion ergab.

Ist dieses Diagramm für Metalle wegen des bei Druckvorspannung größeren Betrages der zulässigen Wechselspannung ausreichend, so mußten für Holz die Betrachtungen auch auf den Druckspannungsbereich des Flügelfußes (K' und L' in Bild 4) ausgedehnt werden, da auf dieser Seite infolge der mit Rücksicht auf die Faserstruktur zu erwartenden kleineren zulässigen Spannungsausschläge trotz der jetzt entlastend wirkenden Zentrifugalkraft

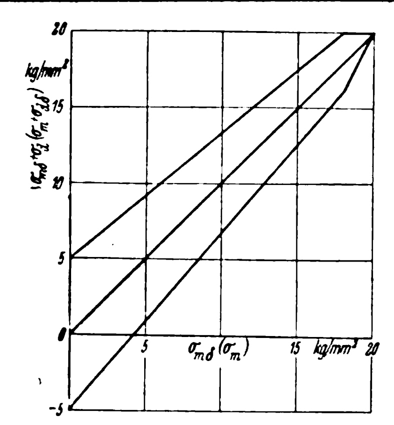


Bild 7. Dauerfestigkeitsschaubild für Elektronflügelfüße.

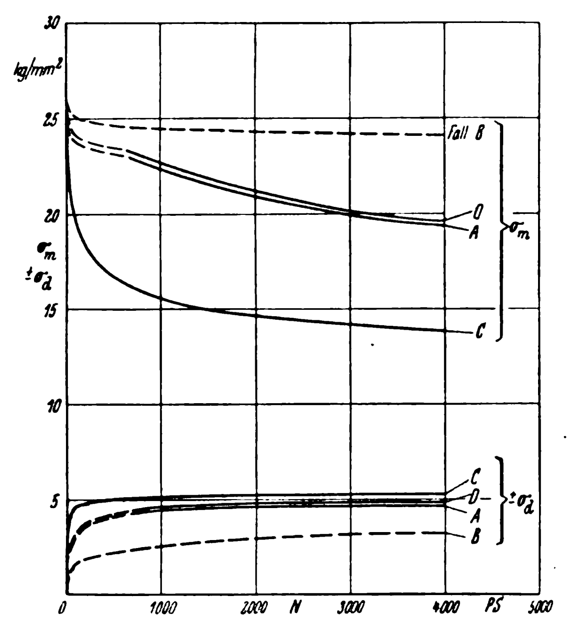


Bild 9. Arbeitspunkte bei verschiedenen Motorleistungen (Dural).

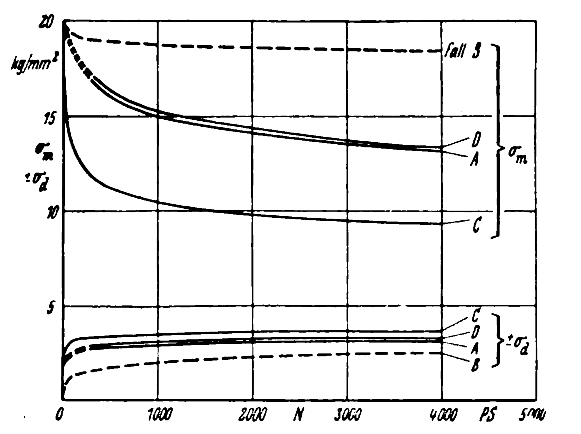


Bild 10. Arbeitspunkte bei verschiedenen Motorleistungen (Elektron).

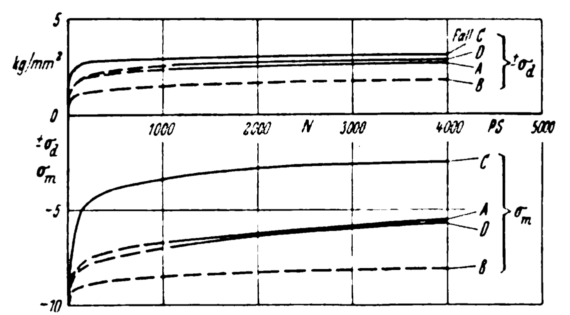


Bild 11. Arbeitspunkte bei verschiedenen Motorleistungen (Kunstharzpreßholz).

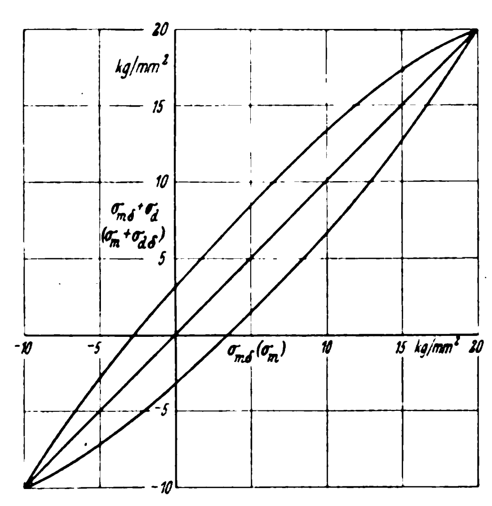


Bild 8. Dauerfestigkeitsschaubild für Flügelfüße aus Kunstharzpreßholz.

gefährliche Spannungen auftreten können. Als Analogon zur Streckgrenze wurde die Spannung gewählt, bei der bleibende Verformungen im Holz aufzutreten beginnen. Nach den von Küch[2]) angegebenen Werten für die 1%-Grenze wurde für Zug 20 kg/mm², für Druck —10 kg/mm² als Belastungsgrenze angenommen. Für die Dauerfestigkeit wurde mit steigender Zugvorspannung, ausgehend von dem an Flügelfüßen bei der üblichen Aufnahme in einer Stahlhülse und fehlender Vorspannung festgestellten Wert von $\pm 3{,}2$ kg/mm², zunächst ein annähernd gleichbleibender Verlauf gewählt, wie er nach neueren Versuchen zu erwarten ist. Der anschließende Dauerfestigkeitsabfall nach der Belastungsgrenze hin wurde ebenso wie der Verlauf mit steigender Druckvorspannung etwas langsamer als linear abnehmend in der für Kunststoffe charakteristischen Form angenommen. Eine genauere versuchsmäßige Fundierung der hier gemachten Voraussetzungen wäre erwünscht.

Der günstigste Arbeitspunkt für die Druckseite ergibt sich wie für die Zugseite unter Verwendung der Gl. (14) bzw. (15), in denen jetzt aber entsprechend dem anderen Vorzeichen der Biegespannung —7,02 statt 7,02 zu schreiben ist. Der für Holz zu wählende Schaftdurchmesser ist dann der größere der für Zug- und Druckseite berechneten.

Die Bemessung des Schaftes nach dem besten Arbeitspunkt in der obigen Form setzt voraus, daß der Einfluß der Flügellagerung auf die Beanspruchung des Fußes vernachlässigbar ist. Nach neueren Versuchen kann die Lagerung aber unter Umständen mit steigender Zugvorlast im Hinblick auf das Biegemoment für den Schaft entlastend wirken und gleichzeitig die Reibkorrosion geringer werden, so daß jetzt für Dural und Elektron das größte ertragbare Wechselmoment ansteigt. Faßt man diesen Vorgang in die Form einer scheinbaren Zunahme der ertragbaren Wechselspannung mit wachsender Mittelspannung, so läßt sich für die ganze Baugruppe Flügel plus Lagerung ein entsprechendes Dauerfestigkeitsschaubild aufstellen, das genau wie die oben benutzten zur Bestimmung des günstigsten Arbeitspunktes dienen kann.

Bei den weiteren Untersuchungen werden je nach Beschaffenheit des Motors und Einsatz der Luftschraube vier Beanspruchungsklassen für die Flügel unterschieden:

Fall A: $a = \pm 0{,}5 \quad s = 1 \quad t = 1,$
» B: $a = \pm 0{,}5 \quad s = 2 \quad t = 1,$
» C: $a = \pm 1 \quad s = 1 \quad t = 1,$
» D: $a = \pm 1 \quad s = 2 \quad t = 1.$

A und B beziehen sich also auf Motoren mit einem Wechselmoment von der halben Größe des mittleren Gleichdrehmomentes, und zwar auf den Einsatz ohne und mit Sturzflugbremsung; dagegen gilt C und D für die (augenblicklich

[2]) W. Küch. Einfluß der Preßbedingungen und des Aufbaues auf die Eigenschaften geschichteter Kunstharz-Preßstoffe. Zeitschrift des VDI, Bd. 83, Nr. 52, 30. Dezember 1939.

vorherrschenden) Motoren, deren Wechselmoment dem Gleichdrehmoment gleichkommt. Dementsprechend ist der C-Fall der heute übliche.

Für obige vier Fälle wurden die günstigsten Arbeitspunkte bestimmt und in der Form $\sigma_m = f(N)$ bzw. $\sigma_d = f(N)$ in Bild 9 bis 11 wiedergegeben. Im Fall des Holzes zeigte sich dabei, daß tatsächlich die Druckseite des Flügelfußes maßgebend ist, so daß die Mittelspannungswerte hier negativ sind. In den Kurven ist der Bereich, in dem der Punkt K ausschlaggebend ist, ausgezogen, derjenige, in dem L entscheidet, gestrichelt dargestellt. Allgemein erkennt man, daß $|\sigma_m|$ nach einem anfänglich starken Fallen mit wachsender Leistung bei größeren Werten N nur noch wenig abnimmt. Bei sehr hohen, praktisch uninteressanten Werten findet ein Wiederanstieg statt, bis für $N = \infty$ der gleiche Punkt erreicht wird wie für $N = 0$. Entsprechend der Zunahme des $\left|\frac{\sigma_d}{\sigma_m}\right|$ mit abnehmendem $|\sigma_m|$ liegen die Mittelspannungskurven um so tiefer, je höher die dynamische Beanspruchung des Flügelschaftes im Verhältnis zur statischen ist. Dieses Verhältnis kann roh (unter Vernachlässigung von t) abgeschätzt werden durch $\left|\frac{a}{s}\right|$. In Übereinstimmung mit der Reihenfolge der Kurven in den Bildern hat diese Zahl für B, D, A und C die Werte 0,25, 0,5, 0,5 und 1.

Die Berechnung der zugehörigen Schaftdurchmesser führte auf Bild 12 bis 14, in denen die erforderliche Flügelfußgröße für Duralumin, Elektron und Kunstharzpreßholz in den vier Belastungsfällen bei drei-, vier- und fünfflügligen Schrauben in Abhängigkeit von der Startleistung bis zu 4000 PS dargestellt ist.

VI. Folgerungen.

Da für Verstellschrauben mit Holzflügeln in Deutschland eine Normung der Flügelfüße durchgeführt ist, die als gebräuchlichste Größe 1½ und 2 mit einem als tragend angenommenen Durchmesser von 140 bzw. 160 mm unterscheidet, legen wir die für diese Schrauben zulässigen Leistungen für das Folgende zugrunde. Dieselben Betrachtungen lassen sich auch für Duralumin und Elektron durchführen, jedoch besteht hier nicht die gleiche Einheitlichkeit in den praktisch zur Verwendung kommenden Fußgrößen.

Für drei-, vier- und fünfflüglige Schrauben ergeben sich in den vier verschiedenen Einsatzfällen als obere Belastungsgrenze folgende Werte:

		A	B	C	D
Schaft 1½:	$z = 3$	1720 PS	1200 PS	1150 PS	1030 PS
	4	2170 PS	1530 PS	1430 PS	1300 PS
	5	2610 PS	1850 PS	1700 PS	1560 PS
Schaft 2:	$z = 3$	2380 PS	1690 PS	1560 PS	1420 PS
	4	3000 PS	2150 PS	1960 PS	1800 PS
	5	3600 PS	2630 PS	2340 PS	2180 PS

Hiervon wurde im allgemeinen der C-Fall als der bisher normale für Schraubenentwicklungen zugrunde gelegt. Die wesentlich höheren Leistungswerte des A-Falles drücken die bekannte Tatsache aus, daß schon ein geringer Schwingungsschutz am Motor die Luftschraube erheblich entlastet.

Es fällt an den genannten Zahlen vor allem auf, daß die Sturzflugforderung sich bei schwingungsmäßig günstigen Motoren wesentlich schärfer auswirkt als bei solchen mit hohen Wechselmomenten. So ist der prozentuale Abfall der zulässigen Leistung von A nach B ungefähr dreimal so groß wie von C nach D, nämlich im ersten Fall im Mittel 29%, im zweiten 9%. Natürlich sind aber in dieser Betrachtung die nabenseitigen Verhältnisse (z. B. elastische Deformation, welche die Verstellmöglichkeit beeinträchtigen kann) nicht enthalten.

Weiter ergibt sich, daß im allgemeinen bei für den A- oder C-Fall entworfenen Schrauben die Sturzflugbremsung durch Wahl der nächsthöheren Größenklasse beherrscht

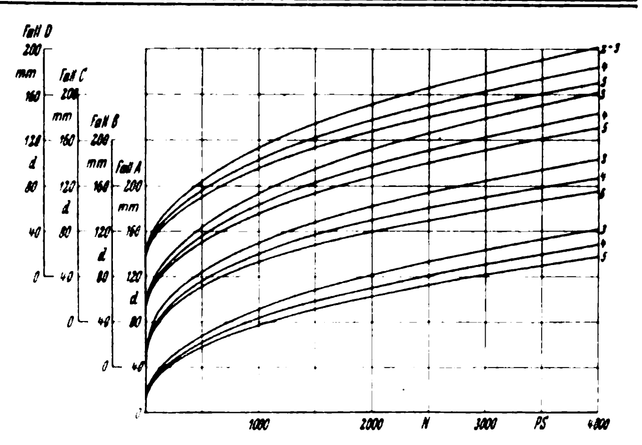


Bild 12. Erforderliche Schaftgröße bei Dural-Luftschraubenflügeln.

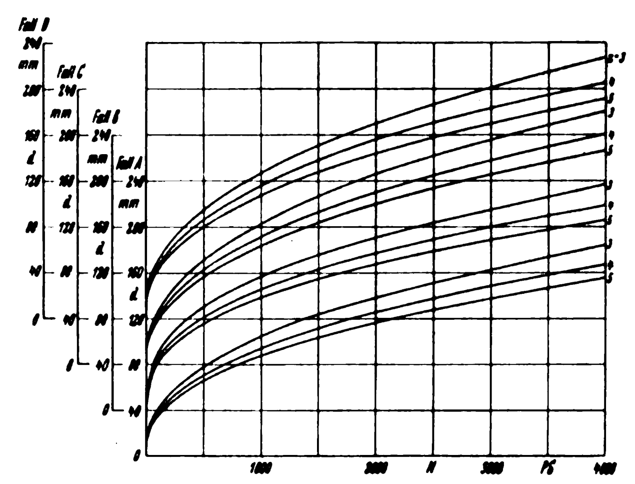


Bild 13. Erforderliche Schaftgröße bei Elektron-Luftschraubenflügeln.

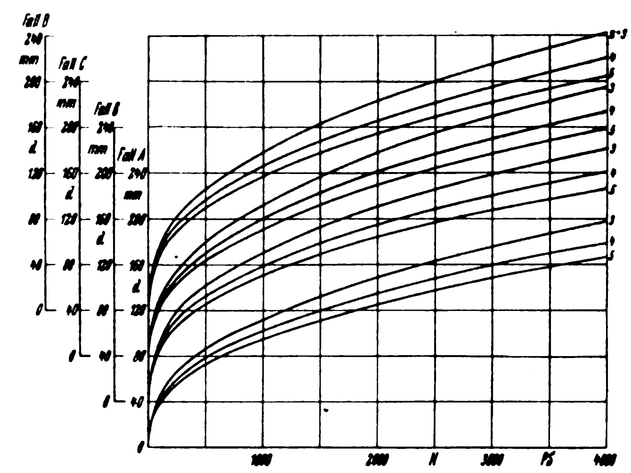


Bild 14. Erforderliche Schaftgröße bei Holz-Luftschraubenflügeln.

wird. Wird z. B. bei einem 2150 PS-Motor mit 50% Wechselmoment, für den normalerweise Schaft 2, dreiflüglig, ausreicht, Sturzflugbremsung mit Hilfe der Schraube gefordert, so ist der gleiche Schaft vierflüglig zu verwenden. Die Forderung der Sturzflugbremsung bedingt daher einen erhöhten Gewichtsaufwand am Propeller, da die Schraube der höheren Leistungsklasse natürlich schwerer ist.

Die Diagramme für die erforderlichen Schaftgrößen lassen schließlich erkennen, daß eine Erhöhung der Schaftstärke für die Vergrößerung der zulässigen Leistung relativ wirksamer ist als eine Erhöhung der Flügelzahl. Um z. B. eine 3000 PS-Schraube für den C-Fall mit Holzflügeln zu erhalten, müßte man unter Beibehaltung des Schaftes 2 auf sechs bis sieben Flügel gehen; demgegenüber braucht man

die Flügelzahl 4 nicht zu überschreiten, wenn man den Durchmesser des Schaftes um 18 bis 19% erhöht. Gangbar sind natürlich beide Wege. Trotzdem die Vielflügelschraube vom aerodynamischen Gesichtspunkt Vorteile hat, dürften konstruktive und fertigungsmäßige Fragen aber für eine Schaftvergrößerung sprechen.

VII. Zusammenfassung.

Unter Zugrundelegung gewisser Normalverhältnisse für Luftschraube und Motor lassen sich einfache Ausdrücke für die dynamische und statische Beanspruchung von Luftschraubenflügelfüßen ableiten. Diese ergeben im Zusammenhang mit dem Dauerfestigkeitsschaubild des benützten Materials für jede Motorleistung einen bestimmten Arbeitspunkt, durch den der für die Schaftbemessung zugrunde zu legende Spannungszustand festgelegt ist. Dabei sind je nach Schwingungsverhalten des Motors und Einsatz der Schraube verschiedene Beanspruchungsfälle zu unterscheiden. Die Durchführung der Rechnung gestattet einen Einblick in die Einsatzfähigkeit verschiedener Größenklassen von Schrauben.

Zum Luftkraftgesetz der harmonisch schwingenden, knickbaren Platte (Flügel mit Ruder und Hilfsruder).

Ergänzung zu Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 84/96.

Von F. Dietze.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Festigkeit.

Gebrauchsfertige Formeln für die Luftkräfte und Luftmomente der harmonisch schwingenden, knickbaren Platte in ebener Strömung werden auf den Fall ausgedehnt, daß ein Teil des vor der Knickkante liegenden Plattenabschnitts mit zum Ruderabschnitt gerechnet wird; damit sollen näherungsweise auch Ruder- und Hilfsruderanordnungen mit aerodynamischem Innenausgleich berücksichtigt werden. — An den bekannten Funktionen, die in die Luftkraftgesetze eingehen, werden gegenüber der bisherigen Schreibweise einige Umformungen vorgenommen, um die Formeln möglichst handlich zu machen. — Die Ausführungen beschränken sich auf kleine Ausschläge.

Gliederung.

I. Aufgabenstellung.

Gebrauchsfertige Formeln für die Luftkräfte und -momente der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte im Luftstrom hat der Verfasser in [1][1]) zusammengestellt; kleine Bewegungen vorausgesetzt, kamen sie unter Linearisierung des Problems nach Ansätzen von Küssner [2] zustande; sie beschränken sich auf die ebene Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit. Für praktische Berechnungen, insbesondere für Flatterberechnungen, sollen sie zur Erfassung derjenigen Luftkräfte und -momente dienen, die auf irgendeinen Flügelstreifen entfallen, der von zwei in Flugrichtung verlaufenden Querschnitten begrenzt ist. (Allgemeines zur Flatterberechnung s. bei Teichmann [5]).

Eingehend behandelt ist in [1] unter anderem die zweimal knickbare Platte (Flügel mit Ruder und Hilfsruder); dabei ist einschränkend vorausgesetzt, daß die Vorderkanten des Ruders und des Hilfsruders mit den Drehachsen dieser Teile zusammenfallen. Die dafür in [1] angegebenen Formeln werden im folgenden so umgeschrieben, daß sie in gewissen Fällen auch auf Anordnungen mit aerodynamischem Ruder- und Hilfsruder-Innenausgleich angewandt werden können, und zwar in solchen Fällen, in denen als aerodynamisch wirksames Gebilde näherungsweise eine knickbare Platte in Frage kommt, deren Knickkanten k innerhalb des Ruder- bzw. Hilfsruderabschnitts liegen (s. Bild 1). Abweichend von der sonst üblichen Auffassung der knickbaren Platte wird also in diesen Fällen noch ein Teil des vor der Knickkante k_R bzw. k_H liegenden Plattenabschnitts zum Ruder bzw. zum Hilfsruder gerechnet. Die aerodynamisch maßgeblichen Knickkanten k werden dabei gewöhnlich von den mechanisch maßgeblichen Drehachsen d der Ruder verschieden sein.

[1]) In diesem Zusammenhang sei noch ein Fehler in der Fußnote 6 von [1] richtiggestellt; dort muß es heißen:

$$\frac{a}{|a|}\,\pi - a \text{ statt } \pi - a.$$

Der Fehler wirkt sich in [1] nicht aus, weil diese nur beiläufig erwähnte Beziehung dort nicht benutzt wurde.

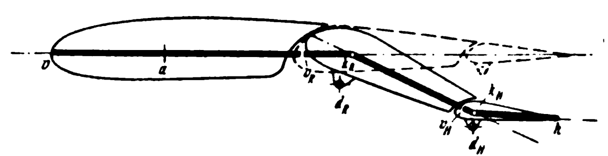


Bild 1. Flügel mit aerodynamischen Innenausgleichen am Ruder und Hilfsruder, wiedergegeben durch eine zweimal knickbare Platte.

Eine solche Auffassung von Rudern mit aerodynamischem Innenausgleich wurde zuerst von Küssner vorgeschlagen; sie erscheint um so sinnfälliger, je weniger eine Spaltwirkung zwischen Flosse und Ruder bzw. zwischen Ruder und Hilfsruder zustande kommt und je weniger das Gesamtprofil durch Heraustreten der Ruder- bzw. Hilfsrudernase aus der Umrißlinie gestört wird[2]).

Eine andere Betrachtungsweise, dadurch gekennzeichnet, daß ein Heraustreten der Ruder- bzw. Hilfsruder-Vorderkante berücksichtigt wird, behandelte Söhngen [3].

Die im folgenden behandelten Formeln gelten selbstverständlich auch noch im Grenzfall, daß die Knickkanten k_R, k_H — in bisher üblicher Betrachtungsweise — zugleich die Vorderkanten v_R, v_H des Ruder- und Hilfsruderabschnitts darstellen.

II. Luftkräfte und -momente.

Die Luftkräfte und -momente des besprochenen Systems ergeben sich aus den Formeln in [1], Tafel 5 und 6, die für einen zweimal knickbaren Plattenstreifen die Luftkräfte und -momente eines Abschnitts ah mit beliebiger Vordergrenze a (s. Bild 1) beschreiben; als Vordergrenze werden dazu der Reihe nach die Grenzen v, v_R und v_H gesetzt.

Betrachtet werden nur die Kräfte und Momente infolge harmonischer Bewegungen des Plattenstreifens und seiner Ruder. Diese Bewegungen können beliebig zusammengesetzt sein aus einer Schlag- und einer Drehbewegung δ und β des gesamten Streifens vh, sowie aus zusätzlichen Drehbewegungen γ_R und γ_H der Abschnitte v_Rh und v_Hh (s. Bild 2). Die Schlagbewegung wird hierbei (abweichend von [1]) in der sog. vorderen Neutralachse n, d. h. in ¼ Plattentiefe hinter der Vorderkante v, gemessen. Die einzelnen Bewegungsanteile müssen mit gleicher Frequenz ablaufen; ihre Phasen können aber beliebig sein. Vorausgesetzt wird Kleinheit der Bewegungen (Linearisierung). Allgemein kann für die einzelnen Bewegungsanteile geschrieben werden (s. Bild 2):

$$\begin{aligned}
\delta &= \delta' \cdot \cos\omega t - \delta'' \cdot \sin\omega t,\\
\beta &= \beta' \cdot \cos\omega t - \beta'' \cdot \sin\omega t,\\
\gamma_R &= \gamma_R' \cdot \cos\omega t - \gamma_R'' \cdot \sin\omega t,\\
\gamma_H &= \gamma_H' \cdot \cos\omega t - \gamma_H'' \cdot \sin\omega t.
\end{aligned}$$

[2]) Möglicherweise erweist es sich späterhin als zweckmäßig, auch noch zusätzliche Verkrümmungen der Platte anzusetzen (Vorschlag von Stender); auch in diesen Fällen kann zur Berechnung der Luftkräfte und -momente von den Formeln in [1] ausgegangen werden.



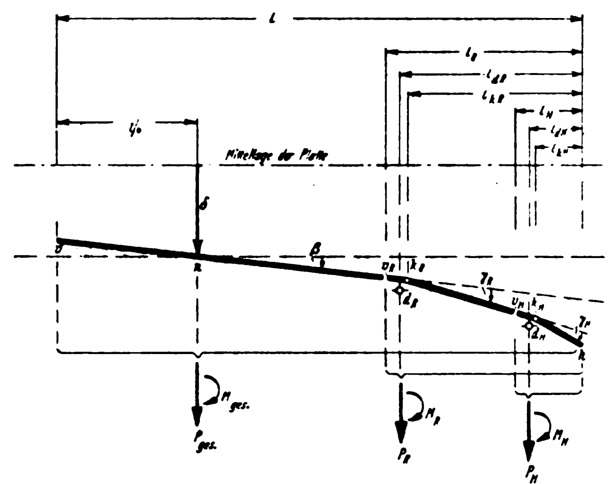


Bild 2. Bezeichnungen und Koordinaten.
(Die Knickkanten k_R, k_H können natürlich auch vor den Ruder-Drehachsen d_R, d_H liegen.)

Zur einheitlichen Darstellung der Ergebnisse werden an Stelle der Bewegungsamplituden $\delta', \ldots, \gamma''_H$ noch folgende dimensionslose Abkürzungen eingeführt[3]):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_S &= B'_S + j\cdot B''_S = \frac{1}{l/2}\,\delta' + j\cdot\frac{1}{l/2}\cdot\delta'',\\
\mathfrak{B}_D &= B'_D + j\cdot B''_D = \beta' + j\cdot\beta'',\\
\mathfrak{B}_R &= B'_R + j\cdot B''_R = \gamma'_R + j\cdot\gamma''_R,\\
\mathfrak{B}_H &= B'_H + j\cdot B''_H = \gamma'_H + j\cdot\gamma''_H,
\end{aligned}$$

wobei:

l = Platten-(Flügel-)Tiefe, j = imaginäre Einheit.

Für die Kraft P_{ges} und das Moment M_{ges} am gesamten Streifen vh sowie für die Kräfte P_R, P_H und die Momente M_R, M_H am Ruder- und Hilfsruder-Abschnitt v_Rh und v_Hh (s. Bild 2) wird geschrieben:

$$\begin{aligned}
P_{ges} &= P'_{ges}\cdot\cos\omega t - P''_{ges}\cdot\sin\omega t,\\
M_{ges} &= M'_{ges}\cdot\cos\omega t - M''_{ges}\cdot\sin\omega t,\\
P_R &= P'_R\cdot\cos\omega t - P''_R\cdot\sin\omega t
\end{aligned}$$

usw.

Das Gesamtmoment M_{ges} wird hier (abweichend von [1]) auf die sog. vordere Neutralachse n bezogen; die Rudermomente M_R und M_H beziehen sich auf die Drehachsen d_R und d_H (s. Bild 2). Analog den komplexen Größen $\mathfrak{B}$ können natürlich auch komplexe Amplituden $\mathfrak{P} = P' + j\cdot P''$ und $\mathfrak{M} = M' + j\cdot M''$ eingeführt werden.

Im Hinblick auf leichte Anwendbarkeit in Flatterberechnungen werden die Kraft- und Momenten-Amplituden P', P'' und M', M'' (abweichend von [1]) dargestellt in der Form:

$$\left.\begin{matrix}P'\\P''\end{matrix}\right\} = \pi\varrho\,\frac{l}{2}\,b\sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix}B'_\lambda\\B''_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot P_\lambda^{(0)} - v^2\cdot P_\lambda^{(2)}\right\} + \left\{\begin{matrix}B''_\lambda\\-B'_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot v\,\omega\,\frac{l}{2}\cdot P_\lambda^{(1)}\right],$$

$$\left.\begin{matrix}M'\\M''\end{matrix}\right\} = \pi\varrho\left(\frac{l}{2}\right)^2 b\sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix}B'_\lambda\\B''_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot M_\lambda^{(0)} - v^2\cdot M_\lambda^{(2)}\right\} + \left\{\begin{matrix}B''_\lambda\\-B'_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot v\,\omega\,\frac{l}{2}\cdot M_\lambda^{(1)}\right],$$

$$\lambda = S;\ D;\ R;\ H.$$

Hierin bedeuten:

ϱ = Luftdichte,

b = Breite des betrachteten Plattenstreifens,

ω = Kreisfrequenz,

v = Anblasegeschwindigkeit,

$P_\lambda^{(0)}, \ldots, M_\lambda^{(2)}$ = Funktionen, die außer von der bezogenen Frequenz $\omega_r = \frac{\omega}{v}\cdot\frac{l}{2}$ noch von den Abmessungen des betrachteten Plattenabschnitts und der Art der Bewegung abhängen; sie sind formelmäßig zusammengestellt in Tafel 1 und 2.

Die Aufspaltung der Kraft- und Momenten-Amplituden P', P'' und M', M'' in Teilglieder, die mit $\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2$, $v\omega\frac{l}{2}$ und v^2 behaftet sind, erweist sich als zweckmäßig, weil die dann auftretenden Funktionen $P_\lambda^{(0)}, \ldots, M_\lambda^{(2)}$ sich nur wenig mit ω_r ändern und daher für Näherungsuntersuchungen oft hinsichtlich ω_r als konstant angenommen werden dürfen. (Einzelheiten zu letzterem bei Leiß [4]).

Die in $P_\lambda^{(0)}, \ldots, M_\lambda^{(2)}$ (s. Tafel 1 und 2) wiederholt auftretenden Funktionen T', T'', f und $\bar{f}$ sind in Tafel 3, 4 und 5 formelmäßig zusammengestellt; an Stelle der Zeichen $f(\tau_\mu)$ und $\bar{f}(\tau_\mu;\ \delta_\mu)$ müßte dabei streng genommen geschrieben werden: $f(\tau_\mu, \tau_\mu)$ und $\bar{f}(\tau_\mu, \tau_\mu;\ \delta_\mu)$.

III. Beispiel.

Aufgabe: Gegeben ist ein in ebener Strömung harmonisch schwingender Plattenstreifen mit Ruder.

Kreisfrequenz:	ω = 0 bis 160 s^{-1},
Anblasegeschwindigkeit:	v = 80 und 160 ms^{-1},
Luftdichte:	ϱ = 0,125 kgm^{-4} s^2.

Abmessungen und Bewegungsbild s. in Bild 3.
Die Ruderdrehachse d_R, hier zugleich die Knickkante k_R, liege:

1. in der Rudervorderkante v_R,
2. um $^1/_5$ der Rudertiefe l_R hinter der Rudervorderkante v_R.

Gesucht ist das Luftmoment M_R des Ruders v_Rh, bezogen auf die Ruderdrehachse d_R.

Rechengang: Das gesuchte Rudermoment M_R verläuft nach dem Gesetz:

$$M_R = M'_R\cdot\cos\omega t - M''_R\cdot\sin\omega t$$

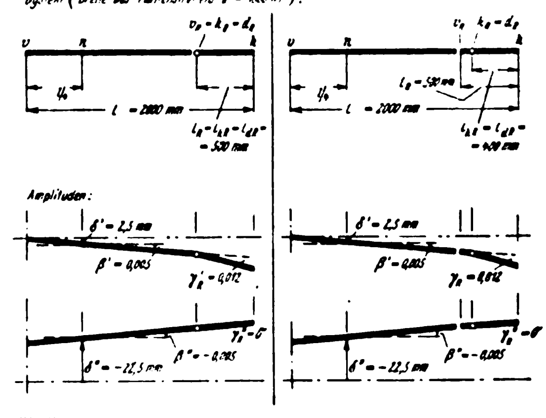
mit:

$$\left.\begin{matrix}M'_R\\M''_R\end{matrix}\right\} = \pi\varrho\left(\frac{l}{2}\right)^2\sum_\lambda\left[\left\{\begin{matrix}B'_\lambda\\B''_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2\cdot M_{R\lambda}^{(0)} - v^2\cdot M_{R\lambda}^{(2)}\right\} + \left\{\begin{matrix}B''_\lambda\\-B'_\lambda\end{matrix}\right\}\cdot v\,\omega\,\frac{l}{2}\cdot M_{R\lambda}^{(1)}\right],$$

$$\lambda = S;\ D;\ R.$$

1. Ruderdrehachse d_R (und Knickkante k_R) in der Rudervorderkante v_R.

2. Ruderdrehachse d_R (und Knickkante k_R) um $^1/_5$ der Rudertiefe l_R hinter der Rudervorderkante v_R.



$$\begin{aligned}
\delta &= \delta'\cdot\cos\omega t - \delta''\cdot\sin\omega t,\\
\beta &= \beta'\cdot\cos\omega t - \beta''\cdot\sin\omega t,\\
\gamma_R &= \gamma_R'\cdot\cos\omega t - \gamma_R''\cdot\sin\omega t.
\end{aligned}$$

Bild 3. Daten zum Beispiel.

[3]) Die Einführung der halben Flügeltiefe in $\mathfrak{B}_s$ erfolgt, weil dann gewisse Gesetzmäßigkeiten im Aufbau der Formeln für die Luftkräfte und -momente besser hervortreten. Aus dem gleichen Grunde werden auch in den Formeln für P', P'', M' und M'' gewisse Potenzen von $l/2$ herausgezogen.



Tafel 1. Luftkräfte P_{ges}, P_R, P_H des zweimal knickbaren Plattenstreifens (s. Bild 2).

$$P = P' \cdot \cos\omega t - P'' \cdot \sin\omega t; \qquad P = P_{ges};\ P_R;\ P_H$$

$$\text{mit: } \left.\begin{matrix} P' \\ P'' \end{matrix}\right\} = \pi\varrho\frac{l}{2}\, b \cdot \sum_{\lambda}\left[\left\{\begin{matrix} B'_\lambda \\ B''_\lambda \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\omega^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot P_\lambda^{(0)} - v^2 \cdot P_\lambda^{(2)}\right\} + \left\{\begin{matrix} B''_\lambda \\ -B'_\lambda \end{matrix}\right\} \cdot v\,\omega\,\frac{l}{2} \cdot P_\lambda^{(1)}\right]; \quad \lambda = S; D; R; H.$$

$P_\lambda^{(0)}$; $P_\lambda^{(1)}$; $P_\lambda^{(2)}$ nach folgender Aufstellung:

λ	$P_\lambda^{(0)}$	$P_\lambda^{(1)}$	$P_\lambda^{(2)}$
		Gesamtkraft P_{ges}:	
S	1	$1 + T'(\omega_r)$	$-\omega_r \cdot T''(\omega_r)$
D	$\frac{1}{2}$	$1 + 1 + T'(\omega_r) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r)$	$1 + T'(\omega_r) - \omega_r \cdot T''(\omega_r)$
R	$f_4(\tau_{kR})$	$f_3(\tau_{kR}) + f_2(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_2(\tau_{kR}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_1(\tau_{kR})$	$f_1(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_1(\tau_{kR}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_2(\tau_{kR})$
H	$f_4(\tau_{kH})$	$f_3(\tau_{kH}) + f_2(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_2(\tau_{kH}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_1(\tau_{kH})$	$f_1(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_1(\tau_{kH}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_2(\tau_{kH})$
		Kraft am Ruder einschl. Hilfsruder P_R:	
S	$f_3(\tau_{vR})$	$f_{31}(\tau_{vR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR})$	$-\omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR})$
D	$\frac{1}{2} \cdot f_6(\tau_{vR})$	$f_{32}(\tau_{vR}) + f_{31}(\tau_{vR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR})$	$f_{31}(\tau_{vR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR})$
R	$f_{37}(\tau_{vR}, \tau_{kR})$	$f_{36}(\tau_{vR}, \tau_{kR}) + f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kR}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kR})$	$f_{35}(\tau_{vR}, \tau_{kR}) + f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kR}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kR})$
H	$f_{37}(\tau_{vR}, \tau_{kH})$	$f_{36}(\tau_{vR}, \tau_{kH}) + f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kH}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kH})$	$f_{35}(\tau_{vR}, \tau_{kH}) + f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_1(\tau_{kH}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vR}) \cdot f_2(\tau_{kH})$
		Kraft am Hilfsruder P_H:	
S	$f_3(\tau_{vH})$	$f_{31}(\tau_{vH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH})$	$-\omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH})$
D	$\frac{1}{2} \cdot f_6(\tau_{vH})$	$f_{32}(\tau_{vH}) + f_{31}(\tau_{vH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH})$	$f_{31}(\tau_{vH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH})$
R	$f_{37}(\tau_{vH}, \tau_{kR})$	$f_{36}(\tau_{vH}, \tau_{kR}) + f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kR}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kR})$	$f_{35}(\tau_{vH}, \tau_{kR}) + f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kR}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kR}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kR})$
H	$f_{37}(\tau_{vH}, \tau_{kH})$	$f_{36}(\tau_{vH}, \tau_{kH}) + f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kH}) + \frac{1}{\omega_r} \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kH})$	$f_{35}(\tau_{vH}, \tau_{kH}) + f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kH}) + T'(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_1(\tau_{kH}) - \omega_r \cdot T''(\omega_r) \cdot f_{31}(\tau_{vH}) \cdot f_2(\tau_{kH})$

mit: b = Breite des Plattenstreifens,
l = Platten- (Flügel-) tiefe,
ϱ = Luftdichte,
t = Zeit,
v = Anblasegeschwindigkeit,
ω = Kreisfrequenz,
$\omega_r = \frac{\omega}{v} \cdot \frac{l}{2}$ = reduzierte Frequenz,
B'_λ, B''_λ s. Text,
$T'(\omega_r)$, $T''(\omega_r)$ nach Tafel 3,
$f(\tau_\mu)$, $f(\tau_\mu, \tau_\nu)$ nach Tafel 4 und 5.

Tafel 2. Luftmomente M_{ges}, M_R, M_H des zweimal knickbaren Plattenstreifens (s. Bild 2).

$$\underline{M = M' \cdot \cos\omega t - M'' \cdot \sin\omega t}; \quad M = M_{\text{ges}};\ M_R;\ M_H$$

$$\text{mit: } \left.\begin{matrix} M' \\ M'' \end{matrix}\right\} = \pi \varrho \left(\frac{l}{2}\right)^2 b \cdot \sum_\lambda \left[\left\{\begin{matrix} B_\lambda' \\ B_\lambda'' \end{matrix}\right\} \cdot \left\{ \omega^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot M_\lambda^{(0)} - v^2 \cdot M_\lambda^{(2)} \right\} + \left\{\begin{matrix} B_\lambda \\ -B_\lambda' \end{matrix}\right\} \cdot v\,\omega\,\frac{l}{2} \cdot M_\lambda^{(1)} \right]; \quad \lambda = S;\ D;\ R;\ H.$$

$M_\lambda^{(0)}$; $M_\lambda^{(1)}$; $M_\lambda^{(2)}$ nach folgender Aufstellung:

λ	$M_\lambda^{(0)}$	$M_\lambda^{(1)}$	$M_\lambda^{(2)}$
		Gesamtmoment M_{ges}, bezogen auf die vordere Neutralachse n (s. Bild 2):	
S	$\frac{1}{2}$	0	0
D	$\frac{3}{8}$	1	0
R	$f_7(\tau_{kR})$	$f_6(\tau_{kR})$	$f_5(\tau_{kR})$
H	$f_7(\tau_{kH})$	$f_6(\tau_{kH})$	$f_5(\tau_{kH})$
		Moment am Ruder einschl. Hilfsruder M_R, bezogen auf die Ruderdrehachse d_R (s. Bild 2):	
S	$\bar{f}_4(\tau_{rR};\delta_R)$	$\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)$	$-\omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)$
D	$\bar{f}_7(\tau_{rR};\delta_R)$	$\bar{f}_9(\tau_{rR};\delta_R) + \bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)$	$\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)$
R	$\bar{f}_{12}(\tau_{rR},\tau_{kR};\delta_R)$	$\bar{f}_{11}(\tau_{rR},\tau_{kR};\delta_R) + \bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kR}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kR}) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kR})$	$\bar{f}_{10}(\tau_{rR},\tau_{kR};\delta_R) + \bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kR}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kR}) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kR})$
H	$\bar{f}_{12}(\tau_{rR},\tau_{kH};\delta_R)$	$\bar{f}_{11}(\tau_{rR},\tau_{kH};\delta_R) + \bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kH}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kH}) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kH})$	$\bar{f}_{10}(\tau_{rR},\tau_{kH};\delta_R) + \bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kH}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_1(\tau_{kH}) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rR};\delta_R)\cdot f_2(\tau_{kH})$
		Moment am Hilfsruder M_H, bezogen auf die Hilfsruderdrehachse d_H (s. Bild 2):	
S	$\bar{f}_4(\tau_{rH};\delta_H)$	$\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)$	$-\omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)$
D	$\bar{f}_7(\tau_{rH};\delta_H)$	$\bar{f}_9(\tau_{rH};\delta_H) + \bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)$	$\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)$
R	$\bar{f}_{12}(\tau_{rH},\tau_{kR};\delta_H)$	$\bar{f}_{11}(\tau_{rH},\tau_{kR};\delta_H) + \bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kR}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kR}) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kR})$	$\bar{f}_{10}(\tau_{rH},\tau_{kR};\delta_H) + \bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kR}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kR}) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kR})$
H	$\bar{f}_{12}(\tau_{rH},\tau_{kH};\delta_H)$	$\bar{f}_{11}(\tau_{rH},\tau_{kH};\delta_H) + \bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kH}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kH}) + \frac{1}{\omega_r}\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kH})$	$\bar{f}_{10}(\tau_{rH},\tau_{kH};\delta_H) + \bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kH}) + T'(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_1(\tau_{kH}) - \omega_r\cdot T''(\omega_r)\cdot\bar{f}_8(\tau_{rH};\delta_H)\cdot f_2(\tau_{kH})$

mit: b = Breite des Plattenstreifens,
l = Platten- (Flügel-) tiefe,
ϱ = Luftdichte,
t = Zeit,

v = Anblasegeschwindigkeit,
ω = Kreisfrequenz,
$\omega_r = \frac{\omega}{v} \cdot \frac{l}{2}$ = reduzierte Frequenz,

B_λ, B_λ'' s. Text,
$T'(\omega_r)$, $T''(\omega_r)$ nach Tafel 3,
$f(\tau_\mu)$, $\bar{f}(\tau_\mu, \delta_\mu)$, $\bar{f}(\tau_\mu, \tau_\nu, \delta_\mu)$ nach Tafel 4 und 5.

Tafel 3. Funktionen $T'(\omega_r)$ und $T''(\omega_r)$.

$$T'(\omega_r) = \frac{J_1^2(\omega_r) - N_0^2(\omega_r) + N_1^2(\omega_r) - J_0^2(\omega_r)}{[J_1(\omega_r) + N_0(\omega_r)]^2 + [N_1(\omega_r) - J_0(\omega_r)]^2}$$

$$T''(\omega_r) = -2\,\frac{J_0(\omega_r)\cdot J_1(\omega_r) + N_0(\omega_r)\cdot N_1(\omega_r)}{[J_1(\omega_r) + N_0(\omega_r)]^2 + [N_1(\omega_r) - J_0(\omega_r)]^2}.$$

$J_n(\omega_r)$ = Besselsche, $N_n(\omega_r)$ = Neumannsche } Zylinderfunktionen n ter Ordnung,

$\omega_r = \frac{\omega}{v}\cdot\frac{l}{2}$ = reduzierte Frequenz.

Tafel 4. Funktionen $f(\tau_\mu)$ und $\bar f(\tau_\mu;\ \delta_\mu)$

mit: $\tau_\mu = l_\mu/l$; $\delta_\mu = 2\,(l_{v\mu}/l - l_{d\mu}/l)$ [6].

$$f_1(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi - \varphi_\mu + \sin\varphi_\mu\right]$$

$$f_2(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi_\mu\right) + \sin\varphi_\mu + \frac{1}{4}\cdot\sin 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_3(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi - \varphi_\mu + \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_4(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot\cos\varphi_\mu + \frac{3}{4}\cdot\sin\varphi_\mu + \frac{1}{12}\cdot\sin 3\varphi_\mu\right]$$

$$f_5(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[2\cdot\sin\varphi_\mu - \sin 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_6(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot 2 + \sin\varphi_\mu + \sin 2\varphi_\mu - \frac{1}{3}\cdot\sin 3\varphi_\mu\right]$$

$$f_7(\tau_\mu) = \frac{1}{4\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(\frac{1}{2} + 2\cos\varphi_\mu\right) + \frac{3}{2}\cdot\sin\varphi_\mu + \frac{1}{3}\cdot\sin 2\varphi_\mu + \frac{1}{6}\cdot\sin 3\varphi_\mu - \frac{1}{24}\cdot\sin 4\varphi_\mu\right]$$

$$f_8(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot(-1 + 2\cos\varphi_\mu) + 2\sin\varphi_\mu - \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_9(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot(1 + 2\cdot\cos\varphi_\mu) + \sin\varphi_\mu + \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu + \frac{1}{3}\cdot\sin 3\varphi_\mu\right]$$

$$f_{10}(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(\sin\varphi_\mu - \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\cos\varphi_\mu + \frac{1}{2}\cdot\cos 2\varphi_\mu - \frac{1}{4}\cdot\cos 3\varphi_\mu\right]$$

$$f_{11}(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)^2\cdot(1 + 2\cdot\cos\varphi_\mu) + (\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\sin\varphi_\mu + \sin 2\varphi_\mu + \frac{1}{2}\cdot\sin 3\varphi_\mu\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\cos\varphi_\mu - \frac{1}{2}\cdot\cos 3\varphi_\mu - \frac{1}{8}\cdot\cos 4\varphi_\mu\right]$$

$$f_{12}(\tau_\mu) = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)^2\cdot\left(\frac{5}{2} + 2\cdot\cos 2\varphi_\mu\right) + (\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(4\cdot\sin 2\varphi_\mu + \frac{1}{4}\cdot\sin 4\varphi_\mu\right) + \frac{21}{16} - \cos 2\varphi_\mu - \frac{5}{16}\cdot\cos 4\varphi_\mu\right]$$

$$f_{31}(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi - \varphi_\mu - \sin\varphi_\mu\right]$$

$$f_{32}(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\pi - \varphi_\mu + \sin\varphi_\mu + \sin 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_{33}(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left[1 - \cos 2\varphi_\mu\right]$$

$$f_{36}(\tau_\mu) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)^2 + (\pi - \varphi_\mu)\left(\sin\varphi_\mu + \frac{3}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu\right) + 1 + \frac{1}{4}\cdot\cos\varphi_\mu - \cos 2\varphi_\mu - \frac{1}{4}\cdot\cos 3\varphi_\mu\right]$$

$$f_{37}(\tau_\mu) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot\left[(\pi - \varphi_\mu)^2\,2\cdot\cos\varphi_\mu + (\pi - \varphi_\mu)\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\sin\varphi_\mu + \frac{1}{2}\cdot\sin 3\varphi_\mu\right) + \frac{1}{2}\cdot\cos\varphi_\mu - \frac{1}{2}\cdot\cos 3\varphi_\mu\right]$$

$$\bar f_4(\tau_\mu;\ \delta_\mu) = f_4(\tau_\mu) - \delta_\mu\cdot f_3(\tau_\mu)$$

$$\bar f_7(\tau_\mu;\ \delta_\mu) = f_7(\tau_\mu) - \delta_\mu\cdot\frac{1}{2}\,f_6(\tau_\mu)$$

$$\bar f_8(\tau_\mu;\ \delta_\mu) = f_8(\tau_\mu) - \delta_\mu\cdot f_{31}(\tau_\mu)$$

$$\bar f_9(\tau_\mu;\ \delta_\mu) = f_9(\tau_\mu) - \delta_\mu\cdot f_{32}(\tau_\mu).$$

mit: $\varphi_\mu = \arccos(2\,\tau_\mu - 1)$.

[6]) μ steht als Abkürzung bei τ_μ für R, v_R oder k_R bzw. H, v_H oder k_H, μ steht als Abkürzung bei δ_μ für R bzw. H (s. Bild 2).

Tafel 5. Funktionen $\bar{f}\,(\tau_\mu, \tau_\nu)$ und $\bar{f}\,(\tau_\mu, \tau_\nu; \delta_\mu)$

mit: $\tau_\mu = l_\mu/l$; $\tau_\nu = l_\nu/l$; $\delta_\mu = 2\,(l_{v\,\mu}/l - l_{d\,\mu}/l)$[7]).

$$f_{10}(\tau_\mu, \tau_\nu) = \frac{1}{2\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)^2\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + \frac{1}{\pi}\left[(\pi-\varphi_\mu)\cdot f_5(\tau_\nu) - f_5(\tau_\mu)\cdot\sin\varphi_\nu\right]$$

$$f_{11}(\tau_\mu, \tau_\nu) = -\frac{1}{3\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)^3\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + f_9(\tau_\mu)\cdot f_3(\tau_\nu) +$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}\left[(\pi-\varphi_\mu)\cdot\left(\sin\varphi_\nu - \frac{1}{3}\cdot\sin 3\varphi_\nu\right) - \frac{5}{6}\cdot\sin\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu + \frac{4}{3}\cdot\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu - \frac{1}{6}\cdot\sin 3\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu\right]$$

$$f_{12}(\tau_\mu, \tau_\nu) = \frac{1}{24\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)^4\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + f_4(\tau_\mu)\cdot f_4(\tau_\nu) + 2\,[f_4(\tau_\mu) - 2 f_7(\tau_\mu)]\cdot[f_4(\tau_\nu) - 2 f_7(\tau_\nu)] +$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[-\frac{1}{12}\cdot\sin\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu + \frac{17}{72}\cdot\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu - \frac{1}{36}\cdot\sin 3\varphi_\mu\cdot\sin 3\varphi_\nu - \frac{1}{288}\cdot\sin 4\varphi_\mu\cdot\sin 4\varphi_\nu -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{6}\cdot(\sin\varphi_\mu\cdot\sin 3\varphi_\nu + \sin 3\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu) + \frac{1}{36}(\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin 4\varphi_\nu + \sin 4\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu)\right]$$

$$f_{35}(\tau_\mu, \tau_\nu) = \frac{1}{\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + \frac{2}{\pi^2}\cdot\sin\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu$$

$$f_{36}(\tau_\mu, \tau_\nu) = -\frac{1}{\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)^2\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + f_{32}(\tau_\mu)\cdot f_3(\tau_\nu) + \frac{1}{\pi^2}\cdot\left[2\cdot\sin\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu - \frac{1}{2}\cdot\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu\right]$$

$$f_{37}(\tau_\mu, \tau_\nu) = \frac{1}{6\pi^2}\cdot(\cos\varphi_\mu - \cos\varphi_\nu)^3\cdot\ln\frac{1-\cos(\varphi_\mu+\varphi_\nu)}{1-\cos(\varphi_\mu-\varphi_\nu)} + f_3(\tau_\mu)\cdot f_4(\tau_\nu) +$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\cdot\left[\left(\sin\varphi_\mu - \frac{1}{3}\sin 3\varphi_\mu\right)\cdot(\pi-\varphi_\nu) + \frac{4}{3}\cdot\sin\varphi_\mu\cdot\sin 2\varphi_\nu - \frac{5}{6}\cdot\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin\varphi_\nu - \frac{1}{6}\cdot\sin 2\varphi_\mu\cdot\sin 3\varphi_\nu\right]$$

$$\bar{f}_{10}(\tau_\mu, \tau_\nu; \delta_\mu) = f_{10}(\tau_\mu, \tau_\nu) - \delta_\mu\cdot f_{35}(\tau_\mu, \tau_\nu)$$
$$\bar{f}_{11}(\tau_\mu, \tau_\nu; \delta_\mu) = f_{11}(\tau_\mu, \tau_\nu) - \delta_\mu\cdot f_{36}(\tau_\mu, \tau_\nu)$$
$$\bar{f}_{12}(\tau_\mu, \tau_\nu; \delta_\mu) = f_{12}(\tau_\mu, \tau_\nu) - \delta_\mu\cdot f_{37}(\tau_\mu, \tau_\nu).$$

mit: $\varphi_\mu = \text{arc}\cos(2\,\tau_\mu - 1)$; $\varphi_\nu = \text{arc}\cos(2\,\tau_\nu - 1)$.

[7]) μ und ν stehen als Abkürzungen bei τ_μ und τ_ν für R, v_R oder k_R bzw. H, v_H oder k_H. μ steht als Abkürzung bei δ_μ für R bzw. H (s. Bild 2).

Für die Größen $M^{(0)}_{R\lambda}$; $M^{(1)}_{R\lambda}$; $M^{(2)}_{R\lambda}$ ergeben sich nach Tafel 2 folgende Werte:

λ	Ruder-Drehachsen-lage	$M^{(0)}_{R\lambda}$	$M^{(1)}_{R\lambda}$	$M^{(2)}_{R\lambda}$
S	1	0,04008	$0{,}01125 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}01125$	$-\omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}01125$
	2	0,02053	$0{,}005480 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}005480$	$-\omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}005480$
D	1	0,03586	$0{,}08017 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}01125 + \frac{T''(\omega_r)}{\omega_r}\cdot 0{,}01125$	$0{,}01125 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}01125 - \omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}01125$
	2	0,01919	$0{,}04107 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}005480 + \frac{T''(\omega_r)}{\omega_r}\cdot 0{,}005480$	$0{,}005480 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}005480 - \omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}005480$
R	1	0,005391	$0{,}04275 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}002325 + \frac{T''(\omega_r)}{\omega_r}\cdot 0{,}006851$	$0{,}03070 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}006851 - \omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}002325$
	2	0,002127	$0{,}02128 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}000815 + \frac{T''(\omega_r)}{\omega_r}\cdot 0{,}003013$	$0{,}01839 + T'(\omega_r)\cdot 0{,}003013 - \omega_r T''(\omega_r)\cdot 0{,}000851$

Zu den vorgegebenen Kreisfrequenzen $\omega = 0$ bis $160\ \text{s}^{-1}$ gehören bei $v = \begin{Bmatrix} 80\ \text{ms}^{-1} \\ 160\ \text{ms}^{-1} \end{Bmatrix}$ die reduzierten Frequenzen $\omega_r = \omega\cdot\frac{l}{2\,v} = \omega\cdot\begin{Bmatrix} 0{,}0125\ \text{s} \\ 0{,}00625\ \text{s} \end{Bmatrix}$.

Für die dimensionslosen Amplituden B_λ' und B_λ'' (mit $\lambda = S, D, R$) ergeben sich beim vorliegenden Bewegungszustand (s. Bild 3) die Zahlenwerte:

$$B_S' = \frac{1}{l/2}\cdot\delta' = 2{,}5\cdot 10^{-3};\quad B_S'' = \frac{1}{l/2}\cdot\delta'' = -22{,}5\cdot 10^{-3};$$
$$B_D' = \beta' \quad = 5\cdot 10^{-3};\quad B_D'' = \beta'' \quad = -5\cdot 10^{-3};$$
$$B_R' = \gamma_R' \quad = 12\cdot 10^{-3};\quad B_R'' = \gamma_R'' \quad = 0.$$

Ergebnis: Mit diesen Zahlenwerten ergeben sich die im Bild 4 aufgetragenen Momentenamplituden M_R' und M_R''.

Die Abminderung des Rudermoments infolge Rückverlegung der Ruder-Drehachse (hier zugleich der Knickkante) ist hier nahezu unabhängig von der Kreisfrequenz ω und der Anblasegeschwindigkeit v. Das Rudermoment selbst — insbesondere der Anteil M_R'' — zeigt dagegen eine wesentliche Abhängigkeit von diesen Parametern.

IV. Schrifttum.

Die Luftkraftgesetze der harmonisch schwingenden, verformbaren Platte mit kleinen Ausschlägen sind ausführlich behandelt in:



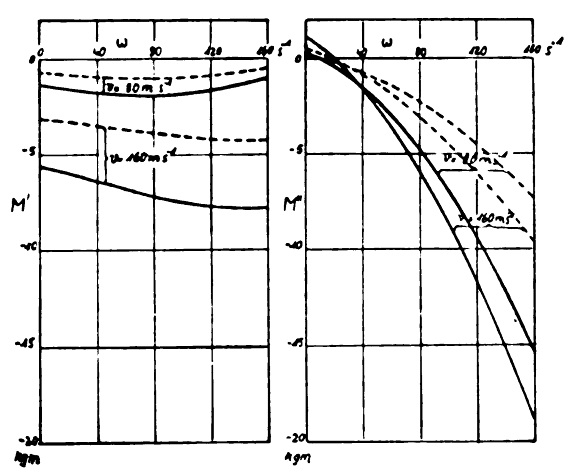


Bild 4. Zum Zahlenbeispiel: Amplituden M_R' und M_R'' des Rudermoments $M_R = M_R' \cdot \cos \omega t - M_R'' \cdot \sin \omega t$.

(Im Grenzfall $\omega = 0$ ist M_R' das Rudermoment für den stationären Zustand mit $\beta = \beta'$, $\gamma_R = \gamma_R'$ nach Bild 3.)

——— Ruderachse d_R (und Knickkante k_R) in der Rudervorderkante v_R.

— — — Ruderdrehachse d_R (und Knickkante k_R) um 1/4 der Rudertiefe l_R hinter der Rudervorderkante v_R.

[1] F. Dietze, Die Luftkräfte der harmonisch schwingenden, in sich verformbaren Platte (Ebenes Problem)[4]). Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 84/96.

Diese Arbeit geht aus von Gedankengängen der Arbeit:

[2] H. G. Küssner, Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln[5]). Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 410/424.

Eine von vorliegender Arbeit abweichende Betrachtungsweise des Flügels mit aerodynamisch innenausgeglichenen Rudern enthält:

[3] H. Söhngen, Bestimmung der Auftriebsverteilung für beliebige instationäre Bewegungen (Ebenes Problem)[6]). Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 401/420.

Die Verwendung vereinfachter Luftkraftgesetze wird weitgehend behandelt in der Arbeit:

[4] K. Leiß, Einfluß der einzelnen Baugrößen auf das Flattern und das aperiodische Auskippen von Tragflächen mit und ohne Ruder (ohne Berücksichtigung der inneren Dämpfung[4])). Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 259/273.

Die Luftkraftgesetze der harmonisch schwingenden verformbaren Platte finden vor allem Verwendung bei Rechnungen zur Flattersicherheit von Flugzeugkonstruktionen. Eine allgemeine Darstellung diesbezüglicher Gedankengänge enthält:

[5] A. Teichmann, Gedankengänge zur Flatterberechnung[4]). Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 283/308.

Weitere Hinweise zum Schrifttum s. in [1] und [5].

[4]) Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Festigkeit.

[5]) Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen.

[6]) Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Aerodynamik.

Abgeschlossen Juli 1940.

Bestimmung der Widerstandsbeiwerte handelsüblicher Runddrahtsiebe.

Von B. Eckert und F. Pflüger.

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Zur Abstimmung von Drosselvorrichtungen in Prüfständen für Axialgebläse wurden Widerstandsmessungen an handelsüblichen Runddrahtsieben vorgenommen. Die Ergebnisse, die für den Betrieb von Gebläseprüfständen von Wert sind, werden im folgenden mitgeteilt.

Gliederung.

Häufig gebraucht Bezeichnungen.

$N\left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}}\right]$ = Leistung,
G [kg/s] = sekundlich verarbeitetes Luftgewicht,
V [m³/s] = sekundlich verarbeitete Luftmenge,
V_H [m³] = Hubraum des Flugmotors,
H [m] = Förderhöhe,
n [U/min] = Drehzahl,
a = Arbeitsspiele je Umdrehung,
λ = Luftüberschußzahl,
γ [kg/m³] = Luftwichte,
ϱ [kgs²/m⁴] = Luftdichte,
f = Durchflußzahl,
v [m/s] = Durchtrittsgeschwindigkeit der Luft durch die Rohrstrecke,
p_{st_1} [mm WS] = statischer Druck am Einlauf in die Rohrstrecke,
p_{st_2} [mm WS] = statischer Druck vor dem Sieb,
p_{st_3} [mm WS] = statischer Druck hinter dem Sieb,
$\Delta p = \Delta_v\, p$ [mm WS] = Druckabfall im Sieb,
Δp_{id} [mm WS] = Druckabfall bei verlustloser Strömung,
W [kg] = Luftwiderstand,
c_w = Widerstandsbeiwert,
$F = F_2$ [m²] = Rohrquerschnitt und Umrißfläche des Siebes,
F_R [m²] = Projektionsfläche des Siebes,
$F_1 = F - F_R$ [m²] = freier Durchtrittsquerschnitt des Siebes,
$\varphi = \frac{F_R}{F}$ = Völligkeitsgrad,
z = Maschenzahl auf 1 cm,
δ [mm] = Drahtstärke,
Re = Reynoldssche Zahl,
ν [m²/s] = kinematische Zähigkeit.

1. Einleitung.

Die Antriebsleistung eines Ladegebläses an Flugmotoren wird mit zunehmender Betriebshöhe bei gleichem Luftdurchsatz (m³/s) — bezogen auf den Ansaugzustand — wegen der mit der Flughöhe abnehmenden Luftdichte kleiner. Werden also für Untersuchungen solcher Flugmotorenlader in Prüfständen, die nicht unter Höhenbedingungen arbeiten, keine besonderen Vorkehrungen getroffen, so sind wesentlich größere Antriebsleistungen erforderlich als für den gleichen Lader in der beabsichtigten Betriebshöhe, da die Dichte der angesaugten Luft in Bodennähe größer ist.

Die erforderliche Laderantriebsleistung beträgt allgemein

$$N_{\text{Lader}} = \frac{G \cdot H}{\eta} = \frac{V \cdot \gamma \cdot H}{\eta} \quad \left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}}\right] \qquad (1)$$

Der Luftdurchsatz V ist dabei gegeben durch folgenden Ausdruck

$$V = \frac{n}{a}\, V_H \cdot \lambda \cdot \eta_v \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right],$$

wo η_v der volumetrische Wirkungsgrad ist; V ist also von der Betriebshöhe unabhängig.

Wird beispielsweise ein für 8 km Volldruckhöhe entworfener Lader unter Bodenbedingungen (1,033 kg/cm² und $t = 15°$ C, Punkt A in Bild 1) geprüft, dann beträgt die aufzuwendende Laderantriebsleistung

$$N_{0\,\text{km}} = \frac{V \cdot H}{\eta} \cdot 1{,}226 \quad \left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}}\right]$$

gegenüber einer in 8 km Höhe (Punkt B in Bild 1) erforderlichen Laderantriebsleistung

$$N_{8\,\text{km}} = \frac{V \cdot H}{\eta} \cdot 0{,}525 \quad \left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}}\right].$$

Der Mehrbedarf an Antriebsleistung am Boden beträgt damit bei gleicher Förderhöhe

$$\frac{N_{0\,\text{km}} - N_{8\,\text{km}}}{N_{8\,\text{km}}} = \frac{1{,}226}{0{,}525} - 1 = 2{,}34 - 1 = 1{,}34.$$

Diese erhöhten Laderantriebsleistungen bei Prüfung im Bodenbetrieb können vermieden werden, wenn vor dem Lader gedrosselt, d. h. der Druck der Ansaugluft verkleinert wird. Da Drosselvorgänge nahezu isotherm erfolgen, wird beispielsweise durch ein Sieb vor der Ladereintrittsöffnung eine der Volldruckhöhe entsprechende Luftdichte hergestellt. Im Anschluß an das vorige Beispiel beträgt dann die Antriebsleistung (Punkt C in Bild 1)

$$N_{0,\,\text{gedrosselt}} = \frac{V \cdot H}{\eta} \cdot 0{,}525 \quad \left[\frac{\text{mkg}}{\text{s}}\right].$$

Dabei ist an der Drosselstelle ein Druckabfall von D—C, Bild 1, zu verwirklichen. Ist c_w der Widerstandsbeiwert der Drossel, dann ist der Druckabfall gegeben durch

$$\Delta p = \varrho/2\, v^2 \cdot c_w \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Überschlägige Untersuchungen zeigten, daß die hinter der Drosselstelle herrschende Luftdichte ϱ zweckmäßig in Gl. (2) einzusetzen ist. Auf das in Bild 1 eingezeichnete Beispiel angewandt, müßte also die für Punkt C gegebene Luftdichte der Rechnung zugrunde gelegt werden.

Als Drosselorgane lassen sich am einfachsten Drahtsiebe verwenden. Um die Widerstandsbeiwerte handelsüblicher Runddrahtsiebe zu bestimmen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen.

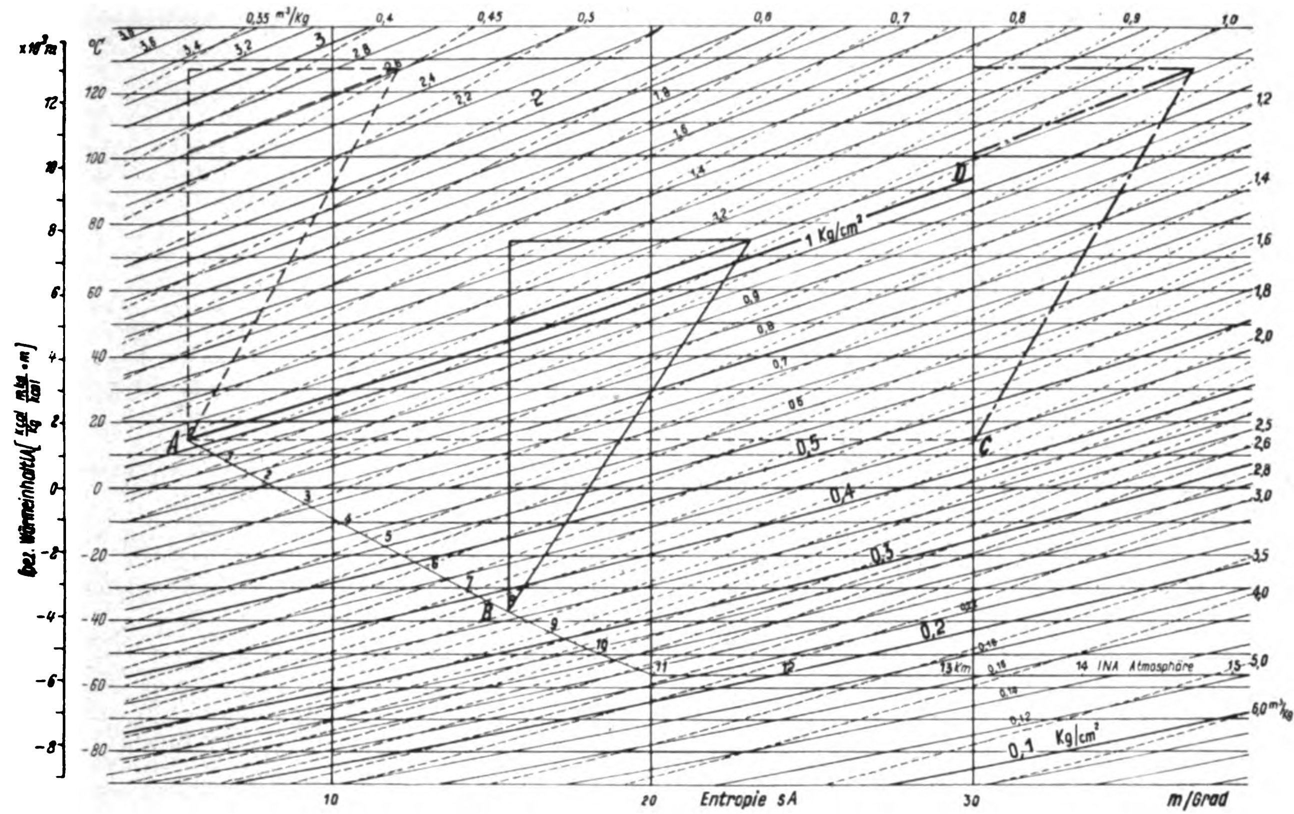


Bild 1. i-s-Diagramm für atmosphärische Luft.

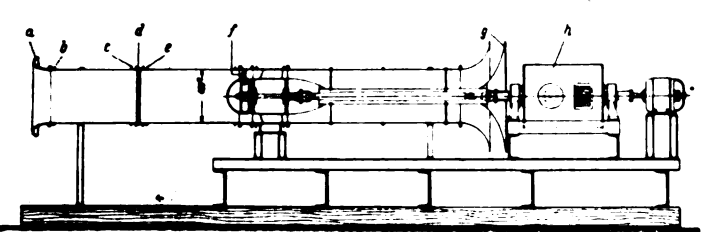


Bild 2. Versuchsaufbau zur Messung von Widerstandsbeiwerten von Runddrahtsieben.

a Auffangtrichter. *b* Meßstelle 1. *c* „ 2. *d* Sieb. *e* Meßstelle 3. *f* Axialgebläse. *g* Drosselvorrichtung. *h* Antriebsmotor.

2. Versuchsdurchführung.

Die Ermittlung der Widerstandsbeiwerte verschiedener Runddrahtsiebe erfolgte in einem Gebläseprüfstand der im Stuttgarter Forschungsinstitut üblichen Bauweise, allerdings bei so kleiner Luftgeschwindigkeit, daß die Dichteänderungen bezüglich der Versuchsauswertung vernachlässigt werden konnten. Bild 2 zeigt den Prüfstandsaufbau und die für die Messungen benützten Meßstellen.

Ein Axialgebläse saugt Luft durch den Auffangtrichter an. Zwischen Auffangtrichter und Gebläse wurden Siebe verschiedener Völligkeitsgrade, die zwischen zwei Flanschen eingebaut waren, untersucht. Die Luft verläßt die Rohrstrecke des Prüfstands über eine Feindrosselvorrichtung (Prasilscher Saugfuß), die bei den Widerstandsmessungen voll geöffnet blieb. Durch Änderung der Motordrehzahl konnte die Windgeschwindigkeit bis auf 30 m/s gesteigert werden.

Zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit wurde am Einlauf (Meßstelle *1* in Bild 2) der statische Druck gemessen. Durch Messung der Drücke vor und hinter dem Sieb (Meßstellen *2* und *3*) konnte jeweils der Druckabfall im Sieb bestimmt werden. Zur Druckmessung wurden Betz-Mikromanometer verwendet.

3. Die untersuchten Siebe.

Die Untersuchungen erstreckten sich auf handelsübliche Runddrahtsiebe mit quadratischen Maschen. Die Drahtstärke war bei allen Sieben bis auf eines gleich. Dieses eine Sieb (Sieb Nr. XVI) wies zwei verschiedene Drahtstärken in seinem Gewebe auf. Drahtstärke [mm] und Maschenzahl [1/cm] wurden genauestens abgemessen und der später erläuterte Völligkeitsgrad der einzelnen Siebe danach bestimmt. Bei einzelnen Versuchen wurde die Anzahl der Siebe verdoppelt; teilweise wurden auch verschiedene Siebe hintereinander gesetzt und der Widerstandsbeiwert gemessen. Da sich im Verlauf der Versuche zeigte, daß sich der Widerstandsbeiwert beim Hintereinanderschalten von mehreren Sieben ändert, wurden solche Versuche in größerer Anzahl durchgeführt. Hierbei waren die Siebe teilweise ganz dicht hintereinander, teilweise auch in einem Abstand von 1 cm voneinander eingebaut. Zahlentafel 1 gibt eine Übersicht über die untersuchten Siebe und Siebzusammenstellungen mit den kennzeichnenden Angaben.

Bei zwei hintereinandergeschalteten Sieben *a* und *b* wurde als mittlere Drahtstärke δ_m bestimmt:

$$\delta_m = \frac{z_a \cdot \delta_a + z_b \cdot \delta_b}{z_a + z_b} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

4. Versuchsauswertung.

a) Bestimmung der ungestörten Zuströmgeschwindigkeit.

Der an Meßstelle *1*, Bild 2, gemessene Unterdruck ist ein Maß für die Geschwindigkeit in der Rohrstrecke. Ist f ein Düsen-Berichtigungsbeiwert, dann gilt

$$\varrho/2\, v^2 = f \cdot \Delta p_{st_1} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

oder

$$v = \sqrt{\frac{f}{\varrho/2} \Delta p_{st_1}}.$$

b) Ermittlung des Widerstandsbeiwertes.

Bestimmt man als Widerstandsbeiwert eines Siebes

$$c_w = \frac{W}{\varrho/2 \cdot v^2 \cdot F} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Zahlentafel 1. Übersicht über die untersuchten Siebe und Siebzusammenstellungen.

Nr.	Sieb Nr.	Maschenzahl auf 1 cm	Drahtstärke mm	Völligkeitsgrad $\varphi = F_R/F$
1	I	1,5	0,7	0,212
2	II	2,2	0,6	0,265
3	III	3,0	0,45	0,252
4	IV	4,6	0,3	0,257
5	V	7,2	0,25	0,328
6	VI	9,5	0,25	0.419
7	VII	14,5	0,2	0,496
8	VIII	18,5	0,16	0,505
9	IX	22,5	0,14	0,53
10	X	25,5	0,14	0,587
11	XI	28,0	0,12	0,559
12	XII	29,0	0,17	0,743
13	XIII	31,5	0,15	0,723
14	XIV	34,0	0,1	0,564
15	XV	37,0	0,1	0,603
16	XVI	42,0	0,26	0,957
17	XIII + V	38,7	0,17	0,882
18	XII + VI	38,5	0,19	0,92
19	XII + VII	43,5	0,18	0,951
20	XII + VIII	47,5	0,166	0,955
21	XII + IX	57,0	0,1455	0,962
22	XII + XV	66,0	0,131	0,982
23	2 × XIII	63,0	0,15	0,997

und setzt man

$$W = (p_2 - p_3) \cdot F = \Delta p \cdot F \qquad [\mathrm{kg}] \qquad (6)$$

dann erhält man

$$c_w = \frac{\Delta p}{\varrho/2 \cdot v^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

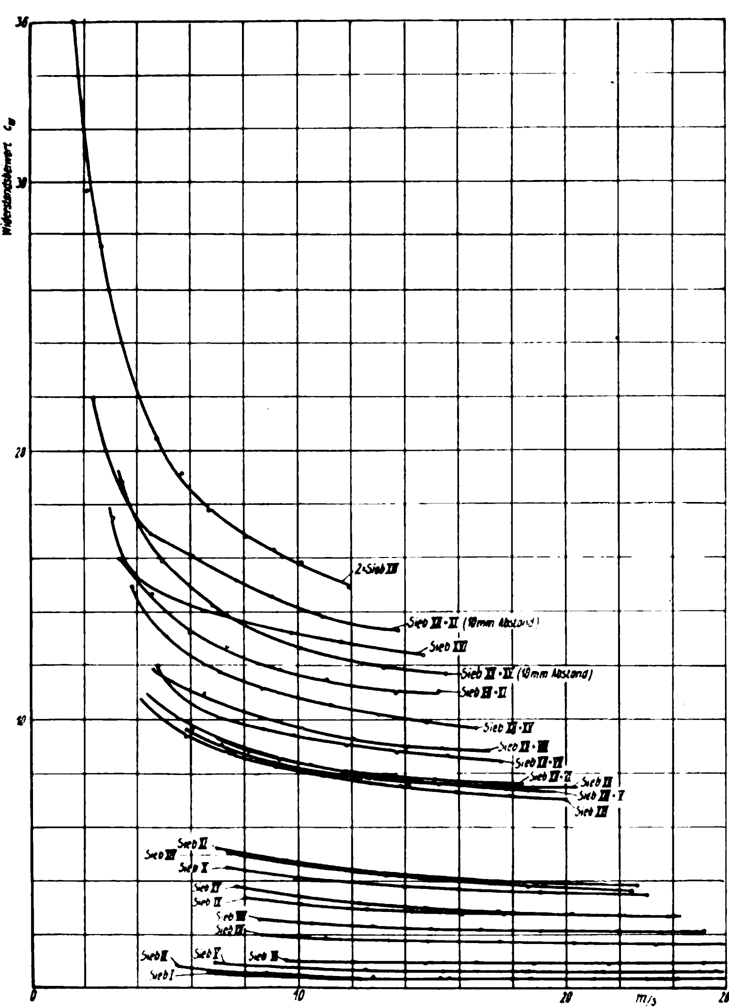


Bild 3. Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes der Siebe nach Zahlentafel 1 von der ungestörten Durchflußgeschwindigkeit.

Δp ist der Druckunterschied zwischen den Meßstellen 2 und 3, Bild 2, also der Druckverlust im Sieb.

c) Bestimmung der Siebprojektionsfläche und des Völligkeitsgrades[1]).

Ist F_R die dem Luftstrom ausgesetzte Projektionsfläche der Drähte und F die Umrißfläche des Siebes, dann ist der Völligkeitsgrad

$$\varphi = \frac{F_R}{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

φ ist also ein Maß für die Siebdichte.

Die gesamte Projektionsfläche des Siebes erhält man als Summe der Projektionen sämtlicher Drähte. Auf die Flächeneinheit ΔF (10 mm × 10 mm = 100 mm²) bezogen, erhält man bei z Drähten je 10 mm und einer Drahtstärke δ als Projektionsfläche

$$\Delta F_R = 10 \cdot z\,\delta + 10\,z\,\delta - (z\,\delta)^2,$$
$$\Delta F_R = 20 \cdot z\,\delta - (z\,\delta)^2 = z\,\delta\,(20 - z\,\delta) \qquad [\mathrm{mm}^2] \qquad (9)$$

Der Völligkeitsgrad ergibt sich dann zu

$$\varphi = \frac{\Delta F_R}{\Delta F} = \frac{z\,\delta\,(20 - z\,\delta)}{100} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die am Rohrumfang auftretenden geringen Unstimmigkeiten können vernachlässigt werden.

5. Versuchsergebnisse.

Bild 3 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w der in Zahlentafel 1 gekennzeichneten Runddrahtsiebe von der ungestörten Durchflußgeschwindigkeit.

Die durch Messung gefundenen Widerstandsbeiwerte einiger Siebe mit kleinem Völligkeitsgrad sind in Bild 4 dargestellt. Bild 5 zeigt den Verlauf der Widerstandsbeiwerte über der Reynoldsschen Zahl Re, wobei

$$Re = \frac{\delta \cdot v}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Als kinematische Zähigkeit wurden entsprechend der mittleren Versuchsbedingung die Werte für 750 mm Hg Barometerstand und 20° C, also

$$\nu = 14 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$$

zugrunde gelegt.

Mit steigender Windgeschwindigkeit, also bei größer werdender Reynoldsscher Zahl, ist ein Abfallen des Widerstandsbeiwertes festzustellen. Bei den dünnen zylindrischen Drähten, aus denen die Siebe gebildet sind, ist eine ähnliche Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl festzustellen wie bei Zylindermessungen in Windkanälen. Wegen der guten Abrundung der Einlaufdüse und der geringen Entfernung des Siebes von ihr ist die Zulaufströmung im wesentlichen laminar. Eine Steigerung der Windgeschwindigkeit, also eine Widerstandsmessung bei Reynoldsschen Zahlen $Re > 1000$, war versuchsmäßig nicht möglich.

Die Versuche mit doppelten Sieben ergaben, daß bei engem Zusammenbau, also bei fehlendem Zwischenabstand, der Gesamtwiderstandsbeiwert kleiner ist als die Summe der beiden Einzelwiderstandsbeiwerte. Diese Erscheinung kann darauf zurückgeführt werden, daß sich der Völligkeitsgrad beider Siebe nicht vollständig auswirken kann, daß also, wenn auch nur teilweise, eine Drahtüberdeckung vorhanden ist. Bei sehr engmaschigen Sieben ist der gegenseitige Abstand von geringerer Bedeutung auf den Gesamtwiderstandsbeiwert. Bei Einbau von zwei Sieben in einem Abstand von etwa 10 mm ergaben sich Gesamtwiderstandsbeiwerte, die etwa der Summe der Einzelwiderstandsbeiwerte entsprechen.

In Bild 6 sind die Widerstandsbeiwerte c_w der untersuchten Siebe über dem Völligkeitsgrad φ bei einer Reynoldschen Zahl $Re = 200$ dargestellt. Da-

[1]) Vgl. z. B. O. Flachsbart. Widerstand von Seidengazefiltern, Runddraht- und Blechstreifensieben mit quadratischen Maschen. Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst. Göttingen, IV. Lfg., München 1932, R. Oldenbourg.

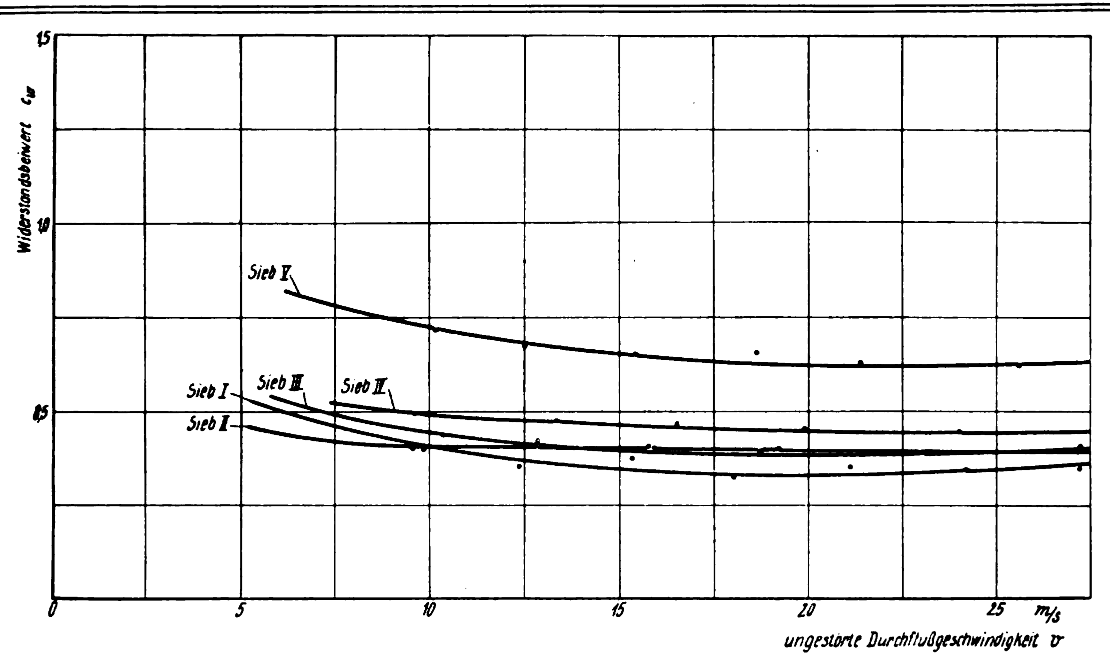


Bild 4. Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes einiger Siebe mit kleinem Völligkeitsgrad von der ungestörten Durchflußgeschwindigkeit.

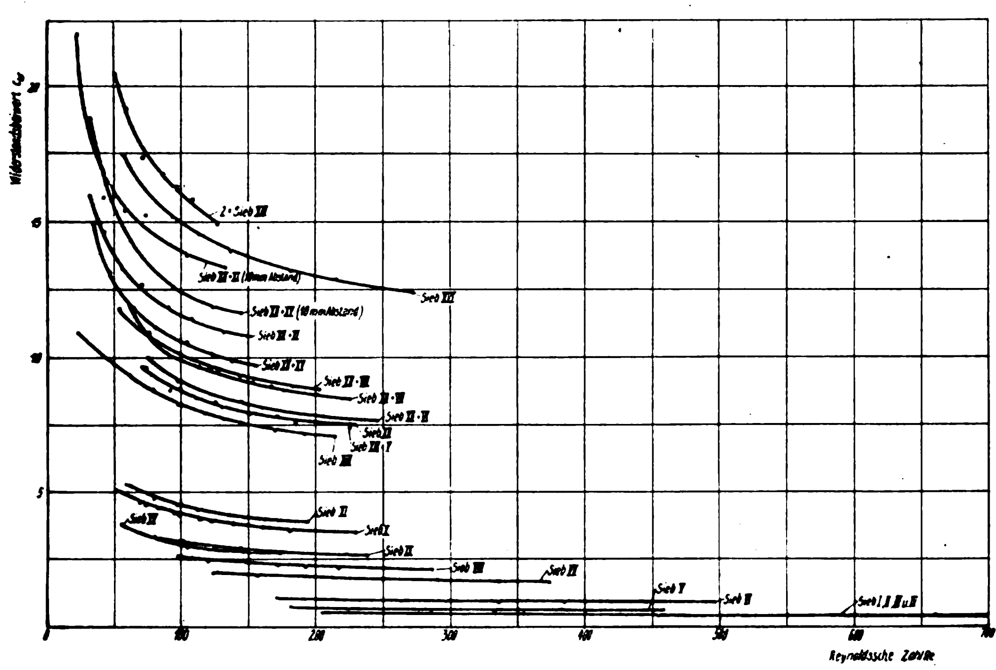


Bild 5. Widerstandsbeiwert von Sieben in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

mit ist die Möglichkeit gegeben, für ein gewünschtes c_w den nötigen Völligkeitsgrad φ bzw. bei gegebener Drahtstärke δ die Maschenzahl z zu berechnen.

Beispiel: Der für eine erforderliche Drosselung notwendige Widerstandsbeiwert c_w sei 13.

Aus Bild 6 ist für $Re = 200$ und $c_w = 13$ ein Völligkeitsgrad φ von 0,78 zu entnehmen. Bei einer Bezugsfläche $\Delta F = 100\ \text{mm}^2$ ist die notwendige Projektionsfläche ΔF_R der Drähte

$$\Delta F_R = \varphi \cdot \Delta F = 78\ \text{mm}^2.$$

Bei einer Drahtstärke $\delta = 0{,}1$ kann die erforderliche Maschenzahl berechnet werden aus $0{,}78 = z \cdot 0{,}1\ (2 - z \cdot 0{,}1)$, d. h. $z = 53$ Maschen/cm.

6. Theoretischer Widerstandsbeiwert eines Siebes.

Nach der Stetigkeitsgleichung ist mit den Bezeichnungen von Bild 7

$$\varrho_0 F_0 v_0 = \varrho_1 F_1 v_1 = \varrho_2 F_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Angenommen, es sei

$$F_0 = F_2; \quad \varrho_0 = \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

dann wäre bei verlustloser Strömung nach der Druckgleichung

$$p_{0\,id} + \varrho/2\, v_0^2 = p_{1\,id} + \varrho/2\, v_1^2 = p_{2\,id} + \varrho/2\, v_2^2 \quad . \; . \quad (13)$$

Vor dem Sieb darf man die Strömung ohne weiteres als verlustfrei ansehen; dann wird der wirkliche Druck

$$p_0 = p_{0\,id} \quad \text{und} \quad p_1 = p_{1\,id}.$$

Hinter dem Gitter ist die Strömung nicht verlustfrei, da sie sich in der Nähe des engsten Querschnittes ablöst. Hinter den Drähten des Siebes bildet sich ein »Totwasser«, das aber im weiteren Verlauf der Strömung durch Mischung wieder ausgeglichen wird, so daß im Strömungsquerschnitt F_2 die Strömungsgeschwindigkeit wieder als gleichmäßig verteilt angesehen werden darf. Der Druck im Querschnitt F_2 ist aber um einen Druckverlust $\Delta_v p$ kleiner als der Druck $p_{2\,id}$ bei verlustloser Strömung, d. h.

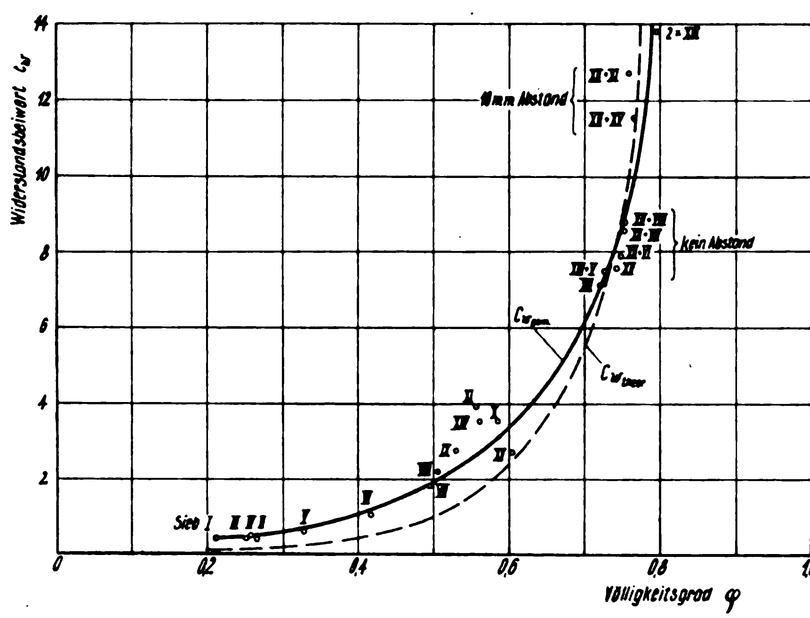


Bild 6. Widerstandsbeiwert von Sieben in Abhängigkeit vom Völligkeitsgrad ($Re = 200$).

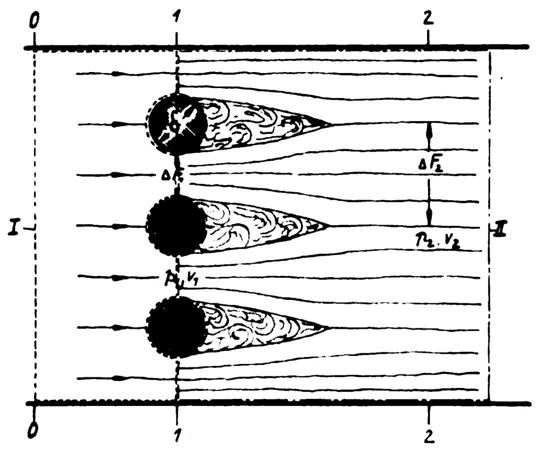


Bild 7. Veranschaulichung des Drosselvorganges in einem Sieb.

$$p_2 = p_{2\,\mathrm{id}} - \Delta_v p.$$

Um diesen Druckverlust ausrechnen zu können, soll angenommen sein, daß die Summe der engsten Querschnitte der das Totwasser begrenzenden Strahlen gleich der Summe der engsten Querschnitte F_1 des Siebes sei und daß die Geschwindigkeit über diesen Querschnitt gleichmäßig verteilt sei. Der Druck auf der Leeseite der Drähte, also der drahtseitigen Begrenzung des Totwassers, ist nahezu gleichbleibend und soll deshalb im folgenden gleich dem Druck p_1 im Querschnitt F_1 angenommen werden.

Für die gesamte auf die Berandung des Gebietes II, Bild 7, wirkende Strömungskraft P_{II} gilt, da $F_1 + F_K = F_0$ ist,

$$P_{II} = \dot m\,(v_1 - v_2) + (p_1 - p_2)\cdot F_0 = 0 \quad . \; . \; . \; (14)$$

Hieraus folgt mit

$$\dot m = \varrho\, v_0 F_0 \quad \text{und} \quad v_2 = v_0$$

$$p_2 - p_1 = p_{2\,\mathrm{id}} - p_1 - \Delta_v p = \varrho\, v_0 (v_1 - v_0) \quad . \; . \; (15)$$

oder mit

$$p_{2\,\mathrm{id}} - p_1 = \varrho/2\,(v_1^2 - v_0^2)$$

$$\Delta_v p = \varrho/2\,(v_1^2 - v_0^2) - \varrho\, v_0 (v_1 - v_0) \quad . \; . \; . \; (16)$$

$$\Delta_v p = \varrho/2\, v_0^2 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Die gesamte auf die Berandung des Gebietes I wirkende Strömungskraft P_I ist ebenfalls gleich Null. Der auf das Sieb wirkende Widerstand W ist also gleich dem Produkt aus dem Druckunterschied $\Delta_v p$ zwischen den Querschnitten 0 und 2 und der Querschnittsfläche F_0 bzw. F_2.

$$W = \Delta_v p \cdot F_0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Führt man einen Widerstandsbeiwert

$$c_w = \frac{W}{\varrho/2\, v_0^2 \cdot F_0} \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

ein, dann erhält man

$$c_w = \frac{\Delta_v p}{\varrho/2\, v_0^2} = \left(\frac{v_1}{v_0} - 1\right)^2 = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \quad (20)$$

oder

$$\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{c_w} + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Nun ist mit den für das Sieb benutzten Bezeichnungen

$F_2 = F =$ Umrißfläche des Siebes,
$F_1 = F - F_K =$ freier Durchtrittsquerschnitt des Siebes:

$$c_{w_{\mathrm{theor}}} = \left(\frac{F}{F - F_K} - 1\right)^2 = \left(\frac{F_K}{F - F_K}\right)^2 = \left(\frac{\varphi}{1 - \varphi}\right)^2 \quad (22)$$

In Bild 6 ist dieses theoretische Ergebnis gestrichelt eingezeichnet. Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie ist befriedigend, wenn man berücksichtigt, daß die Versuche bei verhältnismäßig niederen Reynoldsschen Zahlen durchgeführt und die der Rechnung zugrunde liegenden Annahmen immerhin roh sind.

Für Doppelsiebe (a und b) wurde der theoretische Widerstandsbeiwert $c_{w\mathrm{theor}}$ entsprechend der mittleren Völligkeit φ_{ges} bestimmt aus

$$c_{w_{ges\,\mathrm{theor}}} = c_{w_a\,\mathrm{theor}} + c_{w_b\,\mathrm{theor}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

und

$$\left(\frac{\varphi_{ges}}{1 - \varphi_{ges}}\right)^2 = \left(\frac{\varphi_a}{1 - \varphi_a}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_b}{1 - \varphi_b}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (24)$$

zu

$$\varphi_{ges} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\varphi_a}{1 - \varphi_a}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_b}{1 - \varphi_b}\right)^2}}{2 + \sqrt{\left(\frac{\varphi_a}{1 - \varphi_a}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_b}{1 - \varphi_b}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; (25)$$

Auch für Doppelsiebe findet man zwischen Messung und Rechnung eine gute Übereinstimmung, wenn man den Völligkeitsgrad für hintereinander geschaltete Siebe nach Gl. (25) bestimmt.

7. Zusammemfassung.

Um bei Versuchen an Laderprüfständen die angesaugte Luft auf einen Druck entsprechend einer gewünschten Luftdichte abdrosseln zu können, wurden die Widerstandsbeiwerte von handelsüblichen Runddrahtsieben bestimmt. Die Messungen der Beiwerte konnten bis zu Reynoldsschen Zahlen von 1000 durchgeführt werden. Bei der Anordnung von zwei Sieben hintereinander, die zur Erreichung hoher Widerstandsbeiwerte notwendig ist, wurde neben einer Abhängigkeit der Beiwerte vom Völligkeitsgrad, d. h. der Maschendichte des Siebes auch eine solche von dem gegenseitigen Abstand der einzelnen Siebe festgestellt.

Registrierballone aus Transparentfolien.

Von Karl Eisele[1]).

Bericht des I. Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule Stuttgart.

Zur Erforschung der Stratosphäre stehen bis jetzt nur Registrierballone aus natürlichem Gummi zur Verfügung. Die Erfahrung zeigt, daß mit derartigen Ballonen lediglich in Ausnahmefällen Höhen über 30 km erreicht werden. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, dieses Hemmnis für die Erforschung der Stratosphäre zu erklären und zu beseitigen. Die Einflüsse der in der Stratosphäre herrschenden Zustände auf Gummi und Transparentfolien werden besprochen. Die Bedeutung der niederen Lufttemperatur für diese Ballonwerkstoffe wird durch Versuche aufgezeigt. Es wird versucht, die zerstörende Wirkung der Kälte auf Transparentfolien durch Absorption der Sonnenstrahlung zu beseitigen.

Gliederung.

I. Einleitung.

A. Erfahrungen mit Gummiballonen.

Es wäre für die Erforschung der Stratosphäre ein wesentlicher Fortschritt, wenn es gelänge, mit Registrierballonen Höhen von 35 bis 40 km zu erreichen. Die Versuche, mit Gummiballonen in diese Höhen vorzustoßen, scheiterten im allgemeinen aus bisher nicht genau bekannten Gründen. Diese platzen meist unterhalb 30 km, obwohl sie theoretisch bedeutend größere Höhen erreichen müßten. Aus der Größe und Füllung der Ballone, aus der Dehnfähigkeit des Gummis unter normalen Bedingungen kann nämlich die maximal erreichbare Höhe berechnet werden.

Das Prallvolumen des Ballons (bei Gummi aus der Dehnfähigkeit zu berechnen) sei V m³, sein Gewicht G kg. Der freie Auftrieb betrage A kg und die Last G_0 kg. Ferner ist bekannt, daß 1 m³ Wasserstoff bei 0° C und 760 mm Hg einen Auftrieb von 1,15 kg liefert. Vor dem Start ist soviel Wasserstoff einzufüllen, daß der Auftrieb $(G + G_0 + A)$ kg beträgt. Dazu sind $V_0 = \frac{G + G_0 + A}{1,15}$ m³ Wasserstoff nötig. Der Ballon steigt nun mit dem freien Auftrieb A kg, der annähernd konstant bleibt, bis zur Prallhöhe auf. Dort herrsche der Luftdruck p_1 mm Hg. Am Erdboden sei der Druck $p_0 = 760$ mm Hg. Dann gilt, unter Vernachlässigung der Temperaturänderung und des inneren Überdrucks,

$$p_1 \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

oder

$$p_1 = \frac{760\,(G_0 + G + A)}{1,15\,V} \text{ mm Hg Prallhöhe} \quad . \; . \; . \quad (I)$$

In dieser Höhe platzen die Gummiballone.

Ein Ballon mit konstantem Volumen aus undehnbarem Werkstoff (Transparentfolie) würde, wenn er geschlossen ist, infolge des nun entstehenden inneren Überdrucks ebenfalls platzen. Ist derselbe offen, dann steigt er unter Abströmen von $A/1,15$ m³ Wasserstoff weiter auf, bis der freie Auftrieb zu Null geworden ist. Der Ballon hat dann die Höhe erreicht, in der er beliebig lange schweben würde, wenn nicht Wasserstoffverluste und Temperaturerniedrigung auftreten würden, die ihn zum Absinken bringen. In Wirklichkeit schießt der Ballon infolge seiner Trägheit ein wenig über die Schwebehöhe hinaus. Dies hat einen kleinen Wasserstoffverlust zur Folge, wodurch der Ballon ins Sinken kommt. Für die Schwebehöhe des offenen Ballons aus Transparentfolien ergibt sich also

$$p_{min} = \frac{760\,(G_0 + G)}{1,15\,V} \text{ mm Hg Schwebehöhe} \quad . \; . \quad (II)$$

Nimmt man einen kugelförmigen Ballon mit Radius R, dessen Gewicht pro m² τ kg sei, dann erhält man durch Einsetzen der Werte von G und V für die Maximalhöhe ohne Last

$$p_{min} = 1982\,\frac{\tau}{R} \text{ mm Hg Maximalhöhe ohne Last} \quad (III)$$

Aus dem Druck p kann die Höhe in km nach der Formel von Soréan berechnet werden

$$H = 5\,(3064 + 1,73 \cdot p - 0,0011\,p^2)\log\frac{760}{p} \text{ km.}$$

Es scheint ein Zufall zu sein, wenn selbst bei größtem Aufwand an Gummi[2]) die Ballone über 30 km hinaus und an die theoretische Höhe herankommen. Im wesentlichen sind nur zwei Aufstiege bekannt, die über 35 km hinauskamen, so der von Wigand und Frankenberger[3]) im September 1931 in Hamburg bis 36 km Höhe und der von Curtiss und Astin[4]). Der letztere Aufstieg wurde in Amerika gemacht und erreichte 38,7 km Höhe. Die Last bestand lediglich aus einer Radiosonde von 750 g Gewicht. Ein Aufstieg von Regener[5]) erreichte 31 km Höhe.

Nach den bisherigen Kenntnissen über die in der Stratosphäre herrschenden Verhältnisse können für das Versagen der Gummiballone folgende Ursachen in Frage kommen:

1. Das zufällige Vorhandensein von Körnern und Löchern im Gummi. Solche fehlerhafte Stellen sind praktisch bei jedem Ballon vorhanden. Durch sorgfältiges Prüfen vor dem Aufstieg kann jedoch diese Gefahrenquelle weitgehend vermindert werden. Die Erfahrung hat gezeigt, daß Ballone, bei denen ein derartiger Fehler übersehen wurde, schon frühzeitig absinken. Es ist nicht einzusehen, warum fehlerhafte Ballone immer gerade in Höhen zwischen 22 und 30 km platzen sollen, wo doch die Dehnung des Gummis schon in geringerer Höhe einen hohen Grad erreicht hat. Das Versagen beruht allem Anschein nach auf keinem solch zufälligen Fehler, sondern auf systematischen Gründen.

[1]) Diss. T. H. Stuttgart D 93, 1939.

[2]) Von Regener wurden einmal 25-kg-Ballone verwendet, die 40 km Höhe hätten erreichen sollen, aber nur ca. 30 km hoch gingen. Normalerweise beträgt das Gewicht von Registrierballonen 4 bis 10 kg.

[3]) Goetz, Ergebnisse der kosmischen Physik Bd. III, S. 312.

[4]) Curtiss L. F., Astin A. V., Science N. S. Bd. 83 (1936), Nr. 2157, S. 411—412.

[5]) Regener E. und Regener V. H., Physik. Z. Bd. 35 (1934), S. 788.

2. Die Einwirkung des chemisch aktiven Teils des Sonnenspektrums auf Gummi. Starke ultraviolette Strahlung, wie sie in der Stratosphäre vorhanden ist, macht Gummi brüchig. Diese Tatsache wird besonders von Piccard[6]) hervorgehoben. Er schützte deshalb den Gummibelag seines Ballons durch Einlagern eines ultraviolett absorbierenden Farbstoffes in das Baumwollgewebe. Bei Registrierballonen kann dieser Einfluß nicht ausgeschaltet werden, da es unmöglich ist, sie außen so zu präparieren, daß die ultraviolette Strahlung in der dünnen Schicht völlig absorbiert wird.
3. Von Regener[7]) wird die Ansicht vertreten, daß die Gummiballone wegen des Vorhandenseins von Ozon in der Atmosphäre vorzeitig platzen. Die relative Ozonkonzentration erreicht in 22 km Höhe ein scharf ausgeprägtes Maximum und ist dort rd. 200mal so groß als am Erdboden[8]). Mit größerer Höhe fällt sie rasch wieder zu kleinen Werten ab. Läßt man Ozon der Konzentration 10^{-4} auf stark gedehnten Gummi einwirken, dann zeigt sich zunächst eine Trübung; nach etwa 10 bis 15 min Einwirkungsdauer platzt der Gummi. Eine solche, wenn auch schwache Trübung ist an Ballonen zu bemerken, die in großer Höhe waren. Für das Vorhandensein der Ozonwirkung spricht ferner der Umstand, daß stärker gefüllte Ballone entgegen der theoretischen Überlegung[9]) höher gehen als schwach gefüllte. Dies kann durch kürzere Einwirkungsdauer des Ozons erklärt werden[10]). Diese Tatsachen können mit demselben Recht als Beweis für die zerstörende Wirkung der ultravioletten Strahlung angesehen werden. Wahrscheinlich handelt es sich in Wirklichkeit um die Gesamtwirkung dieser beiden Einflüsse, denn die Ozonkonzentration ist zu klein (rd. 10- bis 100mal so klein wie bei Laboratoriumsversuchen), als daß sie allein für die Zerstörung der Gummiballone verantwortlich sein könnte. Auch sie kann jedoch durch Präparieren des Gummis nicht ausgeschaltet werden. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu umgehen, bestünde in der Verwendung von synthetischem, ozonfestem Gummi. Versuche in dieser Richtung haben jedoch anscheinend bis jetzt zu keinem Erfolg geführt.
4. Ein weiterer Punkt, der für das Versagen von Gummiballonen von genau so entscheidender Bedeutung sein kann, wie die oben besprochenen Ursachen und der seither fast gar nicht beachtet wurde, ist die in der Stratosphäre in unseren Breiten herrschende niedere Temperatur von —50 bis —60° C. Ballone aus ungefärbtem und schwach gefärbtem Gummi sind in gedehntem Zustand fast durchsichtig. Die Absorption der Sonnenstrahlung und damit die Erwärmung der Hülle sind deshalb entsprechend klein. Außerdem findet an der Oberfläche stark gedehnten Gummis eine beträchtliche Reflexion statt. Die Temperatur des Gummis dürfte aus diesen Gründen (das ist die noch nicht bewiesene Vermutung) nur wenig über der Lufttemperatur liegen.

Es war deshalb von Wichtigkeit, zunächst die Veränderungen der für die Brauchbarkeit als Ballonmaterial maßgebenden Eigenschaften von Gummi mit sinkender Temperatur zu untersuchen. In erster Linie ist dies die Dehnbarkeit, d. i. die Flächendehnung pro Spannung. Diese gibt ein Maß für die Güte von Ballongummi ab und wurde deshalb für verschiedene Spannungs- und Temperaturzustände ermittelt. Natürlich ist eine möglichst große Dehnbarkeit erwünscht. Wird dieselbe bei niederer Temperatur sehr klein, dann ist ein bedeutender Einfluß der Kälte auf die von Registrierballonen erreichbare Höhe zu erwarten.

Zur Messung der Dehnbarkeit wurden Platten des zu untersuchenden 0.2 bis 0,3 mm dicken Ballongummis zu annähernd kugelförmigen Blasen aufgeblasen und deren Durchmesser sowie der innere Überdruck bestimmt. In erster Näherung gilt dann für die Spannung im Gummi, analog der Oberflächenspannung einer Seifenblase

$$\alpha = \frac{D \cdot P}{4} \quad \text{(IV)}$$

wo D der Durchmesser der Blase in mm und P der innere Überdruck in mm Hg ist. Die Flächendehnung ist proportional D^2, und es wird somit die Dehnbarkeit

$$\varrho = \varepsilon \frac{D^2}{\alpha} = \varepsilon \frac{4\,D}{P} \quad \text{(V)}$$

wo ε ein hier nicht weiter interessierender Proportionalitätsfaktor ist.

Die Versuche wurden in einem Thermostaten durchgeführt, dessen Kühlraum 23 l betrug. Zur Kühlung diente ein Gemisch von fester Kohlensäure und Alkohol. In dem unterkühlten Raum wurde eine Probe des Gummis langsam bis zum Platzen aufgeblasen und dabei der Durchmesser D mm mittels Spiegelmaßstab, der innere Überdruck P mm Hg mit Quecksilbermanometer gemessen. Der zum Aufblasen verwendete Wasserstoff durchströmte eine im Kühlbad liegende Kupferspirale und hatte somit dieselbe Temperatur wie der Gummi. Da der Bau eines großen Thermostaten zur Untersuchung kleiner Pilotballone einen erheblichen Aufwand erfordert hätte, wurden nur kleine Gummiproben geprüft, die zu diesem Zweck in eine Vorrichtung eingespannt wurden. Um zu untersuchen, ob diese Einspannung Verfälschungen ergab, wurden bei normaler Temperatur Kontrollversuche an Pilotballonen gemacht. Diese führten zu denselben Dehnungs-Druckkurven und Spannungen. Die Einspannung konnte somit ohne Bedenken verwendet werden.

Die Messungen hatten folgende Ergebnisse:

Wie Bild 1 zeigt, ist der für eine bestimmte Flächendehnung nötige Innendruck P bei —60° C um eine Zehnerpotenz größer als bei +23° C. Daraus folgt, daß derselbe bei der theoretischen Höhenberechnung nicht mehr vernachlässigt werden darf. Aus den gewonnenen Innendrücken und Zerreißspannungen berechnet sich der Überdruck eines auf 12 m Dmr. gedehnten Ballones zu etwa 0,8 mm Hg bei +23° C und zu etwa 4 bis 5 mm Hg bei —60° C. Die Bedeutung dieser Tatsache wird ersichtlich, wenn man bedenkt, daß in 30 km Höhe der Luftdruck nur noch 10 mm Hg beträgt.

Aus Bild 2 geht hervor, daß die Dehnbarkeit $\varrho = \varepsilon \frac{4\,D}{P}$ mit sinkender Temperatur stark abnimmt und also gerade die Erscheinung auftritt, die unerwünscht ist. Dadurch wird die Brauchbarkeit von Gummiballonen, falls diese in großer Höhe tatsächlich Temperaturen von —50 bis —60° C annehmen, in Frage gestellt und ihr Versagen kann möglicherweise hierauf beruhen.

Gegen die Annahme, daß die Gummihülle niedere Temperatur annimmt, kann eingewendet werden, daß mit größerer Höhe die Intensität der Sonnenstrahlung zunimmt und die Absorption also größer wird. Die Erwärmung sollte demnach auch größer werden. Dem steht der Umstand entgegen, daß die Dicke des Gummis und damit die Absorption je cm² geringer, dagegen die Oberfläche, die für die Abkühlung maßgebend ist, größer wird. Außerdem wird, wie schon angeführt wurde, die Reflexion an der Oberfläche mit zunehmender Dehnung größer. Zur Klärung dieser Frage müßte die Temperatur der Gummihülle während eines Aufstiegs indirekt gemessen werden. Dies wäre durch Bestimmung des inneren Überdrucks sowie der Temperatur des Wasserstoffes möglich. Zusammen mit der jeweiligen Höhe und der Größe der Füllung könnte der Durchmesser der Ballone berechnet werden. Auf diese Weise wäre es möglich, die Kenntnisse über die Vorgänge im Gummi während eines Aufstieges zu erweitern. Es erscheint daher aussichtsreich, diesen Weg weiter zu verfolgen.

[6]) Piccard, Auf 16000 m. S. 78.

[7]) Regener E., Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre Bd. 22 (1935), S. 258.

[8]) Goetz, Ergebnis der kosm. Physik Bd. III, S. 287.

[9]) S. Gl. (I).

[10]) S. Anmerkung 7.

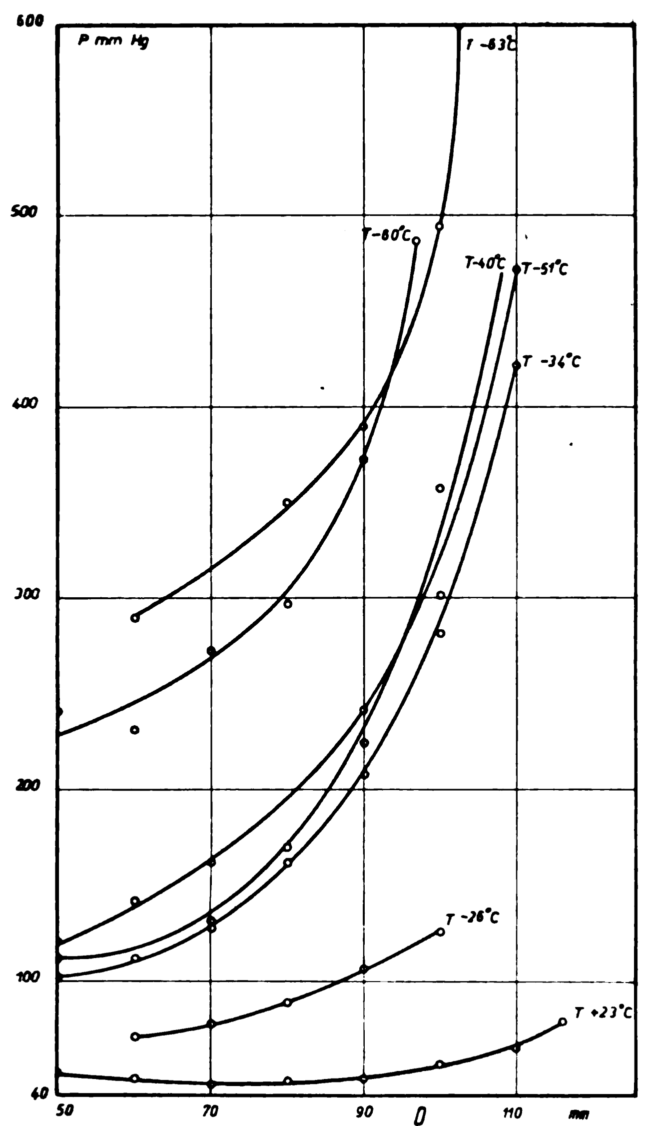


Bild 1. Innendruck P in Abhängigkeit des Durchmessers D für verschiedene Temperaturen.

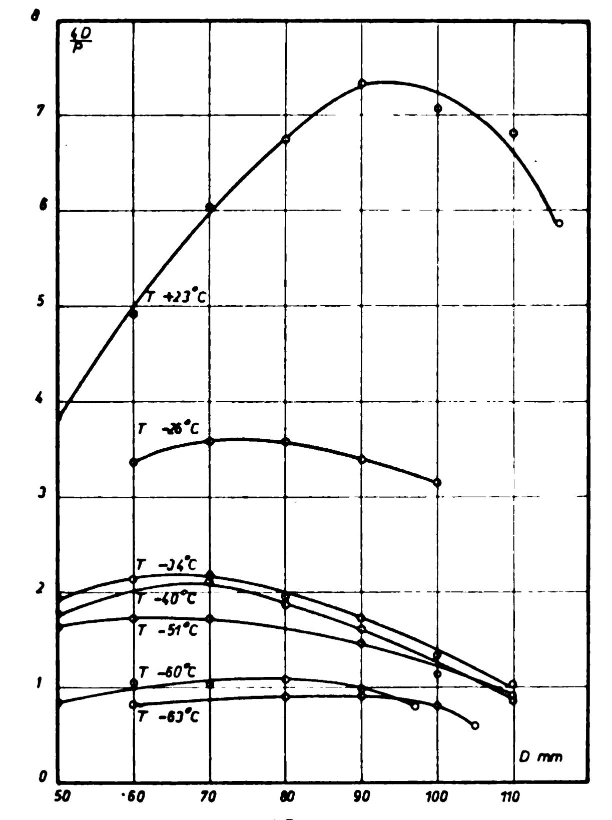


Bild 2. Dehnbarkeit $\varrho = \varepsilon \frac{4D}{P}$ von Ballongummi für verschiedene Temperaturen in Abhängigkeit des Durchmesse s D.

B. Folgerungen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich, daß es bei Gummi nicht möglich ist, die unter 1 bis 4 genannten zerstörenden Einwirkungen zu beseitigen. Es erscheint zur Zeit aussichtslos, mit Gummiballonen in größere Höhen vorstoßen zu wollen, was die seitherigen Erfahrungen auch bestätigen. Aus diesem Grund wurden allenthalben Versuche unternommen, um Gummi durch ein anderes Material zu ersetzen. Dieses neue Material muß, um gegen alle nach den bisherigen Kenntnissen möglichen zerstörenden Einflüsse geschützt zu sein, folgenden Anforderungen genügen:

Der Ballonwerkstoff muß 1. homogen, 2. ultraviolettbeständig, 3. ozonfest und 4. entweder kältebeständig oder vor Kälte schützbar sein. 5. Undehnbares Material muß möglichst dünn sein. Bei dicken Folien müßten die Ballone in praktisch allzu großen Ausmaßen gebaut werden, denn es gilt für die maximal erreichbare Höhe die oben abgeleitete Formel $p_{\min} = 1982 \frac{\tau}{R}$ mm Hg[11]).

In Verfolg dieser Überlegungen wurden von Regener[12]) und Johnson[13]) Versuche gemacht, an Stelle von Gummi Transparentfolien zum Bau von Stratosphärenballonen zu verwenden, denn diese erfüllen ohne weiteres die Anforderungen 1, 2, 3 und 5. Alle diese Versuche scheiterten jedoch. Die erreichten Höhen lagen besonders bei größeren Ballonen meist weit unter den theoretisch berechneten. Außerdem waren die Ballone nach der Landung in kleinste Teile zerrissen. Zur Erklärung wurde angegeben, daß die Ballone infolge inneren Überdrucks und der Feinheit der Folien geplatzt und beim Absturz zerrissen worden wären[13]). Wir erkannten nun, daß es in Wirklichkeit der Einfluß der Kälte war, der zum Mißlingen dieser Versuche führte. Um unsere Erklärung zu begründen, wurden Versuche im Thermostaten gemacht. Diese ergaben, daß Transparentfolien (insbesondere das später verwendete Cuprophan) bis zu Temperaturen von —45° C geschmeidig bleiben, daß sie aber bei weiterer Abkühlung auf —55° C bei der geringsten Berührung wie Glas splittern. Damit war das Versagen dieser Art von Ballonen geklärt, und es handelte sich darum, diese Erscheinung zu bekämpfen.

Der Grundgedanke zur Lösung dieser Schwierigkeit bestand darin, die Sonnenstrahlung zur Heizung der Hülle zu verwenden, indem auf die ungefärbten Folien (wie sie von Regener und Johnson verwendet wurden) ein matter, schwarzer Lack aufgespritzt wurde. Von entscheidender Bedeutung war dabei die Dichte des Lackauftrages. Dieser muß einerseits so groß sein, daß genügende Absorption stattfindet. Es genügt, wenn die Temperatur der Folie um 10 bis 20° C gegenüber der Lufttemperatur erhöht wird. Er darf andererseits nicht zu groß sein, da sonst die im Schatten liegenden Teile des Ballons nicht mehr genügend Strahlung erhalten, infolgedessen kalt werden und brechen. Dies zeigte sich bei den ersten Versuchen. Natürlich wäre es auch möglich, an Stelle des Lackbelages auf farblose Folien gefärbte Folien zu verwenden, doch werden solche mit der richtigen Färbung nicht hergestellt. Das nachträgliche Auftragen von Lack bringt zudem zwei Vorteile: 1. Verschiedene Teile des Ballons können verschieden stark gefärbt und so die Absorption leicht variiert werden. 2. Durch Verwendung von mattem Lack wird die Reflexion stark herabgesetzt. Dieser zweite Vorteil ist nicht zu unterschätzen, da die Folien eine

[11]) S. Gl. (III).
[12]) Nach unveröffentlichten Versuchen 1932.
[13]) Johnson T. H., Cosmic Ray Measurements in Stratosphere. J. F. I. (1937, März) S. 349 bis 354.

hochglänzende Oberfläche haben, die ein erhebliches Reflexionsvermögen aufweist.

Damit waren die Grundlagen für den Bau von Ballonen aus Transparentfolien geschaffen. Der praktischen Verwirklichung standen jedoch große technische Schwierigkeiten entgegen. Es bedurfte jahrelanger Entwicklungsarbeit an zunächst kleinen Ballonen, um die Technik zur Herstellung großer Ballone zu schaffen[14]. Transparentfolien sind im Gegensatz zu Gummi undehnbar. Die Ballone müssen deshalb in großen Ausmaßen gebaut werden, was sowohl beim Bau an sich als auch beim Start Schwierigkeiten mit sich bringt. Erschwerend kommt hinzu, daß die Folien sehr dünn sein müssen und infolgedessen mechanische Beanspruchungen leicht Beschädigungen hervorrufen. Es gelang jedoch, alle diese Schwierigkeiten zu überwinden und brauchbare Ballone herzustellen.

II. Ballone aus Transparentfolien.

A. Herstellungstechnik und Schwärzung.

Da Transparentfolien undehnbar sind, ist es nicht möglich, die Ballone, wie z. B. bei Gummi, aus Kugelsegmenten zusammenzukleben. Man muß den Ballonen vielmehr eine solche Form geben, daß sie in eine Ebene zusammenlegbar und die Klebestreifen gerade Linien sind. Dann ist es möglich, dieselben auf einem Tisch zu kleben, wie es praktischerweise nur gemacht werden kann. Die Ballone wurden deshalb als ebenflächige Körper konstruiert. Dabei mußte zusätzlich verlangt werden, daß sie sich in prallem Zustand möglichst der Kugelform nähern, einerseits um der Beanspruchung der Folien wegen eine günstige Spannungsverteilung, andererseits um ein möglichst kleines Verhältnis Oberfläche zu Volumen zu erhalten. Bild 3 zeigt die Konstruktion eines Ballons von 27 m^3 Inhalt.

Die zur Verwendung kommenden Folien müssen je nach dem Verwendungszweck der Ballone nach verschiedenen Gesichtspunkten ausgewählt werden, was nur von Fall zu Fall entschieden werden kann.

Je nach dem Ausgangswerkstoff unterscheidet man zwei Sorten von Folien[15]: 1. Folien auf Zellulosebasis, aus der sich a) Viskose-, b) Kupferoxyd-, c) Azetat-, d) Nitratfolien ableiten; 2. Folien auf Gelatinebasis. Nitrat- und Gelatinefolien scheiden für unsere Zwecke aus, weil die ersteren nicht in den erforderlichen Abmessungen hergestellt werden und die anderen wasserlöslich sind.

Um größte Höhen zu erreichen (was von uns angestrebt wurde), ist eine möglichst dünne Folie mit genügender Festigkeit erwünscht. Wir verwendeten aus diesem Grund die dünnste in Deutschland hergestellte Kupferoxydfolie Cuprophan, Stärke 10[16], zum Bau unserer Ballone. Die Dicke dieser Folie beträgt nur 0,0065 mm und ihr Gewicht 10 g/m^2. Das Gewicht dieser Folie ist geringer als dasjenige von Gummi, der bis zum Zerreißen gedehnt ist. Diese Tatsache war für uns von besonderer Wichtigkeit, weil das Ballongewicht nach Gl. (II) für das Erreichen größter Höhen sehr wesentlich ist. Die Verwendung einer derartig dünnen Folie brachte jedoch beim Bau sowie beim Start erhebliche Schwierigkeiten mit sich, und es kann gefragt werden, ob es gerechtfertigt war, am Gewicht der Ballone in solchem Maße zu sparen, wo doch bei der praktischen Anwendung das Gewicht der Apparate im allgemeinen einen erheblichen Bruchteil des Ballongewichtes beträgt. Dazu ist folgendes zu bemerken: Die Ballone wurden in erster Linie zu dem Zweck entwickelt, um die Lufttemperatur in 35 bis 40 km Höhe messen zu können. Die Apparatur zur Messung der Lufttemperatur in solchen Höhen kann aber nach einer von Lenz[17] gefundenen Methode sehr leicht (700 bis 1000 g) gebaut werden. Die erreichbare Höhe wird also in diesem Falle im wesentlichen durch das Ballongewicht bestimmt und somit durch die Verwendung einer dünnen Folie ein großer Vorteil erreicht. Für schwerere Apparaturen dagegen

[14] Regener-Eisele, Unveröffentlichte Versuche 1936.
[15] Halama M., Transparentfolien.
[16] Hersteller: Bemberg A.-G., Wuppertal-Oberbarmen.
[17] Lenz E., Arbeit im Druck in Z. Instr.-Kunde.

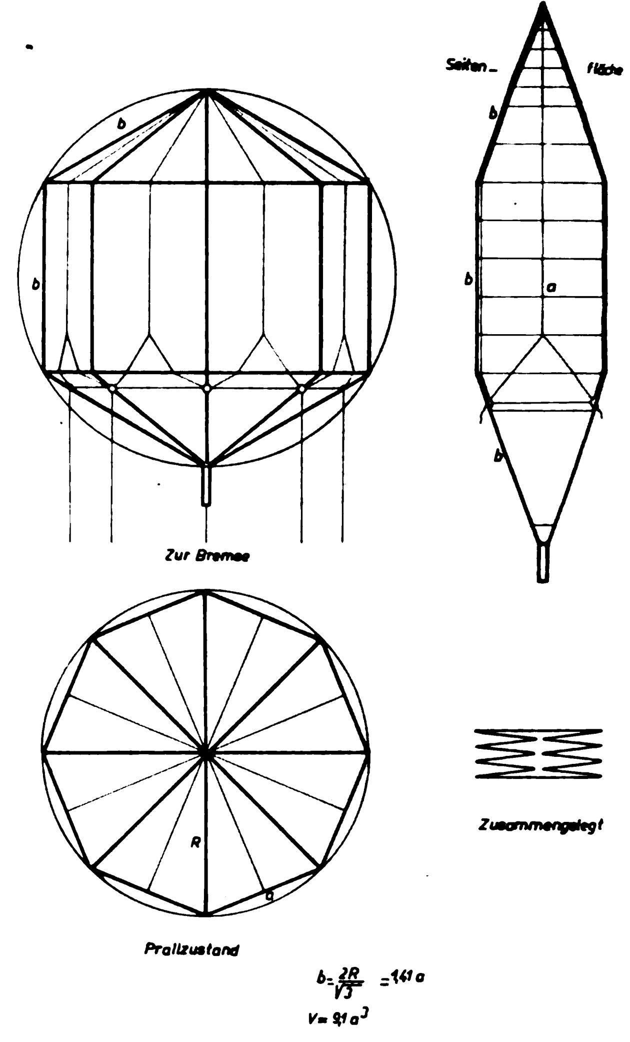


Bild 3. Konstruktion der Ballone von 27 m^3 und 370 m^3 Inhalt.

würde man zweckmäßigerweise die Ballone aus dickeren Folien herstellen.

Die Ballone werden zum Aufstieg ausnahmslos mit Wasserstoff gefüllt. Nun ist die Diffusionsgeschwindigkeit von Gasen durch poröse Wände um so größer, je kleiner ihr Molekulargewicht ist. Infolgedessen könnten bei Wasserstoff wegen seines kleinen Molekulargewichtes größere Diffusionsgeschwindigkeiten möglich sein, und deshalb während des Aufstieges Wasserstoffverluste eintreten. Auf diese Tatsache wurde schon von Regener[18] hingewiesen. Die Größe der Diffusion ist nun je nach dem Verwendungszweck der Ballone mehr oder minder wichtig. Für manche Untersuchungen sind Messungen in einer bestimmten Höhe über eine längere Zeitspanne erwünscht. Mit Ballonen aus Gummi ist dies nur schwer zu erreichen. Ballone aus Transparentfolien haben demgegenüber den Vorteil eines konstanten Volumens und können deshalb in beliebigen Höhen zum Schweben gebracht werden, wenn keine Wasserstoffverluste auftreten. Derartige Ballone müssen aus undurchlässigem Werkstoff gebaut werden. Für Ballone, die große Höhen erreichen sollen ohne auszuschweben, spielt die Diffusion eine untergeordnete Rolle. Der entstehende Auftriebsverlust kann in gewissen Grenzen durch stärkere Füllung ausgeglichen und damit ein vorzeitiges Absinken vermieden werden[19]. Die Diffusionsgeschwindigkeit von Wasserstoff durch Cuprophan, Stärke 10, beträgt 0,114 mg/h cm^2. Zum Vergleich sei angeführt, daß die Diffusionsgeschwindigkeit von Wasserstoff durch schwach gespannten Ballongummi zu 0,18 mg/h cm^2 (Pilotballon Continental) ermittelt wurde.

[18] S. Anmerkung 12.
[19] S. S. 152.



Durch die dünne Folie entweicht also erstaunlicherweise weniger Wasserstoff als durch schwach gespannten Gummi. Die Diffusionsgeschwindigkeiten wurden mittels Wägung an kleinen etwa 3 m³ großen Ballonen (bei Folien) und an Pilotballonen (bei Gummi) bestimmt. Beachtung verdient hierbei die Tatsache, daß sich die Diffusionsgeschwindigkeit mit dem Feuchtigkeitsgrade der Folien ändert[20].

Infolge der außerordentlich geringen Stärke der Folien dürfen dieselben bei der Herstellung der Ballone keinen großen mechanischen Beanspruchungen ausgesetzt werden, um Beschädigungen zu vermeiden. Vor allen Dingen dürfen sie nicht betreten werden. Die Beseitigung dieser Schwierigkeit war für den Bau großer Ballone entscheidend und wurde durch folgenden Kunstgriff erreicht: Mit größer werdendem Volumen wurde die Zahl der Ecken des Ballonpolygons so gesteigert, daß immer eine Seitenfläche (s. Bild 3) auf den 1,80 m breiten Klebetisch gelegt werden konnte. Größere Breiten der Seitenflächen können nicht angewendet werden, weil dann ihre Mitten nicht mehr von beiden Seiten aus mit den Händen erreicht werden können, was bei der Herstellung unbedingt notwendig ist. Der Äquatorschnitt war bei einem 27 m³ großen Ballon ein regelmäßiges Achteck (s. Bild 3), bei einem 250-m³-Ballon ein Vierzehneck und bei einem 1000-m³-Ballon ein Vierundzwanzigeck.

Bei der Konstruktion der Ballone ist die Tatsache zu beachten, daß Viskose- und Kupferoxydfolien quer zur Laufrichtung (d. i. die Richtung, in der der Stoff bei der Herstellung aus der Spaltdüse ausgespritzt wird) eine geringere Festigkeit aufweisen als in Laufrichtung. So hat z. B. ein Viskosestreifen von 0,03 mm Dicke, 100 mm Einspannlänge und 15 mm Breite eine Bruchbelastung von 3,96 kg längs und 3,02 kg quer zur Laufrichtung. Dieser Unterschied, der nach unseren Beobachtungen durch Erwärmung der Folien vergrößert wird, läßt sich auf Grund der molekularen Struktur der Folien erklären. Dieselben bestehen nämlich aus langen, stabförmigen Molekülen, deren Längsachse vorwiegend in der Laufrichtung liegt. Um diese geringe Querfestigkeit von Cuprophan auszugleichen, wurden quer um die Ballone Bänder aus leichtem Cellohermetoband[21]) geklebt. Die Anordnung der Bänder auf einer Seitenfläche ist aus Bild 3 und aus Bild 4 ersichtlich.

Ferner wurde der ganze Ballon mit einem Netz von Tragbändern überklebt, deren Anordnung aus Bild 3 hervorgeht. Dies war wegen der Beanspruchung der dünnen Folie durch die Last und insbesondere beim Start notwendig. Als Werkstoff für diese Tragbänder wurde z. T. Hermetoband aus Leinen[22]), z. T. das leichtere Cellophanklebeband[23]) verwendet. Auf Bild 4 ist gut zu erkennen, wie sich diese Bänder über den Ballon hinziehen und oben an der Spitze zusammenlaufen.

Aus dem Spannungsdiagramm für einen unbelasteten kugelförmigen Ballon[24]) geht hervor, daß an der Spitze sowohl die Quer- als auch die Längsspannungen ihr Maximum erreichen, daß diese also am stärksten beansprucht wird. Aus diesem Grunde wurde die Spitze besonders sorgfältig, für sich gesondert hergestellt und bestand zur Verstärkung aus zwei miteinander verklebten Cuprophanstreifen, deren Laufrichtungen senkrecht zueinander waren. Sie wurde erst nach Fertigstellung des Ballonmittelteils mit diesem verklebt. In ähnlicher Weise wurde der Füllansatz hergestellt und in den Ballon eingefügt. Dieser muß um so größer sein, je größer der Ballon ist, da durch ihn beim Aufsteigen von der Prall- zur Schwebehöhe der überschüssige Wasserstoff entweicht. Bei einem 370 m³ großen Ballon betrug der Durchmesser des Füllansatzes 120 mm.

Um die Füllung der großen Ballone beim Start rasch und ohne Gefahr vornehmen zu können, wurden dieselben mit einem Füllschlauch aus Cuprophan versehen. Dieser führte im Innern vom Füllstutzen bis etwa 2 m unterhalb der Spitze und war an einer Seitenfläche festgeklebt. Sein Durchmesser betrug 7 cm. Unten mündete er in einen engeren stärkeren Cellophanschlauch, an den die Zuleitung von der Wasserstoffflasche gelegt wurde.

Die Schnüre, welche Bremse und Gondel halten, wurden in der Zone des Ballons mit dem Tragnetz verbunden, in der die Querspannungen Null werden. Dies ist zwischen dem 4. und 5. Sechstel des vertikalen Ballondurchmessers der Fall[24]). Liegen die Ansatzstellen tiefer, dann kann der Ballon nicht prall werden. Liegen sie höher, dann treten zusätzliche Beanspruchungen in Querrichtung auf, die infolge der geringeren Querfestigkeit von Cuprophan vermieden werden müssen.

Die Herstellung eines Ballons ging folgendermaßen vor sich: Die erforderlichen Seitenflächen wurden aus dem, in endlosen Bahnen gelieferten, Cuprophan mit 1 cm Überlappung zusammengeklebt[25]) und unter Verwendung eines Schnittmusters auf die genaue Form zugeschnitten. Sodann erfolgte das Aufkleben eines Teils der Trag- und Querbänder. Nachdem die Seitenflächen in der Mitte gefaltet und in der Weise aufeinandergelegt waren, wie Bild 3 zeigt, konnten sie an den Kanten zum Ballon zusammengeklebt werden. In den so weit fertigen Ballon wurden dann die Spitze und der Füllstutzen eingefügt und die restlichen Bänder aufgebracht.

Die fertigen Ballone wurden, auf dem Klebetisch liegend, mit einem Zellulose-Speziallack[26]) bespritzt. Dieser haftete gut auf Cuprophan und gab bei geringem Gewicht eine intensive matte schwarze Färbung. Um einen gleichmäßig feinen Belag zu erzielen, wurde eine Hochdruck-Farbspritzanlage verwendet und außerdem der Lack verdünnt. Der Lack mußte sehr sorgfältig aufgetragen werden. Bei zu dünner Schicht würde zu wenig Strahlung absorbiert, während bei zu dicker Schicht besonders in dem unteren gefalteten Teil des Ballons die hinten liegenden Cuprophanlagen keine Strahlung mehr erhalten würden. Die ersten Versuche mit geschwärzten Ballonen, bei denen der Lackauftrag noch zu dicht war, endeten mit einem vorzeitigen Brechen der Ballone. Bei den erfolgreichen Ballonen betrug die mittels Glühlampe und Photozelle gemessene Gesamtabsorption etwa 25%.

Die Versuchsballone hatten folgende Größen (Konstruktion s. Bild 3):

Volumen	Meridianschnitt	Äquatorschnitt	a	b	Gewicht	Oberfläche	Lackgewicht	Betriebsgewicht
m³	Eck	Eck	m	m	kg	m²	kg	kg/m²
27	6	8	1,71	2,42	1.3	49	0.1	0,026
250	6	14	1,74	4,53	3.73	195	0.45	0,019
370	6	8	3,45	4,85	4,7	260	0,7	0,018

Das Betriebsgewicht für die verwendeten 370 m³ Ballone betrug somit $\tau = 0{,}018$ kg/m², das für größere Ballone wahrscheinlich noch unterschritten werden kann. Damit erhält Gl. (III) folgende Form:

$$p_{min} = \frac{36}{R} \text{ mm Hg} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VI)$$

Diese Höhe ist mit einem Ballon aus Cuprophan 10 mit Radius R maximal erreichbar. Da der Druck in 40 km Höhe nur noch 2 mm Hg beträgt, so müßte der Durchmesser eines Ballons, der in diese Höhe aufsteigen sollte, 36 m betragen. Daraus ist ersichtlich, welch große Dimensionen Ballone haben müßten, die derartige Höhen erreichen sollen. Von uns war der Bau eines 2 bis 3000 m³ großen Ballons geplant, der etwa 35 km hätte erreichen sollen. Um derartige Ballone bauen zu können, wurde eine 30 m lange Halle gebaut, deren Einrichtung in der Hauptsache aus einem 1,80 m breiten, 25 m langen und 1 m hohen Tisch bestand, der, um Beschädigungen des Cuprophans zu vermeiden, sorgfältig mit starkem, glattem Papier überzogen war. Leider konnte der Bau des Ballons infolge Ausbruch des Krieges nicht mehr zur Ausführung gelangen.

[20]) Trillat-Matricon, J. Chemie Phys. Bd. 32 (1935), S. 101 bis 115.
[21]) Hersteller: Lakemeier, Bonn/Rh.
[22]) Hersteller: Lakemeier, Bonn/Rh.
[23]) Hersteller: Kalle & Co., Wiesbaden-Biebrich.
[24]) Piccard, Auf 16000 m. S. 81.

[25]) Klebstoff H 75 der Firma Kalle & Co., Wiesbaden-Biebrich.
[26]) Hersteller: Schmid & Co., Schorndorf.

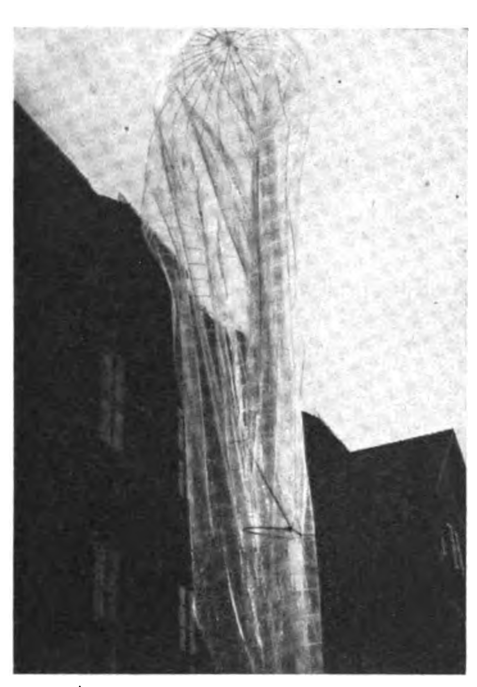


Bild 4. Ungeschwärzter Ballon aus Cuprophan Stärke 10 von 370 m³ Volumen in gefülltem Zustand.

B. Aufstiegstechnik.

Um die Aufstiegsgeschwindigkeit zu begrenzen, wurden alle Ballone mit Bremsen gestartet[28]). Bild 6 zeigt eine solche. Diese bestanden ebenfalls aus Cuprophan und waren infolgedessen sehr leicht (100 bis 200 g). Bei den 27-m³-Ballonen führten vom Tragnetz 8 Schnüre von je 8 m Länge zur Bremse, und von dieser 4 Schnüre von je 4 m Länge zum Barographen. Die Barographen, die mit Rußschreibtrommeln ausgerüstet waren[27]), wurden zum Schutz gegen Kälte in kleine Gondeln nach bewährter Art[28]) eingebaut. Das Gesamtgewicht von Barograph und Gondel betrug etwa 500 g. Bei den 370-m³-Ballonen führten 16 Schnüre zu je 12 m zur Bremse und von da 4 Schnüre zu je 4 m zum Barographen. Die Ballone wurden einzeln gestartet. Tandemaufstiege sind, der Schwierigkeiten beim Start wegen, nicht ausgeführt worden.

Voraussetzungen für einen Aufstieg sind wolkenloses Wetter und kleine Windgeschwindigkeiten, damit der Flugweg nicht zu groß wird. Gerät ein Ballon aus Cuprophan in eine tiefliegende nasse Wolke, dann nimmt er soviel Wasser auf (Cuprophan 10 absorbiert bis zu 10% Wasser), daß er absinkt. Der Start von Ballonen aus Folien ist schwieriger als derjenige von Gummiballonen. Wenn Bodenwind aufkommt, dann fängt sich dieser in den großen Flächen, und die Kräfte auf die Ballonhülle können infolgedessen so groß werden, daß Beschädigungen entstehen. Daher mußte eine Startmethode entwickelt werden, die einen raschen Start gewährleistet. Dies wurde erreicht, indem alle Schnüre, die vom Ballon zur Bremse und von dieser zum Barograph führen, schon bei der Herstellung der Ballone angeknüpft wurden. Durch Aufwickeln auf unterteilte Rollen konnte ein Verschlingen unmöglich gemacht und rasches Abrollen sichergestellt werden. Auf diese Weise gelang es, einen 370-m³-Ballon innerhalb 30 bis 45 min zu starten. Ein solcher Ballon läßt sich samt Bremse auf den äußerst kleinen Raum von 70×70×20 cm zusammenlegen, was für den Transport sehr erwünscht ist. Um Beschädigungen zu vermeiden, wurden die Ballone zum Aufstieg auf Papier ausgelegt und gefüllt. Der Wasserstoff strömt durch den Füllschlauch in die hochgehaltene Spitze und der Ballon hebt sich mit fortschreitender Füllung vom Boden ab, bis er ganz in der Luft schwebt, s. Bild 4 und 5. Nun wird



Bild 5. Geschwärzter Ballon aus Cuprophan Stärke 10 von 370 m³ Volumen während der Füllung. Die Wölbung in der Mitte des Ballons rührt von dem Füllschlauch her.

weiter Wasserstoff eingefüllt bis der gewünschte Auftrieb erreicht ist. Dieser muß so groß sein, daß er nicht durch Diffusion vor dem Erreichen der Maximalhöhe Null wird. Die Diffusionsgeschwindigkeit von Wasserstoff durch Cuprophan 10 beträgt 0,114 mg/h cm². Ein Ballon von 370 m³ Volumen besitzt eine Oberfläche von 260 m². Wenn eine Steigzeit von 3 h und eine mittlere Diffusionsfläche von 150 m² angenommen wird, dann beträgt der Auftriebsverlust 0,6 kg. Bei den Aufstiegen wurde der freie Auftrieb zwischen 0,9 und 4 kg variiert. In einem windstillen Augenblick wird der Ballon losgelassen und schnellt darauf sehr rasch 25 bis 30 m hoch, bis sich die Bremse entfaltet. Dieses anfänglich rasche Hochsteigen ist erwünscht, da dadurch die Möglichkeit gering ist, daß der Ballon durch plötzlich aufkommenden Bodenwind gegen Hindernisse getrieben wird. Um ein Platzen der Ballone zu vermeiden, wurden die Füllansätze offengelassen. Allerdings wird dadurch, da Luft in den Ballon einströmen kann, die erreichbare Höhe etwas geringer, was jedoch bei unseren Versuchen keine Rolle spielte.

III. Ergebnisse.

Von den zahlreichen (über 40) Aufstiegen, die im Laufe der Zeit durchgeführt wurden, sollen hier nur einige herausgegriffen werden. Diese zeigen deutlich das charakteristische



Bild 6. Geschwärzter Ballon aus Cuprophan Stärke 10 von 27 m³ Volumen einige Sekunden nach dem Start. Unter dem Ballon ist die entfaltete Bremse sichtbar. Darunter (nur schwach zu erkennen) die Gondel mit dem Barograph.

[27]) Hersteller: Bosch & Bosch, Freiburg/Brg.

[28]) Regener, E., Beiträge z. Phys. d. fr. Atmosph. Bd. 22 (1936), S. 225.



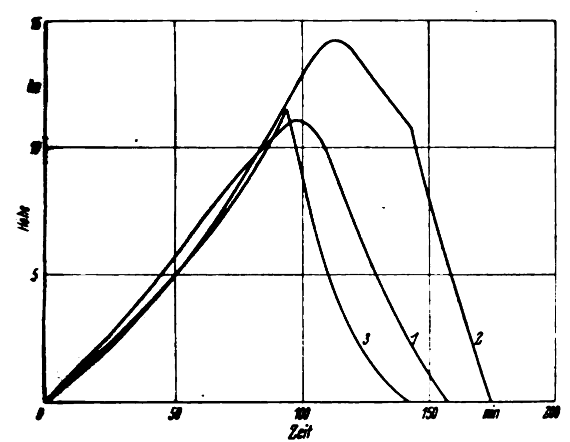


Bild 7. Aufstiegskurven ungeschwärzter Ballone von 27 m³ Inhalt.

Verhalten von ungeschwärzten Ballonen. Zur Beobachtung der Ballone wurde ihr Flug, soweit es die Witterung zuließ, mit einem Theodoliten hoher Vergrößerung verfolgt.

Bild 7 zeigt drei Aufstiegskurven, die mit Ballonen von 27 m³ Volumen aus farblosem Cuprophan 10 erzielt wurden[29]). Die theoretisch erreichbaren Höhen lagen für diese Ballone bei 18 km. Wie man aus den Kurven ersieht, stürzten die Ballone nach gleichmäßigem Aufstieg etwa bis 14,8 km Höhe plötzlich wieder ab. Dies waren die größten mit Ballonen von 27 m³ Volumen erreichten Höhen. Zahlreiche andere Ballone kamen nur 8 bis 12 km hoch. Die Aufstiegskurven lassen sich folgendermaßen erklären. Die Ballone stiegen ganz normal, bis sie in das Gebiet der niedrigen Stratosphärentemperatur (—50 bis —60° C) kamen, das je nach der Wetterlage in verschiedenen Höhen beginnt. Das Cuprophan kühlte sich immer mehr ab, bis dann bei einer bestimmten niedrigen Temperatur die Hülle an einer Stelle brach, der Wasserstoff entwich und der Absturz einsetzte. Je nachdem, ob dieser erste Bruch im oberen oder im unteren Teil der Ballone auftrat, sanken dieselben rascher oder langsamer ab. Wenn beim Absturz der ganze Wasserstoff entwichen war, was nach den Beobachtungen oft nur wenige Minuten dauerte, wurde die ganze Folie durch die Luftströmung vollends abgekühlt und brach infolgedessen an allen Stellen. Dies zeigte sich nach der Landung. Die Ballone waren immer in kleinste Streifen zerrissen, die nur noch durch die Bänder zusammengehalten wurden.

Dasselbe Bild ergab sich bei Aufstiegen mit Ballonen von 370 m³ Volumen aus ungefärbtem Cuprophan[29]). Bild 8 gibt die Aufstiegskurven zweier Ballone wieder, deren theoretische Maximalhöhe etwa 27 km betrug. Aus diesen Kurven ist ersichtlich, daß auch diese Ballone in etwa derselben Höhe (17 km) wie die 27-m³-Ballone brachen und abstürzten. Dies waren die größten Höhen, die mit diesen Ballonen erreicht wurden. Meistens kamen dieselben nur 9 bis 14 km hoch. Auch diese Ballone waren nach der Landung völlig zerrissen, wobei die Zerstörung besonders im unteren Teil auffallend stark war. Anscheinend wird der obere, prall gefüllte Teil doch etwas erwärmt, während dies unten nicht der Fall ist. Dieser Umstand wurde beim Schwärzen berücksichtigt. Der Lackauftrag konnte im oberen Drittel geringer gemacht werden. Daraus ergab sich der Vorteil, daß der untere, gefährdete Teil von mehr Strahlung getroffen wurde. Aus der Tatsache, daß der obere prall gefüllte Teil der Zerstörung weniger ausgesetzt ist als der untere, kann das Höhergehen der 370-m³-Ballone gegenüber den 27-m³-Ballonen erklärt werden. Außerdem ist dabei noch der Umstand zu berücksichtigen, daß je nach der Wetterlage die Temperatur der Stratosphäre höher oder niedriger sein und die Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre verschieden hoch liegen kann. Dadurch wird verständlich, daß das Brechen der Folien das eine Mal in größeren, das andere Mal in geringeren Höhen erfolgte.

[29]) S. Anmerkung 14.

Mit geschwärzten Ballonen von 27 m³ Inhalt wurden insgesamt 7 Aufstiege gemacht. Davon konnten 4 Ballone aufgefunden werden, während 3 Ballone verlorengingen. Von den 4 aufgefundenen Ballonen waren die ersten beiden zu stark geschwärzt. Sie erreichten daher nur 8 bis 10 km Höhe, waren jedoch nach der Landung weit weniger zerrissen als ungeschwärzte Ballone. Von den beiden anderen konnte leider nur ein Barogramm ausgewertet werden, da bei dem einen Ballon, der in Frankreich zur Landung kam, der Barograph zerstört wurde.

Bild 9 zeigt die mit dem geschwärzten Ballon erhaltene Aufstiegskurve. Diese hat einen von den anderen völlig verschiedenen Charakter. Der Aufstieg fand am 13. Dezember 1938 statt mit einem Ballon, dessen theoretische Maximalhöhe 17 km betrug. Dieser stieg mit einer Steiggeschwindigkeit von etwa 110 m/min bis zu einer Höhe von 15,3 km auf, stürzte dann nicht wie die anderen Ballone rasch ab, sondern schwebte etwa 45 min lang in dieser Höhe. Das langsame Absinken ist auf den Wasserstoffverlust durch den offenen Füllansatz zurückzuführen. Erst als bei Sonnenuntergang der Auftrieb infolge der fortschreitenden Abkühlung nachließ, kam der Ballon in rasches Sinken. Das Barogramm konnte nur bis zu diesem Punkte verfolgt werden. Der nachfolgende Teil war infolge Beschädigung der Gondel bei der Landung nicht mehr auswertbar. Die Differenz von rd. 2 km zwischen theoretischer und erreichter Höhe kann durch Wasserstoffverlust (offener Füllansatz) und evtl. Gewichtsvermehrung infolge Wasseraufnahme erklärt werden.

Aus der Fernrohrbeobachtung (die 120 min lang möglich war) des in Frankreich gelandeten Ballons ging einwandfrei hervor, daß derselbe nach etwa 110 min prall wurde.

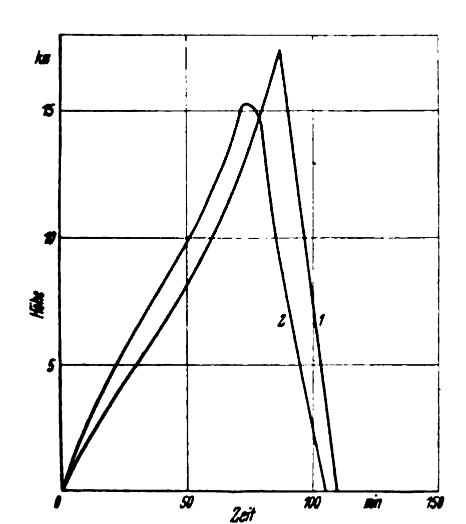


Bild 8. Aufstiegskurven ungeschwärzter Ballone von 370 m³ Inhalt.

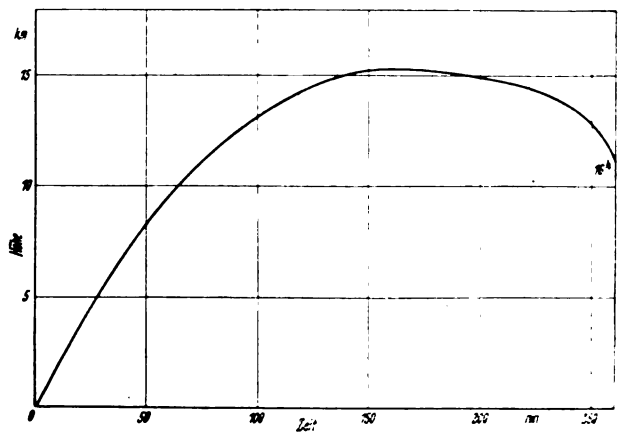


Bild 9. Aufstiegskurve eines geschwärzten Ballons von 27 m³ Inhalt.

Von den drei nicht mehr aufgefundenen Ballonen konnte einer 175 min (Höhenwinkel 63°), der andere 152 min (Höhenwinkel 12°) lang beobachtet werden. Infolge sehr günstiger Beobachtungsverhältnisse wurde bei beiden das Prallwerden mit Sicherheit festgestellt. Dies war nach etwa 120 und 100 min der Fall. Die Aufstiegsgeschwindigkeit konnte auf Grund der Erfahrung aus den Barogrammen aufgefundener Ballone, aus dem freien Auftrieb und den Abmessungen der Bremsen ermittelt werden. Sie betrug bei den beiden Ballonen etwa 130 bis 150 m/min. Die aus dieser Steiggeschwindigkeit und der Zeit errechenbaren Höhen stimmen mit der theoretischen Höhe und den Beobachtungen überein.

Bei dem dritten nicht aufgefundenen Ballon konnte die Beobachtung infolge schlechter Sichtverhältnisse nur 70 min fortgesetzt werden und deshalb kein Schluß auf die erreichte Höhe gezogen werden.

Auf Grund dieser Versuche an 27-m³-Ballonen wurde die günstigste Schwärzung festgestellt und daraufhin ein 370-m³-Ballon mit derselben Schwärzung versehen. Leider konnte das Barogramm dieses Aufstiegs nicht ausgewertet werden, da es infolge unsachgemäßer Behandlung durch den Finder zerstört war. Der Ballon konnte infolge schlechter Sicht nur 60 min beobachtet werden und befand sich zu diesem Zeitpunkt noch im Steigen. Der Zustand der Hülle nach der Landung war nicht mehr feststellbar, da der Ballon erst nach einigen Tagen gefunden wurde und in der Zwischenzeit durch Hagel und Wind zerstört worden war. Ein Schluß auf das Verhalten dieses Ballons und auf die erreichte Höhe konnte infolgedessen nicht gezogen werden. Auf diesem Stand mußten die Versuche infolge Kriegsausbruchs abgebrochen werden, obwohl noch mehrere große Ballone (250 m³, 370 m³ und 1000 m³) zum Aufstieg bereit waren.

Das Nichtauffinden der Ballone (besonders derjenigen, die lange beobachtet werden konnten) spricht dafür, daß dieselben zum Schweben kamen und deshalb lange Flugwege zurücklegten. Auf Grund des Barogramms auf Bild 6 kann angenommen werden, daß diese Ballone ebenfalls erst nach Sonnenuntergang zur Landung kamen. Das Niedergehen konnte deshalb infolge der Dunkelheit nicht mehr beobachtet werden. Da die Ballone infolge ihrer Kleinheit in ungefülltem Zustand und ihrer raschen Zerstörung durch Witterungseinflüsse nach der Landung nur sehr schwer erkannt werden können, ist ihr Nichtauffinden verständlich.

Aus dem Barogramm und den Fernrohrbeobachtungen ergibt sich mit Sicherheit, daß die Mehrzahl der geschwärzten Ballone mit Ausnahme der ersten beiden zum Schweben gekommen ist. Dies war bei den vielen Aufstiegen mit ungeschwärzten Ballonen nicht ein einziges Mal der Fall. Damit ist der Beweis erbracht, daß durch geeignete Schwärzung die Temperatur des Cuprophans höhergehalten werden kann als diejenige der umgebenden Luft. Dadurch wird das Zerbrechen der Ballone in großen Höhen vermieden, da das Cuprophan seine Festigkeit behält. Das Ziel der Arbeit, den Einfluß der Kälte auf Ballone aus Transparentfolien auszuschalten, konnte somit erreicht werden. Auf Grund der vorliegenden Ergebnisse erscheint es möglich, daß mit derartigen Ballonen Höhen über 30 km erreicht werden können.

IV. Zusammenfassung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, an Stelle von Registrierballonen aus Gummi, mit denen nur in einigen seltenen Fällen Höhen über 30 km erreicht wurden, solche aus präparierten Transparentfolien zu verwenden, um damit die Möglichkeit zu schaffen, in größere Höhen vordringen zu können.

1. Die Gründe, die für das Versagen von Gummiballonen verantwortlich gemacht werden können, nämlich Werkstoffehler, Ultraviolett- und Ozoneinfluß sowie Kältewirkung wurden erörtert. Zur Klärung des letzteren Punktes wurden die elastischen Eigenschaften von Gummi bei niederen Temperaturen untersucht. Das Ergebnis war, daß die Dehnbarkeit bei —60° C etwa zehnmal kleiner ist als bei +23°, und infolgedessen der Innendruck in den Ballonen zehnmal größer wird. Es wurde ein Verfahren angegeben, um die Temperatur der Gummihülle während eines Aufstieges zu messen.
2. Das Versagen der Gummiballone führte dazu, nach einem neuen Ballonwerkstoff zu suchen, der durch die genannten Einflüsse nicht zerstört wird. Ein solcher wurde in den Transportfolien gefunden. Das Scheitern der früheren Versuche mit ungefärbten Transparentfolien wurde als die Einwirkung der Kälte erkannt und durch einige Aufstiegskurven belegt.
3. Die Zerstörung der Transparentfolien durch die Kälte konnte mittels Absorption der Sonnenstrahlung vermieden werden. Zu diesem Zweck wurden die Folien mit einem matten schwarzen Lack in geeigneter Dichte bespritzt. Durch diese Maßnahme konnte eine genügende Erwärmung erzielt und dadurch das Brechen der Folien verhindert werden.
4. Die konstruktiven Grundlagen für den Bau von Ballonen aus Folien wurden angegeben. Die besonderen Schwierigkeiten, die sich aus der Verwendung des nur 0,0065 mm dicken Cuprophans ergaben, wurden überwunden. Dies gelang insbesondere durch das Aufbringen eines Tragnetzes auf die Ballone, welches die Kräfte aufnimmt. Dadurch wurde die mechanisch einwandfreie Herstellung größter Ballone ermöglicht.
5. An der Hand eines Barogramms und verschiedener Fernrohrbeobachtungen von Ballonen mit 27 m³ Volumen wurde der Beweis geliefert, daß die geschwärzten Ballone die gestellten Anforderungen erfüllen. Auf Grund dieser Ergebnisse erscheint es möglich, daß mit derartigen Ballonen größeren Volumens in Höhen von 35 bis 40 km vorgestoßen werden kann. Leider war es der äußeren Umstände wegen nicht mehr möglich, Versuche mit großen Ballonen aus geschwärztem Cuprophan anzustellen. Diese sollen, sobald die Möglichkeit dazu wieder besteht, gemacht werden.

Herrn Prof. Dr. F. Schmidt sowie Herrn Dozent Dr.-Ing. habil. E. Lenz spreche ich auch an dieser Stelle meinen Dank für ihre tatkräftige Unterstützung aus. Der Gesellschaft der »Freunde der Technischen Hochschule Stuttgart«, der »Robert-Bosch-Stiftung« sowie Herrn Fabrikant Junghans, Schramberg, danke ich für die großzügige Finanzierung der Arbeit.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 5 SEITE 155 BIS 204 | MÜNCHEN, 28. 5. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 | 28. Mai 1941 | Lfg. 5

Beitrag zur Stabilität dünnwandiger U-Profile mit konstanter Wandstärke im elastischen Bereich.

Von G. Kimm, Berlin-Karlshorst *).

Die Arbeit behandelt das Ausbeulen zentrisch gedrückter Stäbe mit dünnwandigem U-Profil und konstanter Wandstärke. Nach dem sogenannten Energieverfahren wurden zwei (sehr eng im Zusammenhang stehende) Näherungslösungen entwickelt. Außerdem wurde noch die strenge Lösung durchgeführt und die zahlenmäßig ausgewerteten Ergebnisse dieser Lösungen miteinander verglichen. Der Vergleich zeigt, daß mit einem relativ einfachen Näherungsansatz für die Darstellung der Beulfläche selbst bei diesem komplizierten Plattenproblem für die Praxis genügend genaue Werte erzielt werden. Weiterhin wurde mit den Werten der strengen Lösung die Begrenzung des Beulbereiches gegen den Drillknick- bzw. gegen den Biegeknickbereich bestimmt. Aus dem Ergebnis ist zu ersehen, daß das Ausbeulen der Wandungen dünnwandiger U-Profile in praktischen Fällen eintreten kann; somit stellt die gebrachte Theorie des Ausbeulens der Wandungen für U-Profile eine notwendige Erweiterung der bestehenden Stabilitätstheorien (Eulersche Knicktheorie, Drillknicktheorie [1], [2]) dar.

Die Ergebnisse der strengen Lösung wurden mit den aus Beulversuchen ermittelten Werten verglichen. Die Versuchswerte zeigten z. T. eine überraschend gute Übereinstimmung mit den Rechenwerten.

Gliederung.

I. Einleitung.

Druckstäbe mit offenem Profil und geringer Wandstärke, wie sie im Flugzeugbau sehr häufig anzutreffen sind, weisen je nach ihrer Querschnittsgestalt und Schlankheit verschiedene Arten des Instabilwerdens der geraden Gleichgewichtsform auf. Man kann grundsätzlich drei Arten unterscheiden: Biegeknickung, Drillknickung und Beulung.

Die erstgenannte Art (im elastischen Bereich auch Eulerknickung genannt) ist dadurch gekennzeichnet, daß die einzelnen Querschnitte des Stabes gegeneinander parallel verschoben (aber nicht verdreht) werden, wobei der Querschnitt selbst unverformt bleibt. Bei der zweiten Art werden bei gleichfalls unveränderter Querschnittsgestalt die Querschnitte gegeneinander verdreht, womit im allgemeinen eine gleichzeitige Verschiebung der einzelnen Querschnitte verbunden ist. Bei der letztgenannten Art knicken (beulen) die einzelnen Wandungen des Profils unter Verformung des Querschnitts örtlich aus, wobei die Querschnitte weder verschoben noch verdreht werden.

Die Bestimmung der Knickspannungen ist für den Fall der Biegeknickung (Eulersche Knicktheorie) und für den Fall der Drillknickung [1], [2]) bekannt.

Die theoretische Behandlung des Problems der Beulung offener Profile in allgemeingültiger Form, d. h. unabhängig von der Querschnittsgestalt, stößt auf mathematische Schwierigkeiten. Im folgenden wird für die im Flugzeugbau sehr häufig verwendeten dünnwandigen U-Profile mit konstanter Wandstärke auf theoretischem Wege die Bestimmung der Beulspannungen dieser Profile durchgeführt.

II. Verformungs- und Spannungszustand beim Verbeulen.

Wird ein U-Profil mit verhältnismäßig geringer Wandstärke gedrückt, so tritt bei Erreichen einer bestimmten Spannung ein örtliches Ausknicken der Wandungen des Profils ein, das in Anlehnung an das örtliche Ausknicken gedrückter ebener Platten als Beulung bezeichnet wird.

Bei der nach Überschreiten der Stabilitätsgrenze eintretenden Verformung darf angenommen werden, daß die von den Schenkeln und dem Rücken gebildeten Kanten des Profils gerade bleiben, da die Schenkel und der Rücken sich längs dieser Kanten gegen Ausknicken aus ihren Ebenen gegenseitig stützen, Bild 1a. Die übrigen Fasern knicken sinusförmig aus, wobei bei den in Praxis üblichen Stablängen sich mehrere Halbwellen ausbilden. Die Länge der einzelnen Halbwellen ist im Bereich praktischer Verhältnisse von Schenkelbreite zu Rückenbreite für alle Fasern, d. h. sowohl für die des Rückens als auch für die der Schenkel, gleich groß; ferner bleibt bei der Verformung die Querschnittssymmetrie erhalten. Eine anders gestaltete Beulform würde eine stärkere Querschnittsverformung und somit eine größere Formänderungsarbeit bedingen, ist also nach dem Gesetz vom Minimum der Formänderungsarbeit nicht zu erwarten.

Beim Übergang von der ebenen in die ausgebeulte Gleichgewichtsform treten in den von den Schenkeln und dem Rücken gebildeten Kanten innere, durch die gegenseitige

*) Dissertation, Technische Hochschule Berlin. D 83.

[1]) H. Wagner. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25 Jahre T. H. Danzig. Verlag A. W. Kafemann, Danzig 1929.

[2]) R. Kappus. Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 9, S. 444 bis 457.

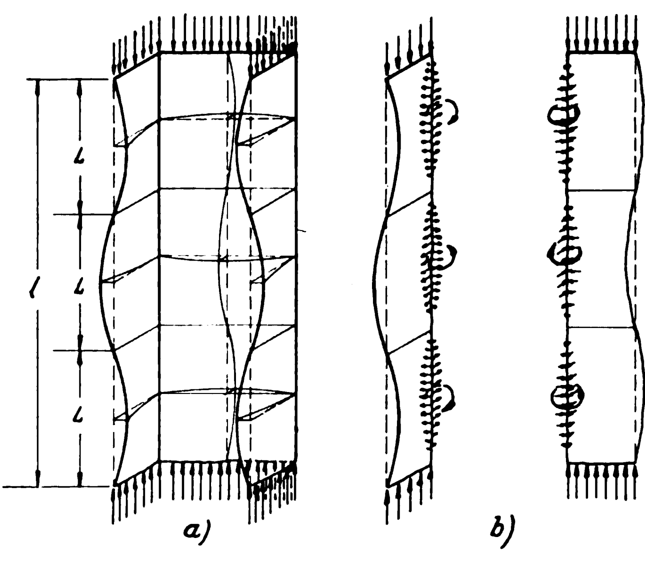


Bild 1.

a) Beulform des gedrückten, an den Enden gelenkig gelagerten U-Profils.

b) Innere Kräfte im Kantenschnitt des ausgebeulten U-Profils. — Die Momente sind der Deutlichkeit halber für jede Beulwelle durch ihre Resultierende dargestellt; sie verlaufen ebenso wie die Querkräfte sinusförmig. —

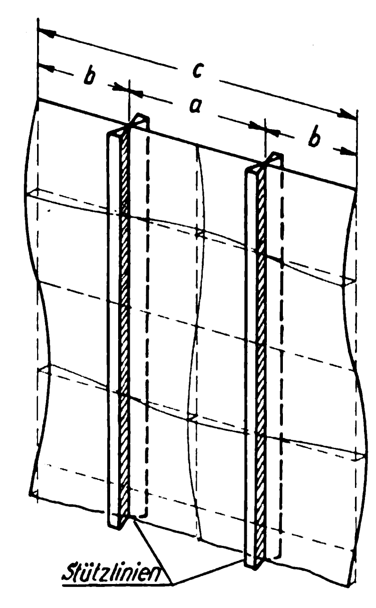


Bild 2. Die dem gedrückten U-Profil hinsichtlich Beulform und Beulfestigkeit äquivalente gedrückte Platte. Die gegenseitige Stützung zwischen den Schenkeln und dem Rücken ist durch eine entsprechende Lagerung ersetzt.

Stützung bedingte Kräfte auf. Auf Grund der zueinander senkrechten Lage der Schenkel zum Rücken wirken diese Kräfte jeweils normal zur Ebene des gestützten und tangential zur Ebene des stützenden Teils, Bild 1b. Die Größe dieser Kräfte ist an jeder Stelle längs der Kante proportional der Größe der Ausbeulung der Schenkel bzw. des Rückens. Ihr größenmäßiger Verlauf über die Kantenlänge ist somit entsprechend dem Verlauf der Ausbeulung sinusförmig; der Richtungssinn der Kräfte wechselt nach jeder Halbwellenlänge. Der Einfluß des in die Rücken- bzw. Schenkelebenen fallenden Teils dieser inneren Kräfte auf die Größe der Knicklast kann als vernachlässigbar angesehen werden. Einmal ist ihre Größe unter der bei Stabilitätsproblemen üblichen Annahme kleiner Ausbiegungen gering, zum andernmal hebt sich die Wirkung dieser Kräfte wegen ihres wechselnden Vorzeichens nahezu auf.

Außer diesen Kräften wirken längs der Kanten noch innere, ebenfalls von der Größe der Ausbeulung abhängige Momente (in Bild 1b für jede Beule zu einer Resultierenden zusammengefaßt dargestellt), die je nach dem Verhältnis von Schenkelbreite zu Rückenbreite entweder den Schenkel stützen und den Rücken belasten oder umgekehrt. Für die Wirkung dieser Momente ist es gleichgültig, in welchem Winkel Schenkel und Rücken zueinander liegen. Unter der obengenannten Vernachlässigung kann man sich also auch die Schenkel in die Ebene des Rückens geklappt denken, sofern man die gegenseitige Stützung zwischen den Schenkeln und dem Rücken durch eine Lagerung (im folgenden kurz als Stützlinie bezeichnet) längs den ursprünglichen Kanten ersetzt (dieses aufgeklappte Profil wird im folgenden als »äquivalente Platte« bezeichnet, s. Bild 2). Von dieser Tatsache wird bei der Durchführung der Näherungslösungen Gebrauch gemacht, da hierdurch die Funktion für die Darstellung der Beulfläche in einfacher Form angeschrieben werden kann.

III. Bestimmung der Beulspannung.

Bezeichnungen (vgl. Bild 3 u. 6).

Für die Durchführung der beiden Näherungslösungen sowie der strengen Lösung werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

a = Breite des Profilrückens,
b = Breite der Profilschenkel,
$c = a + 2b$ = Breite der äquivalenten Platte,
s = Wandstärke des Profils bzw. der äquivalenten Platte,
l = Länge des Profils bzw. der äquivalenten Platte,
$\omega = b/a$ = Verhältnis der Schenkel- zur Rückenbreite (Seitenverhältnis),
$\lambda = \frac{l}{m \cdot c}$ = Verhältnis der Beulenlänge (l/m) zur Plattenbreite,
$\Lambda = l/a$ = Verhältnis der Plattenlänge zur Rückenbreite (Längenverhältnis),
a/s = Verhältnis der Rückenbreite zur Wandstärke (Dünnwandigkeit),
x = Koordinate in Längsrichtung des Stabes bzw. der äquivalenten Platte,
y = Koordinate in der Plattenebene senkrecht zur x-Richtung bzw. Koordinate in der Rückenebene senkrecht zur x-Richtung,
z = Koordinate in der Schenkelebene senkrecht zur x-Richtung,
w, w_a, w_b = Ausbiegungsordinate (senkrecht zur Plattenebene bzw. senkrecht zur Rücken- und Schenkelebene),
$p = \sigma_{Be} \cdot s$ = Belastung der Platte in Längsrichtung (x-Richtung), bezogen auf die Breiteneinheit,
$N = \frac{E \cdot s^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{E \cdot s^3}{10{,}92}$ = Plattensteifigkeit, bezogen auf die Breiteneinheit (Querdehnungszahl $\nu = 0{,}3$ gesetzt).

Voraussetzungen.

Die einzelnen Lösungen werden unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

1. In den betrachteten Bereichen wird bis zum Erreichen der Stabilitätsgrenze elastisches Verhalten des Werkstoffes angenommen (diese Annahme ist erfüllt, da, wie es aus dem Ergebnis zu ersehen ist, bei praktischen Stablängen die Beulspannung unterhalb der Elastizitätsgrenze liegt).
2. Im belastungsfreien Zustand sei die Profilachse vollkommen gerade, sowie Schenkel und Rücken des Profils vollkommen eben.
3. Die Stabenden werden als gelenkig gelagert vorausgesetzt.
4. Die zentrisch angreifende Belastung werde so eingeleitet, daß auch an den Stabenden die Druckspannungen über den Profilumfang konstant sind.

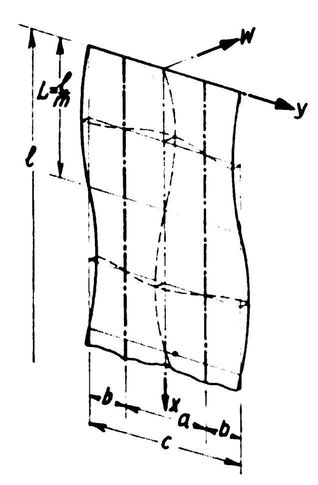


Bild 3. Bezeichnung der geometrischen Abmessungen und der Ordinaten.

1. Allgemeines über die Näherungslösungen.

Die Berechnung der Beulspannung wird zunächst unter Zugrundelegung der Energiegleichung der Platte als Näherungslösung nach dem Ritzschen Verfahren durchgeführt.

Bezeichnet A_i die Differenz zwischen der Formänderungsenergie der ausgebeulten und der ebenen Gleichgewichtsform der unter der kritischen Druckkraft stehenden Platte und A_a die Arbeit dieser kritischen Druckkraft beim Übergang von der ebenen zur ausgebeulten Gleichgewichtslage, so muß, wenn die ausgebeulte Gleichgewichtslage eine stabile sein soll, das Gesamtpotential $A = A_i - A_a$ ein Minimum sein, wobei dieses Minimum wegen der Nebenbedingung $A_i = A_a$ gleichzeitig Null ist. Also:

$$A_i - A_a = \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases}.$$

Mit den Bezeichnungen $N = \dfrac{E \cdot s^3}{12(1-\nu^2)}$ für die Plattensteifigkeit, $-p = -\sigma_{Be} \cdot s$ für die Druckbelastung des Profils (bzw. der äquivalenten Platte), beide bezogen auf die Umfangseinheit des Profils, und w für die Ausbiegungsordinate senkrecht zu den Profilebenen lautet die Energiegleichung in ausgeschriebener Form

$$A = N \int_{x=0}^{l} \int_{y=0}^{c/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \cdot \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right\} \right] \cdot dx \cdot dy - \int_{x=0}^{l} \int_{y=0}^{c/2} p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \cdot dy = \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

Auf die Herleitung[3]) dieser Energiegleichung soll hier nicht eingegangen werden. Es sei nur darauf hingewiesen, daß diese auf den Grundlagen der linearen Plattenstatik entwickelte Energiegleichung nur für dünne Platten Gültigkeit besitzt, und zwar nur dann, wenn die bei Erreichen der Stabilitätsgrenze eintretenden Durchbiegungen w klein im Vergleich zur Dicke der Platte bleiben. Die Gl. (1) kann somit nur zur Ermittlung der kritischen Beullast (deren Bestimmung in dieser Arbeit ausschließlich angestrebt wird) dienen; sie ermöglicht jedoch keine Aussagen über das Verhalten der Platte nach Überschreitung der kritischen Beullast bzw. Beulspannung.

Zur angenäherten Erfüllung der durch Gl. (1) gestellten Minimumforderung wird nun nach dem von Ritz[4]) gegebenen Verfahren für die Funktion w der Beulordinaten ein — die geometrischen Randbedingungen erfüllender — Näherungsansatz von der Form

$$w = X \cdot \sum_{i=1}^{i=n} C_i \cdot Y_i$$

in das Energieintegral eingeführt und der nach Ausführung der Integration gewonnene Ausdruck zum Minimum gemacht. Die Bedingungsgleichungen für das Eintreten eines Minimums $\dfrac{\partial A}{\partial C_i} = 0$ führen auf ein System von n linearen, homogenen Gleichungen für die n Unbekannten C_i, die für die letzteren nur dann von Null verschiedene Werte zulassen, wenn die Koeffiziententdeterminante dieses Gleichungssystems verschwindet. Die also notwendige Nullsetzung der Determinante ergibt die dem gewählten Näherungsansatz entsprechende kritische Spannung.

Der auf Grund einer solchen Näherungslösung ermittelte Wert wird stets höher als der wirkliche Wert der kritischen Spannung sein. Er wird mit letzterem um so besser übereinstimmen, je besser die durch den gewählten Ansatz dargestellte Beulform mit der wirklichen übereinstimmt.

Die Funktionen $X = f(x)$ und $Y_i = f_i(y)$ müssen also so ausgewählt werden, daß die auf Grund physikalischer Anschauung zu erwartende Beulform möglichst gut wiedergegeben wird. Weiterhin müssen die Funktionen Y_i die geometrischen Randbedingungen einzeln erfüllen, damit dies, wie es zur Erfüllung der Minimumforderung notwendig ist, auch die Näherungsfunktion w für jedes beliebige C_i tut. Hingegen brauchen die dynamischen Randbedingungen, z. B. die Bedingungen über das Verschwinden der Kräfte an den freien Rändern der äquivalenten Platte, nicht befriedigt zu werden.

Setzt man gelenkige Lagerung der Stabenden und entsprechend gelenkige Lagerung der gedrückten Ränder der äquivalenten Platte voraus, so müssen

$$\text{für jeden Wert } x \; [w]_{y = \pm a/2} = 0$$

$$\text{und für jeden Wert } y \; [w]_{x = 0 \atop x = l} = 0 \text{ sein.}$$

2. Erste Näherungslösung.

Für die erste Näherungslösung wird der Ansatz

$$w = \sin \frac{m \pi x}{l} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} C_{2k-1} \left(\cos \frac{(2k-1)\pi y}{c} - \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2c} \right) \quad . . . (2)$$

$(m = 1, 2, 3, \ldots, k = 1, 2, 3, \ldots)$ gewählt. Durch diesen Ansatz werden, wie sich durch Einsetzen der Grenzen leicht zeigen läßt, die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Von den nicht unbedingt geforderten dynamischen Randbedingungen werden nur die Bedingung über das Verschwinden der Momente an den gedrückten Rändern, nicht aber die Bedingungen über das Verschwinden der Momente und Querkräfte an den freien Rändern der Platte befriedigt.

Bricht man die Reihe, um die Rechnung nicht zu umfangreich zu gestalten, nach dem zweiten Glied ab, so lautet der Ansatz (2) in ausgeschriebener Form

$$w = \sin \frac{m \pi x}{l} \cdot \left[C_1 \left(\cos \frac{\pi y}{c} - \cos \frac{\pi a}{2c} \right) + \right.$$
$$\left. + C_3 \left(\cos 3 \frac{\pi y}{c} - \cos 3 \frac{\pi a}{2c} \right) \right] \quad (3)$$

Die in Ansatz gebrachten Glieder der Reihe stellen zwei Kosinuslinien mit einer bzw. drei Halbwellen dar, die beide parallel zu ihren Achsen um ein solches Maß verschoben sind, daß die Durchsenkungen w längs der Stützlinie für jedes Glied einzeln Null sind, Bild 4.

Setzt man für die weitere Rechnung zur Abkürzung[5])

$$\frac{m\pi}{l} = \alpha; \quad \frac{\pi}{c} = \beta_1; \quad 3\frac{\pi}{c} = \beta_3; \quad \cos \frac{\pi a}{2c} = \gamma_1 \text{ und}$$

$$\cos 3 \frac{\pi a}{2c} = \gamma_3 \quad (4)-(8)$$

so lautet (3)

$$w = \sin \alpha x \cdot [C_1 \cdot (\cos \beta_1 y - \gamma_1) + C_3 (\cos \beta_3 y - \gamma_3)] \quad (3a)$$

[3]) Über die Herleitung dieser Gleichung s. Nádai, Elastische Platten, S. 268 u. flge. Berlin, Springer 1925.

[4]) W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der math. Physik. Crelles Journal Bd. 135 (1908), S. 1.

[5]) Die Wahl der Zeiger geschah hier wie auch im folgenden mit Rücksicht auf die zweite Näherungslösung.

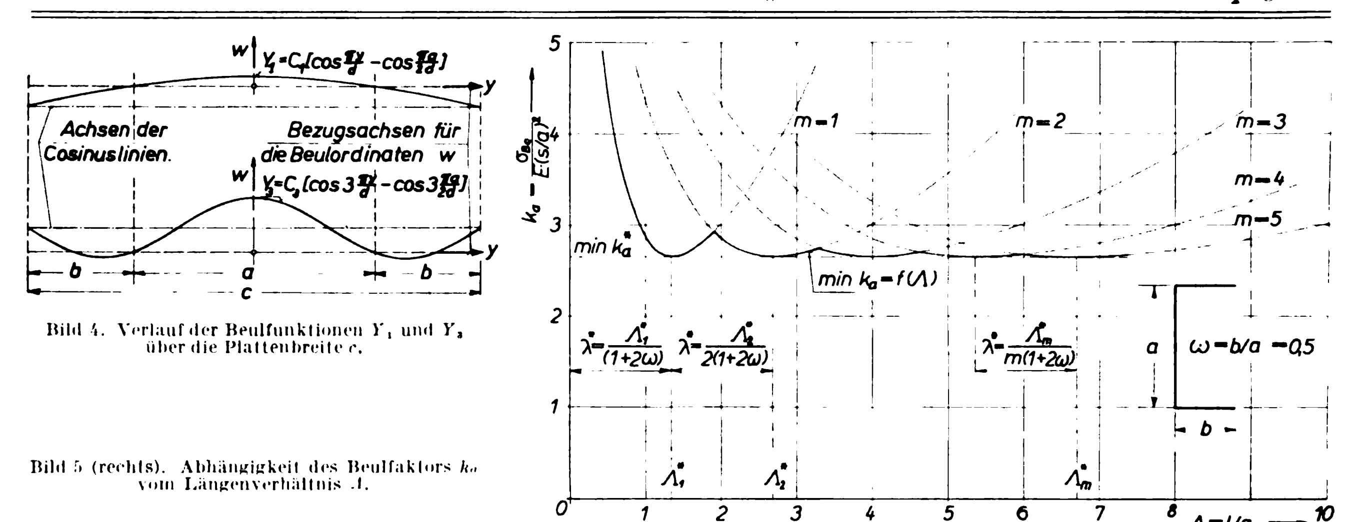


Bild 4. Verlauf der Beulfunktionen Y_1 und Y_3 über die Plattenbreite c.

Bild 5 (rechts). Abhängigkeit des Beulfaktors k_a vom Längenverhältnis Λ.

Führt man mit (3a) die Integration der Energiegleichung (1) durch, so erhält man mit

$$1 - \frac{p}{N}\left(\frac{l}{m\cdot\pi}\right)^2 = r \quad \text{und} \quad \frac{l}{m\cdot c} = \lambda \qquad (9) \text{ und } (10)$$

nach zweckentsprechender Zusammenfassung und Ordnung:

$$\begin{aligned} A^* = {} & r\,[C_1^2\,(0{,}25 - 0{,}63662\cdot\gamma_1 + 0{,}5\,\gamma_1^2) + \\ & + C_1\cdot C_3\cdot(0{,}21221\cdot\gamma_1 - 0{,}63662\cdot\gamma_3 + \gamma_1\cdot\gamma_3) + \\ & + C_3^2\cdot(0{,}25 + 0{,}21221\cdot\gamma_3 + 0{,}5\,\gamma_3^2)] + \\ & + \lambda^2\,[C_1^2\cdot(0{,}5 - 0{,}19099\cdot\gamma_1) + C_1\cdot C_3\,(0{,}57296\cdot\gamma_1 - \\ & - 0{,}19099\cdot\gamma_3) + C_3^2\cdot(4{,}5 - 0{,}57296\cdot\gamma_3)] + \\ & + \lambda^4\cdot[C_1^2\cdot 0{,}25 + C_3^2\cdot 20{,}25] = \\ & = A\cdot\frac{2\,l^3}{m^4\cdot\pi^2\cdot c\cdot N} = \begin{cases}\min\\ 0\end{cases} \qquad (11)\end{aligned}$$

Die Minimumsbedingung $\frac{\partial A}{\partial C_i} = 0$ bzw. $\frac{\partial A^*}{\partial C_i} = 0$ führt zu den beiden folgenden linearen, homogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} & C_1\cdot[r\cdot(0{,}5 - 1{,}27324\,\gamma_1 + \gamma_1^2) + \lambda^2\cdot(1 - 0{,}38197\,\gamma_1) + \lambda^4\cdot 0{,}5] + \\ & C_3\cdot[r\cdot(0{,}21221\,\gamma_1 - 0{,}63662\,\gamma_3 + \gamma_1\,\gamma_3) + \\ & \qquad + \lambda^2\cdot(0{,}57296\,\gamma_1 - 0{,}19099\,\gamma_3)] = 0 \qquad (12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_1\cdot[r\cdot(0{,}21221\,\gamma_1 - 0{,}63662\,\gamma_3 + \gamma_1\,\gamma_3) + \\ & + \lambda^2\cdot(0{,}57296\,\gamma_1 - 0{,}19099\,\gamma_3)] + \\ & C_3\cdot[r\cdot(0{,}5 + 0{,}42441\,\gamma_3 + \gamma_3^2) + \\ & \qquad + \lambda^2\cdot(9 - 1{,}14592\,\gamma_3) + \lambda^4\cdot 40{,}5] = 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

Die notwendige Nullsetzung der Determinante ergibt nach Einführung der Abkürzungen a_{ik}, b_{ik} und c_{ik} nach Zahlentafel 1 sowie den weiteren Abkürzungen u, v und w nach Zahlentafel 2 die quadratische Gleichung:

Zahlentafel 1. Beiwerte a_{ik}, b_{ik} und c_{ik}.

ik	a_{ik}	b_{ik}	c_{ik}
11	$0{,}5 - 1{,}27324\,\gamma_1 + \gamma_1^2$	$1 - 0{,}38197\,\gamma_1$	0,5
13	$0{,}21221\,\gamma_1 - 0{,}63662\,\gamma_3 + \gamma_1\,\gamma_3$	$0{,}57296\,\gamma_1 - 0{,}19099\,\gamma_3$	—
33	$0{,}5 + 0{,}42441\,\gamma_3 + \gamma_3^2$	$9 - 1{,}14592\,\gamma_3$	40,5

Zahlentafel 2. Beiwerte u, v und w.

u	$a_{11}\cdot a_{33} - a_{13}^2$
v	$(a_{11}\cdot b_{33} + b_{11}\cdot a_{33} - 2a_{13}\cdot b_{13}) + \lambda^2\,(a_{11}\cdot c_{33} + c_{11}\cdot a_{33})$
w	$(b_{11}\cdot b_{33} - b_{13}^2) + \lambda^2\cdot(b_{11}\cdot c_{33} + c_{11}\cdot b_{33}) + \lambda^4\cdot c_{11}\cdot c_{33}$

$$r^2\cdot u + r\cdot\lambda^2\cdot v + \lambda^4\cdot w = 0 \quad . \;.\; .\; .\; . \quad (14)$$

Von ihren Wurzeln interessiert nur die mit dem kleinsten negativen Wert für r. Mit diesem erhält man die Knick- oder Beulspannung entsprechend (9) aus:

$$\sigma_{Kr} = \frac{p}{s} = (1 - r)\cdot\frac{N}{s}\cdot\left(\frac{m\cdot\pi}{l}\right)^2 = (1 - r)\cdot\frac{E\cdot s}{10{,}92}\cdot\left(\frac{m\cdot\pi}{l}\right)^2.$$

Setzt man für das Seitenverhältnis die Abkürzung

$$\frac{b}{a} = \omega \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (15)$$

so ergibt die Erweiterung mit $\left(\frac{c}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2\,(1 + 2\,\omega)^2}$ bei Beachtung von (10):

$$\sigma_{Be} = \frac{0{,}9038\cdot(1 - r)}{\lambda^2\cdot(1 + 2\,\omega)^2}\cdot E\cdot\left(\frac{s}{a}\right)^2 \quad . \;.\; .\; . \quad (15\text{a})$$

Setzt man den Ausdruck

$$\frac{0{,}9038\cdot(1 - r)}{\lambda^2\cdot(1 + 2\,\omega)^2} = k_a \quad . \;.\; .\; .\; .\; . \quad (16)$$

so erhält man für die Beulspannung die übliche Form

$$\sigma_{Be} = k_a\cdot E\cdot\left(\frac{s}{a}\right)^2 \quad . \;.\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (17)$$

Der dimensionslose Beiwert k_a, im folgenden kurz als Beulfaktor bezeichnet, gibt die Beziehung zwischen der Beulspannung σ_{Be} einerseits und dem Elastizitätsmodul E und der Dünnwandigkeit a/s andererseits an, wobei unter Dünnwandigkeit das Verhältnis aus der Rückenbreite a und der Wandstärke s des Querschnitts verstanden werden soll. Der Beulfaktor ist seiner Größe nach von den Verhältnissen $\omega = b/a$ und $\lambda = \frac{l}{m\cdot c}$ abhängig. Das erstere ist durch die Profilabmessungen gegeben, das letztere muß durch geeignete Wahl von m so bestimmt werden, daß k_a einen Kleinstwert annimmt.

In Bild 5 ist für ein bestimmtes Seitenverhältnis $\omega = b/a$ der Beulfaktor k_a in Abhängigkeit vom Längenverhältnis $\Lambda = l/a$ für verschieden angenommene Wellenanzahlen m aufgetragen. Die ausgezogene Kurve gibt den für jedes Längenverhältnis Λ möglichen Kleinstwert min k_a an. Man erkennt, daß bei bestimmten Längenverhältnissen Λ^* ein absoluter Kleinstwert min k_a^* auftritt, der für alle Wellenanzahlen m den gleichen Wert besitzt. Man erkennt weiterhin, daß die möglichen Abweichungen des Beulfaktors min k_a vom absoluten Kleinstwert min k_a^* mit zunehmender Wellenanzahl immer kleiner werden. Da nun bei den in Praxis üblichen Längenverhältnissen Λ stets eine größere Anzahl von Wellen auftritt, kann die genannte Abweichung als vernachlässigbar klein angesehen und somit min k_a = min k_a^* gesetzt werden. Unter dieser (für praktische Rechnungen unbedeutenden) Vernachlässigung ist also der Beulfaktor min k_a unabhängig vom Längenverhältnis Λ und somit auch unabhängig von der Stablänge l.

Für die zahlenmäßige Berechnung der Beulfaktoren werden jeweils für ein bestimmtes Seitenverhältnis ω zunächst die γ_i-Werte nach (7) und (8) und hiermit die von λ unabhängigen Beiwerte a_{ik}, b_{ik} und c_{ik} nach Zahlentafel 1 bestimmt. Danach werden die Größen u, v und w nach Zahlentafel 2 für drei oder vier Werte λ berechnet, wobei letztere so angenommen werden, daß sie nach Möglichkeit in der Nähe des wirklichen Wertes $\lambda^* = \Lambda_m/m\,(1 + 2\,\omega)$ liegen. Aus (14) können dann die Werte r und hiermit nach (16) die Beulfaktoren k_a berechnet werden. Trägt man die errechneten k_a-Werte über den zugehörigen Werten λ

auf, so kann man aus der Kurve $k_a = f(\lambda)$ den Kleinstwert min k_a entnehmen.

Die Zahlenrechnung wurde für verschiedene Seitenverhältnisse ω durchgeführt. Die errechneten Werte min k_a (ω) sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt und in Bild 10 über den zugehörigen ω-Werten aufgetragen.

Zahlentafel 3. Zahlenwerte min k_a für verschiedene ω.

ω	0,2	0,3	0,5	0,75	1,0	1,5
min k_a	4,259	4,006	2,660	1,378	0,821	0,382

3. Verbesserte Näherungslösung.

Der in der ersten Näherungslösung gewählte Reihenansatz (vgl. (3)) für die Darstellung des Beulenverlaufs über die Plattenbreite (bzw. über den Profilumfang) enthielt nur Kosinusglieder mit ungerader (1 und 3) Halbwellenanzahl. Im folgenden soll untersucht werden, wie weit die Näherungslösung durch Hinzunahme des Kosinusgliedes mit zwei Halbwellen

$$Y_2 = C_2 \left(\cos 2 \frac{\pi y}{c} - \cos 2 \frac{\pi a}{2c}\right) \quad \ldots \quad (18)$$

das für sich die dynamische Randbedingung über das Verschwinden der Querkräfte an den freien Rändern der Platte erfüllt, verbessert werden kann.

Setzt man zur Abkürzung

$$2 \frac{\pi}{c} = \beta_2 \quad \text{und} \quad \cos 2 \frac{\pi a}{2c} = \gamma_2 \quad (19) \text{ und } (20)$$

so lautet (18)

$$Y_2 = C_2 \cdot (\cos \beta_2 y - \gamma_2) \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Führt man mit dem mit (21) erweiterten Ansatz

$$w = \sin \nu x \, [C_1 \cdot (\cos \beta_1 y - \gamma_1) + C_2 \cdot (\cos \beta_2 y - \gamma_2) + C_3 \cdot (\cos \beta_3 y - \gamma_3)] \quad (22)$$

die Integration in Gl. (1) durch, so erhält man durch Einführung von (9) und (10) nach zweckentsprechender Zusammenfassung und Ordnung:

$$\begin{aligned} A^* = r \cdot [&C_1^2 \cdot (0{,}25 - 0{,}63662 \cdot \gamma_1 + 0{,}5 \cdot \gamma_1^2) + C_2^2 \cdot (0{,}25 + 0{,}5 \cdot \gamma_2^2) + C_3^2 \cdot (0{,}25 + 0{,}21221 \cdot \gamma_3 + 0{,}5 \cdot \gamma_3^2) + \\ &+ C_1 C_2 \cdot (0{,}21221 - 0{,}63662 \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2) + C_1 C_3 \cdot (0{,}21221 \cdot \gamma_1 - 0{,}63662 \cdot \gamma_3 + \gamma_1 \cdot \gamma_3) + C_2 C_3 (0{,}38197 + 0{,}21221 \cdot \gamma_2 + \gamma_2 \cdot \gamma_3)] + \\ &+ \lambda^2 \cdot [C_1^2 \cdot (0{,}5 - 0{,}19099 \cdot \gamma_1) + C_2^2 \cdot 2 + C_3^2 \cdot (4{,}5 - 0{,}57296 \cdot \gamma_3) + C_1 C_2 \cdot (1{,}50667 - 0{,}19099 \cdot \gamma_2) + \\ &+ C_1 C_3 (0{,}57296 \cdot \gamma_1 - 0{,}19099 \cdot \gamma_3) + C_2 C_3 \cdot (3{,}62873 + 0{,}57296 \cdot \gamma_2)] + \\ &+ \lambda^4 \cdot [C_1^2 \cdot 0{,}25 + C_2^2 \cdot 4 + C_3^2 \cdot 20{,}25 + C_1 C_2 \cdot 0{,}84883 + C_2 C_3 \cdot 13{,}75099] = A \cdot \frac{2 l^3}{m^4 \cdot \pi^2 \cdot c \cdot N} = \begin{cases} \min \\ 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (23) \end{aligned}$$

Die Minimumsbedingung $\frac{\partial A}{\partial C_i} = 0$ bzw. $\frac{\partial A^*}{\partial C_i} = 0$ führt mit den Abkürzungen a_{ik}, b_{ik} und c_{ik} nach Zahlentafel 4 auf die drei folgenden linearen homogenen Gleichungen:

$$C_1 \cdot [r \cdot a_{11} + \lambda^2 \cdot b_{11} + \lambda^4 \cdot c_{11}] + C_2 \cdot [r \cdot a_{12} + \lambda^2 \cdot b_{12} + \lambda^4 \cdot c_{12}] + C_3 \cdot [r \cdot a_{13} + \lambda^2 \cdot b_{13} + \lambda^4 \cdot c_{13}] = 0 \quad (24)$$

$$C_1 \cdot [r \cdot a_{12} + \lambda^2 \cdot b_{12} + \lambda^4 \cdot c_{12}] + C_2 \cdot [r \cdot a_{22} + \lambda^2 \cdot b_{22} + \lambda^4 \cdot c_{22}] + C_3 \cdot [r \cdot a_{23} + \lambda^2 \cdot b_{23} + \lambda^4 \cdot c_{23}] = 0 \quad (25)$$

$$C_1 \cdot [r \cdot a_{13} + \lambda^2 \cdot b_{13} + \lambda^4 \cdot c_{13}] + C_2 \cdot [r \cdot a_{23} + \lambda^2 \cdot b_{23} + \lambda^4 \cdot c_{23}] + C_3 \cdot [r \cdot a_{33} + \lambda^2 \cdot b_{33} + \lambda^4 \cdot c_{33}] = 0 \quad (26)$$

Die notwendige Nullsetzung der Determinante der Koeffizienten der C_i ergibt nach Einführung der Abkürzungen A_{ik}, B_{ik} und m_i nach Zahlentafel 5, 6 und 7 für die Bestimmung von r die kubische Gleichung von der Form

$$r^3 \cdot m_1 + r^2 \cdot \lambda^2 \cdot m_2 + r \cdot \lambda^4 \cdot m_3 + \lambda^6 \cdot m_4 = 0 \quad . \quad . \quad (27)$$

Von den Wurzeln interessiert wieder nur die, die für r den kleinsten negativen Wert angibt. Mit diesem erhält man nach (15a) die Beulspannung oder nach (16) den Beulfaktor k_a.

Die zahlenmäßige Auswertung der verbesserten Näherungslösung erfordert erheblich mehr Rechenarbeit als die der ersten Näherungslösung. Es werden zunächst die γ_i-Werte nach (7), (8) und (20) und hiermit die von λ unabhängigen Beiwerte a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} und A_{ik} nach dem Schema der Zahlentafel 4 und 5 bestimmt. — Man beachte dabei, daß die Werte a_{ik}, b_{ik} und c_{ik} mit den Zeigern 11, 13 und 33 mit den gleichen Werten der ersten Lösung übereinstimmen. — Für verschiedene Werte λ werden dann die Beiwerte B_{ik} und m_i ermittelt, Zahlentafel 6 und 7. Mit letzteren ergibt die Lösung von (27) und (16) die Größe der Beulfaktoren k_a, mit denen wieder auf graphischem Wege die Kleinstwerte min k_a bestimmt werden.

Zahlentafel 5. Beiwerte A_{ik}.

11	$a_{22} \cdot a_{33}$		$- a_{23} \cdot a_{23}$	
12	$\cdot b_{33}$	$+ a_{33} \cdot b_{22}$	$- \cdot 2 b_{23}$	
13	$\cdot c_{33}$	$+ \cdot c_{22}$	$- \cdot 2 c_{23}$	
14	$b_{22} \cdot b_{33}$		$- b_{23} \cdot b_{23}$	
15	$\cdot c_{33}$	$+ b_{33} \cdot c_{22}$	$- \cdot 2 c_{23}$	
16	$c_{22} \cdot c_{33}$		$- c_{23} \cdot c_{23}$	
21	$a_{13} \cdot a_{23}$		$- a_{12} \cdot a_{33}$	
22	$\cdot b_{23}$	$+ a_{23} \cdot b_{13}$	$- \cdot b_{33}$	$- a_{33} \cdot b_{12}$
23	$\cdot c_{23}$	$+ \cdot c_{13}$	$- \cdot c_{33}$	$- \cdot c_{12}$
24	$b_{13} \cdot b_{23}$		$- b_{12} \cdot b_{33}$	
25	$\cdot c_{23}$	$+ b_{23} \cdot c_{13}$	$- \cdot c_{33}$	$- b_{33} \cdot c_{12}$
26	$c_{13} \cdot c_{23}$		$- c_{12} \cdot c_{33}$	
31	$a_{12} \cdot a_{23}$		$- a_{13} \cdot a_{22}$	
32	$\cdot b_{23}$	$+ a_{23} \cdot b_{12}$	$- \cdot b_{22}$	$- a_{22} \cdot b_{13}$
33	$\cdot c_{23}$	$+ \cdot c_{12}$	$- \cdot c_{22}$	$- \cdot c_{13}$
34	$b_{12} \cdot b_{23}$		$- b_{13} \cdot b_{22}$	
35	$\cdot c_{23}$	$+ b_{23} \cdot c_{12}$	$- \cdot c_{22}$	$- b_{22} \cdot c_{13}$
36	$c_{12} \cdot c_{23}$		$- c_{13} \cdot c_{22}$	

Die Zahlenrechnung wurde für die gleichen Seitenverhältnisse ω wie bei der ersten Näherungslösung durchgeführt. Die errechneten Werte für die Beulfaktoren min k_a sind in Zahlentafel 8 eingetragen; die Funktion min $k_a = f_2(\omega)$ ist in Bild 10 wiedergegeben.

Zahlentafel 6. Beiwerte B_{ik}.

B	i 1	i 2	i 3
1 k	$b_{11} + \lambda^2 \cdot c_{11}$	$A_{12} + \lambda^2 \cdot A_{13}$	$A_{14} + \lambda^2 \cdot A_{15} + \lambda^4 \cdot A_{16}$
2 k	$b_{12} + \lambda^2 \cdot c_{12}$	$A_{22} + \lambda^2 \cdot A_{23}$	$A_{24} + \lambda^2 \cdot A_{25} + \lambda^4 \cdot A_{26}$
3 k	$b_{13} + \lambda^2 \cdot c_{13}$	$A_{32} + \lambda^2 \cdot A_{33}$	$A_{34} + \lambda^2 \cdot A_{35} + \lambda^4 \cdot A_{36}$

Zahlentafel 7. Beiwerte m_i.

m_1	$a_{11} \cdot A_{11}$	$+ a_{12} \cdot A_{21}$	$+ a_{13} \cdot A_{31}$			
m_2	$\cdot B_{12}$	$+ \cdot B_{22}$	$+ \cdot B_{32}$	$+ B_{11} \cdot A_{11}$	$+ B_{21} \cdot A_{21}$	$+ B_{31} \cdot A_{31}$
m_3	$\cdot B_{13}$	$+ \cdot B_{23}$	$+ \cdot B_{33}$	$+ \cdot B_{12}$	$+ \cdot B_{22}$	$+ \cdot B_{32}$
m_4				$\cdot B_{13}$	$+ \cdot B_{23}$	$+ \cdot B_{33}$

Zahlentafel 4. Beiwerte a_{ik}, b_{ik} und c_{ik}.

ik	a_{ik}	b_{ik}	c_{ik}
11	$0{,}5 - 1{,}27324 \cdot \gamma_1 + \gamma_1^2$	$1 - 0{,}38197 \cdot \gamma_1$	0,5
12	$0{,}21221 - 0{,}63662\, \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2$	$1{,}50667 - 0{,}19099 \cdot \gamma_2$	0,84883
13	$0{,}21221 \cdot \gamma_1 - 0{,}63662 \cdot \gamma_3 + \gamma_1 \cdot \gamma_3$	$5{,}57296 \cdot \gamma_1 - 0{,}19099\, \gamma_3$	0
22	$0{,}5 - \gamma_2^2$	4	8
23	$0{,}38197 + 0{,}21221 \cdot \gamma_2 + \gamma_2 \cdot \gamma_3$	$3{,}62873 + 0{,}57296 \cdot \gamma_2$	13.751
33	$0{,}5 + 0{,}42441 \cdot \gamma_3 + \gamma_3^2$	$9 - 1{,}14592 \cdot \gamma_3$	40,5

Zahlentafel 8. Zahlenwerte min k_a für verschiedene ω.

ω	0,2	0,3	0,5	0,75	1,0	1,5
min k_a	4,211	4,001	2,659	1,377	0,815	0,380

4. Die strenge Lösung.

Die Werte der in III, 2 und 3, gebrachten Näherungslösungen stellen nur die unter dem jeweils gewählten Näherungsansatz möglichen Kleinstwerte dar. Sie werden von den wirklichen Kleinstwerten, den sog. strengen Werten, mehr oder weniger abweichen, je nachdem die Abweichung der durch den gewählten Ansatz wiedergegebenen Beulfläche von der naturgegebenen mehr oder weniger groß ist. Strenge Werte erhält man jedoch nur durch einen Ansatz, der neben den Randbedingungen (sowohl den geometrischen als auch dynamischen) auch die Differentialgleichung $N \cdot \Delta\Delta w = -p \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ der elastischen Fläche einer ausgebeulten Platte erfüllt. In dieser Gleichung bedeuten, wie vorher, N die Plattensteifigkeit und $-p$ die Druckbelastung des Profils, beide bezogen auf die Umfangseinheit desselben, sowie das Symbol $\Delta\Delta$ die Abkürzung für den Differentialausdruck

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Die Differentialgleichung, deren Herleitung hier übergangen werden soll, kann entweder direkt durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen für ein kleines prismatisches Element der Platte (Nádai[6])) oder aus der Energiegleichung (1) durch Bildung der ersten Variation als die sog. Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems (Kirchhoff[7]), Reißner[8])) gewonnen werden. Ihr liegen also die gleichen Voraussetzungen zugrunde wie der Energiegleichung, und somit gilt für sie auch die gleiche Einschränkung bezüglich der Aussage über das Verhalten der Platte oberhalb der kritischen Druckbelastung.

a) Lösung für beliebige Seitenverhältnisse ω. Zur Durchführung der strengen Lösung wird das U-Profil in die Rückenplatte und in die beiden Schenkelplatten zerlegt, die sämtlich an den gedrückten Rändern als gelenkig gelagert sowie längs den Stützlinien als fest aufgelagert und elastisch eingespannt anzusehen sind. Verschiebungen in der Plattenebene sind an keinem der Ränder behindert. Für die drei Platten müssen somit folgende Randbedingungen erfüllt werden[9]).

Für Rücken- und Schenkelplatte müssen für jeden Wert y

$$\Big[w_a\Big]_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \text{ und } m_x = -N \cdot \left[\frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \quad \ldots (28) \text{ u. } (29)$$

bzw. für jeden Wert z

$$\Big[w_b\Big]_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \text{ und } m_x = -N \cdot \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2}\right]_{\substack{x=0\\x=l}} = 0 \quad \ldots (30) \text{ u. } (31)$$

6) Nádai, Elastische Platten. S. 233. Berlin, Springer 1925.
7) Kirchhoff, Crelles Journal (1850), S. 51.
8) Reißner, Z. angew. Math. u. Mech. (1925), S. 475.
9) Da die Querschnittsverformung des Profils symmetrisch erfolgt, werden die Randbedingungen nur für eine Profilhälfte angeschrieben.

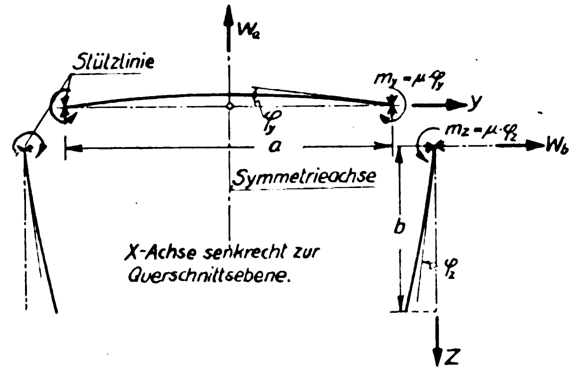


Bild 6. Festlegung der Bezeichnungen für das zerlegte U-Profil.

sein. Weiterhin müssen für jeden Wert x für die Rückenplatte

$$\Big[w_a\Big]_{y=\frac{a}{2}} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (32)$$

sowie für die Schenkelplatte

$$\Big[w_b\Big]_{z=0} = 0, \quad m_z = -N\left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right]_{z=b} = 0 \quad \ldots (33) \text{ u. } (34)$$

und

$$q_z = -N\left[\frac{\partial^3 w_b}{\partial z^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2\,\partial z}\right]_{z=b} = 0 \quad \ldots (35)$$

sein. Da bei eintretender Verbeulung der rechte Winkel zwischen Schenkel und Rücken längs der Stützlinie erhalten bleibt, müssen ferner die geometrische Zusammenhangsbedingung $\Big[\varphi_y\Big]_{y=\frac{a}{2}} = \Big[\varphi_z\Big]_{z=0}$ oder

$$\left[\frac{\partial w_a}{\partial y}\right]_{y=\frac{a}{2}} - \left[\frac{\partial w_b}{\partial z}\right]_{z=0} = 0 \quad \ldots \ldots (36)$$

sowie auch die dynamische Zusammenhangsbedingung $\Big[m_y\Big]_{y=\frac{a}{2}} = \Big[m_z\Big]_{z=0}$ oder

$$-N \cdot \left[\frac{\partial^2 w_a}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2}\right]_{y=\frac{a}{2}} + N \cdot \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right]_{z=0} = 0 \quad \ldots (37)$$

erfüllt werden.

Mit diesen Rand- bzw. Zusammenhangsbedingungen ergibt die Integration der Differentialgleichung $N\Delta\Delta w = -p \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ die kritische Spannung oder Beulspannung. Setzt man den für die Rücken- und Schenkelplatte gleich großen Wert $\dfrac{p}{N} = \varrho^2$, so lautet mit den Bezeichnungen nach Bild 6 die Differentialgleichung in ausgeschriebener Form für die Rückenplatte

$$\frac{\partial^4 w_a}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_a}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_a}{\partial y^4} + \varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2} = 0 \quad \ldots (38)$$

und für die Schenkelplatte

$$\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2\,\partial z^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial z^4} + \varrho^2 \cdot \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} = 0 \quad \ldots (39)$$

Die Beulflächen werden nach Reißner[10]) durch die Ansätze

$$w_a = Y \cdot \sin\frac{m_a \pi x}{l} \text{ und } w_b = Z \cdot \sin\frac{m_b \pi x}{l} \quad (40) \text{ u. } (41)$$

dargestellt, die beide den Randbedingungen für die gedrückten Ränder ((28) bis (31)) genügen. Die Funktionen $Y = f(y)$ und $Z = f(z)$ sind so zu bestimmen, daß die Rand- bzw. Zusammenhangsbedingungen (32) bis (37) erfüllt werden. Die noch offene Anzahl der Sinushalbwellen m_a bzw. m_b (= 1, 2, 3 usw.) wird noch später so festgelegt, daß die Beulspannung einen Kleinstwert annimmt. Damit jedoch die Zusammenhangsbedingung (36) $\Big[\varphi_y\Big]_{y=\frac{a}{2}} = \Big[\varphi_z\Big]_{z=0}$ für jede Stelle x erfüllt werden kann, muß die Wellenanzahl für beide Platten gleich sein. Setzt man also $m_a = m_b = m$ und weiter zur Abkürzung

$$\frac{m \cdot \pi}{l} = \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

so erhält man durch Einführung von (40) in (38) für die Funktion Y die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Y}{d y^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 Y}{d y^2} + \lambda^2(\lambda^2 - \varrho^2) \cdot Y = 0 \quad \ldots (43)$$

und entsprechend aus (39) mit (41)

$$\frac{d^4 Z}{d z^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 Z}{d z^2} + \lambda^2(\lambda^2 - \varrho^2) \cdot Z = 0 \quad \ldots (44)$$

10) Reißner, Über die Knicksicherheit ebener Bleche. Zentralbl. Bauverw. (1909), S. 93.

Mit dem üblichen Ansatz

$$Y = e^{\beta y} \quad \text{bzw.} \quad Z = e^{\beta z} \qquad (45) \text{ u. } (46)$$

erhalt man für (43) und (44) gemeinsam die charakteristische Gleichung:

$$(\beta^2 - \alpha^2)^2 = \alpha^2 \varrho^2.$$

Mit den Wurzeln

$$\beta_1 = \sqrt{\alpha(\varrho + \alpha)} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \sqrt{\alpha(\varrho - \alpha)} \qquad (47) \text{ u. } (48)$$

sind sodann die allgemeinen Lösungen von (43) und (44)

$$Y = A_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 \cdot y + A_2 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 \cdot y + A_3 \cdot \cos \beta_2 \cdot y + A_4 \cdot \sin \beta_2 \cdot y \qquad (49)$$

$$Z = B_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 \cdot z + B_2 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 \cdot z + B_3 \cdot \cos \beta_2 \cdot z + B_4 \cdot \sin \beta_2 \cdot z \qquad (50)$$

Beachtet man, daß aus Symmetriegründen A_2 und A_4 Null werden, so erhält man unter Einbeziehung von (49) und (50) aus (40) und (41)

$$w_1 = \sin \alpha x \, (A_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 y + A_3 \cdot \cos \beta_2 \cdot y) \qquad (51)$$

$$w_2 = \sin \alpha x \, (B_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 z + B_2 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 \cdot z + B_3 \cdot \cos \beta_2 \cdot z + B_4 \cdot \sin \beta_2 \cdot z) \qquad (52)$$

Für die Bestimmung der sechs Integrationskonstanten ergeben sich aus den Rand- bzw. Zusammenhangsbedingungen (32) bis (37) die folgenden sechs linearen homogenen Gleichungen.

Aus (32): $A_1 \cdot \operatorname{Cos} \frac{\beta_1 a}{2} + A_3 \cdot \cos \frac{\beta_2 a}{2} = 0$

(33): $B_1 + B_3 = 0$

(34): $B_1 \cdot \delta \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 b + B_2 \cdot \delta \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 b - B_3 \cdot \gamma \cdot \cos \beta_2 b - B_4 \cdot \gamma \cdot \sin \beta_2 b = 0$

(35): $B_1 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 b + B_2 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 b + B_3 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \sin \beta_2 b - B_4 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \cos \beta_2 b = 0$

(36): $A_1 \cdot \beta_1 \cdot \operatorname{Sin} \frac{\beta_1 a}{2} - A_3 \cdot \beta_2 \cdot \sin \frac{\beta_2 a}{2} - B_2 \cdot \beta_1 - B_4 \cdot \beta_2 = 0$

(37): $A_1 \cdot \beta_1^2 \cdot \operatorname{Cos} \frac{\beta_1 a}{2} - A_3 \cdot \beta_2^2 \cdot \cos \frac{\beta_2 a}{2} - B_1 \cdot \beta_1^2 + B_3 \cdot \beta_2^2 = 0.$

In diesen Gleichungen wurden zur Abkürzung die sich aus (47) und (48) ergebenden Zusammenhänge

$$\beta_1^2 - (2 - \nu) \cdot \alpha^2 = \beta_2^2 + \nu \alpha^2 = \gamma \qquad (53)$$

und

$$\beta_2^2 + (2 - \nu) \cdot \alpha^2 = \beta_1^2 - \nu \alpha^2 = \delta \qquad (54)$$

gesetzt.

Aus den obenstehenden Gleichungen erhält man nach der leicht durchzuführenden Elimination der Konstanten A_1, A_3 und B_2 folgendes Gleichungssystem:

$$B_1 \left(\beta_1 \cdot \operatorname{Tg} \frac{\beta_1 a}{2} + \beta_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_2 a}{2}\right) - B_3 \cdot \beta_1 - B_4 \cdot \beta_2 = 0 \qquad (55)$$

$$B_1 (\delta \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 b + \gamma \cdot \cos \beta_2 b) + B_3 \cdot \delta \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 b - B_4 \cdot \gamma \cdot \sin \beta_2 b = 0 \qquad (56)$$

$$B_1 (\gamma \cdot \beta_1 \cdot \operatorname{Sin} \beta_1 b - \delta \cdot \beta_2 \cdot \sin \beta_2 b) + B_3 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \operatorname{Cos} \beta_1 b - B_4 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \cos \beta_2 b = 0 \qquad (57)$$

Setzt man für die weitere Rechnung

$$\frac{\beta_1 a}{2} = \xi \quad \text{und} \quad \frac{\beta_2 a}{2} = \eta \qquad (58) \text{ u. } (59)$$

so ist mit (15)

$$\beta_1 \cdot b = 2 \omega \xi \quad \text{und} \quad \beta_2 \cdot b = 2 \omega \eta \qquad (60) \text{ u. } (61)$$

Weiterhin ist mit

$$\left(\frac{2 l}{m \cdot \pi \cdot a}\right)^2 = \left(\frac{2}{\alpha \cdot a}\right)^2 = \psi \qquad (62)$$

nach (53) und (54)

$$\gamma \cdot \frac{a^2}{4} = \eta^2 + \frac{\nu}{\psi} \quad \text{und} \quad \delta \cdot \frac{a^2}{4} = \xi^2 - \frac{\nu}{\psi} \qquad (63) \text{ u. } (64)$$

Nach Einführung dieser Abkürzungen ergibt die Nullsetzung der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (55) bis (57) die transzendente Gleichung

$$\left[\eta^2 \cdot \psi + \nu\right]^2 \cdot \left[\operatorname{tg} 2 \omega \eta \cdot \left\{\frac{\xi}{\eta} (\operatorname{Tg} 2 \omega \xi + \operatorname{Tg} \xi) + \operatorname{tg} \eta\right\} - 1\right] -$$
$$- \left[\xi^2 \cdot \psi - \nu\right]^2 \cdot \left[\operatorname{Tg} 2 \omega \xi \cdot \left\{\frac{\eta}{\xi} (\operatorname{tg} 2 \omega \eta + \operatorname{tg} \eta) + \operatorname{Tg} \xi\right\} + 1\right] -$$
$$- \left[\eta^2 \cdot \psi + \nu\right] \cdot \left[\xi^2 \cdot \psi - \nu\right] \cdot \left[\frac{2}{\operatorname{Cos} 2 \omega \xi \cdot \cos 2 \omega \eta}\right] = 0 \qquad (65)$$

Weiterhin erhält man bei Beachtung von (42), (58), (59) und (62) aus den Wurzeln (47) und (48) der charakteristischen Gleichung

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{2}{\psi} \quad \text{und} \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{a \cdot \varrho}{\sqrt{\psi}} \qquad (66) \text{ u. } (67)$$

Die letzte Gleichung ergibt mit

$$\varrho^2 = \frac{p}{N} = \frac{10{,}92}{E \cdot s^2} \cdot \sigma_{Kr}$$

für die Beulspannung

$$\sigma_{Kr} = \frac{\psi}{10{,}92} \cdot (\xi^2 + \eta^2)^2 \cdot E \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^2 \qquad (68)$$

Setzt man den Ausdruck

$$\frac{\psi}{10{,}92} (\xi^2 + \eta^2)^2 = k_a \qquad (69)$$

so erhält man wieder für die Beulspannung die übliche Form

$$\sigma_{Kr} = k_a \cdot E \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^2 \qquad (70)$$

Zur Berechnung des Beulfaktors k_a nach Gl. (69) müssen ξ und η so bestimmt werden, daß sie die Gl. (65) und (66) erfüllen; hierbei ist, durch geeignete Wahl von m, ψ so anzunehmen, daß $k_a = \min$ wird.

Im allgemeinen erfolgt die Lösung in der Form, daß für verschiedene, geeignet gewählte Werte ψ und ξ die zugehörigen Werte η einmal nach Gl. (65) und zum andernmal nach Gl. (66) bestimmt werden. Die erste Gleichung ergibt eine Kurvenschar $\eta = f_1 (\xi, \psi = \text{const})$, wie sie in Bild 7 dargestellt ist. Die zweite Gleichung stellt eine Hyperbelschar $\eta = f_2 (\xi, \psi = \text{const})$ mit den Winkelhalbierenden $\eta = \pm \xi$ als Asymptoten und $\xi = \pm \sqrt{\frac{2}{\psi}}$ als Scheitelpunkte dar. Die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurven $\eta = f_1 (\xi, \psi = \text{const})$ und $\eta = f_2 (\xi, \psi = \text{const})$ mit jeweils gleichem Parameter ψ sind die Wurzeln der beiden Gl. (65) und (66). Diese ergeben für die verschiedenen Werte ψ nach (69) die Beulfaktoren k_a, mit denen auf graphischem Wege aus der Kurve $k_a = f(\psi)$ der Kleinstwert $\min k_a$ bestimmt wird.

Dieser absolute Kleinstwert stellt genau genommen nur für solche ausgezeichneten Längenverhältnisse $\Lambda^* = l/a$ eine strenge Lösung dar, für die der Quotient $\Lambda/\sqrt{\psi}$ immer einem ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$ entspricht. Da jedoch bei den praktisch in Frage kommenden Stablängen — wie es bereits bei der Näherungslösung gezeigt wurde — die Abweichungen der für beliebige Längenverhältnisse auftretenden Kleinstwerte $\min k_a$ vom absoluten Kleinstwert nur sehr gering sind, kann letzterer auch für jeden praktischen Wert Λ als hinreichend streng angesehen werden.

Die direkte Bestimmung der Funktionen $\eta = f_1 (\xi, \psi = \text{konst.})$ gestaltet sich sehr schwierig, da die implizite Funktion (65) nicht nach einer der Veränderlichen η oder ξ aufgelöst werden kann. Man geht daher so vor, daß man Gl. (65) zunächst nach ψ auflöst und die Kurvenschar $\psi = f(\xi, \eta = \text{const})$ mit η als Parameter bestimmt. Legt man durch diese Kurvenschar die zur Abszisse parallelen Geraden $\psi = \text{const}$, so kann man aus den Schnittpunkten die zu den verschiedenen $\psi = \text{const}$ gehörenden Werte η und ξ entnehmen und damit die Kurvenschar $\eta = f_1 (\xi, \psi = \text{const})$ zeichnen, Bild 8.

Führt man die Abkürzungen

$$\operatorname{tg} 2 \omega \eta \cdot \left\{\frac{\xi}{\eta} (\operatorname{Tg} 2 \omega \xi + \operatorname{Tg} \xi) + \operatorname{tg} \eta\right\} - 1 = u \qquad (71)$$

$$\operatorname{Tg} 2 \omega \xi \cdot \left\{\frac{\eta}{\xi} (\operatorname{tg} 2 \omega \eta + \operatorname{tg} \eta) + \operatorname{Tg} \xi\right\} + 1 = v \qquad (72)$$

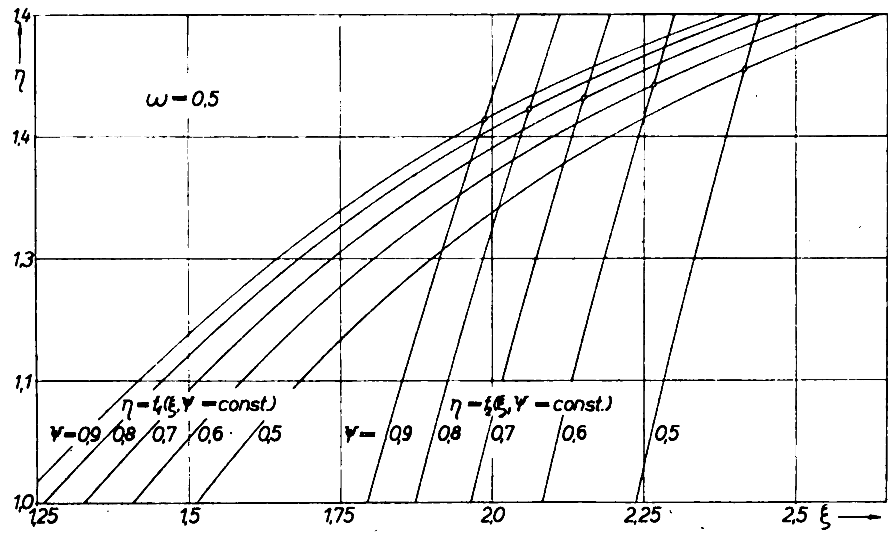


Bild 7. Kurvenschar $\eta = f_1(\xi, \psi = \text{const})$ nach Gl. (65) und Hyperbelschar $\eta = f_2(\xi, \psi = \text{const})$ nach Gl. (66).

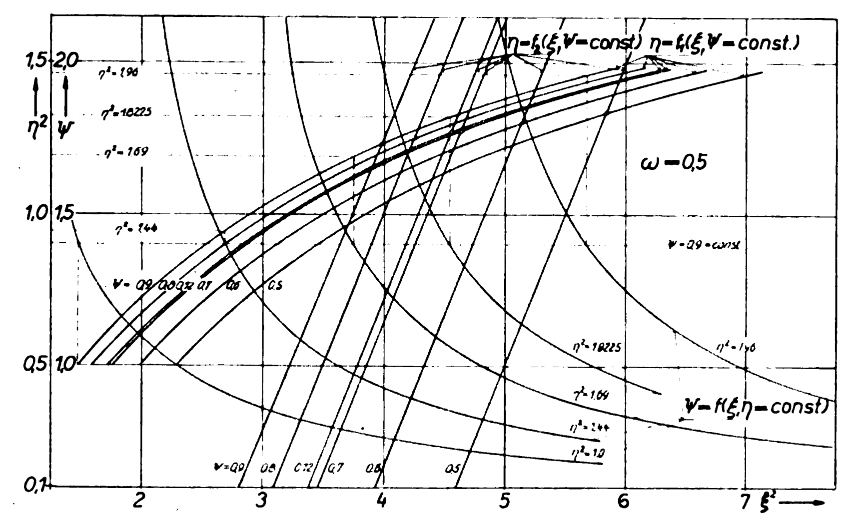


Bild 8. Kurvenscharen $\psi = f(\xi, \eta = \text{const})$, $\eta = f_1(\xi, \psi = \text{const})$ und $\eta = f_2(\xi, \psi = \text{const})$ nach den Gl. (65), (66) und (75).

$$\frac{2}{\operatorname{Cos} 2\,\omega\,\xi \cdot \cos 2\,\omega\,\eta} = w \qquad (73)$$

ein, so ergibt die Auflösung von Gl. (65) nach ψ die in ψ quadratische Gleichung

$$\psi^2\,[\eta^4 \cdot u - \xi^4 \cdot v - \eta^2 \cdot \xi^2 \cdot w] + \psi \cdot 2\,\nu\,[\eta^2 \cdot u + \xi^2 \cdot v - (\xi^2 - \eta^2) \cdot w/2] + \nu^2\,[u - v + w] = 0 \qquad (74)$$

Ihre beiden Wurzeln sind ($\nu = 0{,}3$ gesetzt):

$$\psi = 0{,}3\,\frac{\eta^2\,(u + w/2) + \xi^2\,(v - w/2) \pm (\eta^2 + \xi^2) \cdot \sqrt{(w/2)^2 + u \cdot v}}{-\eta^4 \cdot u + \xi^4 \cdot v + 2\,\eta^2 \cdot \xi^2 \cdot w/2} \quad . \; . \; . \; (75)$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu nehmen, daß ψ stets einen positiven Wert erhält (für solche Argumente $2\,\omega\,\eta$, für die $\operatorname{tg} 2\,\omega\,\eta > 0$ ist, gilt also immer das positive, im andern Fall das negative Vorzeichen).

Da die Größen ξ und η in den Gl. (66) und (69) in der 2. Potenz auftreten, ist es zweckmäßig, in der graphischen Rechnung die lineare Maßstabseinheit für die Quadrate von ξ und η zu wählen, d. h. ψ und η^2 in Abhängigkeit von ξ^2 aufzutragen. Die Hyperbeln (66) erscheinen dann als winkelhalbierende Geraden, die die Abszisse bei $\xi^2 = 2/\psi$ schneiden; ferner erhält man durch die Schnittpunkte der Kurvenschar nach (65) und der Geradenschar nach (66) gleich die Quadrate von ξ und η.

Die Zahlenrechnung für die strenge Lösung, die sich weitaus umfangreicher gestaltet als die der beiden Näherungslösungen, wurde nur für den Bereich praktisch interessierender Seitenverhältnisse ω durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 9 zusammengestellt. Der Verlauf der Funktion $\min k_a = f_3(\omega)$ ist aus Bild 10 zu ersehen.

Zahlentafel 9. Zahlenwerte $\min k_a$ für verschiedene ω.

ω	0,375	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
$\min k_a$	3,615	2,628	1,352	0,800	0,531	0,375

b) **Lösung für den Sonderfall, daß die Momente längs der Stützlinie $m_y = m_z = 0$ werden.** Die aus den beiden Näherungslösungen ermittelten Kurven $\min k_a = f_1(\omega)$ und $\min k_a = f_2(\omega)$ weisen für das Seitenverhältnis $\omega = 0{,}382$ bzw. $\omega = 0{,}379$ den gleichen Wert für $\min k_a$ auf wie für das Seitenverhältnis $\omega = 0$, d. h. wie für die an allen vier Rändern gelenkig gelagerte Platte. Dies zeigt, daß für diesen Fall die der Ausbiegung proportionalen Momente $m_y = m_z$ längs der Stützlinie Null sind. Für dieses Seitenverhältnis, für das die beiden Näherungslösungen die obenstehenden Werte ergeben, soll im folgenden noch der strenge Wert bestimmt werden.

Für den Sonderfall $\left[m_y\right]_{y=\frac{a}{2}} = \left[m_z\right]_{z=0} = 0$ geht die Zusammenhangsbedingung (37) über in die beiden Bedingungen

$$\left[\frac{\partial^2 w_a}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w_a}{\partial x^2}\right]_{y=\frac{a}{2}} = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial z^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}\right]_{z=0} = 0 \quad . \; . \; . \; (76) \text{ u. } (77)$$

Mit den aus (32) bis (36) folgenden Gleichungen (vgl. S. 161), die noch einmal angeschrieben werden, ergeben sich somit

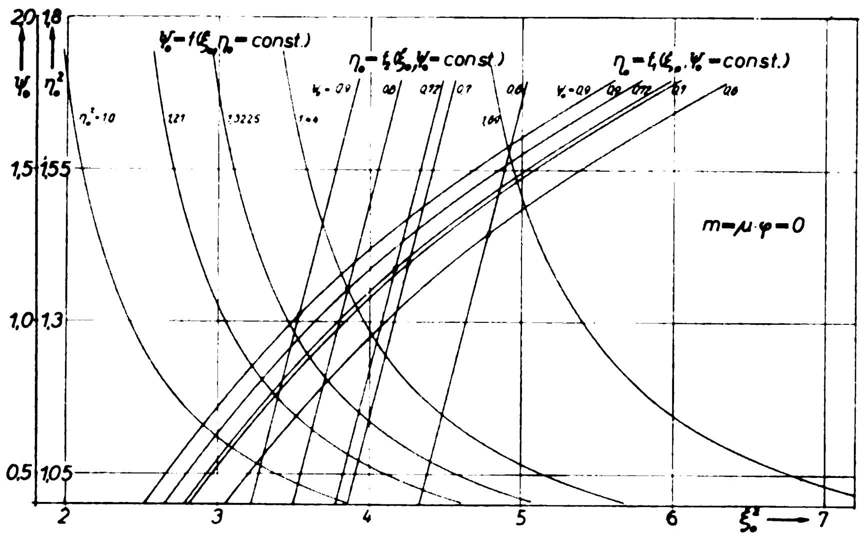


Bild 9. Kurvenscharen $\psi_0 = f(\xi_0, \eta_0 = \text{const})$, $\eta_0 = f_1(\xi_0, \psi_0 = \text{const})$ und $\eta_0 = f_2(\xi_0, \psi_0 = \text{const})$.

aus (76) und (77) mit den Ansätzen (49) und (50) die folgenden Gleichungen:

$$A_1 \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{\beta_1 a}{1} + A_3 \cdot \cos\frac{\beta_2 a}{2} = 0 \quad \ldots \quad (78)$$

$$B_1 - B_3 = 0 \quad \ldots \quad (79)$$

$$B_1 \cdot \delta \cdot \mathrm{Cos}\,\beta_1 b + B_2 \cdot \delta \cdot \mathrm{Sin}\,\beta_1 b - B_3 \cdot \gamma \cdot \cos\beta_2 b - B_4 \cdot \gamma \cdot \sin\beta_2 b = 0 \quad (80)$$

$$B_1 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \mathrm{Sin}\,\beta_1 b + B_2 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \mathrm{Cos}\,\beta_1 b + B_3 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \sin\beta_2 b - B_4 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \cos\beta_2 b = 0 \quad (81)$$

$$A_1 \cdot \beta_1 \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{\beta_1 a}{2} - A_3 \cdot \beta_2 \cdot \sin\frac{\beta_2 a}{2} - B_2 \cdot \beta_1 - B_4 \cdot \beta_2 = 0 \quad (82)$$

$$A_1 \cdot \beta_1^2 \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{\beta_1 a}{2} - A_3 \cdot \beta_2^2 \cdot \cos\frac{\beta_2 a}{2} = 0 \quad \ldots \quad (83)$$

$$B_1 \cdot \beta_1^2 - B_3 \cdot \beta_2^2 = 0 \quad \ldots \quad (84)$$

Durch Elimination von B_3 aus (79) und (84) erhält man:

$$B_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 0.$$

Schaltet man den nicht interessierenden Fall $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 0$ (unbelastete Platte) aus, so muß $B_1 = 0$ und damit nach (79) auch $B_3 = 0$ sein. Die Gl. (78) und (83) ergeben nach Elimination von A_3

$$A_1 \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2) \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{\beta_1 a}{2} = 0.$$

Da für alle Argumente $\mathrm{Cos}\,\frac{\beta_1 a}{2} \neq 0$ ist, muß wegen $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ (vgl. oben) $A_1 = 0$ sein. Somit ist nach (78)

$$A_3 \cdot \cos\frac{\beta_2 a}{2} = 0.$$

Da bereits $A_1 = 0$ ist, ergibt $A_3 = 0$ die triviale Lösung ($A_3 = A_1 = 0$ — ebene Gleichgewichtsform der Rückenplatte); also muß

$$\cos\frac{\beta_2 a}{2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \beta_2 \cdot a = n \cdot \pi \quad \ldots \quad (85)$$

sein ($n = 1, 2, 3$ usw.). Mit Gl. (85) kann später das gesuchte Seitenverhältnis ω bestimmt werden.

Bei Berücksichtigung von $A_1 = B_1 = B_3 = 0$ lauten die restlichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} B_2 \cdot \delta \cdot \mathrm{Sin}\,\beta_1 b \quad - B_4 \cdot \gamma \cdot \sin\beta_2 b &= 0 \\ B_2 \cdot \gamma \cdot \beta_1 \cdot \mathrm{Cos}\,\beta_1 b - B_4 \cdot \delta \cdot \beta_2 \cdot \cos\beta_2 b &= 0 \\ -A_3 \cdot \beta_2 - \quad B_2 \cdot \beta_1 \quad - B_4 \cdot \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Nullsetzung der Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ergibt:

$$\frac{\delta}{\gamma} = \sqrt{\frac{\beta_1 \cdot \mathrm{tg}\,\beta_2 b}{\beta_2 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_1 b}} \quad \ldots \quad (86)$$

Erweitert man (86) mit $a \cdot \omega$, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\beta_1 \cdot a \cdot \omega = \xi_0, \quad \beta_2 \cdot a \cdot \omega = \eta_0 \quad \text{und} \quad (\alpha \cdot a \cdot \omega)^2 = 1/\psi_0 \quad \ldots \quad (87),\ (88)\ \text{u.}\ (89)$$

unter Einbeziehung von (53) und (54)

$$\frac{\xi_0^2 \cdot \psi_0 - \nu}{\eta_0^2 \cdot \psi_0 + \nu} = \sqrt{\frac{\xi_0 \cdot \mathrm{tg}\,\eta_0}{\eta_0 \cdot \mathrm{Tg}\,\xi_0}}$$

und daraus:

$$\psi_0 = 0{,}3\, \frac{1 + \sqrt{\xi_0 \cdot \mathrm{tg}\,\eta_0/\eta_0 \cdot \mathrm{Tg}\,\xi_0}}{\xi_0^2 (+) \eta_0^2 + \xi_0 \cdot \mathrm{tg}\,\eta_0/\eta_0 \cdot \mathrm{Tg}\,\xi_0} \quad \ldots \quad (90)$$

Weiterhin erhält man aus den Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\xi_0^2 - \eta_0^2 = 2/\psi_0 \quad \text{und}$$
$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = 2\,\alpha \cdot \varrho \cdot a^2 \cdot \omega^2 = 2\,\omega\,\sqrt{10{,}92 \cdot k_a/\psi_0} \quad (91)\ \text{u.}\ (92)$$

Unter Einbeziehung von (85) und (88) ergibt die letzte Gleichung durch Umformung:

$$k_a = \frac{(\xi_0^2 + \eta_0^2)^2 \cdot \psi_0}{43{,}68 \cdot \omega^2} = 0{,}226 \cdot \psi_0 \cdot \left[n \cdot \frac{\xi_0^2 + \eta_0^2}{\eta_0} \right]^2 \quad (93)$$

Wie leicht zu ersehen ist, ist für die Bildung des Kleinstwertes $\min k_a$ in Gl. (93) $n = 1$ zu setzen.

Die wertmäßige Bestimmung von k_a (bzw. $\min k_a$) aus den Gl. (90), (91) und (93) erfolgt in der gleichen Weise wie im vorangegangenen Abschnitt. Ist der Beulfaktor $\min k_a$ ermittelt, so kann mit dem zu $\min k_a$ gehörenden Wert $\min \eta_0$ das gesuchte Seitenverhältnis ω wie folgt bestimmt werden. Aus den Gl. (85) und (88) erhält man

$$\min \eta_0 = \beta_2 \cdot a \cdot \omega = n \cdot \pi \cdot \omega$$

oder, da $n = 1$:

$$\omega = \frac{\min \eta_0}{\pi} \quad \ldots \quad (94)$$

Die Rechnung ergab für das gesuchte Seitenverhältnis $\omega = 0{,}375$ und für den zugehörigen Beulfaktor $\min k_a = 3{,}615$. Diese Werte sind ebenfalls in Zahlentafel 9 eingetragen und für die Darstellung der Kurve $\min k_a = f_3(\omega)$ benutzt worden.

5. Diskussion der Ergebnisse.

Die Bestimmung der Zahlenwerte erfolgte für die Näherungslösungen für die Seitenverhältnisse von $\omega = 0$ bis $\omega = 1{,}5$ und für die strenge Lösung nur für den praktisch brauchbaren Bereich $\omega = 0{,}375$ bis $1{,}5$ (vgl. Zahlentafel 3, 8 und 9). Um den Vergleich der Ergebnisse der drei Lösungen anschaulich zu gestalten, sind die Kurven $\min k_a = f(\omega)$ für alle drei Lösungen in einem gemeinsamen Schaubild, Bild 10, dargestellt. Wie aus diesem Schaubild zu ersehen ist, weisen die drei Lösungen voneinander nur wenig unterschiedliche Werte auf.

Die durch die zweite Näherungslösung gegenüber der ersten erzielten Wertverbesserungen sind in den einzelnen

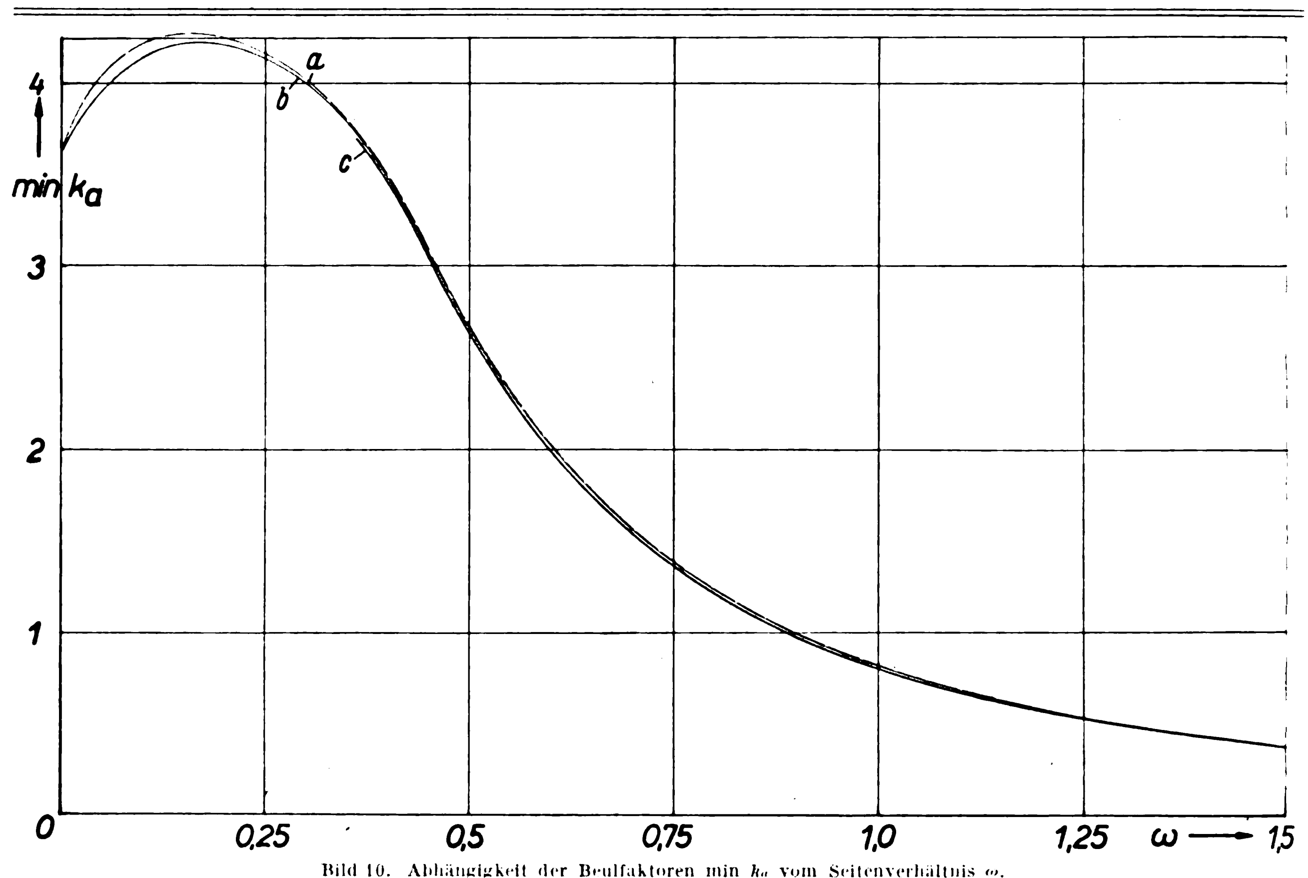


Bild 10. Abhängigkeit der Beulfaktoren min k_a vom Seitenverhältnis ω.
a) min $k_a = f_1(\omega)$ (erste Näherungslösung). b) min $k_a = f_2(\omega)$ (verbesserte Näherungslösung), c) min $k_a = f_3(\omega)$ (strenge Lösung).

Bereichen ω verschieden, da naturgemäß die Verbesserung in der Darstellung der Beulfläche durch das Kosinusglied mit gerader Halbwellenanzahl (Gl. (21)) nicht für jedes Seitenverhältnis ω gleich groß ist. Die geringste Abweichung tritt bei $\omega = 0{,}75$ auf; sie liegt hier außerhalb der Rechengenauigkeit. Bei kleineren und größeren Seitenverhältnissen wird der Unterschied zwar größer, überschreitet jedoch nicht 1,1%. Diese geringe Verbesserung scheint nicht den erheblichen Mehraufwand an Rechenarbeit, der durch die Hinzunahme des Kosinusgliedes nach (21) bedingt ist, zu rechtfertigen. Es ist jedoch zu beachten, daß der Fehler der ersten Näherungslösung bezüglich der strengen Lösung als größten Wert nur etwa 2,6% (für das Seitenverhältnis $\omega = 1$) erreicht und somit eine wesentliche Verbesserung der ersten Näherungslösung durch die Verbesserung des Lösungsansatzes überhaupt nicht erzielt werden kann. Für das obengenannte Seitenverhältnis besitzt auch die verbesserte Näherungslösung den größten Fehler in bezug auf die strenge Lösung, und zwar in der Höhe von 1,9%. Dieser Fehler kann für praktische Rechnungen als bedeutungslos angesehen werden, da er von den Fehlern überdeckt wird, die durch die Schwankungen der übrigen, die Beulfestigkeit des U-Profils bestimmenden Größen (E, s, a) bedingt sind.

Aus dieser Gegenüberstellung der Näherungslösungen und der strengen Lösung kann man folgern, daß das Ritzsche Verfahren für das vorliegende, durch die Vielzahl der vorzuschreibenden Randbedingungen kompliziert gestaltete, Plattenproblem bereits durch den einfachen Näherungsansatz der ersten Lösung praktisch genügend genaue Werte ergibt. Die Verbesserung, die durch den erweiterten Näherungsansatz erzielt wurde, ist nur vom lösungstechnischen Standpunkt aus von Bedeutung; praktisch ist sie bedeutungslos. Weiterhin kann man aus diesem Vergleich den Schluß ziehen, daß das Ritzsche Verfahren auch bei nicht einfachen Plattenproblemen — zumindest bei solchen, die mit den hier behandelten verwandt sind — gute Werte ergibt, und zwar auch dann, wenn die zur Lösung angesetzten Näherungsfunktionen nicht sämtliche Randbedingungen erfüllen, sofern die geometrischen Randbedingungen erfüllt sind und die durch den Näherungsansatz dargestellte Beulfläche mit der wirklichen gut übereinstimmt. Diese Tatsache ist insofern von besonderer Bedeutung, als im allgemeinen für die in Praxis auftretenden Plattenprobleme die Durchführung einer strengen Lösung, zumindest nicht ohne übergroßen Rechenaufwand möglich ist, und man daher auf Näherungslösungen angewiesen ist.

6. Bestimmung der Grenze des Beulbereichs.

Das Instabilwerden der geraden (ebenen) Gleichgewichtsform durch ein Ausbeulen der Profilwandungen tritt nur bei kleinen Schlankheitsgraden bzw. bei geringen Wandstärkenverhältnissen auf. Bei größeren Stablängen bzw. größeren Wandstärken ist je nach den vorliegenden Abmessungen des Profils die kritische Spannung entweder nach der Drillknick- oder nach der Biegeknicktheorie zu bestimmen. Im folgenden soll der für die Beultheorie gültige, sog. Beulbereich gegen den Drillknick- bzw. Biegeknickbereich abgegrenzt werden.

Bezeichnet σ_D die Drillknickspannung und σ_{Be} die Beulspannung, so ist die Abgrenzung des Beulbereiches gegen den Drillknickbereich festgelegt durch die Bedingung

min $\sigma_{Be} \leq \sigma_D$ oder mit min σ_B entsprechend Gl. (17)

$$\sigma_D \leq \min k_a \cdot E \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots (95)$$

Der Beulfaktor min k_a kann für jedes beliebige im praktischen Bereich liegende Seitenverhältnis ω aus der Kurve min $k_a = f_3(\omega)$, Bild 10, entnommen werden. Die Drillknickspannung ist nach der Drillknicktheorie von R. Kappus[11] für U-Profile durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\sigma_D^2 - \sigma_D(\sigma_s + \sigma_z) + \sigma_s \sigma_z - \varrho_z^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (96)$$

$$\sigma_z = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{a^2(a + 6b)}{12(a + 2b)} \quad \ldots \ldots \ldots (97)$$

$$\sigma_s = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{a^2 b^3 \cdot (2a^2 + 15ab + 26b^2) + \frac{4G}{\pi^2 E} \cdot (a + 2b)^3 \cdot s \cdot l^2}{(a + 2b) \cdot [a^2(a + 6b) \cdot (a + 2b) + 4b^3(2a + b)]} \quad \ldots (98)$$

[11]) Vgl. Fußnote 2, S. 449 und 450.

$$\varrho_z = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{2\,a^2 b^2 (a+3\,b)}{(a+2\,b)\sqrt{3\,[a^2(a+6\,b)\cdot(a+2\,b)+4\,b^3(2\,a+b)]}} \quad \ldots \quad (99)$$

Unter der Voraussetzung einer vollständig unbehinderten Querschnittswölbung gibt l in diesen Gleichungen die wirkliche Stablänge an. Setzt man in den Gl. (97) bis (99) $b = a \cdot \omega$ und $E/G = 2{,}6$, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\Delta_1 = \frac{1+6\,\omega}{12\,(1+2\,\omega)},$$

$$\Delta_2 = \frac{\omega^3 (2+15\,\omega+26\,\omega^2)}{(1+2\,\omega)\cdot[(1+6\,\omega)(1+2\,\omega)+4\,\omega^3(2+\omega)]},$$

$$\Delta_3 = \frac{0{,}156\,(1+2\,\omega)^2}{(1+6\,\omega)\cdot(1+2\,\omega)+4\,\omega^3(2+\omega)},$$

$$\Delta_4 = \frac{2\,\omega^3(1+3\,\omega)}{(1+2\,\omega)\cdot\sqrt{3\,[(1+6\,\omega)\cdot(1+2\,\omega)+4\,\omega^3(2+\omega)]}} \quad \ldots \quad (100)—(103)$$

die folgenden Gleichungen:

$$\sigma_z = \frac{\pi^2 E}{(l/a)^2}\cdot\Delta_1, \quad \sigma_s = \frac{\pi^2 E}{(l/a)^2}\cdot\left[\Delta_2+\Delta_3\cdot\left(\frac{s}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{l}{a}\right)^2\right],$$

$$\varrho_z = \frac{\pi^2 E}{(l/a)^2}\cdot\Delta_4 \quad (97\,a)—(99\,a)$$

Durch Einführung der letzten Gleichungen in (96) erhält man:

$$\sigma_D^2 - \sigma_D \frac{\pi^2 E}{(l/a)^2}\cdot\left\{\Delta_2+\Delta_3\left(\frac{s}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{l}{a}\right)^2+\Delta_1\right\}+$$
$$+\left[\frac{\pi^2 E}{(l/a)^2}\right]^2\cdot\left\{\left[\Delta_2+\Delta_3\left(\frac{s}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{l}{a}\right)^2\right]\cdot\Delta_1-\Delta_4^2\right\}=0.$$

Setzt man jetzt σ_D nach (95) ein, so ergibt sich nach einfacher Umformung die biquadratische Gleichung:

$$\left[\frac{l/a}{a/s}\right]^4\cdot\left[\frac{\min k_a}{\pi^2}-\Delta_3\right]+\left[\frac{l/a}{a/s}\right]^2\cdot\left[\Delta_1\Delta_3\cdot\frac{\pi^2}{\min k_a}-\Delta_1-\Delta_2\right]+$$
$$+\frac{\pi^2}{\min k_a}\cdot[\Delta_1\Delta_2-\Delta_4^2]=0 \quad (104)$$

Mit den Abkürzungen

$$u = \frac{\min k_a}{\pi^2}-\Delta_3, \quad v = \frac{\Delta_1\Delta_3\cdot\pi^2}{\min k_a}-\Delta_1-\Delta_2 \text{ und}$$

$$w = \frac{\pi^2}{\min k_a}[\Delta_1\Delta_2-\Delta_4^2] \quad \ldots \quad (105—107)$$

sind die Wurzeln dieser Gleichung

$$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_D = (\pm)\sqrt{\frac{-v\,(\pm)\sqrt{v^2-4\,u\,w}}{2\,u}} \quad \ldots \quad (108)$$

Von den vier Wurzeln interessiert nur die mit dem kleinsten positiven Wert für den Quotienten $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_D$; dieser ergibt sich mit dem positiven Vorzeichen der äußeren und dem negativen Vorzeichen der inneren Wurzel.

Sämtliche Größen der Wurzel sind nur vom Seitenverhältnis ω abhängig (vgl. die Gl. (100) bis (103) und (105) bis (107)), mithin ist der Quotient $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_D$ für jedes Seitenverhältnis eine Konstante.

Für die Abgrenzung des Beulbereichs gegen den Biegeknickbereich ist zu beachten, daß für die betrachteten Seitenverhältnisse ($\omega = 0{,}375$ bis $1{,}5$) Biegeknickung nur in Richtung der Symmetrieachse des Querschnitts eintreten kann, da die auf diese Achse bezogenen Trägheitsmomente im genannten Bereich immer größer sind als die auf die andere Hauptachse bezogenen. Für den Beulbereich gilt also:

$$\min \sigma_{B_e} < \sigma_{E_y} \quad \ldots \quad (109)$$

Mit

$$i_y^2 = \frac{a^2\cdot\omega^3(2+\omega)}{3\,(1+2\,\omega)^2}$$

erhält man unter Voraussetzung einer gelenkigen Lagerung der Stabenden für die Eulerspannung:

$$\sigma_{E_y} = \frac{\pi^2\cdot E}{(l/i_y)^2} = \frac{\pi^2\cdot E}{(l/a^2)}\cdot\frac{\omega^3(2+\omega)}{3\,(1+2\,\omega)^2} \quad \ldots \quad (110)$$

Mit σ_{E_y} nach (110) und σ_{B_e} nach (17) wird aus (109)

$$\min k_a\cdot E\left(\frac{s}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2\cdot E}{(l/a)^2}\cdot\frac{\omega^3(2+\omega)}{3\,(1+2\,\omega)^2}$$

oder

$$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E = 1{,}815\cdot\frac{\omega}{1+2\,\omega}\cdot\sqrt{\frac{\omega\,(2+\omega)}{\min k_a}} \quad \ldots \quad (111)$$

Wie aus Gl. (111) zu ersehen ist, ist auch der Quotient $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E$ nur vom Seitenverhältnis ω abhängig.

Zahlentafel 10. Zahlenwerte für den Quotienten $\frac{l/a}{a/s}$ nach Gl. (93) und (96) für gelenkige Lagerung und starre Einspannung der Stabenden für verschiedene Seitenverhältnisse ω.

Seitenverhältnis	ω	0,375	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
gelenkige Lagerung der Stabenden	$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_D$	0,191	0,260	0,409	0,553	0,679	0,806
	$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E$	0,193	0,313	0,672	1,171		
Starre Einspannung der Stabenden	$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_D$	0,382	0,520	0,818	1,106	1,358	1,612
	$\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E$	0,386	0,626	1,344			

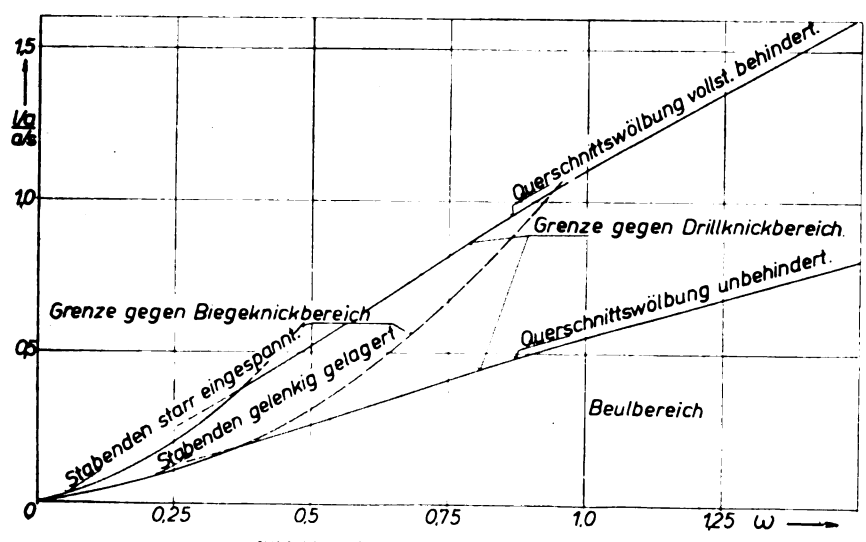


Bild 11. Abgrenzung des Beulbereiches.

Die Quotienten $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_B$ nach (108) und $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E$ nach (111) wurden für verschiedene Seitenverhältnisse berechnet. Mit den in Zahlentafel 10 zusammengestellten Ergebnissen wurden die Grenzkurven $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_B = f_1(\omega)$ und $\left(\frac{l/a}{a/s}\right)_E = f_2(\omega)$ gezeichnet, Bild 11.

Diese beiden Kurven geben (in ihrem ausgezogenen Bereich) die Begrenzung des Beulbereiches gegen den Euler- oder Biegeknickbereich und gegen den Drillknickbereich an. Ist der nach den Abmessungen eines Profils errechnete Wert $\frac{l/a}{a/s}$ kleiner als der für das zugehörige Seitenverhältnis ω aus dem Schaubild entnommene, so tritt bei entsprechender Belastung ein Ausbeulen der Wandungen ein; ist er größer, so ist für die kritische Last entweder die Eulerknickspannung oder die Drillknickspannung maßgebend. Weiterhin gibt die den Beulbereich begrenzende Kurve für gegebene Werte $\frac{l/a}{a/s}$ für verbeulende U-Profile das jeweils günstigste Seitenverhältnis ω an, d. h. das Seitenverhältnis, bei dem die Beullast den größten und die Querschnittsfläche für das gegebene s den kleinsten Wert besitzt.

Die Abgrenzung des Beulbereiches gegen den Drillknickbereich bzw. gegen den Biegeknickbereich wurde unter der Voraussetzung einer unbehinderten Querschnittswölbung bzw. einer gelenkigen Lagerung der Stabenden bestimmt. Bei vollständiger Behinderung der Querschnittswölbung bzw. starrer Einspannung der Stabenden ist die Rechnung in der gleichen Weise durchzuführen, nur ist in den betreffenden Gleichungen die wirkliche Stablänge l durch die Länge L des äquivalenten Stabes — d. h. des Stabes, der bei gelenkiger Lagerung der Stabenden und bei unbehinderter Verwölbung derselben die gleiche Knickspannung besitzt — zu ersetzen; diese ist sowohl für den Fall der Biegeknickung wie für den Fall der Drillknickung gleich $l/2$. Bei starrer Halterung der Stabenden erhält man also für den Quotienten $\frac{l/a}{a/s}$ einen doppelt so großen Wert.

Der Schnittpunkt der Biegeknickbereich- mit der Drillknickbereichgrenze liegt für die beiden genannten Grenzfälle der Stabendenhalterung bei dem Seitenverhältnis $\omega = \sim 0{,}375$. Da man in Praxis mit dem Seitenverhältnis nicht unter diesen Wert gehen wird, kann für die beiden Grenzfälle Biegeknickung nicht eintreten. Es ist jedoch zu beachten, daß die beiden genannten Arten der Stabendenhalterung in Praxis äußerst selten sind. Vielmehr wird man mit einer elastischen Wölbbehinderung und einer elastischen Einspannung der Stabenden zu rechnen haben, wobei in den meisten Fällen der Einfluß der elastischen Wölbbehinderung größer sein wird als der der elastischen Einspannung. Dies bedeutet eine Verschiebung des Schnittpunktes der beiden Grenzkurven in den praktischen Bereich, so daß im allgemeinen bei U-Profilen auch Biegeknicken möglich ist.

IV. Beulversuche und Versuchsergebnisse.

Die durch die strenge Lösung ermittelten Werte für die Beulfaktoren stellen Bestwerte dar, die im allgemeinen von den durch Versuche bestimmten Werten nicht erreicht werden. Die geringere Größe der letzteren ist durch die fast immer vorhandenen Vorausbeulungen der einzelnen Profilebenen der Versuchsstäbe bedingt. Eventuelle Vorkrümmungen der Stabachse können je nach der Art der Vorkrümmung die Beulfestigkeit ebenfalls mindern, unter Umständen aber auch erhöhen. Bei den im folgenden mit U-Profilen angestellten Beulversuchen ging das Bestreben dahin, die Versuchsbedingungen so weit als möglich den in der Theorie gemachten Annahmen anzupassen. Dementsprechend ergaben die Versuche auch günstigere Werte, als sie im allgemeinen von wirklichen Stäben (d. h. Stäben praktischer Konstruktionen) erreicht werden, da bei diesen die im Versuch bewußt geschaffenen Voraussetzungen in den meisten Fällen nicht vorhanden sind.

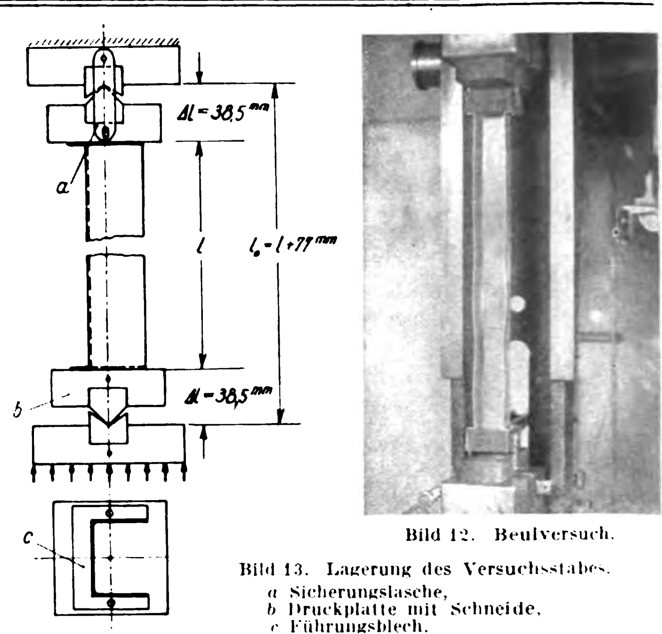


Bild 12. Beulversuch.

Bild 13. Lagerung des Versuchsstabes.
a Sicherungslasche,
b Druckplatte mit Schneide,
c Führungsblech.

Die Beulversuche wurden auf einer bis zu 2000 kg belastbaren Amslerschen Zerreißmaschine durchgeführt, die eine Genauigkeit in der Belastungsanzeige von 1% besitzt. Es wurden mehrere Duraluminiumprofile mit verschiedenen Seiten-, Wandstärken- und Längenverhältnissen untersucht. Die Profile waren an den Stabenden unter Zwischenschaltung einer starren, auf der Anlageseite vollständig ebenen Druckplatte in einer senkrecht zur Symmetrieachse des Querschnitts laufenden Schneide gelagert. Auf ein in Richtung der Symmetrieachse gelegenes Schneidenlager, das den Aufbau unnötig erschwert hätte, konnte verzichtet werden, da die Stabenden durch Fräsen so gut abgerichtet wurden, daß eine einwandfreie Kraftübertragung von den Druckplatten auf das Profil gewährleistet war. Zur sicheren und schnellen Erzielung einer zentrischen (bzw. einer beabsichtigten exzentrischen) Krafteinleitung waren auf den Druckplatten auswechselbare Führungsbleche aufgeschraubt, in die beim Versuch die Profile eingepaßt wurden, vgl. Bild 12 und 13.

Bei den Versuchen konnte der Einfluß der Vorausbeulungen naturgemäß nicht beseitigt werden; er konnte nur durch Auswahl möglichst vorbeulungsfreier Versuchsstäbe kleingehalten werden. Die Vorausbiegung, die die Versuchsstäbe z. T. aufwiesen, betrug in der Stabmitte bei den Stäben mit kleinem Seitenverhältnis $\sim 0{,}4\%_0$, bei den Stäben mit großem Seitenverhältnis $\sim 0{,}1\%_0$ der Stablänge. Die Vorkrümmung war durchweg so gerichtet, daß der Profilrücken auf der Krümmungsinnenseite lag. Der Einfluß der Vorkrümmung wurde dadurch gemindert, daß die Kraft exzentrisch eingeleitet wurde, und zwar so, daß die Größe der Exzentrizität an den Stabenden ungefähr entgegengesetzt gleich groß war wie die verbleibende Exzentrizität der Kraftwirkung in der Stabmitte. Hierdurch wird erreicht, daß einerseits bei Belastung keine nennenswerte Vergrößerung der Ausbiegung eintritt und daß andererseits wegen der wechselnden Richtung der Exzentrizität der die Beulfestigkeit mindernde bzw. erhöhende Einfluß derselben nahezu aufgehoben wird.

Bei der Bestimmung der Versuchswerte wurde zunächst die Last als die Beullast angesehen, bei der mit dem bloßen Auge erkennbar eine Verbeulung der einzelnen Ebenen des Profils eintrat. Die bei einigen Stäben durchgeführte Probe zeigte, daß diese Last über 5 min getragen werden konnte. Da einerseits eine geringe Erhöhung der Belastung den Zusammenbruch des Stabes (Knickbiegungsbruch in Richtung der Symmetrieachse) zur Folge hatte und andererseits eine genaue Bestimmung des Auftretens der ersten Beulen ohne Hilfsmittel sehr unsicher ist, wurde einheitlich die größte getragene Last als die Beullast angesehen.

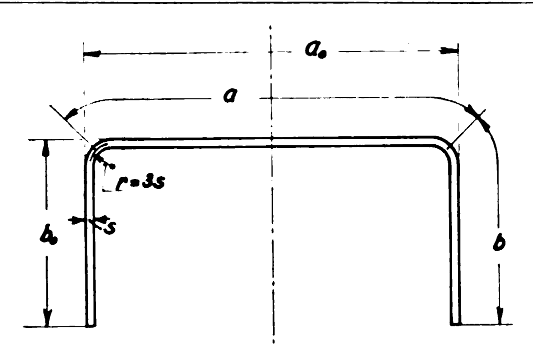


Bild 14. Bezeichnung der Querschnittsabmessungen der Versuchsprofile.

Für die Auswertung der Beulversuche wurden die Profilwandstärken und der Elastizitätsmodul des Werkstoffes bestimmt. Erstere wurden an 8 Stellen des Stabes — an den Stabenden auf Mitte Schenkel- und Rückenbreite sowie in Stabmitte auf Mitte Schenkelbreite — gemessen und das aus diesen 8 Werten gebildete Mittel (s_{mittel}) der Versuchsauswertung zugrunde gelegt. Die zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls erforderlichen Versuchsstäbe wurden aus den am Stabende gelegenen Teil des Profilrückens der bereits untersuchten Stäbe herausgeschnitten, da an diesen Stellen beim Beulversuch die Elastizitätsgrenze mit Sicherheit nicht überschritten wurde.

Die Versuchsprofile waren mit der üblichen Abrundung $r = 3s$ aus ebenen Blechen abgekantet und zeigten somit keine scharfe Abgrenzung zwischen Rücken- und Schenkelebene. Für die Auswertung der Versuchsergebnisse wurde die Grenze zwischen diesen beiden Ebenen daher willkürlich auf Mitte Rundung angenommen (vgl. Bild 14).

Mit den Bezeichnungen nach Bild 14 erhält man auf Grund dieser Annahme

für die Rückenbreite $a = a_0 - 2{,}29\, s$,
für die Schenkelbreite $b = b_0 - 1{,}144\, s$,
für den Querschnitt $f = (a_0 - 2\, b_0 - 4{,}58\, s) \cdot s_{mittel}$,
für das Seitenverhältnis

$$\omega = \frac{b_0 - 1{,}144\, s}{a_0 - 2{,}29\, s}.$$

Unter Zugrundelegung dieser Werte wurden aus den durch Versuch ermittelten Beullasten P_{Be} die Beulfaktoren aus

$$k_{av} = \frac{P_{Be}}{E \cdot f} \cdot \left[\frac{a}{s_{mittel}}\right]^2$$

berechnet. Die Ergebnisse der einzelnen Versuche sind in Zahlentafel 11 zusammengestellt. Zum Vergleich sind die theoretisch ermittelten Werte min k_a der strengen Lösung jeweils neben den Versuchswerten eingetragen.

Die Beulversuche ergaben, wie dies aus dem Lichtbild eines Beulversuchs, Bild 12, auch gut zu erkennen ist, eine gute Übereinstimmung der wirklichen mit der angenommenen Beulform. Insbesondere zeigten die Versuchsstäbe eine symmetrische Verformung bezüglich der Symmetrieachse des Querschnitts und gleiche Beulenlänge für die Rücken- und Schenkelebenen.

Die Versuchswerte für die Beulfaktoren sind bis auf die Werte für die Versuchsstäbe 13 bis 15 durchweg kleiner als die theoretischen Werte min k_a der strengen Lösung. Die Abweichungen der Versuchswerte von den theoretischen Werten sind bei den einzelnen Stäben verschieden. Sie sind ihrer Größe nach jedoch nicht von der Stablänge abhängig.

Sieht man von Stab 8, der im Vergleich zu den übrigen Stäben eine unzulängliche Beschaffenheit aufwies, ab, so bleiben die Abweichungen unter 10%, bei der größeren Anzahl der Stäbe sogar unter 5%. Die Werte einiger Stäbe stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit sogar auffallend gut mit den theoretischen Werten überein. Dieses überraschende Ergebnis, das im Gegensatz zu den Erfahrungen steht, die bei anderen Beulproblemen (z. B. ebenen Platten) gemacht wurden, ist wahrscheinlich sowohl auf Versuchsfehler als auch auf nicht ganz zutreffende, d. h. den wirklichen Einflüssen nicht ganz gerecht werdende Annahmen bei der Auswertung der Versuchsergebnisse zurückzuführen.

Die erstgenannten sind wohl nur zum geringen Teil auf die Tatsache zurückzuführen, daß statt der Beullasten die größten getragenen Lasten in Rechnung gesetzt wurden, da letztere, wie es sich aus der folgenden Überlegung ergibt, nur unerheblich größer als die wirklichen Beullasten sein können.

Wird die Beullast um einen kleinen Betrag überschritten, so können die Profilschenkel und besonders die Schenkelenden wegen ihrer geringeren Beulfestigkeit gegenüber dem Profilrücken bzw. den Profilkanten nur einen ungleich kleineren Anteil von dem Lastzuwachs aufnehmen, als der gleichmäßigen Lastverteilung entsprechen würde. Die Resultierende der in einem Querschnitt wirkenden inneren Kräfte wird also bei Überschreitung der Stabilitätsgrenze zum Profilrücken hin verschoben, während die Resultierende der äußeren Kräfte wegen der Schneidenlagerung ihre ursprüngliche Lage beibehält. Da hiermit ein Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften nicht mehr möglich ist, bricht der Stab nach der Art eines Knickbiegebruches zusammen, ohne daß eine weitere Laststeigerung erforderlich ist.

Von größerer Bedeutung kann der Einfluß einer auch nur geringen Exzentrizität sein. Greift die äußere Kraft zum Profilrücken hin exzentrisch an, bzw. wird die Vorkrümmung des Stabes durch eine exzentrische Krafteinleitung nicht genügend ausgeglichen, so werden die Profilschenkel geringer belastet als der Profilrücken. Da die Schenkel aber in dem in Frage kommenden Seitenverhältnisbereich weniger beulsteif sind als der Rücken, so ergibt sich hieraus eine u. U. erhebliche Erhöhung der Beullast. Dies scheint besonders bei den Versuchsstäben 13 bis 15 der Fall

Zahlentafel 11. Abmessungen der Versuchsstäbe und Versuchsergebnisse.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Vers.-Nr.	a_0 cm	b_0 cm	s_{mittel} cm	l cm	a cm	b cm	ω	P kg	E kg/cm²	k_{ar} (s_{mittel})	min k_a	k_{ar} (s_{max})	$\bar{a}$ cm	$\bar{b}$ cm	$\bar{\omega}$	$k_{\bar{a}v}$	min $k_{\bar{a}}$ (für $\bar{\omega}$)
1	4	3	0,099	30				655		1,29		1,25				0,99	
2	4	3	0,100	45	3,77	2,89	0,77	683	$0{,}78 \cdot 10^6$	1,31	1,31	1,27	3,3	2,65	0,80	1,00	1,2
3	4	3	0,100	45				620		1,19		1,15				0,91	
4	4	3	0,119	30				1100		1,28		1,25				0,92	
5	4	3	0,121	30	3,73	2,86	0,77	1145	$0{,}748 \cdot 10^6$	1,27	1,31	1,24	3,16	2,58	0,82	0,91	1,17
6	4	3	0,121	60				1130		1,25		1,22				0,90	
7	4	2	0,099	25				915		2,43		2,39				1,86	
8	4	2	0,099	25	3,77	1,89	0,5	815	$0{,}732 \cdot 10^6$	2,16	2,63	2,13	3,3	1,65	0,5	1,66	2,63
9	4	2	0,099	25				900		2,39		2,32				1,83	
10	4	2	0,120	20				1620		2,42		2,39				1,74	
11	4	2	0,120	20	3,73	1,86	0,5	1760	$0{,}722 \cdot 10^6$	2,63	2,63	2,63	3,16	1,58	0,5	1,89	2,63
12	4	2	0,120	20				1750		2,61		2,54				1,88	
13	4	1,5	0,103	14,5				1390		3,69		3,69				2,82	
14	4	1,5	0,102	14,5	3,77	1,39	0,37	1410	$0{,}75 \cdot 10^6$	3,85	3,66	3,79	3,3	1,15	0,35	2,95	3,77
15	4	1,5	0,102	14,5				1380		3,79		3,77				2,89	

gewesen zu sein, die durchweg höhere Werte für den Beulfaktor ergaben als die Theorie sie aufweist. Diese Annahme erscheint um so wahrscheinlicher, als diese Stäbe von allen Stäben den kleinsten Trägheitsradius bezüglich der zur Symmetrieachse senkrechten Achse aufweisen, wodurch naturgemäß eine unzulässige Exzentrizität sich gerade bei diesen Stäben am stärksten auswirkt.

Ein weiterer Grund für die zu hohen Versuchswerte für die Beulfaktoren kann, wie bereits erwähnt, in nicht ganz zutreffenden Annahmen bei der Auswertung der Versuchsergebnisse gesucht werden. Wie weit z. B. die Berechnung der Beulfaktoren mit der mittleren Wandstärke s_{mittel} den wirklichen Verhältnissen gerecht wird, kann nicht gesagt werden. Da jedoch die größte Abweichung von der mittleren Wandstärke nur 1% beträgt, kann der sich hieraus ergebende Fehler nur klein sein. Berechnet man z. B. die Beulfaktoren statt mit s_{mittel} mit der jeweils größten vorhandenen Wandstärke s_{max} (Spalte 13), so erhält man einen Fehlermehrbetrag von bestenfalls 3%. Es ist jedoch zu beachten, daß dieser Mehrbetrag keineswegs in voller Höhe in Rechnung gesetzt werden darf.

Ein weiterer Fehler kann in der willkürlichen Begrenzung der Rücken- und Schenkelebenen liegen. Die Grenze zwischen diesen beiden Ebenen wurde ja für die Berechnung auf Mitte Rundung angenommen, wobei stillschweigend der versteifende Einfluß der Rundung vernachlässigt wurde. Die hierdurch bedingte Verfälschung der Rechenwerte kann gerade bei den Profilen mit kleinem Seitenverhältnis ω wegen der verhältnismäßig geringen Schenkelbreiten sehr wesentlich sein. Zum Vergleich wurden die Beulfaktoren mit extremen Werten für die Schenkel- und Rückenbreiten berechnet (Spalte 17). Als Maß für diese wurden nur die durch die Rundungen begrenzten Geradenstücke angenommen, d. h.

die Rückenbreite $\bar{a} = a_0 - 7\,s$,
und die Schenkelbreite $\bar{b} = b_0 - 3{,}5\,s$

gesetzt. Die für das neue Seitenverhältnis

$$\bar{\omega} = \frac{b_0 - 3{,}5\,s}{a_0 - 7\,s}$$

aus Bild 10 entnommenen theoretischen Werte für die Beulfaktoren sind in Spalte 17, Zahlentafel 11, eingetragen. Gegen diese weisen die zuletzt berechneten Versuchswerte z. T. über 30% kleinere Werte auf. Bemerkenswert ist hierbei, daß der Fehlerzuwachs bei den Profilen mit kleinem Seitenverhältnis erheblich größer ist als bei den mit großem Seitenverhältnis. Wenn auch nicht zu erwarten ist, daß die in Rechnung gesetzten Extremwerte $\bar{a}$ und $\bar{b}$ für die Bezugsbreiten den wirklichen Verhältnissen gerecht werden, so kann man jedoch schließen, daß die ursprüngliche Vernachlässigung des versteifenden Einflusses der Ausrundung zwischen den Profilebenen das Ergebnis wesentlich begünstigt hat.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Zusammenwirken der verschiedenen genannten Einflüsse die z. T. überraschend guten Versuchsergebnisse zur Folge hatten. Bei einwandfreien Versuchsgrundlagen und bei Berücksichtigung der wirklichen Verhältnisse wird man mit Beullasten zu rechnen haben, die angenähert um 20% kleiner sind als die entsprechenden theoretischen Werte.

V. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde das Ausbeulen dünnwandiger U-Profile mit konstanter Wandstärke behandelt. Es wurden nach dem Energieverfahren zwei Näherungslösungen entwickelt und außerdem die strenge Lösung durch die Integration der Differentialgleichung einer gedrückten, dem U-Profil hinsichtlich Beulform und Beulfestigkeit äquivalenten Platte unter den vorliegenden Randbedingungen durchgeführt. Sämtliche Lösungen wurden nach einem mit Beulfaktor bezeichneten dimensionslosen Wert entwickelt, der nur vom Seitenverhältnis ($\omega = b/a$) abhängig ist. Der für die erste Näherungslösung angewandte Ritzsche Reihenansatz, der bis auf die dynamischen Bedingungen für die freien Ränder alle Rand- bzw. Auflagerbedingungen erfüllte, ergab bereits praktisch genügend genaue Werte für die Beulfaktoren. Durch Hinzunahme eines Gliedes, das von den dynamischen Randbedingungen für die freien Ränder wenigstens die Querkraftbedingung befriedigte, konnte mit der zweiten Näherungslösung nur eine geringe Verbesserung gegenüber der ersten erreicht werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die mit dem ersten Näherungsansatz erzielten Werte nur um einen geringen Betrag von denen der strengen Lösung abwichen und somit eine wesentliche Verbesserung des Ergebnisses überhaupt nicht erwartet werden konnte.

Ebenso wie bei den Näherungslösungen wurden auch bei der strengen Lösung die in die Rücken- bzw. Schenkelebenen fallenden Kräfte vernachlässigt, die sich aus der gegenseitigen Stützung der drei Profilebenen ergeben. Die strenge Lösung stellt somit genau genommen eine strenge Lösung nur für die äquivalente Platte dar. Da jedoch die genannten Kräfte unter der üblichen Annahme kleiner Ausbiegungen verschwindend klein sind und sich außerdem wegen ihres mit jeder Beule wechselnden Vorzeichens in der Gesamtwirkung nahezu aufheben, kann die Strenge der letzten Lösung auch für das U-Profil als praktisch ungemindert angesehen werden.

Für den Beulfaktor wurden an Hand der drei Lösungen Zahlenwerte für verschiedene im praktischen Bereich liegende Seitenverhältnisse bestimmt und nach den errechneten Werten die Abhängigkeit des Beulfaktors vom Seitenverhältnis in einem Schaubild dargestellt. Aus dem Vergleich der Werte der Näherungslösungen und der strengen Lösung wurde der Schluß gezogen, daß das Ritzsche Verfahren mit einem Reihenansatz, der wenigstens die geometrischen Randbedingungen erfüllt und die zu erwartende Beulform so gut als möglich wiedergibt, praktisch genügend genaue Werte ergibt, auch wenn die dynamischen Randbedingungen durch den Reihenansatz nicht oder nicht vollständig befriedigt werden.

Mit den Werten der strengen Lösung wurde weiterhin die Begrenzung des Beulbereiches gegen den Biegeknick- bzw. Drillknickbereich festgelegt. Es ergab sich für beide Grenzen ein einfacher, dimensionsloser, durch die geometrischen Größen des Profils bestimmter Wert, dessen Abhängigkeit vom Seitenverhältnis in einem Schaubild wiedergegeben wurde. Die Abgrenzung des Beulbereiches zeigt, daß auch bei U-Profilen mit praktischen Abmessungen ein Ausbeulen der Wandungen eintreten kann.

Durchgeführte Beulversuche zeigten z. T. eine überraschend gute Übereinstimmung zwischen den Versuchswerten und den theoretischen Werten. Es wurde gezeigt, daß diese günstigen Ergebnisse auf das Zusammenwirken verschiedener Einflüsse zurückgeführt werden können, so daß in Praxis im allgemeinen mit wesentlich kleineren Werten, als die Theorie sie ergibt, gerechnet werden muß.

Ergebnisse einiger systematischer Flugversuche über die dynamische Längsstabilität mit losem Ruder.

Von Rudolf Schmidt.

Bericht der Versuchsabteilung der Dornier-Werke Friedrichshafen.

Die Arbeit berichtet über die Ergebnisse von Flugversuchen, bei denen der Einfluß einer »Staudruck-Stabilisierung« auf das dynamische Verhalten eines Flugzeuges untersucht wurde. Es wird gezeigt, daß es für das dynamische Verhalten nicht gleichgültig ist, ob die die Stabilisierung erzeugende Kraft eine Massen- oder Federkraft ist, während die statische Stabilität davon unberührt bleibt. Die »massefreie Staudruck-Stabilisierung« wurde durch eine Feder erzeugt, die über eine Kurvenscheibe derart mit der Höhensteuerung verbunden war, daß das eingeleitete Moment unabhängig vom Ruderausschlag war. Untersucht wurde eine »massebehaftete«, eine »massefreie« sowie eine »gemischte Staudruck-Stabilisierung«. Die Flugversuche ergaben eine Verlängerung der Schwingungsdauer bei der »massebehafteten«, und eine erhebliche Änderung der Dämpfung bei der »massefreien« Stabilisierung.

Gliederung.

I. Einführung.

In Luftfahrtforschung, Bd. 16 (1939), Lfg. 1, S. 31, war das Problem der Wirkung einer Staudruck-, Anstellwinkel- und Längsneigungs-Stabilisierung auf die statische Längsstabilität eines Flugzeugs mit losem Ruder behandelt worden. Diese Untersuchung zeigte, daß mit relativ einfachen Mitteln eine wirksame Erhöhung der statischen Längsstabilität möglich ist. Der Einführung einer Staudruck-Stabilisierung im beschriebenen Sinne ist aber eine gewisse Grenze gesetzt, da die Zusatzmasse gleichzeitig bei Böenbeschleunigungen anspricht und dann fliegerisch unangenehme Stoßbewegungen in der Steuerung erzeugt. Dies führte zu der Folgerung, daß die Staudruckstabilisierung böenunempfindlich gemacht werden kann, wenn man an Stelle der Zusatzmasse eine von einer Feder herrührende Kraft in die Steuerung einleitet. Für die Wirkung der Staudruckstabilisierung ist die Quelle der Zusatzkraft ohne Bedeutung, die Verwendung einer Feder hat aber den Vorteil, von Böenbeschleunigungen sowie von der Lage des Flugzeugs im Schwerefeld unabhängig zu sein. Es ist nur erforderlich, die Zusatzfederkraft von der Ruderstellung unabhängig zu machen, um zu vermeiden, daß die Höhensteuerung ein schwingungsfähiges Gebilde wird, das u. U. eine Anfachungsmöglichkeit ergeben würde. Dies kann durch eine einfache kinematische Einrichtung erfolgen, durch die der wirksame Hebelarm der Federkraft bei der Ruderbewegung jeweils so verändert wird, daß das Produkt aus Hebelarm und Federkraft konstant ist.

Bei der Erprobung einer derartigen Einrichtung konnte festgestellt werden, daß zwar die statische Längsstabilität bei gleichzeitiger Böenunempfindlichkeit der Steuerung

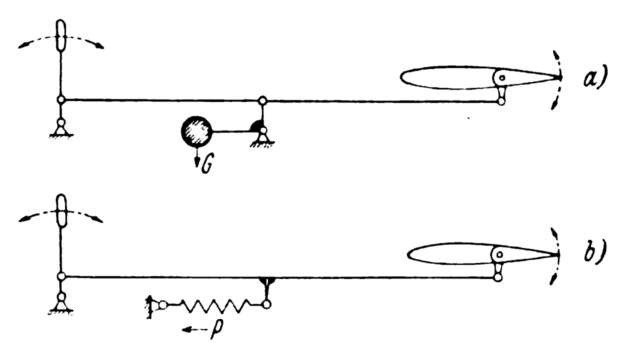


Bild 1. Schematische Darstellung einer massebehafteten und massefreien Staudruckstabilisierung der Höhensteuerung:
a) Massebehaftete Staudruckstabilisierung.
b) Massefreie Staudruckstabilisierung.

wirksam beeinflußt wurde, jedoch zeigten sich im dynamischen Verhalten bei der Längsbewegung des Flugzeugs große Unterschiede zwischen der Staudruckstabilisierung mit Zusatzmasse und Feder. Zur Klärung dieser Eigenarten wurden daher von der Flugversuchsgruppe der Dornierwerke systematische Flugmessungen durchgeführt, deren Ergebnisse im folgenden mitgeteilt werden. Zweck der Veröffentlichung soll in erster Linie sein zu zeigen, in wie starkem Maße die unausgeglichenen Massen einzelner Steuerungsteile das dynamische Verhalten beeinflussen können, ohne daß dies der Rechnung bisher zugänglich ist, und damit die Theoretiker anzuregen, an Hand der Flugmeßergebnisse eine rechnerische Behandlung des Problems zu versuchen.

II. Prinzip der „massebehafteten" und „massefreien" Staudruckstabilisierung.

In der bereits erwähnten Arbeit in dieser Schriftenreihe Bd. 16 (1939), Lfg. 1, S. 31, war als Schema für eine Staudruckstabilisierung eine Höhensteuerung angegeben, bei der durch eine an einem Hebel angeordnete Zusatzmasse ein Moment in Richtung »Drücken« eingeleitet wurde. Da für die stabilisierende Wirkung lediglich die Größe und das Vorzeichen des eingeleiteten Momentes maßgebend ist, so kann man sich eine Reihe konstruktiver Lösungen für eine Staudruckstabilisierung vorstellen, bei denen das Moment nicht von einer Zusatzmasse herrührt. Die einfachste Lösung bildet die Anordnung einer vorgespannten Feder, ferner — im Prinzip ähnlich — ein unter Gasdruck stehender Kolben. In Bild 1 sind die beiden Ausführungsformen schematisch dargestellt.

Im unbeschleunigten Horizontalflug ist die Wirkung der massebehafteten und der massefreien Staudruckstabilisierung völlig gleich. Grundsätzlich verschieden verhalten sich jedoch beide Arten in allen Flugzuständen, in denen bahnnormale Beschleunigungskomponenten auftreten, also bei böigem Wetter oder beim Abfangen und Hochreißen. Während bei der massebehafteten Staudruckstabilisierung

beim Auftreten von bahnnormalen Beschleunigungen das eingeleitete Moment von der Richtung und Größe der Beschleunigung abhängt und sich damit der Ruderausschlag entsprechend ändert, ist die massefreie Staudruckstabilisierung hiervon völlig unabhängig. Wir wollen uns die Folgen der Zusatzmasse einmal kurz überlegen: Beim Abfangen aus dem Sturzflug oder bei der Landung wird das eingeleitete Moment infolge der Zentrifugalbeschleunigung auf ein Mehrfaches seines statischen Betrages erhöht; dadurch entsteht eine Ruderbewegung, die dem Abfangen entgegengerichtet ist. Der Flugzeugführer muß also dieses Moment durch eine zusätzliche Handkraft ausgleichen. Je schärfer das Abfangen erfolgt, desto größer wird die Handkraft. Dies stellt gewissermaßen bei bestimmten Voraussetzungen eine selbsttätige Sicherung gegen eine Überschreitung des sicheren Lastvielfachen dar. Beim Einfliegen in eine vertikal nach oben gerichtete Böe wird der Anstellwinkel des Flugzeugs erhöht; gleichzeitig wird aber infolge der Beschleunigung der Zusatzmasse das Ruder im Sinne »Drücken« stärker ausgeschlagen, so daß der Anstellwinkelstörung sofort entgegengearbeitet wird. Bei der massefreien Staudruckstabilisierung hingegen tritt beim Abfangen keine Handkrafterhöhung ein, und beim Einfliegen in eine Böe erfolgt kein Ruderausschlag, so daß sich die plötzliche Anstellwinkelstörung erst allmählich in eine Staudruckstörung ausbilden kann und erst über diese eine Staudruckstabilisierung ausgelöst wird. Diesen Vorgang des Einfluges in eine Vertikalböe wollen wir uns klarmachen, indem wir den Verlauf des Anstellwinkels, der Normalbeschleunigung, des Staudruckes und des Ruderausschlages für massebehaftete und massefreie Staudruckstabilisierung auftragen, wie es in Bild 2 geschehen ist: Der Anstellwinkel α soll plötzlich erhöht werden. Es entsteht ein plötzlicher Auftriebsüberschuß, der sich in einer plötzlichen Vertikalbeschleunigung b_z des ganzen Flugzeuges äußert. Durch die entstehende Steiggeschwindigkeit verringert sich allmählich der Anstellwinkel und damit die Beschleunigung. Der Staudruck q reagiert infolge der Massenträgheit nur verhältnismäßig langsam mit einer Verringerung. Ist die Staudruckstabilisierung nun massebehaftet, dann reagiert das Höhenruder beim Einsetzen der Beschleunigung sofort mit einem Ausschlag in Richtung »Drücken«. Dadurch wird der Anstellwinkel sofort vermindert, die Beschleunigung nimmt schneller ab und die eingeleitete Staudruckstörung hat kleinere Amplitude. Bei der massefreien Staudruckstabilisierung hingegen erfolgt ein stabilisierender Ruderausschlag erst nach der langsam wirkenden Staudruckänderung, so daß dadurch auch der Abfall des Anstellwinkels und der Beschleunigung langsamer erfolgt. Auch bei dem nun folgenden Ausschwingvorgang bis zum Erreichen der Ausgangsfluglage verhalten sich beide Staudruck-Stabilisierungen infolge der bahnnormalen Beschleunigung verschieden. Bei massebehafteter Stabilisierung wird die Schwingungsdauer der Staudruckschwingung länger, da das Ruder durch den Einfluß der Normalbeschleunigung der Schwingung entgegenwirkt.

Man kann aus diesem Vergleich entnehmen, daß die massebehaftete Staudruckstabilisierung in böigem Wetter härter arbeitet, die Steuerung wird unruhig, dagegen werden die Staudruckamplituden klein. Bei der massefreien Stabilisierung werden dagegen die Staudruckschwingungen ausgeprägter, aber die Flugbewegungen und das Arbeiten der Höhensteuerung weicher.

Beide Stabilisierungsarten haben flugeigenschaftsmäßig ihre Vor- und Nachteile. Erwünscht ist stoßfreies Arbeiten der Steuerung und gleichzeitig kleine Staudruckamplitude. Wenn also die statische Längsstabilität um ein bestimmtes Maß durch eine Staudruckstabilisierung erhöht werden soll, was durch die Größe des einzuleitenden Gesamtmomentes in die Steuerung festgelegt wird, dann hat man es in der Hand, das dynamische Verhalten durch Anwendung von Masse und Feder in einer geeigneten Kombination auf den flugeigenschaftsmäßig angenehmsten Zustand abzustimmen bzw. zwischen den Eigenschaften beider Stabilisierungsarten einen Kompromiß zu schließen. Wir wollen im folgenden in

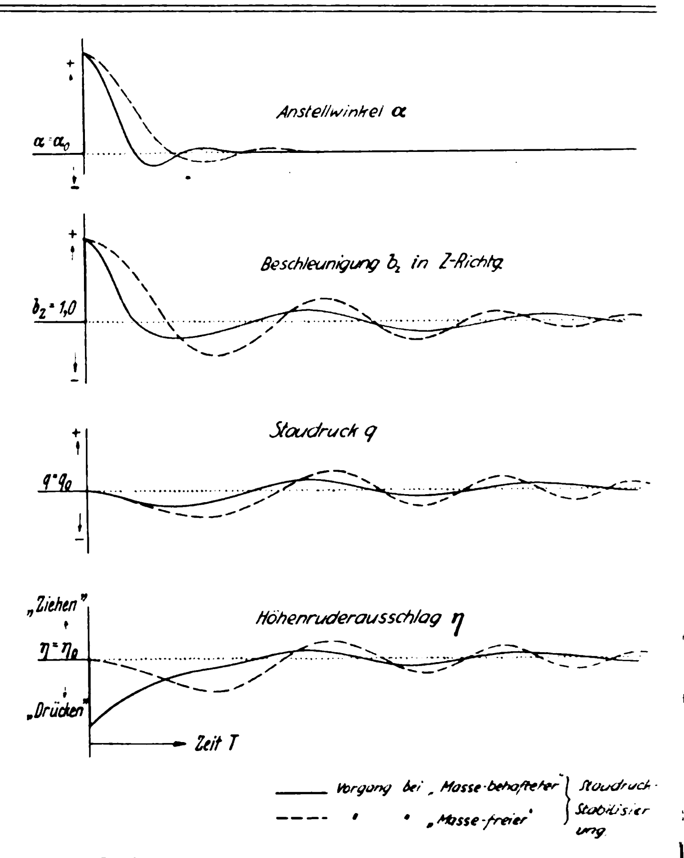


Bild 2. Verlauf der Flugzustandsgrößen beim Einfliegen in eine Vertikalböe bei massebehafteter und massefreier Staudruckstabilisierung.

diesem Falle von einer »gemischten Staudruckstabilisierung« sprechen.

Die bereits früher durchgeführten Flugversuche über Staudruckstabilisierung haben sich nur mit den Fragen der statischen Stabilität befaßt. H. Blenk [1] hat im Zusammenhang mit diesen Versuchen die allgemeine Bewegungsgleichung des Flugzeugs mit losem Ruder aufgestellt und darin die Wirkung einer durch Zusatzmassen erzeugten Staudruckstabilisierung berücksichtigt. Dies erfolgte allerdings unter der Annahme, daß das Ruder sich bei der Längsschwingung immer sofort so einstellt, wie es sich bei der gleichen Kombination von Staudruck und Anstellwinkel im stationären Fall einstellen würde. Dies bedeutet eine Vernachlässigung der Wirkung der bahnnormalen Beschleunigungskräfte auf die Ruderselbsteinstellung. Diese Vernachlässigung wird um so bedeutungsvoller, je größer das betreffende Flugzeug ist, denn ebenso, wie bei Betrachtung der statischen Stabilität wächst auch beim Schwingungsvorgang der Einfluß der Massenkräfte unausgeglichener Steuerungsteile gegenüber den Luftkräften am Ruder etwa proportional mit dem Fluggewicht. In einer anderen Veröffentlichung hat H. Blenk [2] die Stabilitätsbedingungen untersucht unter der Annahme, daß die Schwingungsdauer sehr klein (< 1 Hz) ist und demzufolge keine Bahngeschwindigkeitsänderungen auftreten. Dieser Fall ist aber auf unsere Betrachtung gar nicht anwendbar. Der einfachste Fall — nämlich die Bewegung des freien Ruders unter der Wirkung der Luftkräfte allein ohne Massenkräfte — ist theoretisch noch nicht betrachtet worden. Dies ist aber gerade der Zustand der mit Federn arbeitenden massefreien Staudruckstabilisierung.

III. Durchführung der Flugmessungen.

Die Untersuchung der Eigenschaften einer Staudruckstabilisierung bezüglich ihres dynamischen Verhaltens war Aufgabe einer systematischen Fluguntersuchung, da auf theoretischem Wege eine Lösung zunächst als zu schwierig schien. Gemessen wurde die Schwingungsdauer T der langen Staudruckschwindung und die Dämpfung derselben nach einer vom Flugzeugführer mit dem Höhenruder ein-



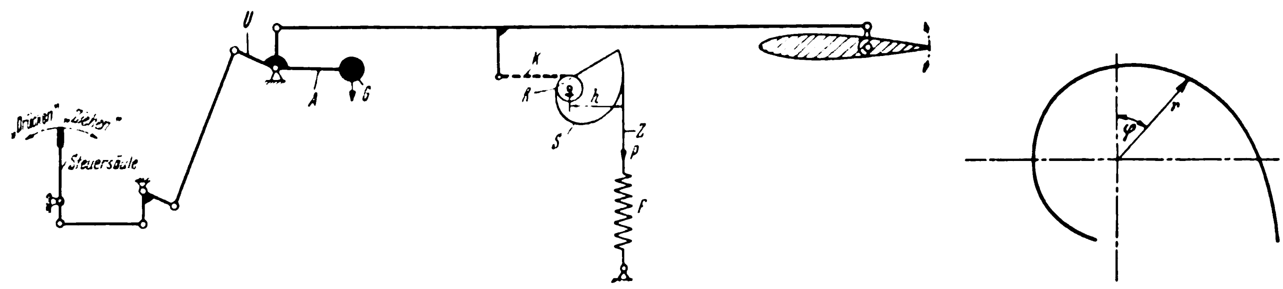


Bild 3. Schematische Darstellung der Höhensteuerung des Versuchsflugzeuges mit »gemischter« Staudruckstabilisierung.

geleiteten Störung. Dies wurde für folgende Variationen durchgeführt:

1. Einfluß der absoluten Größe einer massebehafteten Staudruckstabilisierung im Reiseflug bei verschiedener statischer Stabilität (Schwerpunktrücklage),
2. dsgl. einer massefreien Staudruckstabilisierung,
3. Einfluß einer »gemischten« Staudruckstabilisierung bestimmter Größe bei verschiedenen Flugstaudrücken und Schwerpunktrücklagen.

a) Steuersäule, Höhenruder und alle anderen Steuerungsteile der Höhensteuerung waren durch Gegengewichte derart ausgeglichen, daß zunächst keine Staudruck- und Längsneigungsstabilisierung vorhanden war. Das Höhenruder hatte als Kraftausgleich ein Hilfsruder. Der wichtigste aerodynamische Beiwert des Höhenleitwerks ist $\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_{r_H}}$. Dieser läßt sich aus der Messung der statischen Längsstabilität leicht berechnen. Es ist entsprechend Formel (7) der bereits oben zitierten Behandlung der statischen Stabilität

$$\Delta\left(\frac{d c_m}{d c_a}\right) = \frac{F_H\, l_h}{t\, F_R\, t_R\, G} \cdot M_R \cdot \frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_{R_H}}.$$

Aus einer Stabilitätsmessung läßt sich hieraus $\frac{\partial c_{n_H}}{\partial c_{R_H}}$ ermitteln.

b) Die konstruktive Ausführung der Staudruckstabilisierung ist schematisch in Bild 3 dargestellt; sie wurde folgendermaßen gelöst: Die Massenmomente wurden durch einen an einem Umlenkhebel U der Höhensteuerung angebrachten Arm A eingeleitet, an dem in einfacher Weise verschieden große Gewichte G angesetzt werden konnten. Dieser Umlenkhebel befand sich in der Nähe des Flugzeugschwerpunktes, so daß auf ihn nur die Normalbeschleunigung b_z aus der Abfangbewegung, nicht aber die Beschleunigungskomponente aus der überlagerten Drehung um die Querachse einwirken konnte. Die Einleitung der Federmomente mußte folgendermaßen vorgenommen werden: es war Bedingung, daß diese Momente vom Ruderausschlag völlig unabhängig sein müssen, andernfalls besteht die Möglichkeit, daß infolge der Schwingungsfähigkeit der Höhensteuerung eine Kopplung mit der Flugzeugbewegung eintritt, durch die das dynamische Verhalten des Flugzeugs entscheidend beeinflußt wird. Derartige Koppelschwingungen bergen sogar unter gewissen Verhältnissen eine ernste Gefahr (sog. »Rheinland«-Schwingung). Die Konstanz der Federmomente läßt sich durch eine einfache kinematische Anordnung erreichen, wie sie in Bild 3 dargestellt ist: An der Steuerstoßstange greift eine Zugkette K an, die an einem Ende auf einer Rolle R befestigt ist. Auf derselben Welle ist eine Scheibe S befestigt. Diese hat eine Spiralform. Auf ihrem Umfang liegt ein Zugband Z auf, an dem die Zugfeder F angreift. Die Form der Spiralscheibe S muß so gewählt werden, daß in jeder Stellung das Moment aus der Zugkraft P der Feder und dem wirksamen Hebelarm h konstant ist. Unter der Annahme, daß der Hebelarm h klein ist gegenüber dem Abstand des Federendes von der Scheibe wurde die Gleichung für die Scheibenform abgeleitet. Die Rechnung ergibt folgende Gleichung:

$$a \cdot \varphi = \arcsin \frac{r^2}{b} + \frac{1}{r^2} \cdot \sqrt{b^2 - r^4}.$$

Aus der punktweisen Berechnung läßt sich die Form der Scheibe ermitteln und ein geeigneter Abschnitt zwischen zwei φ-Werten für die praktische Ausführung auswählen. Durch Parallelschalten mehrerer Zugfedern kann man die Größe des eingeleiteten Momentes beliebig unterteilen.

IV. Versuchsergebnisse.

In den Kurventafeln ist die Dauer T einer vollen Schwingung, sowie die Dämpfung D aufgetragen. Als Dämpfung D wird das Verhältnis Schwingungszeit zu Halbwertszeit definiert. Dies entspricht physikalisch dem geläufigeren Begriff des logarithmischen Dekrements δ. Es hat sich vom Flugeigenschaftsstandpunkt aus als richtig erwiesen, nicht die Halbwertszeit selbst, sondern ihr Verhältnis zur Schwingungsdauer als Maß für die Dämpfung zu benutzen. Zwischen der hier benutzten Dämpfungsgröße D und dem log. Dekrement δ besteht die einfache Beziehung:

$$\delta = \ln\, 2 \cdot D = \sim 0{,}7\ D.$$

a) Massebehaftete Staudruckstabilisierung.

In Bild 4 sind die gemessenen Schwingungszeiten in Abhängigkeit von der Schwerpunktlage mit dem eingeleiteten Massenmoment als Parameter aufgetragen. Die Kurven zeigen alle das übliche Ansteigen der Schwingungsdauer mit Schwerpunktrückverschiebung. Hierdurch wird die statische

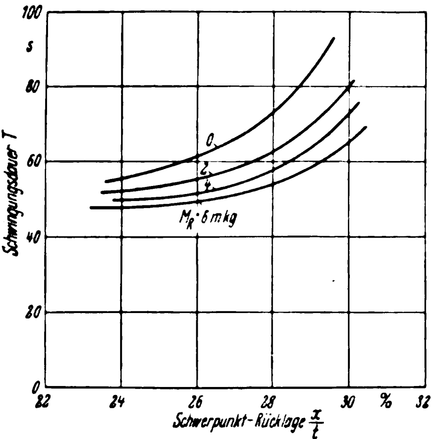


Bild. 4. Schwingungsdauer bei massebehafteter Staudruckstabilisierung.

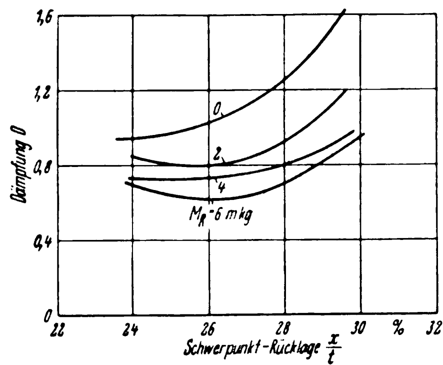


Bild 5. Dämpfung bei massebehafteter Staudruckstabilisierung.

Bild 6. Schwingungsdauer bei massefreier Staudruckstabilisierung.

Bild 7. Dämpfung bei massefreier Staudruckstabilisierung.

Bild 8. Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Größe des Zusatzmomentes.

Bild 9. Dämpfung in Abhängigkeit von der Größe des Zusatzmomentes.

Bild 10. Schwingungsdauer bei 6,4 mkg Gesamtmoment.

Bild 11. Dämpfung bei 6,4 mkg Gesamtmoment.

Stabilität kleiner. Bei zunehmender Stärke der Staudruckstabilisierung nimmt die Schwingungsdauer aus dem gleichen Grund ab. Die Schwingungsdauer nähert sich dem Wert ∞ bei derjenigen Schwerpunktlage, bei der das Flugzeug statisch indifferent ist. In Bild 5 ist in derselben Form die Dämpfung aufgetragen. Diese hat offensichtlich ein Minimum bei etwa 26,5% Schwerpunktlage. Bei größerer Rücklage steigt sie wieder an; sie wird in der Nähe der statischen Indifferenz unbestimmt. Aus der Auftragung kann entnommen werden, daß der Einfluß der Zusatzmasse die Dämpfung verringert.

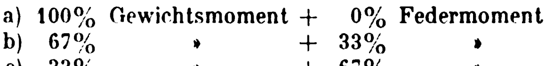
b) Massefreie Staudruckstabilisierung.

In Bild 6 ist die Schwingungsdauer aufgetragen. Während sich die Kurve für $M = 0$ mit der entsprechenden Kurve Bild 4 decken muß, zeigen die anderen Kurven einen wesentlich flacheren Verlauf. Bei $M = 6$ mkg fällt die Schwingungsdauer sogar langsam ab, wenn die Schwerpunktlage nach hinten wandert. Der Einfluß der absoluten Größe des eingeleiteten Moments ist erheblich höher als bei Bild 4; der Grund ist die der Schwingung entgegengerichtete Wirkung des Höhenruders infolge der Normalbeschleunigung beim Vorhandensein von Zusatzmassen. In Bild 7 ist die Dämpfung in der gleichen Form aufgetragen. Diese zeigt einen völlig anderen Verlauf. Mit zunehmender Schwerpunktrücklage wird sie immer kleiner und schließlich sogar negativ, d. h. das Flugzeug wird dynamisch-instabil, es führt angefachte Schwingungen aus, die man bei einer gewissen Amplitudengröße durch Eingreifen ins Ruder verhindern muß, um ein Überziehen bzw. ein Erreichen zu hoher Geschwindigkeiten zu vermeiden. Mit zunehmendem Federmoment fällt ferner die Dämpfung sehr stark ab. Legt man als untere Dämpfungsgrenze etwa $D = 0{,}4$ fest, dann kann man bei massebehafteter Staudruckstabilisierung bei jedem Zusatzmoment fliegen, bei massefreier jedoch nur bis etwa 3 mkg Federmoment.

Um den Einfluß der Zusatzmasse noch anschaulicher darzustellen, sind Schwingungsdauer und Dämpfung für dieselbe Schwerpunktlage, die etwa der rückwärtigsten entspricht, in Abhängigkeit von der Größe des eingeleiteten Momentes in Bild 8 und 9 aufgetragen. Die günstige Wirkung der Massenkräfte auf die Dämpfung ist hieraus besonders deutlich zu erkennen.

c) Gemischte Staudruckstabilisierung.

Teilt man das Gesamtmoment in ein Gewichts- und ein Federmoment auf, dann verändern sich die Eigenschaften je nachdem, ob das erstere oder letztere überwiegt. Für ein Gesamtmoment von 6,4 mkg wurde das Verhalten des Flugzeugs für folgende Variationen gemessen:



a) 100% Gewichtsmoment + 0% Federmoment
b) 67% » + 33% »
c) 33% » + 67% »
d) 0% » + 100% »

Das Ergebnis der Versuche ist in Bild 10 und 11 wiedergegeben. Je größer der Anteil des Federmomentes an dem Gesamtmoment der Staudruckstabilisierung ist, desto geringer wird die Schwingungsdauer, und zwar nimmt diese um so stärker ab, je geringer die statische Längsstabilität ist. Die Dämpfung nimmt ebenfalls mit einer Vergrößerung des Federmomentanteiles sehr stark ab. Der Verlauf der Dämpfung in Abhängigkeit vom Anteil des Federmomentes ist praktisch geradlinig.

V. Folgerungen für die praktische Anwendung.

Die Staudruckstabilisierung ist ein häufig angewendetes Hilfsmittel bei unzureichender Längsstabilität. Sehr häufig ist sie unbewußt vom Konstrukteur der Steuerung ausgeführt worden, allerdings dabei auch manchmal mit negativem Vorzeichen. Ihre Wirkung hängt fast ausschließlich von der Größe des Zusatzmomentes ab, da der wesentliche aerodynamische Einflußfaktor des Höhenleitwerkes $\frac{\partial c_n}{\partial c_{\kappa}}$ von der Flugzeuggröße fast unabhängig ist; d. h. will man bei einem Flugzeug eine bestimmte Stabilitätserhöhung erzielen, dann braucht man dazu ein bestimmtes Zusatz-

moment, das nahezu gleich groß sein muß, unabhängig davon, ob das Flugzeug klein oder groß ist. Führt man die Staudruckstabilisierung nun »massebehaftet« aus, dann wird dadurch das Trägheitsmoment der Höhensteuerung erhöht. Diese Erhöhung macht sich anteilmäßig natürlich um so weniger bemerkbar, je größer das Flugzeug ist, da die Trägheitsmomente der Höhensteuerung etwa mit der 5. Potenz der Längen bei der Flugzeugvergrößerung zunehmen und das Zusatzträgheitsmoment der Staudruckstabilisierung nahezu konstant ist. Das heißt, will man bei einem kleinen Flugzeug eine störende Zunahme der Steuerungsträgheit durch die Staudruckstabilisierung vermeiden, dann empfiehlt sich die Anwendung einer Federstabilisierung, soweit es die Dämpfung der Längsschwingung zuläßt. Bei großen Flugzeugen jedoch macht sich die Trägheitserhöhung immer wenig bemerkbar, solange das Zusatzmoment in vernünftigen Grenzen bleibt. Die Anwendung einer Feder ist jedoch auch hier angebracht, wenn die Steuerhandkräfte in der Kurve oder beim Abfangen zu groß werden. Eine Verringerung der Dämpfung muß aber hierbei in Kauf genommen werden. Andererseits könnte man sich aber sogar eine Erhöhung der Dämpfung dadurch vorstellen, wenn man den Anteil des Federmomentes negativ macht, d. h. man bringt ein großes Massenmoment an und reduziert dieses durch ein mit negativem Vorzeichen arbeitendes Federmoment auf den richtigen Betrag des Gesamtmomentes.

Führt man die Staudruckstabilisierung »massebehaftet« aus, dann hängt die obere Grenze ihrer Ausführbarkeit von der Zunahme des Beschleunigungseinflusses ab; bei kleinen Flugzeugen liegt daher diese Grenze im allgemeinen niedriger als bei großen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei mittleren Flugzeugen (5 bis 15 t Fluggewicht) ein Zusatzmoment von 3 bis 4 mkg noch keine fliegerischen Nachteile zur Folge hat.

Führt man dagegen die Staudruckstabilisierung massefrei aus, dann ist die obere Grenze durch die Abnahme der Dämpfung der Längsschwingung gegeben. Die Erfahrung zeigte, daß die Dämpfung möglichst den Wert 0,5 nicht unterschreiten soll. Fliegerisch heißt dies, daß nach höchstens zwei vollen Schwingungen die Staudruckamplitude auf die Hälfte abgeklungen sein soll.

VI. Schrifttum.

[1] H. Blenk, Über die Längsstabilität eines Flugzeuges mit losgelassenem Höhensteuer. Z. Flugtechn. Bd. 21 (1930), S. 189.

[2] H. Blenk, Über die Längsschwingungen eines Flugzeuges mit freiem Höhensteuer. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933), S. 365.

[3] R. Schmidt, Der Einfluß der Steuerungsmassen auf die Längsstabilität mit losem Ruder. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 31.

Zur Frage des geraden Sturz- und Gleitfluges bei veränderlicher Luftdichte.

Von Wilhelm Müller-München.

Bericht aus dem Institut für theoretische Physik und angewandte Mechanik der Universität München.

Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Flugzeugs beim geraden Gleit- und Sturzflug besprochen, bei dem sowohl die Veränderlichkeit der Luftdichte mit der Höhe als auch die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes vom Auftriebswert Berücksichtigung findet.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Berechnung der Bewegungsverhältnisse beim Sturzflug mit veränderlicher Luftdichte ist meist unter der Voraussetzung eines konstanten Widerstandsbeiwertes behandelt worden. Im Falle des geraden nicht senkrechten Sturz- oder Gleitfluges, der hier zunächst zur Erörterung steht, führt aber, wie ich ausgeführt habe [6] diese Annahme zu Widersprüchen mit der Wirklichkeit. Denn der gerade Flug bedingt, wenn man mit konstantem Gewicht rechnet, die Unveränderlichkeit der Auftriebskraft, die nur dadurch ermöglicht wird, daß der Beiwert c_a mit der im allgemeinen wachsenden Geschwindigkeit sich ändert. Da aber c_a und c_w sich gegenseitig bestimmen, so muß auch mit der Veränderlichkeit des Widerstandsbeiwertes c_w gerechnet werden. Es zeigt sich weiter, daß auch das Bestehen eines endlichen Grenz- oder Größtwertes der Geschwindigkeit mit dieser Veränderlichkeit der Widerstandszahl wesentlich zusammenhängt.

Es liegt daher nahe, in möglichster Anpassung an die vermessene Abhängigkeit der Beiwerte und mit Berücksichtigung der Gesetze für die Änderung der Luftdichte die bisherigen Ansätze, namentlich den neuerdings von H. Behrbohm [8] gegebenen Ansatz für die Geschwindigkeitsberechnung zu verfeinern und zu vervollständigen.

II. Aufstellung der Differentialgleichung.

Wenn man den geraden Flug voraussetzt und den Winkel zwischen Flugrichtung und Horizontalen mit $\varphi = \varphi_0$ bezeichnet, so hat man aus der Gleichgewichtsbedingung für die normale Richtung für c_a den Wert

$$c_a = \frac{2\,g \cdot G \cos\varphi_0}{v^2 \cdot \gamma F} \quad \ldots \quad (1)$$

zu entnehmen, wo γ die Luftwichte bedeutet und für die anderen Größen die üblichen Bezeichnungen gewählt sind. Man wird nun allen gewünschten Genauigkeitsforderungen dadurch gerecht, daß man für den Wert c_w einen Ansatz von der Form

$$c_w = c_{w_0} + c_1\, c_a + c_2\, c_a^2 \quad \ldots \quad (2)$$

zugrunde legt, der wegen (1) zu erkennen gibt, daß c_w von der Flächenbelastung, der Dichte und der Geschwindigkeit abhängt. Wenn wir die Geschwindigkeitshöhe

$$U = \frac{v^2}{2\,g}$$

einführen, so läßt sich der Widerstand in der Form

$$W = c_{w_0}\,\gamma F\, U + c_1 G \cos\varphi_0 + c_2 G \frac{G}{F}\,\frac{\cos^2\varphi_0}{\gamma U} \quad \ldots \quad (3)$$

schreiben. Setzt man ferner für die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dv}{d\gamma}\,\frac{d\gamma}{dz}\,\frac{dz}{ds}\,v = -v\,\frac{dv}{d\gamma}\,\frac{d\gamma}{dz}\,\sin\varphi_0 \quad \ldots \quad (4)$$

wo z die nach oben gerichtete vertikale Höhenkoordinate bezeichnet, so ergibt sich aus der logarithmischen Höhenformel ([1])

$$\gamma = \gamma_0\, e^{-\frac{z}{d}} \quad \ldots \quad (5)$$

die Beziehung

$$\frac{G}{g}\,\frac{dv}{dt} = G\,\frac{dU}{d\gamma}\,\frac{\gamma}{d}\,\sin\varphi_0.$$

Daher entsteht aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{G}{g}\,\frac{dv}{dt} = G \sin\varphi_0 - W \quad \ldots \quad (6)$$

folgende Differentialgleichung zwischen U und γ.

$$\frac{G \sin\varphi_0}{d}\,\gamma\,\frac{dU}{d\gamma} = $$
$$= G\sin\varphi_0 - c_{w_0}\,\gamma\, U F - c_1 G\cos\varphi_0 - c_2 G\,\frac{G}{F}\,\frac{\cos^2\varphi_0}{\gamma U} \quad (7)$$

Wegen der großen Werte von U bzw. der auftretenden Konstanten ist es zweckmäßig, statt U den 10^3ten Teil u einzuführen, d. h.

$$U = 10^3 \cdot u$$

zu setzen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{du}{d\gamma} + a\,u = \frac{b}{\gamma} - \frac{c}{\gamma^2 u} \quad \ldots \quad (8)$$

wenn zur Abkürzung

$$a = \frac{c_{w_0} d}{\sin\varphi_0}\,\frac{F}{G}; \qquad b = 10^{-3}\, d\,(1 - c_1 \operatorname{ctg}\varphi_0);$$
$$c = 10^{-6}\,\frac{c_2 \cos^2\varphi_0\, d}{\sin\varphi_0}\,\frac{G}{F}$$

gesetzt wird. Bevor wir zur Lösung übergehen, wollen wir noch einige Folgerungen besprechen, die unmittelbar an die Gleichung anknüpfen. Für einen Extremwert der Geschwindigkeit ergibt sich aus $\frac{du}{d\gamma} = 0$ die Beziehung

$$a\,(u\gamma)^2 - b\,(u\gamma) + c = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

d. h. eine quadratische Gleichung für das Produkt $u \cdot \gamma$. Für den praktischen Wertebereich ist

$$b^2 > 4\,a\,c,$$

so daß mit einem reellen Maximum bzw. Minimum zu rechnen ist. Bildet man die zweite Ableitung und benutzt $\frac{du}{d\gamma} = 0$, so kommt

$$\frac{d^2 u}{d\gamma^2} = \frac{2\,c - b\,(u\gamma)}{u\,\gamma^3}.$$

Zahlentafel 1. Die Konstanten der Differentialgleichung und die Werte $u_{max}\cdot\gamma$.

φ_0	b m	a m³/kg $\frac{G}{F}=50$ kg/m²	100	150	c kg/m $\frac{G}{F}=50$ kg/m²	100	150	$u_{max}\cdot\gamma$ kg/m² $\frac{G}{F}=50$ kg/m²	100	150
90°	9,49	11,901	5,951	3,967	0	0	0	0,797	1,594	2,391
80°	9,644	12,085	6,042	4,028	0,00142	0,00284	0,00426	0,793	1,587	2,379
70°	9,808	12,665	6,332	4,222	0,00579	0,01157	0,01736	0,774	1,548	2,322
60°	9,995	13,742	6,871	4,582	0,01345	0,02690	0,04035	0,726	1,452	2,178
50°	10,223	15,536	7,768	5,179	0,02508	0,05017	0,07526	0,657	1,314	1,971
45°	10,364	16,830	8,415	5,610	0,03288	0,06576	0,09864	0,613	1,225	1,839
40°	10,531	18,514	9,257	6,171	0,04679	0,09358	0,14037	0,570	1,141	1,711
30°	11,003	23,802	11,901	7,934	0,06974	0,13948	0,20922	0,456	0,9114	1,367

Der Zähler ist für den größeren Wert von $u\gamma$

$$2\,c - b\left[\frac{b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\right] = \frac{4\,a\,c - b^2 - b\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Da $b^2 > 4\,a\,c$, so ist der Zähler und damit $\frac{d^2 u}{d\gamma^2} < 0$. Man sieht also, daß das positive Vorzeichen der Wurzel einem wirklichen Größtwert der Geschwindigkeit entspricht. Ebenso läßt sich zeigen, daß das negative Vorzeichen einen Kleinstwert der Geschwindigkiet liefert, der allerdings in diesem Zusammenhang keine Bedeutung bietet. Drückt man a, b und c durch die Flugzeugkonstanten aus, so wird

$$u_{max}\cdot\gamma = \frac{G}{F}\sin\varphi_0\,\frac{1-c_1\operatorname{ctg}\varphi_0+\sqrt{1-2\,c_1\operatorname{ctg}\varphi_0+(c_1{}^2-4\,c_{w_0}c_2)\operatorname{ctg}^2\varphi_0}}{2\,c_{w_0}} \quad \ldots \quad (10)$$

Das Produkt $u_{max}\cdot\gamma$ wächst also proportional mit der Flächenbelastung (vgl. Zahlentafel 1). Beim vertikalen Sturzflug hat man $\cos\varphi_0 = 0$, d. h.

$$u_{max}\cdot\gamma = \frac{G}{F}\,\frac{1}{c_{w_0}},$$

eine Beziehung, die nur besagt, daß für das Maximum von u der Widerstand mit dem Gewicht im Gleichgewicht sich befindet.

III. Zahlenwerte.

Um sich eine Vorstellung von der Größenordnung der auftretenden Konstanten zu bilden, legen wir eine bestimmte Messung zugrunde, die sich auf die Luftkraftbeiwerte eines ganzen Flugzeugs bezieht und bereits früher für flugmechanische Rechnungen benutzt worden ist. Für die entsprechenden Konstanten der quadratischen Näherungsformel des Widerstandes können wir dann setzen

$$c_{w0} = 0{,}0627,\quad c_1 = -0{,}092,\quad c_2 = 0{,}098.$$

Die weitere Flugzeuggröße, die Flächenbelastung $\frac{G}{F}$ schwankt etwa zwischen 50 kg/m² und 200 kg/m². Wir haben in Zahlentafel 1 die Werte der Konstanten a, b, c der Differentialgleichung (8) in Abhängigkeit vom Neigungswinkel der Flugbahn gegen die Horizontale und von der Flächenbelastung zusammengestellt.

Für die Konstante der Höhenformel setzen wir $d = 9490{,}367$ in Anpassung an die bekannte Everlingsche Formel (1)

$$\gamma = \gamma_0\cdot 0{,}9^{10^{-3}\cdot z}\qquad (\gamma_0 = 1{,}2255\ \text{kg/m}^3),$$

die bis zu einer Höhe von 5000 m gilt, während für $z > 5000$ m die Formel

$$\gamma = \gamma_0\cdot 0{,}896^{10^{-3}\cdot z}$$

zu gebrauchen ist, entsprechend dem Werte $d = 91066{,}387$ für die umgerechnete Formel mit der Basis des natürlichen Logarithmensystems, vgl. Zahlentafel 2. Wenn man die polytropische Normalatmosphäre zugrunde legt, so erhält die Beziehung zwischen Luftwichte und Höhe die Form

$$\gamma = \gamma_0\,(1-\varepsilon\,z)^{\frac{1}{k-1}},$$

wo für ε und k die Werte $\varepsilon = \frac{0{,}0065}{288}$, $k = 1{,}235$ einzusetzen sind. Über die Verwendung dieser Formel wird unter Abschnitt VI berichtet werden.

IV. Das Lösungsverfahren.

Die Auflösung der Gl. (8), d. h. die Bestimmung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Luftwichte und damit von der Höhe z bzw. von der Weglänge $s = \frac{z}{\sin\varphi_0}$ bereitet mathematische Schwierigkeiten, die vor allem durch das Auftreten des letzten Gliedes auf der rechten Seite bedingt sind. Da aber die Konstante c, wie Zahlentafel 1 zeigt, namentlich für Werte von φ_0, die von 90° nicht allzu stark abweichen, wesentlich kleiner ist als a und b, so erscheint es zweckmäßig, für eine erste Näherung c überhaupt zu streichen und bei einer zweiten Näherung an Stelle von $\frac{1}{u}$ im zweiten Gliede rechts bei entsprechender Aufteilung in kleinere Teilintervalle bei der Integration, einen für jedes Intervall konstanten mittleren Wert $\left(\frac{1}{u}\right)_m$ einzuführen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir zunächst die Gleichung

$$\frac{d\,u}{d\,\gamma} + a\,u = \frac{b}{\gamma} - \frac{c\,(u^{-1})_m}{\gamma^2} = \frac{b}{\gamma} - \frac{C}{\gamma^2}$$

behandeln, die den Vorzug besitzt, linear zu sein und rechts nur die Variable γ zu enthalten. Die Auflösung geschieht mit Hilfe der Variation der bei der Lösung der homogenen Gleichung auftretenden Konstanten. Wir setzen also

$$u = f(\gamma)\,e^{-a\gamma}$$

und erhalten dann für $f(\gamma)$ die Bestimmungsgleichung

$$\frac{d\,f}{d\,\gamma} = e^{a\gamma}\left(\frac{b}{\gamma} - \frac{C}{\gamma^2}\right).$$

Damit wird

$$f = b\int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma} - C\int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma^2}.$$

Durch partielle Integration findet man aber

$$\int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma} = \frac{1}{a}\left[\frac{e^{a\gamma}}{\gamma} + \int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma^2}\right].$$

Daher wird

$$\int\frac{e^{a\gamma}}{\gamma^2}\,d\,\gamma = a\int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\,e^{a\gamma}.$$

Für f erhalten wir also den Ausdruck

$$f = (b - a\,C)\int\frac{e^{a\gamma}\,d\,\gamma}{\gamma} + C\,\frac{e^{a\gamma}}{\gamma} \quad \ldots \quad (12)$$

Zahlentafel 2. Höhen und Luftgewichte.

$10^{-3}z$ (km)	γ	$10^{-3}z$ (km)	γ	$10^{-3}z$ (km)	γ
6	0,634	4	0,804	2	0,993
5,8	0,648	3,8	0,821	1,8	1,013
5,6	0,663	3,6	0,839	1,6	1,036
5,5	0,670	3,5	0,848	1,5	1,046
5,4	0 678	3,4	0,857	1,4	1,058
5,2	0,701	3,2	0,875	1,2	1,081
5	0,724	3	0,893	1	1,103
4,8	0,739	2,8	0,913	0,8	1,126
4,6	0,755	2,6	0,931	0,6	1,151
4,5	0,763	2,5	0,942	0,5	1,163
4,4	0,771	2,4	0,951	0,4	1,175
4,2	0,787	2,2	0,972	0,2	1,20
				0	1,2255

Zahlentafel 3. Werte der Funktion $H(x) = e^{-x} \bar{E}_i(x)$.

x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$
0	$-\infty$	1,1	0,7215	2,2	0,6352	3,3	0,4485	4,4	0,3193	7,5	0,1607	13	0,0841
0,1	$-1{,}4683$	1,2	0,7356	2,3	0,6170	3,4	0,4343	4,5	0,3103	8,0	0,1477	13,5	0,0808
0,2	$-0{,}6784$	1,3	0,7417	2,4	0,5988	3,5	0,4205	4,6	0,3017	8,5	0,1372	14	0,0774
0,3	$-0{,}2243$	1,4	0,7416	2,5	0,5807	3,6	0,4073	4,7	0,2935	9,0	0,1281	14,5	0,0747
0,4	0,0702	1,5	0,7366	2,6	0,5627	3,7	0,3946	4,8	0,2856	9,5	0,1201	15	0,0719
0,5	0,2755	1,6	0,7279	2,7	0,5450	3,8	0,3824	4,9	0,2780	10,0	0,1131	15,5	0,0697
0,6	0,4225	1,7	0,7126	2,8	0,5278	3,9	0,3707	5,0	0,2708	10,5	0,1070	16	0,0675
0,7	0,5288	1,8	0,7025	2,9	0,5109	4,0	0,3595	5,5	0,2394	11	0,1014	∞	0
0,8	0,6054	1,9	0,6871	3,0	0,4946	4,1	0,3488	6,0	0,2131	11,5	0,0964		
0,9	0,6598	2,0	0,6705	3,1	0,4787	4,2	0,3386	6,5	0,1921	12	0,0919		
1,0	0,6972	2,1	0,6531	3,2	0,4633	4,3	0,3287	7,0	0,1746	12,5	0,0890		

und damit für die Geschwindigkeitshöhe

$$u = (b - a\,C)\,e^{-a\gamma} \int \frac{e^{a\gamma}\,d\gamma}{\gamma} + \frac{C}{\gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die auftretende Funktion

$$\overline{Ei}\,(a\gamma) = li\,(e^{a\gamma}) = \int_0^{\gamma} \frac{e^{a\gamma}\,d\gamma}{\gamma}$$

der sog. Integrallogarithmus ist eine Transzendente, die für $\gamma = 0$, negativ unendlich wird, für wachsende Argumente steil ansteigt und bereits für $a\gamma \sim 10$ oder > 10 unübersehbar große Werte annimmt (10). Es ist daher zweckmäßig, nicht diese Funktion $\overline{Ei}\,(x)$, sondern das auch in unserem Integral vorkommende Produkt

$$H(x) = e^{-x} \cdot \overline{Ei}\,(x)$$

zu berechnen, eine Funktion, die zwar auch aus dem Negativ-Unendlichen kommt, aber in dem zu benutzenden positiven Bereich der Argumente nach Überschreitung des bei etwa $x = 1{,}3$ liegenden Maximums von der Größe 0,742 einen für die Berechnung und für die Interpolation sehr günstigen Verlauf zeigt, der vor allem durch eine asymptotische Annäherung an die Null für gegen Unendlich wachsende Werte des Argumentes gekennzeichnet ist. Wegen der Bedeutung für unsere Rechnung haben wir diese bisher in den bekannten Tabellenwerken noch nicht benutzte Funktion $H(x)$ sowohl tabellarisch als auch graphisch dargestellt (Zahlentafel 3, Bild 1). Führen wir nun in unserer Lösung $H(a\gamma)$ ein und bestimmen die Integrationskonstante so, daß dem Anfangswert $\gamma = \gamma_a$ der Luftwichte die Geschwindigkeitshöhe $u = u_a$ entspricht, so ergibt sich durch eine kleine Rechnung

$$u = u_a\,e^{-a(\gamma - \gamma_a)} + B\left[H(a\gamma) - e^{-a(\gamma-\gamma_a)}\,H(a\gamma_a)\right] + \frac{C}{\gamma}\left[1 - \frac{\gamma}{\gamma_a}\,e^{-a(\gamma-\gamma_a)}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

wo

$$B = b - a\,c\left(\frac{1}{u}\right)_m, \quad C = c\left(\frac{1}{u}\right)_m$$

gesetzt ist. Für den Fall $\varphi_0 = 90^0$, d. h. den Fall des vertikalen Sturzflug, bei dem $c = 0$ wird, erhalten wir die vereinfachte Formel

$$u = u_a\,e^{-a(\gamma-\gamma_a)} + b\left[H(a\gamma) - e^{-a(\gamma-\gamma_a)}\,H(a\gamma_a)\right] \quad (15)$$

die auch bei den benachbarten Fällen steiler Sturzflüge ($\varphi_0 = 80^0, 70^0 \ldots$) wegen der Kleinheit von c vollkommen ausreicht. Für kleinere Winkel (also etwa $\varphi_0 \lesssim 60^0$) ist eine Korrektur mit Hilfe der genaueren Formel erforderlich, die in der Weise vorzunehmen ist, daß man die Lösung (14) intervallweise verwendet, d. h. die Anfangswerte jedesmal auf den Anfang des Intervalls bezieht und die Mittelwerte der ersten Näherung entnimmt. Die Größe des zu wählenden Intervalls hängt von dem Anstieg der Geschwindigkeit ab, der durch den Wert des Differentialquotienten

$$\frac{du}{d\gamma} = \frac{b}{\gamma} - \frac{c}{u\,\gamma^2} - a\,u$$

gemessen wird. Dieser Wert bzw. die Ableitung des reziproken Wertes $\frac{1}{u}$ nach γ

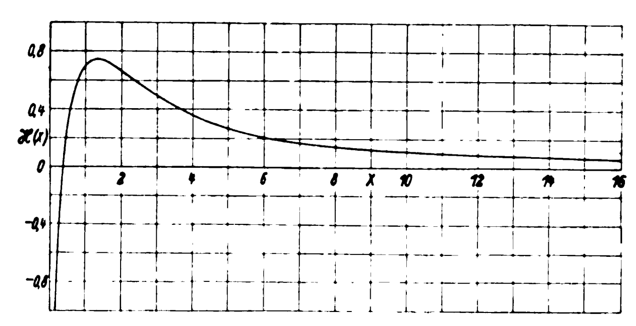


Bild 1. Darstellung der Funktion $H(x) = e^{-x}\,\overline{Ei}\,(x)$.

$$\frac{d\,(u^{-1})}{d\gamma} = \frac{a}{u} - \frac{b}{\gamma\,u^2} + \frac{c}{\gamma^2\,u^3}$$

kann übrigens auch benutzt werden, um die mittlere Geschwindigkeit bzw. den mittleren reziproken Wert der Geschwindigkeit abzuschätzen.

Es kann ferner bemerkt werden, daß man die Rechnung auch etwas anders durchführen kann, wenn man die Luftwichte γ streckenweise konstant annimmt. Setzt man z. B. $u \cdot \gamma = w$, so geht wegen

$$\frac{du}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{dw}{d\gamma} - \frac{w}{\gamma^2}$$

unsere Differentialgleichung für u über in folgende Differentialgleichung für w:

$$\frac{dw}{d\gamma} = \frac{w}{\gamma} + b - \frac{c}{w} - a\,w.$$

Wenn man nun z. B. im ersten Glied rechts mit konstantem mittleren $(\gamma^{-1})_m$ rechnet, so läßt sich die Gleichung sofort integrieren, und man erhält mit $a - (\gamma^{-1})_m = A$ folgenden Ausdruck für γ:

$$\gamma = \frac{1}{A}\left[\frac{b}{\sqrt{b^2 - 4\,A\,c}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{2\,A\,w - b}{\sqrt{b^2 - 4\,A\,c}} - \frac{1}{2}\ln\left(A\,w^2 - b\,w + c\right)\right]_{w_a}^{w} \quad (16)$$

der allerdings für die Auswertung etwas unbequem ist, aber doch für eine Kontrollrechnung eine gewisse Bedeutung haben kann.

V. Übersicht über die berechneten Fälle.

Nach dem dargelegten Verfahren haben wir zunächst für den Fall $\varphi_0 = 90^0$ den Geschwindigkeitsverlauf berechnet und aufgezeichnet bei gegebener Flächenbelastung $\frac{G}{F} = 100\ \mathrm{kg/m^2}$ und gleichbleibender Anfangshöhe $z = z_a = 5000$ m für verschiedene Anfangswerte für die Anfangsgeschwindigkeit v_a bzw. der Größe u_a, vgl. Zahlentafel 4 und Bild 2. Man sieht, daß im allgemeinen die Geschwindigkeit ansteigt bis zur Erreichung eines Größtwertes und dann langsam etwa geradlinig abfällt. Das Maximum wird bei einer um so kleineren Höhe erreicht, je geringer die Anfangsgeschwindigkeit ist. Bei gleichbleibenden Grundkonstanten des Flugzeugs, also insbesondere bei gleichbleibender Flä-

Zahlentafel 4. Zur Berechnung der Geschwindigkeit beim vertikalen Sturzflug ($\varphi_0 = 90^0$) aus der Höhe $z = z_a = 5000$ m. $\frac{G}{F} = 100$ kg/m²; $a = 5{,}951$; $b = 9{,}49$, $c = 0$.

z	$a\gamma$	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s	u	v m/s
5000	4,306	0	0	0,1274	50	0,2867	75	0,5097	100	0,7963	125	1,1468	150	1,5610	175	2,204	208
4798	4,4	0,1955	61,8	0,3115	78	0,4565	94,6	0,6595	113,7	0,9201	134,1	1,2396	155,9	1,6165	178	2,2018	207,9
4376	4,6	0,5428	106,3	0,6378	111,9	0,7565	122,2	0,9227	134,6	1,1363	149,3	1,3977	165,6	1,7062	183	2,1854	207,1
3969	4,8	0,8104	126,1	0,8881	132	0,9853	139,1	1,1214	148,3	1,2961	159,5	1,5103	172,2	1,7634	186,2	2,1553	205,6
3583	5,0	1,0145	141,1	1,0781	145,5	1,1578	150,6	1,2691	157,8	1,4122	166,5	1,5875	176,5	1,7944	187,8	2,1156	203,7
2680	5,5	1,3286	161,4	1,3672	164	1,4155	166,7	1,4830	170,6	1,5698	175,4	1,6761	181,2	1,8016	188,1	1,9964	197,9
1854	6	1,4501	168,7	1,4735	170	1,5029	171,7	1,5438	174	1,5964	176,9	1,6609	180,6	1,7370	184,6	1,8552	190,8
1093	6,5	1,4757	170,2	1,4899	171	1,5077	172,	1,5325	173,4	1,5645	175,2	1,6036	177,5	1,6498	180	1,7214	183,8
388,6	7,0	1,4463	168,4	1,4549	169	1,4667	169,7	1,4809	170,4	1,5001	171,55	1,5238	173	1,6015	177,5	1,5953	176,9

Zahlentafel 5. Sturzfluggeschwindigkeiten bei verschiedener Flächenbelastung. $v_a = 100$ m/s, $z_a = 5000$ m.

$\frac{G}{F} = 50$ kg/m²					$\frac{G}{F} = 100$ kg/m²					$\frac{G}{F} = 150$ kg/m²				
γ	$a\gamma$	z	u	v	γ	$a\gamma$	z	u	v	γ	$a\gamma$	z	u	v
0,724	8,612	5000	0,5097	100	0,724	4,306	5000	0,5097	100	0,724	2,871	5000	0,5097	100
0,756	9,0	4585	0,6912	116,5	0,739	4,4	4798	0,6595	113,7	0,756	3,0	4574	0,8390	128,3
0,840	10	3583	0,8807	131,5	0,773	4,6	4376	0,9227	134,6	0,857	3,4	3386	1,5515	174,6
0,924	11	2680	0,8914	132,2	0,8065	4,8	3969	1,1214	148,3	0,958	3,8	2320	1,8997	193,1
1,008	12	1854	0,8465	128,9	0,924	5,5	2680	1,4830	170,6	1,059	4,2	1377	2,054	201,2
1,092	13	1093	0,7883	124,4	1,092	6,5	1093	1,5325	173,4	1,16	4,6	522	2,0879	202,4
1.176	14	388,6	0,7291	119,5	1,176	7,0	388,6	1,4808	170,4	1,21	4,8	121	2,0744	202

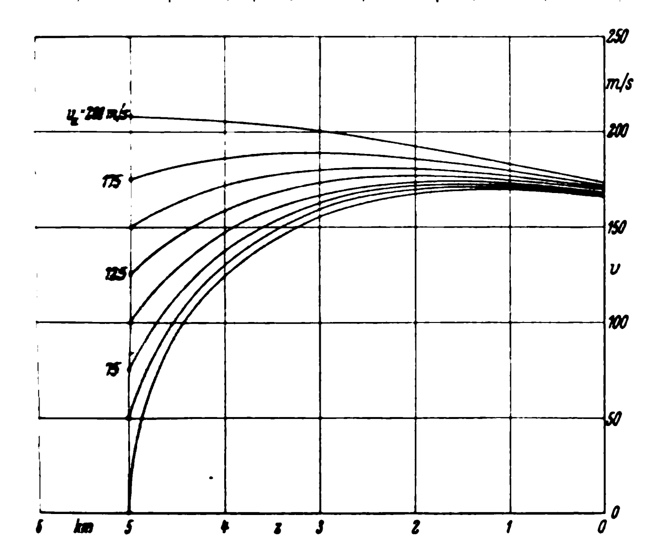


Bild 2. Geschwindigkeitsverlauf beim senkrechten Sturzflug aus derselben Höhe ($z = 5000$ m) mit verschiedener Anfangsgeschwindigkeit v_a.

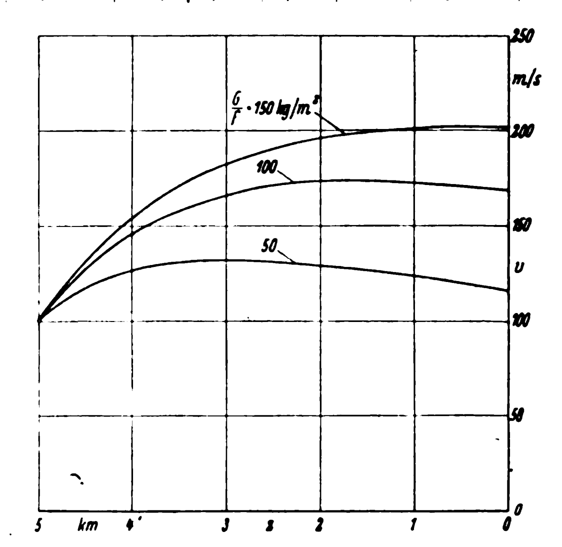


Bild 3. Geschwindigkeitsverlauf bei senkrechtem Sturzflug bei verschiedener Flächenbelastung $\frac{G}{F}$.

chenbelastung ergeben sämtliche Maxima der Geschwindigkeit denselben Wert des Produktes

$$u_{\max} \cdot \gamma = \frac{b}{a}; \quad \text{bzw.} \quad u_{\max} \cdot a\,\gamma = b,$$

der in unserem Fall 9,49 beträgt. Wenn man in dieser Gleichung für γ den Anfangswert des Luftgewichtes einsetzt, so erhält man denjenigen Wert für die Anfangsgeschwindigkeit, der mit dem Maximum zusammenfällt. In unserem Fall ergibt sich für diesen Wert $v = 208$ m/s. Zahlentafel 5 bzw. Bild 3 soll ferner den Einfluß der Flächenbelastung auf den Geschwindigkeitsablauf zur Anschauung bringen.

Die weitere Berechnung bezieht sich auf gerade Gleit- bzw. Sturzflüge, die gegen die Waagerechte Winkel $< 90^0$ einschließen. Um den Wert der geschilderten Näherungsrechnung beurteilen zu können, haben wir die beiden Fälle $\varphi_0 = 60^0$, 45^0 genauer behandelt, besonders den zweiten Fall $\varphi_0 = 45^0$ unter verhältnismäßig ungünstigen Verhältnissen, d. h. bei kleiner Anfangsgeschwindigkeit $v_a = 50$ m/s und großer Ausgangshöhe $z_a = 6000$ m. Zum Vergleich sind die ersten und zweiten Näherungswerte für u und v für die beiden Fälle zusammengestellt, die nur geringe Unterschiede aufweisen und zwar für den Fall $\varphi_0 = 45^0$ etwa höchstens 2% bei den u-Werten und bis 1,5 m/s bei den v-Werten, für den Fall $\varphi_0 = 60^0$ ungefähr die Hälfte, Zahlentafel 6 und 7 sowie Bild 4. Die unter (10) gegebene Formel für das Maxima für u kann dabei als Probe für die Richtigkeit der Rechnung verwendet werden.

VI. Berechnung bei polytropischer Atmosphäre.

Wenn man auf die Temperaturabnahme mit der Höhe z Rücksicht nimmt und die allgemeine, auf die Normalverhältnisse bezogene Formel

$$\gamma = \gamma_0\,(1 - \varepsilon z)^{\frac{1}{k-1}}$$

mit $\varepsilon = \frac{0{,}0065}{288}$, $k = 1{,}235$ zugrunde legt, so erhält man mit Benutzung von

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{\varepsilon}{k-1}\,\gamma_0\,(1 - \varepsilon z)^{\frac{2-k}{k-1}} = -\frac{\varepsilon}{k-1}\,\gamma_0\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{2-k} \qquad (17)$$

aus der ursprünglichen Gl. (6) die Differentialgleichung zwischen der Geschwindigkeitshöhe und der Luftwichte

$$\frac{dU}{d\gamma}\,\frac{\varepsilon}{k-1}\,\gamma_0^{k-1} \cdot \gamma^{2-k} = 1 - c_w\,U\,\gamma\,\frac{F}{G\sin\varphi_0} \quad . \quad . \quad (18)$$

Setzt man wieder für c_a und c_w die früher benutzten Ausdrücke (1) und (2) ein, so geht (18) über in

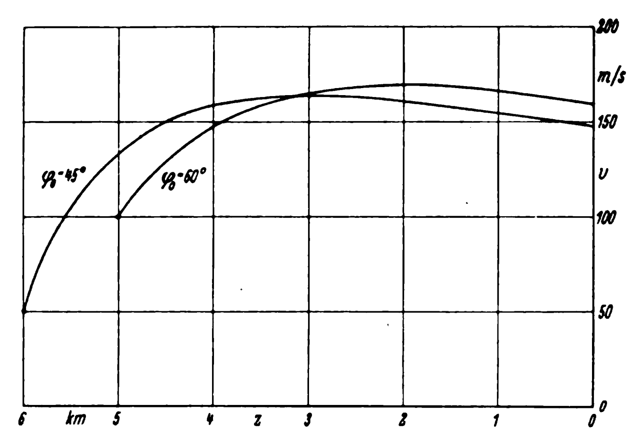


Bild 4. Geschwindigkeitsverlauf bei geradem Gleitflug unter $\varphi_0 = 60°$ und $45°$.

$$\frac{dU}{d\gamma}\,\frac{\varepsilon}{k-1}\,\gamma_0^{k-1}\,\gamma^{2-k} =$$
$$= (1 - c_1 \operatorname{ctg}\varphi_0) - c_w \frac{F}{G\sin\varphi_0}\,U\gamma - c_2 \frac{G\cos^2\varphi_0}{F\sin\varphi_0}\,\frac{1}{U\gamma} \quad (18\,a)$$

Es ist nun vorteilhaft, statt γ die Variable $x = \gamma^{k-1}$ einzuführen. Damit ergibt sich für $u = 10^{-3}\cdot U$ und x eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{du}{dx} = b - a\,\frac{k}{k-1}\,u\cdot x^{\frac{1}{k-1}} - \frac{c}{u\,x^{\frac{1}{k-1}}} \quad . \; . \; . \; (19)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$a = \frac{c_{w_0} F \frac{k-1}{k}}{\varepsilon\,\gamma_0^{k-1}\,G\sin\varphi_0}; \qquad 10^3\,b = \frac{1 - c_1\operatorname{ctg}\varphi_0}{\varepsilon\,\gamma_0^{k-1}};$$

$$10^6\,c = \frac{c_2 \frac{G}{F}\cos^2\varphi_0}{\varepsilon\,\gamma_0^{k-1}\sin\varphi_0}.$$

Vernachlässigen wir das letzte Glied, setzen wir also $c = 0$ und führen die Substitution

$$u = f(x)\cdot e^{-a x^{\frac{k}{k-1}}}$$

ein, so kommt mit $\frac{k}{k-1} = \lambda$ für die unbestimmte Funktion f der Ausdruck

$$f = b\int e^{a x^\lambda}\,dx$$

und daher für u das unbestimmte Integral

$$u = b\,e^{-a x^\lambda}\int e^{a x^\lambda}\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Setzt man weiter

$$a^{\frac{k-1}{k}}\,x = y = a^{\frac{k-1}{k}}\cdot\gamma\,k,$$

so wird

$$x = a^\lambda\,y = \varkappa\,y$$

und

$$u = \varkappa\,b\,e^{-y^\lambda}\int e^{y^\lambda}\,dy.$$

Mit Einführung der transzendenten Funktion

$$\overline{E}_\lambda(y) = \int_0^y e^{y^\lambda}\,dy$$

erhält man schließlich mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen

$$u = u_a\,e^{-(y^\lambda - y_a^\lambda)} + \varkappa\,b\,e^{-y^\lambda}\,[\overline{E}_\lambda(y) - \overline{E}_\lambda(y_a)] \quad . \; (21)$$

Zahlentafel 6. Geschwindigkeitsverlauf beim geraden Gleitflug mit $\varphi_0 = 60^0$.

$a = 6{,}871,\; b = 9{,}995,\; c = 0{,}0269.$

Erste Näherung					Zweite Näherung	
γ	$\gamma\cdot a$	z	u	v m/s	u	v m/s
0,724	4,972	5000	0,5097	100	0,5097	100
0,728	5,0	4948	0,5661	105,4	0,5652	105,3
0,80	5,5	4043	1,105	147,2	1,089	146,2
0,873	6,0	3220	1,348	162,6	1,337	161,9
0,946	6,5	2457	1,443	168,3	1,440	168,1
1,019	7,0	1757	1,458	169,1	1,453	168,8
1,092	7,5	1103	1,431	167,6	1,428	167,4
1,17	8,0	488	1,371	164	1,368	163,8

Zahlentafel 7. Geschwindigkeitsverlauf beim geraden Gleitflug mit $\varphi_0 = 45^0$.

$a = 8{,}415;\; b = 10{,}3635,\; c = 0{,}0658,\; v_a = 50$ m/s.

Erste Näherung					Zweite Näherung	
γ	$\gamma\cdot a$	z	u	v m/s	u	v m/s
0,634	5,336	6000	0,1274	50	0,1274	50
0,642	5,4	5891	0,2397	68,57	0,2324	67,53
0,653	5,5	5724	0,3983	88,39	0,3857	86,99
0,677	5,7	5398	0,6596	113,70	0,6406	112,11
0,713	6,0	5035	0,9455	136,21	0,9250	134,72
0,7724	6,5	4381	1,2244	154,99	1,2076	153,93
0,832	7,0	3677	1,3444	162,41	1,3308	161,56
0,891	7,5	3023	1,3836	164,76	1,3717	164,05
0,951	8,0	2410	1,3593	163,31	1,3496	162,72
1,01	8,5	1835	1,3185	160,84	1,3094	160,28
1,069	9,0	1292	1,2646	157,52	1,2570	156,94
1,129	9,5	779	1,2073	153,91	1,1998	153,44
1,188	10	292	1,1495	150,18	1,1433	149,70

oder mit $e^{-y^\lambda}\cdot E_\lambda(y) = H_\lambda(y)$:

$$u = u_a\,e^{-(y^\lambda - y_a^\lambda)} + a^\lambda\,b\,[H_\lambda(y) - e^{-(y^\lambda - y_a^\lambda)}\,H_\lambda(y_a)] \quad (21\,a)$$

Da eine Tafel der Funktionen $\overline{E}_\lambda(y)$ bzw. $H_\lambda(y)$ für nicht-ganzzahlige λ-Werte, wie sie hier gebraucht werden, nicht vorhanden ist, so mußte auf weitere Auswertung der Formeln verzichtet werden. Ich hoffe aber, auf die Rechnung später zurückzukommen.

VII. Schrifttum.

[1] E. Everling, Der Aufstieg von Flugzeugen. Z. Flugt. Mot. Bd. 7 (1916), S. 124 bis 132.

[2] P. Brenner, Die Steigleistungen von Flugzeugen. Z. Flugt. Mot. Bd. 15 (1924), S. 61 bis 65.

[3] Fr. Becker, Der Sturzflug in veränderlicher Luftdichte. Z. Flugt. Mot. Bd. 23 (1932), S. 659.

[4] F. N. Scheubel, Geschwindigkeits- und Staudruckverlauf im senkrechten Sturzflug. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 371.

[5] Wilh. Müller, Zum Problem der Längsbewegung eines Flugzeugs. Z. ang. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 193.

[6] Wilh. Müller, Zur Berechnung von beschleunigten Längsbewegungen eines Flugzeugs. Ingen. Archiv Bd. 11 (1940), S. 99 bis 115.

[7] E. Groth, Berechnung von Sturzfluggeschwindigkeiten. Luftwissen Bd. 7 (1940), S. 31.

[8] H. Behrbohm, Graphische Konstruktion von Sturzfluggeschwindigkeiten. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 167.

[9] Chr. Dahmen, Eine einfache Methode zur Untersuchung allgemeinerer Längsbewegungen eines Flugzeugs. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 221, 226.

[10] E. Jahnke, u. Fr. Emde, Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1938, S. 2 bis 8.

Kurventafeln zur Abkürzung der Abwindrechnung nach Multhopp und zwei Anwendungsbeispiele.

Von G. Braun und H. Scharn.

Bericht aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Die Berechnung des Abwindes am Leitwerk nach Multhopp erfolgt in mehreren Schritten, von denen die Ermittlung des Abwindes innerhalb der abgehenden Wirbelschicht den größten Zeitaufwand erfordert. Es werden allgemein gültige Kurventafeln mitgeteilt, durch deren Anwendung sich der Zeitaufwand für die gesamte Rechnung um etwa die Hälfte verringern läßt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Unter den bekannten Methoden zur Berechnung des Abwindes hinter Tragflügeln ist die von Multhopp [1] die universellste. Sieht man von den speziellen Anordnungen ab, für welche der Abwind von Silverstein und Katzoff [2, 3] schon errechnet und in Form von Kurventafeln zusammengestellt worden ist, so führt das Verfahren von Multhopp auch von allen am schnellsten zum Ziele. Für die Praxis dürfte die Kenntnis des Abwindes bei drei Anstellwinkeln ausreichen, um den gesamten normalen Flugbereich zu überdecken. Der hierfür notwendige Zeitaufwand beträgt etwa 20 h. Da die Aufgabe der Abwindrechnung in der Praxis öfters auftritt, schien der Versuch lohnend, diesen Aufwand durch Aufstellung allgemein gültiger Hilfsmittel zu verringern.

II. Der Rechnungsgang.

Da diese Arbeit gleichzeitig als Rechenanleitung dienen und für sich allein verständlich sein soll, so seien zunächst die allgemeinen Voraussetzungen zusammengestellt:

1. Der Abstand zwischen tragender Linie des Flügels und des Leitwerks darf nicht kleiner sein als das 1,75fache der mittleren Flügeltiefe im Leitwerksbereich, damit der durch den Unterschied zum gewölbten Tragflügel endlicher Tiefe und der durch das Multhoppsche Integrationsverfahren bedingte mittlere Abwindfehler am Leitwerk nicht größer als 2% wird.
2. Die Zirkulationsverteilung über die Tragflügelspannweite muß innerhalb der Leitwerksspannweite soweit gleichförmig sein, daß die rechnerisch zu ermittelnde Verwerfung der abgehenden Wirbelfläche innerhalb der Leitwerksspannweite vernachlässigbar bleibt.
3. Die Pfeilung des Flügels darf nicht zu stark sein, d. h. nicht größer als etwa 20°. Der V-Stellungswinkel darf nur so groß sein, daß die abgehende Wirbelfläche dadurch nicht wesentlich verformt wird. Hierfür ist ein Maß, daß in einem speziellen Fall 3,5° V-Winkel erst eine zusätzliche Verformung von 2% ergab.
4. Vernachlässigbar kleine Belastung der Schraube.
5. Vernachlässigbar kleiner Rumpfeinfluß.

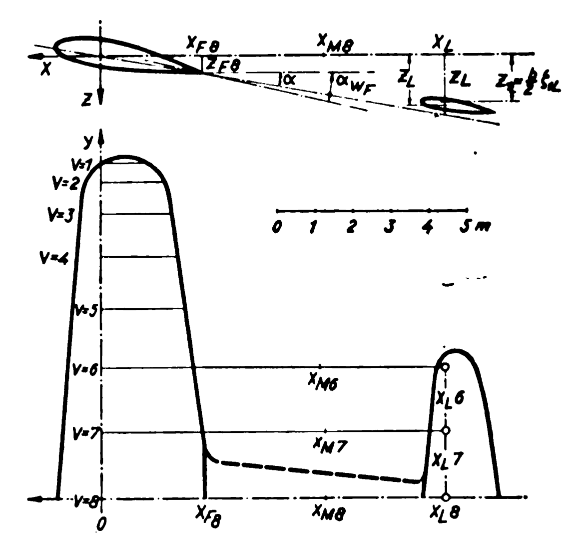


Bild 1. Das der Rechnung zugrunde zu legende Koordinatensystem und die Geometrie des Beispiels 1.

III. Rechenschema und zwei Beispiele.

a) Die vorzunehmenden Rechenschritte sind:

1. Es wird das in Bild 1 dargestellte strömungsfeste Koordinatensystem

$$x = \frac{b}{2}\,\xi;\quad y = \frac{b}{2}\,\eta;\quad z = \frac{b}{2}\,\zeta$$

eingeführt und nach dem Verfahren von Multhopp die dimensionslosen Zirkulationen

$$\gamma_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{b \cdot V}$$

in den Spannweitenteilpunkten $\eta_1 \ldots \eta_\nu \ldots \eta_8$ errechnet, die zu einer Aufteilung mit $m = 15$ Teilpunkten gehören. Der hierfür notwendige Arbeitsaufwand ist in der Angabe der für die Abwindrechnung notwendigen Zeit nicht mit einbegriffen, da diese Rechnung auch für andere Zwecke notwendig ist.

2. Es werden die Abwindwinkel

$$\alpha_w\,(\xi,\,\eta_\nu,\,\zeta_1) = 2\,b_{\nu\nu} \cdot \gamma_\nu - \sum_1^{m}{}' A_{\nu n} \cdot \gamma_n;\quad \xi < 0 \qquad (1)$$

in der zunächst noch unbekannten Höhe ζ_1 der Wirbelschicht für die Werte $\xi = \xi_L$ am Leitwerksort und für die Werte

$$\xi = \frac{2\,x_M}{b} = \xi_M = \frac{\xi_L + \xi_F}{2}$$

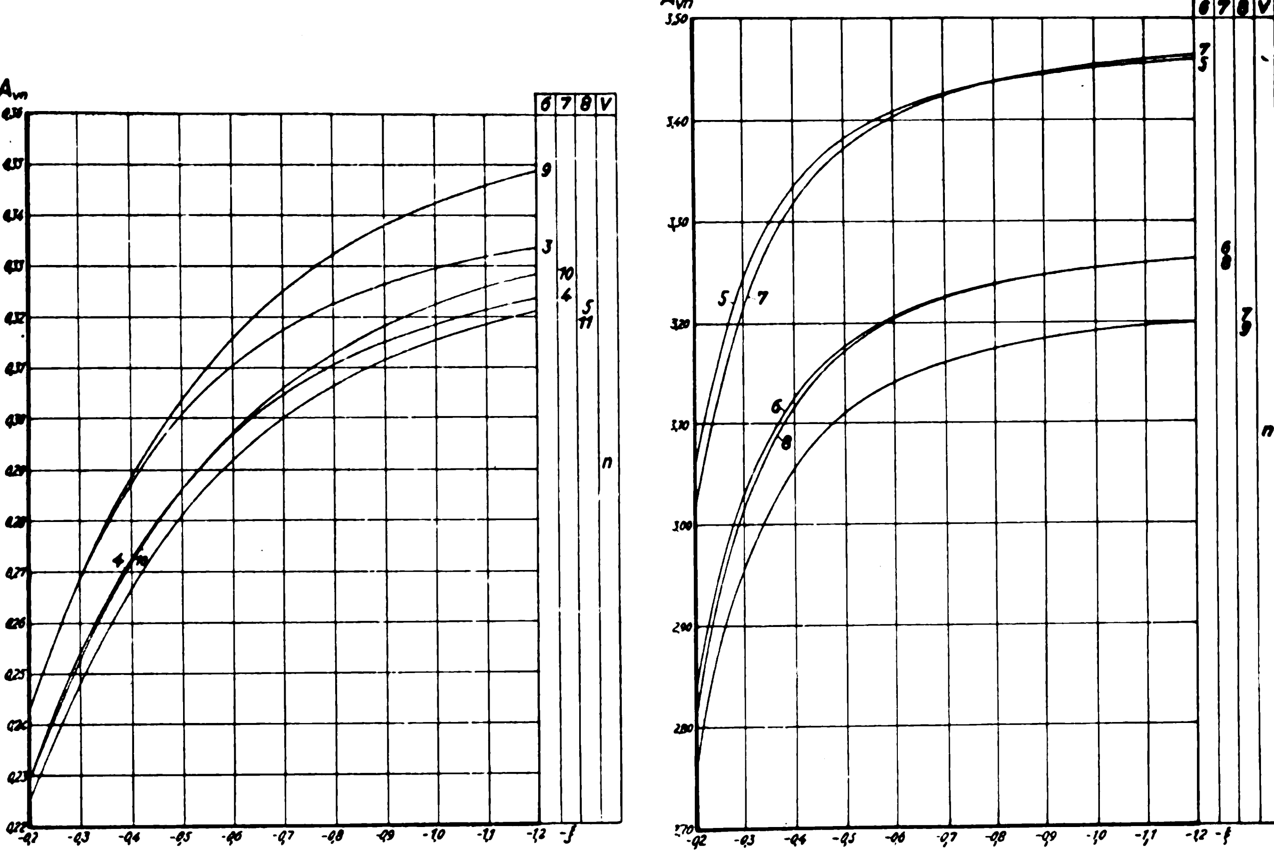


Bild 2a. Die Koeffizienten $A_{\nu n}$ zur Abwindberechnung nach Gl. (1).

(Zwischenpunkt vgl. Bild 1) errechnet. Hierbei bedeuten

$$A_{\nu n} = b_{\nu n}\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\eta_\nu - \eta_n)^2}}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und die $b_{\nu n}$ sind die von Multhopp [4] zur Auftriebsverteilungsrechnung eingeführten und tabulierten Koeffizienten, die den Abwindbeitrag der Zirkulation γ_n an der Stelle η_ν der tragenden Linie geben. ξ_F ist die ξ-Koordinate der Flügelhinterkante (vgl. Bild 1).

Die Errechnung der $A_{\nu n}$ macht bei weitem die meiste Arbeit. Diese Arbeit wird jedoch für den Fall $m = 15$[1]) durch Benutzung der Bilder 2a und 2b auf eine einfache Kurvenablesung verringert. Um ein längeres Suchen auf den Kurvenblättern zu vermeiden, liest man die $A_{\nu n}$ in der auf den Kurvenblättern gegebenen Reihenfolge ab und trägt sie in den Zahlentafeln an den richtigen Stellen ein. Der Zeiger νn ist auf dem rechten Rande der Kurvenblätter immer an der Stelle vermerkt, wo die zugehörige Kurve auf den Rand stößt. Wo die Kurven sich überschneiden oder so eng beieinander liegen, daß die Zuordnung aus der Randbemerkung allein nicht genügend eindeutig erschien, ist der Zeiger n nochmals an die Kurven geschrieben worden. Die Maßstäbe der Kurventafeln sind so eingerichtet, daß man bei allen praktisch vorkommenden Fällen mit höchstens 0,5% Fehler rechnen kann, wenn die Ablesegenauigkeit 0,25 mm nicht überschreitet.

3. Als dritter Schritt wird aus den eben ermittelten Abwindwerten $\alpha_{w L \nu}$ am Leitwerk und $\alpha_{w M \nu}$ an der Zwischenstelle die Absenkung ζ_{1L} der Wirbelschicht am Leitwerksort durch Integration über x errechnet nach der Formel:

(Simpsonsche Regel)

$$\zeta_{1L} = \zeta_F + \frac{\xi_F - \xi_M}{3}\left[\alpha_{wF} + 4\,\alpha_{wM} + \alpha_{wL}\right] \quad . \; . \; . \quad (3)$$

α_{wF} ist dabei der Abströmwinkel an der Flügelhinterkante (vgl. Bild 1).

[1]) Entsprechende Tafeln für $m = 31$ Teilpunkte können vom Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, bezogen werden.

4. Der Abwindwinkel am Leitwerksort ergibt sich endlich als

$$\alpha_w(\xi_L, \eta_\nu, \zeta_L) = \alpha_w(\xi_L, \eta_\nu, \zeta_{1L}) + (\zeta_L - \zeta_{1L}) \cdot \frac{d^2\gamma}{d\eta^2} \quad (4)$$

Man braucht also jetzt, nachdem ζ_1 bekannt ist, nur noch ζ_L aus einer Zeichnung (Bild 1) zu entnehmen, die Auftriebsverteilung zweimal zu differenzieren und in die Gl. (4) einzusetzen.

b) Zwei Beispiele. Zur Veranschaulichung sei das Rechenergebnis zweier Beispiele angeführt:

Beispiel 1. Es handelt sich um die in Bild 1 dargestellte Anordnung. Der Flügel ist unverwunden. Für den Wert $c_a = 0{,}7$ des Flügels, was einem auf die Nullauftriebsrichtung bezogenen Anstellwinkel $\alpha - \alpha_0 = 9{,}22°$ entspricht, sei die gesamte Rechnung zur Veranschaulichung des notwendigen Arbeitsaufwandes abgedruckt. Die angegebenen vier Schritte der Rechnung sehen folgendermaßen aus, Zahlentafel 1 bis 4.

Zahlentafel 1a. Lagenverhältnisse (aus Bild 1 zu entnehmen).

	m = 15		Flügelhinterkante			Leitwerk		Zw.-Punkt
ν	η_ν	$b_{\nu\nu}$	ξ_F	ζ_F	α_{wF}	ξ_L	ζ_L	$\xi_M = \frac{\xi_F + \xi_L}{2}$
6	0,3827	4,3295	— 0,267	0,033	0,227	— 1,01	0,15	— 0,639
7	0,1951	4,0786	— 0,298	0,05	0,227	— 1,01	0,15	— 0,655
8	0	4,0000	— 0,298	0,05	0,227	— 1,01	0,15	— 0,655

Zahlentafel 1b. Auftriebsverteilung.

ν	(15) 1	(14) 2	(13) 3	(12) 4	(11) 5	(10) 6	(9) 7	8
$\eta\nu$	0,9808	0,9239	0,8315	0,7071	0,5556	0,3827	0,1951	0
$\gamma\nu$	0,11	0,206	0,273	0,326	0,372	0,413	0,446	0,468
$\frac{\partial^2\gamma}{\partial\eta^2}$						−0,045	−0,015	0

Zahlentafel 2. Abwind innerhalb der Wirbelschicht für die Punkte $(\xi_L, \eta_\nu, \zeta_{1L})$ und $(\xi_M, \eta_\nu, \zeta_{1M})$.

$\nu = 6$					
ξ	$-1{,}01$	$-0{,}639$		$-1{,}01$	$-0{,}639$
n	A_{6n}		γ_n	$A_{6n}\cdot\gamma_n$	
1	0,0634	0,059	0,110	0,0070	0,0065
3	0,330	0,313	0,273	0,0902	0,0855
5	3,452	3,416	0,372	1,285	1,270
7	3,455	3,413	0,446	1,538	1,523
9	0,343	0,3197	0,446	0,1526	0,1426
11	0,1023	0,0923	0,372	0,0381	0,0343
13	0,0386	0,0346	0,273	0,0106	0,0095
15	0,0106	0,0094	0,110	0,0012	0,001
$\Sigma A_{6n}\cdot\gamma_n$				3,123	3,072
$2\cdot b_{66}\cdot\gamma_6$				3,578	3,578
α_{w6}			$(\bar\alpha = 1)$ . .	0,452	0,506
α_{w6}			$(\bar\alpha = 0{,}161)$	0,0728	0,0815

$\nu = 7$					
ξ	$-1{,}01$	$-0{,}655$		$-1{,}01$	$-0{,}655$
n	A_{7n}		γ_n	$A_{7n}\cdot\gamma_n$	
2	0,0815	0,0751	0,206	0,0168	0,0155
4	0,319	0,3015	0,326	0,104	0,0983
6	3,254	3,219	0,413	1,345	1,329
8	3,254	3,215	0,468	1,524	1,505
10	0,3232	0,3025	0,413	0,0135	0,125
12	0,0948	0,0861	0,326	0,0309	0,0281
14	0,0318	0,0288	0,206	0,0066	0,0059
$\Sigma A_{7n}\cdot\gamma_n$				3,161	3,107
$2\cdot b_{77}\cdot\gamma_7$				3,640	3,640
α_{w7}			$(\bar\alpha = 1)$ . .	0,479	0,533
α_{w7}			$(\bar\alpha = 0{,}161)$	0,0771	0,0858

$\nu = 8$					
ξ	$-1{,}01$	$-0{,}655$		$-1{,}01$	$-0{,}655$
n	A_{8n}		γ_n	$A_{8n}\cdot\gamma_n$	
1	0,0218	0,0198	0,110	0,0024	0,0022
3	0,089	0,0813	0,273	0,0243	0,0222
5	0,316	0,297	0,372	0,1175	0,1105
7	3,192	3,154	0,446	1,425	1,407
9	3,192	3,154	0,446	1,425	1,407
11	0,316	0,297	0,372	0,1175	0,1105
12	0,089	0,0813	0,273	0,0243	0,0222
13	0,0218	0,0198	0,110	0,0024	0,0022
$\Sigma A_{8n}\cdot\gamma_n$				3,138	3,084
$2 b_{88}\cdot\gamma_8$				3,744	3,744
α_{w8}			$(\bar\alpha = 1)$ . .	0,606	0,660
α_{w8}			$(\bar\alpha = 0{,}161)$	0,0976	0,106

Zahlentafel 3. Absenkung ζ_{1L} der Wirbelschicht am Leitwerk.

ν	6	7	8
α_{wF}	0,227	0,227	0,227
$4\,\alpha_{wM}$	0,326	0 343	0,425
α_{wL}	0,0728	0,0771	0,0976
$\Sigma\,\alpha_w\,(\xi)$	0,6258	0,6471	0,7496
$\delta = (\xi_F - \xi_M)\cdot\frac{1}{3}$	0,124	0,119	0,119
$\delta\cdot\Sigma\,\alpha_w\,(\xi)$	0,0776	0,077	0,0892
ζ_F	0,033	0,05	0,05
ζ_{1L}	0,1106	0,127	0,1392

Zahlentafel 4. Der Abwind $\alpha_w\,(\xi_L, \eta_\nu, \zeta_L)$ am Leitwerk.

ν	6	7	8
$\zeta_L - \zeta_{1L}$	0,039	0,023	0,011
$d^2\gamma/d\eta^2$	$-0{,}0451$	$-0{,}0145$	0
$(\zeta_L - \zeta_{1L})\cdot d^2\gamma/d\eta^2$	$-0{,}0017$	$-0{,}0003$	0
$\alpha_w\,(\zeta_{1L})$	0,0728	0,0771	0,0976
$\alpha_w\,(\zeta_L)$	0,0711	0,0768	0,0976

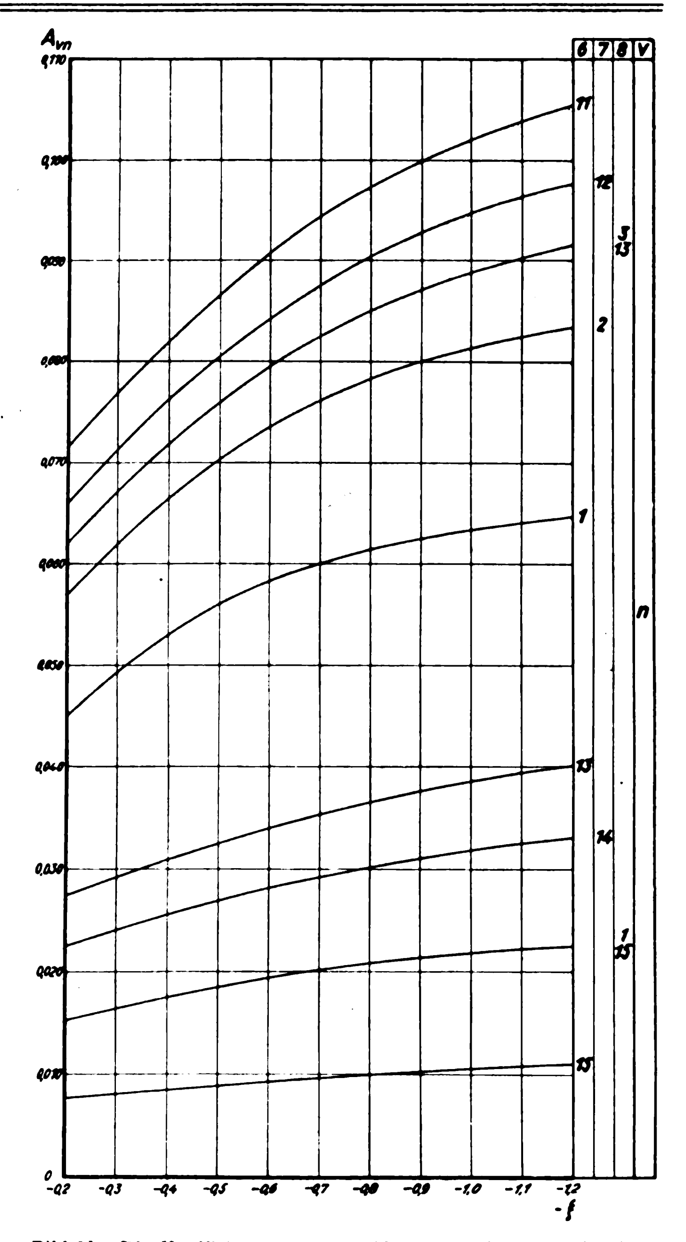


Bild 2b. Die Koeffizienten $A_{\nu n}$ zur Abwindberechnung nach Gl. (1).

Das Ergebnis der Rechnung ist zusammen mit dem Rechenergebnis für $c_a = 0{,}2$ in Bild 3 und 4 aufgetragen. In Bild 3 sieht man den Abwind an den für die Integration (3) benötigten Punkten ξ_F, ξ_M, ξ_L innerhalb der Wirbelschicht. Die Absenkung der Wirbelschicht ist in Bild 4 gezeichnet. Die Wirbelschicht ist im Leitwerksbereich nahezu eben, so daß die Voraussetzung 2 erfüllt ist. Bild 5 zeigt den Abwind am Ort des Leitwerks.

Beispiel 2. Aufwind vor dem Tragflügel. Als Gegenstück zum ersten Beispiel soll der Aufwind vor dem Tragflügel an Hand des Entenflugzeugs FW 19a errechnet werden. Die gegenseitige Lage von Flügel und Leitwerk ist aus Bild 6 zu ersehen. Der Flügel ist um 4° verwunden. Die Entenbauweise hat heute insofern ein gewisses Interesse, als bei ihr alle vom Tragflügel- und Schraubenstrahlabwind herrührenden Schwierigkeiten fortfallen.

Da hier die Lage des Leitwerks zu den tragenden und abgehenden Wirbeln eine andere ist als beim Normalflugzeug, so erhält der Ausdruck für den Abwind eine etwas andere Form. Für die Höhenlage der Wirbelschicht ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$\alpha_w\,(\xi, \eta_\nu, \zeta_1) = -\sum_1^{m}{}' \gamma_n\,(2\,b_{\nu n} - A_{\nu n}); \quad \xi > 0 \qquad (5)$$

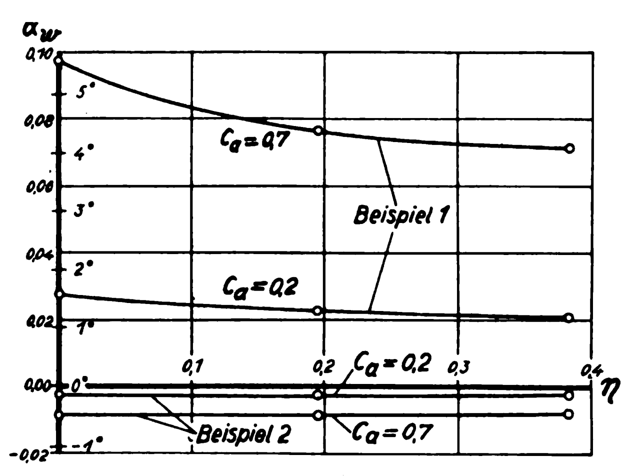


Bild 3. Abwind im Leitwerksbereich innerhalb der Wirbelschicht für das Beispiel 1.

Bild 5. Abwind über Leitwerksspannweite für die Beispiele 1 und 2.

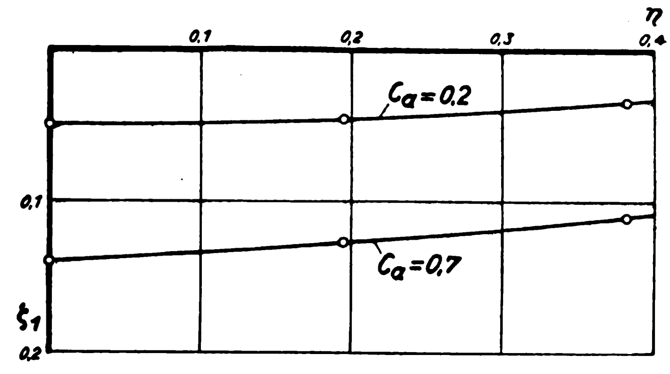


Bild 4. Die Absenkung der Wirbelschicht in Leitwerksrücklage ξ_L für das Beispiel 1.

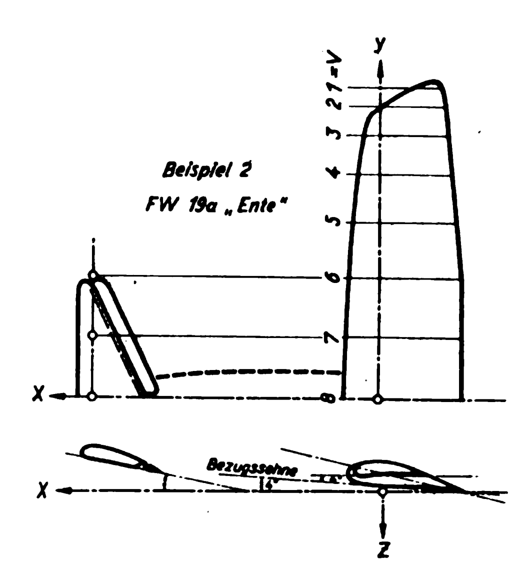


Bild 6. Die gegenseitige Lage von Flügel und Leitwerk für das Flugzeug FW 19a »Ente«.

Hierbei haben die Buchstaben die gleiche Bedeutung wie früher. Liegt das Leitwerk nicht in der Höhe der nach vorn fortgesetzt gedachten Wirbelschicht, so kann man bei allen praktisch vorkommenden Fällen den Abwindwert einsetzen, der im entsprechenden Punkte, d. h. einem Punkte mit demselben ξ-Wert, in der Wirbelschicht herrscht. Ist nämlich $x'y'z'$ ein Koordinatensystem, dessen y'-Achse mit der y-Achse zusammenfällt und dessen x'-Achse in der durch eine Ebene angenäherten Wirbelschicht liegt, so besagt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} + \frac{\partial v_z'}{\partial z'} = 0.$$

Aus der Tatsache, daß die von den Wirbeln erzeugten Geschwindigkeiten keine in dieser Ebene liegenden Komponenten ergeben können, folgt

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0,$$

so daß auch $\frac{\partial v_z'}{\partial z'} = 0$ ist. Es bleibt also der Abwind in erster Näherung konstant, wenn man den Aufpunkt aus der Wirbelschicht heraus bewegt. Da der Höhenunterschied $\zeta_L - \zeta_{1L}$ zwischen Leitwerk und Wirbelschicht klein bleibt, und der Abwindbetrag an sich schon klein ist, stellt diese Annahme sicher eine gute Näherung dar.

IV. Allgemeine Bemerkungen.

Von den zu beachtenden Voraussetzungen dürfte die unter 2 angeführte die größte praktische Bedeutung haben, da sie am leichtesten vergessen werden kann. Es ist daher zweckmäßig, die Erfüllung dieser Voraussetzung durch Auftragung der Absenkung der Wirbelschicht längs der Leitwerksspannweite zu kontrollieren, wie es in Bild 4 geschehen ist.

Der Rumpfeinfluß läßt sich anscheinend recht gut unter Benutzung einer Arbeit von Sherman [5] noch nachträglich berücksichtigen. Für den Hochdecker wird der über die Spannweite eines normalen Leitwerks gemittelte Abwind an den von Sherman gemessenen Modellen gegenüber dem errechneten um etwa 0,7° erhöht, für einen Tiefdecker um etwa 0,9° verringert. Bei dem gemessenen Mitteldecker liegt die Korrketur zwischen $\pm 0{,}6°$ und kann je nach der Art der Leitwerksform positiv oder negativ sein. Man wird daher beim Mitteldecker von einer Korrektur absehen.

Der Schraubenstrahleinfluß läßt sich durch nachträgliche Korrektur nicht berücksichtigen, da der Strahl die Fläche der abgehenden Wirbel so weitgehend verformt, daß die bei der Abwindrechnung gemachten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind. Hier ist man daher bis heute auf den Versuch angewiesen.

V. Zusammenfassung.

Zur Abkürzung des für die Abwindrechnung nach Multhopp notwendigen Zeitaufwandes werden Kurventafeln angegeben. Bei ihrer Benutzung beträgt die zur Berechnung der Abwindverteilung über die Leitwerksspannweite erforderliche Zeit nur etwa 3½ h je Flügelanstellwinkel. Zur Veranschaulichung wird das Rechenschema und Rechenergebnis zweier Beispiele mitgeteilt.

VI. Schrifttum.

[1] H. Multhopp, Die Berechnung des Abwindes hinter Tragflügeln. Luftfahrtforschung Bd. 15 (1938), S. 463.

[2] A. Silverstein und S. Katzoff, Design Charts for Predicting Downwash-Angles and Wake-Characteristics behind Plain and Flapped Wings. NACA-Rep. Nr. 648 (1939).

[3] A. Silverstein, S. Katzoff und W. K. Bullivant, Downwash and Wake behind Plain and Flapped Airfoils. NACA-Rep. Nr. 651 (1939).

[4] H. Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftfahrtforschung Bd. 15 (1938), S. 153.

[5] A. Sherman, Interference of Tail-Surface and Wing and Fuselage from Tests of 17 Combinations in the NACA-Variable-Density-Tunnel. NACA-Rep. Nr. 678 (1939).

Die Bestimmung der thermischen Beständigkeit von verschiedenen Flugmotorenölen.

Von M. Richter.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Betriebsstofforschung.

Die gesteigerten Anforderungen an die Temperaturbeständigkeit der Schmierstoffe haben Veranlassung gegeben, von einigen mineralischen und synthetischen Flugmotorenölen die thermische Beständigkeit unter Ausschluß von Sauerstoff (in Stickstoffatmosphäre) zu bestimmen. Die durch die rein thermische Einwirkung auftretenden Veränderungen der behandelten Schmierstoffe werden untersucht und besprochen.

Gliederung.

I. Besprechung des Schrifttums.

Die Bestrebungen, bei geringem Gewicht mehr Leistung zu erzielen, haben bei den Flugmotoren zu einer ständigen Erhöhung der Betriebstemperaturen geführt und somit auch eine entsprechende Temperaturbeständigkeit der Schmierstoffe erforderlich gemacht. Wie hoch ein Flugmotorenöl bei der Kolbenschmierung thermisch beansprucht wird, kann noch nicht eindeutig festgelegt werden. Die Zylinderwandtemperaturen liegen bei luftgekühlten Motoren zwischen 220 bis 270° C und bei flüssigkeitsgekühlten Motoren zwischen 130 bis 220° C, teilweise bei glykolgekühlten sogar bis zu 300° C, je nach Konstruktion und Belastung.

A. Bedeutung der thermischen Beständigkeit.

Welche Bedeutung die thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen allmählich erlangt hat, kann am besten aus den neueren Arbeiten, ganz gleich, ob dieselben Entwicklungsfragen von Schmierstoffen oder von Motoren behandeln, entnommen werden. So kommt Pye [1] auf Grund der letzten Arbeiten von Bowden [2] zu der Feststellung, daß es notwendig ist, Untersuchungen durchzuführen, die Aufschluß über die Beständigkeit von Schmierölen bei höheren Temperaturen geben. Ebenso hat Rosen [3], der eingehende Studien über den Einfluß der Betriebstemperaturen auf den Schmiervorgang und das Kolbenringverkleben bei naphthenischen und paraffinischen Schmierölen durchgeführt hat, nachgewiesen, daß die Stabilität des Schmieröles an den Ringpartien entscheidend durch die Temperatur beeinflußt wird. — Auf die Notwendigkeit der thermischen Beständigkeit von Flugmotorenölen wird auch von Baß [4] hingewiesen, da insbesondere beim Höhenflug gesteigerte Anforderungen an den Schmierstoff hinsichtlich Temperaturbeständigkeit gestellt werden. — Da die üblichen chemisch-physikalischen Versuchsdaten allein nicht ausreichen, um Schlüsse auf das thermische Verhalten der verschiedenen Schmierstoffe zu ziehen, ist es notwendig, für die Laboratoriumsprüfung entsprechende Prüfverfahren heranzuziehen, die in engerer Anlehnung an die praktischen Bedingungen ausgearbeitet sind. Die Unzulässigkeit einer Bewertung nur nach den bisherigen chemisch-physikalischen Daten betont insbesondere Beall [5] in seiner Arbeit »Anforderungen an Hochleistungsmotoren«. Der Verfasser bringt darin eine graphische Darstellung, aus der dies zu ersehen ist. Zu einer ähnlichen Beurteilung kommt auch Kyropoulus [6]. F. J. Slee [7] bringt ebenfalls in einer umfassenden Arbeit mit entsprechenden Beispielen seine Bedenken gegen die allzu häufige Anwendung der gewöhnlichen chemisch-physikalischen Versuchsdaten für die motorische Verwendbarkeit eines Schmierstoffes zum Ausdruck. — Alle diese Angaben zeigen, daß es notwendig ist, Versuche über die thermische Beständigkeit von Schmierölen zur Kennzeichnung ihrer praktischen Eignung mit heranzuziehen.

B. Mögliche Vorgänge.

Unter thermischer Beständigkeit soll die chemische Stabilität der Schmierstoffmoleküle, d. h. ihre Widerstandsfähigkeit gegenüber hohen Temperaturen verstanden werden. Das Öl zersetzt sich bekanntlich in geringem Umfange schon bei gewöhnlicher Destillation, dabei werden die niedrigsiedenden Bestandteile nur wenig, die höhersiedenden jedoch stärker verändert. Durch die Erhitzung werden die Moleküle der verschiedenen Bestandteile des Öles in gesättigte und ungesättigte Spaltstücke zerlegt. Ein Teil der letzteren vereinigt sich wieder zu größeren Molekülen, die ihrerseits auch wieder dem Zerfallsprozeß unterliegen können. Außerdem sind noch zahlreiche andere Zerfalls- und Zwischenreaktionen möglich. Der Verlauf dieses Abbau- und Aufbauprozesses hängt einerseits von der Natur der Kohlenwasserstoffe ab und andererseits von den Bedingungen, unter denen die Spaltung erfolgt. Die Natur der Kohlenwasserstoffe spielt insofern eine Rolle, als die hochmolekularen im allgemeinen leichter als die niedrigmolekularen gespalten werden, und bei niedrigen Temperaturen die ungesättigten leichter als die gesättigten. Der Einfluß der Temperatur auf die Beständigkeit von gesättigten und ungesättigten Kohlenwasserstoffen ist von Francis [8] eingehend studiert worden. Der Verfasser konnte feststellen, daß bei niedrigen Temperaturen d. h. unter 500° C, die Paraffine stabiler sind als die Olefine, daß aber oberhalb 500° C die Möglichkeit eines umgekehrten Verhältnisses gegeben sein kann. — Die Anwesenheit von tertiärem Kohlenstoff (d. s. Kohlenstoffatome, die nur an ein Wasserstoffatom gebunden sind), die nach Versuchen von Tschernoschukow und Kreyn [9] die Oxydation be-



günstigt, dürfte auch für das thermische Verhalten der Schmierstoffe von Bedeutung sein. — Oxydation und thermischer Zerfall der Kohlenwasserstoffe hängen von dem chemischen Aufbau ab, wobei anzunehmen ist, daß der thermische Vorgang in der flüssigen Phase stattfindet — die Oxydation der Spaltstücke dagegen in der Gasphase oder zumindest in der Grenzschicht zwischen der gasförmigen und flüssigen Phase. Das würde besagen, daß die Oxydation teilweise als »Sekundärreaktion« anzusprechen ist. — Die Zersetzung hochmolekularer Kohlenwasserstoffe beginnt schon etwa bei 200 bis 250° C, und zwar im allgemeinen um so leichter, je höher molekular die Kohlenwasserstoffe sind. Die Beständigkeit des Moleküles nimmt mit zunehmender Länge der Kette ab. Die entstandenen Spaltstücke können mit neuen Kohlenwasserstoffmolekülen zusammentreffen und darin ein Wasserstoffatom ersetzen, auf diese Weise kann eine weitlaufende Reaktion beginnen. Daß die Oxydation im stärksten Maße von einer thermischen Zersetzung begleitet ist, fand auch F. O. Rice [10] in seinen Versuchen. Kolomazki und Stepanzoff [11], die sich eingehend mit den Analysendaten von gebrauchten Ölen befaßt haben, führen die Anwesenheit von asphaltartigen und harzigen Verbindungen sowie Kohlestoffteilchen im gebrauchten Öl nicht auf Oxydationsprozesse, sondern in erster Linie auf gewisse Krackprozesse zurück, die in jenen Teilen des Motors auftreten, in denen das Öl hohen Temperaturen ausgesetzt ist. Die Verfasser haben ein entsprechendes Prüfverfahren ausgearbeitet, auf das weiter unten noch eingegangen werden soll. Da die chemische und physikalische Stabilität der Schmierstoffe gleichfalls in stärkstem Maße von der thermischen Einwirkung erfaßt wird, dürften im Rahmen dieser Arbeit auch die Veröffentlichungen von Hugel [12], Mikeska [13] und Zorn [14] von Bedeutung sein. Die Verfasser geben in zahlreichen Beispielen eine umfassende Übersicht über die Zusammenhänge zwischen chemischer Konstitution und Viskositätsverlauf verschiedener Kohlenwasserstoffe. Von diesen Arbeiten ist der Aufsatz von Zorn besonders erwähnenswert, denn der Verfasser gibt in seiner Zusammenfassung für die praktische Anwendung recht wertvolle Anregungen zur Verbesserung der Schmieröleigenschaften durch Veränderung der chemischen Konstitution. Es sei weiterhin auch die Arbeit von H. Koch und G. Ibing [15] angeführt, die eingehend die chemische Konstitution sowie die Eigenschaften von synthetischen Schmierölen aus Kogasin behandelt.

C. Bisherige Versuche.

1. Thermische Beständigkeit

a) von reinen Kohlenwasserstoffen. Theoretische Erwägungen und auch Versuche über die Aufspaltung der Kohlenwasserstoffe bei hohen Temperaturen sind von einer Anzahl von Forschern angestellt worden, insbesondere bei Besprechung von Krackversuchen. Sava [16] kommt in einer zusammenfassenden Arbeit über Krackversuche und Krackvorgänge auch auf die Veränderung der Kohlenwasserstoffgruppen zu sprechen und stellt u. a. fest, daß Paraffinkohlenwasserstoffe mit verzweigten Ketten unbeständiger als jene mit linearen Ketten sind; das gleiche gilt von den Naphthenen mit Seitenketten, insbesondere wenn letztere nicht gesättigt sind. Am widerstandsfähigsten gegen Wärme sind die aromatischen Kohlenwasserstoffe, besonders jene, welche keine langen Seitenketten haben. Die Olefine sind weniger temperaturbeständig als die Paraffine von ungefähr gleichem Molekulargewicht. Auf die engen Zusammenhänge zwischen den Bedingungen des Krackprozesses und den Arbeitsbedingungen im Zylinder eines Verbrennungsmotors wird von Bestushew [17] besonders hingewiesen. Der Chemismus des Krackvorganges ist auch von Sachanen und Tilitschejew [18] auf Grund ihrer Versuchsergebnisse eingehend behandelt worden. Die Forscher haben gefunden, daß sich Paraffine beim Spalten in ungesättigte und Methankohlenwasserstoffe zersetzen. Aus den ungesättigten Verbindungen können unter den gegebenen Reaktionsbedingungen höhersiedende Polymerisationsprodukte entstehen, die sich aus Naphthenen, ungesättigten Kohlenwasserstoffen, Paraffinen und vielleicht auch aus Aromaten zusammensetzen. Die kondensierten Ringsysteme können sich bei weiterem Kracken zum Teil in Koks umwandeln. Bei normalem, schnellen Kracken wird indes die Polymerisation der Olefine in Naphthene nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die thermische Zersetzung der aromatischen Kohlenwasserstoffe setzt zunächst durch Abspaltung längerer Seitenketten ein, während die Methylgruppen unter gewöhnlichen Spaltbedingungen kaum angegriffen werden. Die Naphthene zeigen je nach Größe des Ringes wechselndes Verhalten. Das thermische Verhalten der Naphthene ist auch von Ipatiew und Petrow [19] eingehend studiert worden, die dabei zu ähnlichen Ergebnissen kommen. Schultze [20] kommt in einer kurzen Zusammenfassung seiner wissenschaftlichen Versuchsergebnisse über das Wesen der Spaltprozesse zu folgender Beurteilung:

Die Zerfallsneigung nimmt für alle Paraffine mit steigender Temperatur rasch zu. Sie ist bei gleicher Temperatur um so großer, je größer das Paraffinmolekül ist. Bei den aromatischen Kohlenwasserstoffen ist die Zerfallsgeschwindigkeit bei gewöhnlicher Temperatur gegenüber den Paraffinen unmeßbar klein. Olefine, Naphthene und Aromaten mit Seitenketten stehen zwischen den Paraffinen und Aromaten. Je länger bei den Aromaten sowie bei den Naphthenen die alipathischen Seitenketten werden, um so mehr ist ihr Verhalten denjenigen der aliphatischen Verbindungen angeglichen.

b) von Gemischen. Die grundlegende Bedeutung der beiden Hauptfaktoren: Temperatur und Zeit bei der Zersetzung von Schmierölen wird von Ubbelohde [21] und Mitarbeitern in mehreren Arbeiten an Hand von zahlreichen Versuchen besonders hervorgehoben. Um den Einfluß der Temperatur auf den Schmierstoff kennenzulernen, hat Evers [22] Schalteröle dem elektrischen Lichtbogen ausgesetzt und konnte vermittels einer Vakuumdestillation der Öle vor und nach der Wärmebehandlung feststellen, daß thermischer Zerfall eintritt, und zwar insbesondere bei den Kohlenwasserstoffen von mittlerem Molekulargewicht. Ähnliche Versuche sind auch von Maillard [23] mittels eines erhitzten Kohlefadens durchgeführt worden. Von den sonstigen in der Literatur behandelten Arbeiten auf dem Gebiet der Temperaturbeständigkeit von Mineralölen erscheinen die Versuche von Koetschau [24], Woog [25], Freund und Thamms [26] besonders erwähnenswert. Koetschau gibt eine ausführliche Zusammenstellung einer Anzahl von Schmierölen (hauptsächlich Kraftwagenöle), die bei verschiedener Zeitdauer und Temperatur auf ihr thermisches Verhalten geprüft worden sind. Auf Grund von zahlreichen Versuchsergebnissen kommt Koetschau zu dem Schluß, daß bei einer achtstündigen Erhitzung auf 380° C Kraftwagenöle weit über ihre praktische Verwendung beansprucht werden. Zur Feststellung der Temperaturbeständigkeit eines Kraftwagenöles hält Koetschau eine zweistündige Behandlung bei 380° C für ausreichend. Isoparaffinkohlenwasserstoffe, die als Seitenketten vermutlich in gemischtbasischen Ölen überwiegen, haben eine größere Beständigkeit als Normalparaffine. Normalparaffinseitenketten von Naphthenen oder Polynaphthenen in paraffinbasischen Ölen werden dagegen bei thermischer Beanspruchung leicht abgespalten. Nach seinen eigenen Beobachtungen dürfte dagegen die Spaltung von naphthenaromatischen Ölen zu niedrigmolekularen, ringförmigen Gebilden führen. Woog [25] benötigt für seine Thermostabilitätsversuche 25 cm^3 Schmierstoff (hauptsächlich Autoöle), der in einem Zeitraum von 60 min, entsprechend einem bestimmten Zeittemperaturdiagramm erhitzt wird. Die Temperaturablesung erfolgt an einem Thermometer, das in einem dem Kochkolben aufgesetzten Kühler sorgfältig eingehängt worden ist, so daß es die Wände nicht berührt. Die aufsteigenden Dämpfe werden durch den Kühler kondensiert und fallen als Tropfen wieder in den Kochkolben zurück. Durch diesen Kondensationsvorgang wird mit der Zeit ein Punkt erreicht, bei dem die Temperatur zeitweilig stehen bleibt, um dann langsam

wieder abzufallen. Dieser Temperaturhöchstpunkt und die Zeit, in welcher dieses Maximum erreicht wurde, gelten als besonderes Kriterium für die Versuche. Woog konnte auf diese Weise feststellen, daß ein Öl mit hohem Molekulargewicht ein Maximum der Siedetemperatur hat, das viel niedriger liegt als bei einem Öl mit niedrigem Molekulargewicht. Freund und Thamms [26] stellen zwei Faktoren beim Erhitzen von Motorschmierölen in den Vordergrund, und zwar die oxydierende Einwirkung von Sauerstoff und die rein thermische Wirkung. Die Verfasser haben dementsprechend zwei getrennte Versuchsreihen durchgeführt, einmal die Thermostabilität der Öle unter vollständigem Ausschluß von Sauerstoff und dann die gleichen Versuche im Sauerstoffstrom. Es werden etwa 13 Öle in 100 cm³ Proben in einem Zeitraum von 60 h mit 8 Unterbrechungen auf 325° C erhitzt. Zur Prüfung auf Thermostabilität wurden die entsprechenden Versuche in Stickstoffatmosphäre durchgeführt. Einige physikalisch-chemische Eigenschaften der frischen und der behandelten Schmieröle werden einander zum Vergleich gegenübergestellt. Insbesondere lag Verfassern daran, durch diese Versuchsanordnung zu erkennen, ob der thermischen Behandlung in Stickstoffatmosphäre Schlammbildung bzw. Neubildung von asphaltischen Stoffen zu erwarten ist. Die Verfasser kommen auf Grund ihrer Ergebnisse zu dem Schluß, daß eine Neubildung von Asphalt sowie Schlammstoffen durch die rein thermische Einwirkung nicht stattfindet. Von Kolomazki und Stepanzoff [27] ist ein Laboratoriumsverfahren zur Prüfung der Beständigkeit von Flugmotorenölen entwickelt worden, das in erster Linie die im Motor vor sich gehende Spaltung des Schmierstoffes berücksichtigen soll. Der gekrackte Rückstand im Kolben wird auf Benzin-Unlösliches, Säure- und Verseifungszahl untersucht und den gleichen Daten des betreffenden Altöles aus einem Prüflauf gegenübergestellt.

2. Thermisch-oxydative Beständigkeit.

Die Anwesenheit von Sauerstoff bei der Erhitzung von Ölen führt infolge der überaus reaktionsfähigen Spaltprodukt zur Bildung von flüchtigen Sauerstoffverbindungen oder Harzen (Polymerisation); rein äußerlich geht sie Hand in Hand mit einem ständig zunehmenden Dunklerwerden und mit einer Verdickung des Schmierstoffes. Die Widerstandsfähigkeit der Schmieröle gegenüber der Einwirkung von Luft bzw. Sauerstoff ist eine recht wichtige Eigenschaft, insbesondere bei höheren Temperaturen. — Die Oxydationsbeständigkeit von reinen Kohlenwasserstoffen ist in letzter Zeit der Anlaß zahlreicher Veröffentlichungen gewesen. Aufschlußreich erscheinen in diesem Zusammenhang die Versuche von Tschernoshukow [28], über die er anläßlich des Pariser Welterdölkongresses berichtet hat. Tschernoshukov behandelt in seinen Arbeiten die Frage der Alterungsneigung von reinen chemischen Verbindungen sowie von komplexen Gemischen. Aus dieser Arbeit ist zu entnehmen, daß die Oxydation der naphthenischen Kohlenwasserstoffe an den Stellen des Kernes erfolgt, die Seitenketten substituiert haben; dagegen werden die aromatischen Kohlenwasserstoffe nur in ihren Seitenketten angegriffen. Bei Gemischen von Naphthenen mit Aromaten konnte eine gewisse Oxydationsbeständigkeit beobachtet werden. Tschernoshukow folgert daraus, daß die Anwesenheit von Aromaten die Oxydation der Naphthene herabgesetzt und Schlamm und Harzbildung vermindert. Die von Tschernoshukow durchgeführten Versuche dürften somit bei weiterer intensiver Bearbeitung interessante Aufschlüsse über die Schutzwirkung verschiedener Kohlenwasserstoffe auf die anderen Inhaltsstoffe eines Schmierstoffes ergeben. Den Einfluß der Temperatur auf den Oxydationsvorgang und auf die Bildung der verschiedenen Oxydationsprodukte stellt Staeger [13] in den Vordergrund seiner Betrachtungen. Daß Naphthenenkohlenwasserstoffe sehr leicht oxydieren, konnte von Bestushew [29] und auch von Tschernoshukow [30] festgestellt werden, und zwar werden bei höheren Temperaturen die gebildeten Polymerisationsprodukte in asphaltartige Substanzen übergehen. Daß dagegen die sich leicht zersetzenden paraffinbasischen Kohlenwasserstoffe in Gegenwart von Sauerstoff relativ widerstandsfähig sind, konnte Koetschau [31] in eigenen Versuchen bestätigen. — Estradère [32] hat sich mit den Beziehungen zwischen Aufspaltung und Oxydation einiger niedrigmolekularer Kohlenwasserstoffe befaßt und konnte dabei feststellen, daß bei unverzweigten Paraffinkohlenwasserstoffen, hydroaromatischen Kohlenwasserstoffen und Benzol die Oxydation der Spaltung vorausgeht. Bei den verzweigten Paraffinkohlenwasserstoffen verlaufen dagegen Oxydation und Spaltung gleichzeitig. Während die Oxydation bei den gradkettigen Paraffinen, den hydroaromatischen Kohlenwasserstoffen und dem Benzol, praktisch unabhängig ist von der Spaltung, ist sie bei verzweigten Paraffinen sehr eng damit verbunden und scheint es, als ob die Spaltprodukte in diesem Falle leichter oxydierbar wären als das Ausgangsmolekül. Die von Estradère durchgeführten Versuche ergeben nur teilweise eine Bestätigung der in der DVL gewonnenen Erkenntnisse. Damit dürfte aber die grundsätzliche Frage, ob die thermische Einwirkung in der Hauptsache als Primär- oder Sekundärreaktion anzusprechen ist, noch keine restlose Klärung gefunden haben. Es ist anzunehmen, daß bei Verwendung von Schmierölen, die bekanntlich ein Gemisch von verschiedenen Kohlenwasserstoffen darstellen, das Untersuchungsergebnis die angestellten Überlegungen größtenteils bestätigen wird. Es ist zu hoffen und zu wünschen, daß diese Arbeiten durch eingehende Versuche ergänzt werden. — Alle diese Oxydations- bzw. Alterungsversuche beruhen auf der Verfolgung einer Oxydationsreaktion, die immer unter ganz bestimmten Verhältnissen durchgeführt und nach einer willkürlich gewählten Zeit beendet wird. Der Fortschritt der Oxydation wird durch die Menge eines oder mehrerer der entstandenen flüssigen und festen Oxydationsprodukte bestimmt, kann dagegen über die Thermostabilität eines Öles nur wenig aussagen. Es ist außerordentlich schwierig, in Anwesenheit von Sauerstoff die rein thermischen Veränderungsprodukte der Schmierstoffe kennenzulernen.

3. Bisherige Prüfverfahren.

Der Gedanke, die thermische Beständigkeit als Prüfverfahren für die praktische Beurteilung der Schmierstoffe heranzuziehen, hat bereits Veranlassung zu verschiedenen Arbeiten auf diesem Gebiete gegeben, von denen nur die bekanntesten hier erwähnt werden sollen. So ist von Koetschau [24] zur Prüfung der Beständigkeit von Autoschmierölen ein 2-Stunden-Kracktest bei 380° C vorgeschlagen worden, der aber für die praktische Eignung der Öle keine Auskunft gibt. Freund und Thamms [26], die ähnliche Versuche in Stickstoff- und Sauerstoffatmosphäre durchgeführt haben, kommen zu einer negativen Beurteilung ihres eigenen Prüfverfahrens. Auch die Untersuchungen von Woog [25] lassen in ihrer Auswertung keine praktischen Vergleichsmöglichkeiten erkennen. Eine neuere Laboratoriumsmethode zur Beständigkeitsprüfung von Flugmotorenölen wird von Kolomazki und Stepanzoff [11] in Vorschlag gebracht. Der zu prüfende Schmierstoff wird im Verlauf von 15 min auf 415° C gebracht und eine Stunde auf dieser Temperatur belassen. Die Verfasser untersuchen den gecrackten Rückstand auf Benzin-Unlösliches und errechnen aus den erhaltenen Prozentgehalten an Benzin-Unlöslichen multipliziert mit 100 eine Beständigkeitsziffer, die mit den anderen Ölen dann verglichen wird. Nach Aussagen der Verfasser soll zwischen den Analysendaten eines gebrauchten Öles und dem entsprechenden thermisch behandelten Frischöl eine gute Übereinstimmung bestehen. Dixmier und Lion [33] haben versucht, durch Verschärfung der Temperaturbedingungen der laboratoriumsmäßigen Alterung von Schmierölen einen Zusammenhang zu finden zwischen den Alterungsprodukten (Chloroform-Unlöslichen) des Schmierstoffes im Motor und denjenigen der Laboratoriumsverfahren. Nur durch eine vorausgehende Anoxydierung des betreffenden Schmieröles (120 h bei 140° C) konnten bei hohen Temperaturen durch das Laboratoriumsverfahren ähnliche



sauerstoffhaltige Alterungsprodukte, gleich den motorisch gebildeten Rückständen, erhalten werden. Die Verfasser nehmen an, daß der Temperaturübergang des anoxydierten Öles auf 350 bis 460° C eine entsprechende Veränderung des Schmierstoffes bewirkt. Zur Beurteilung wird der Sauerstoffgehalt der laboratoriumsmäßig erhaltenen Oxydationsprodukte mit demjenigen der motorisch gebildeten Rückstände verglichen. Es ist anzunehmen, daß bei weiterer Verfolgung dieser Versuche — d. h. der Anwendung von verschärften thermischen Bedingungen bei der laboratoriumsmäßigen Alterungsprüfung der Schmierstoffe — die Möglichkeit einer weitgehenden praktischen Annäherung gegeben sein kann, wobei aber bei vergleichenden Versuchen die Betriebsbedingungen der verschiedenen Motore besonders berücksichtigt werden müssen. Eine weitere Erörterung von Prüfverfahren, die insbesondere die thermisch-oxydative Beständigkeit behandeln, erübrigt sich an dieser Stelle. Hinzuweisen wäre noch auf die ausführlichen Arbeiten von Heinze-Obenaus [34], Noack [35], Marder [36], die eine Reihe von bekannten Prüfverfahren besprechen und z. T. auch eine Gegenüberstellung mit motorischen Ergebnissen anführen. Die Vielzahl der Stabilitätsprüfverfahren behandelt zumeist das thermisch-oxydative Verhalten der Schmierstoffe und nur wenig das rein thermische Verhalten. Aber auch diese wenigen rein thermischen Prüfverfahren lassen in ihrer Versuchsanordnung und Durchführung Unzulänglichkeiten erkennen, die eine praktische Beurteilungsmöglichkeit nahezu ausschließen. Im Sinne der eigentlichen Versuchsaufgabe wurde demgemäß ein einfaches Prüfverfahren entwickelt, daß die Möglichkeit gibt, Flugmotorenöle verschiedener Herkunft einer vergleichenden Prüfung zu unterziehen.

II. Eigene Versuche.

Die Wärmebeständigkeit eines Öles enthält zwei wichtige Komponenten, und zwar den Widerstand:

a) gegen Zersetzung durch Temperaturerhöhung,
b) gegen Verdickung und gegen Verdampfung der leicht flüchtigen Anteile.

Die Temperatur, bei der die Beständigkeitsprüfung durchgeführt wird, ist von wesentlicher Bedeutung für den Vorgang. Bei niedriger Temperatur bilden sich mehr Spaltstücke mittlerer Molekulargröße. Mit steigender Temperatur dagegen entstehen bei Ausschaltung von Luft flüssige Produkte und Gase und bei Anwesenheit von Luft hochmolekulare Stoffe und Koks. Eine weitere Größe bei der thermischen Beständigkeitsprüfung ist die Einwirkungsdauer. Die beiden maßgeblichen Faktoren, wie Zeit und Temperatur, wurden für alle Versuche einheitlich festgelegt. Als Ausgangsstoffe wurden eine Reihe von Flugmotorenölen verschiedener Herkunft genommen.

A. Beschreibung der Apparatur.

Die Versuchsapparatur, Bild 1, besteht im wesentlichen aus einem Rundkolben (500 cm³ Jenaer Glas), dessen Kolbenhals 330 mm lang und mit einem Normalschliff versehen ist. Dieser Kolbenhals erfüllt gleichzeitig die Funktionen eines Luftkühlers. Der Kolben wird durch ein gebogenes Schliffverbindungsstück mit einem geeichten Auffanggefäß verbunden. Die Erwärmung erfolgt durch einen mit Gas beheizten Aluminiumblock. Der Wärmeübergang vom Metallblock[1]) zum Glaskolben dürfte infolge des guten Leitvermögens des Aluminiums als günstig anzusprechen sein. Eine Überhitzung der gebildeten Dämpfe ist dank der Ausführung des Aluminiumblockes nicht anzunehmen. Der Aluminiumheizblock ist zur Temperaturkontrolle mit einem Thermometer versehen. Der Glaskolben hat seitlich zwei kleine Normalschliffstutzen, von denen einer zur Einführung eines geeichten Thermometers zur Kontrolle der Reaktionstemperatur im Öl und der andere zur anfänglichen Einleitung von Stickstoff dienen. Nach der Einführung des Stickstoffes wird dieser Einleitungsstutzen mit einem Normalschliffstopfen verschlossen. Die bei der Erhitzung entweichenden Gase werden in einem Auffangbehälter gesammelt. der aus zwei 5-l-Tubusflaschen zusammengestellt wird, Dieses Gassammelgefäß ist geeicht und zur Regulierung der jeweiligen Gasdruckes mit einem Flüssigkeitsmanometes versehen. Der zum Durchspülen der Apparatur verwendete Stickstoff war praktisch sauerstoffrei. Die Apparatur wird vor dem eigentlichen Versuchsbeginn auf Dichtigkeit geprüft.

¹) Die Aushöhlung des Aluminiumblockes ist genau der Form des Kolbens angepaßt.

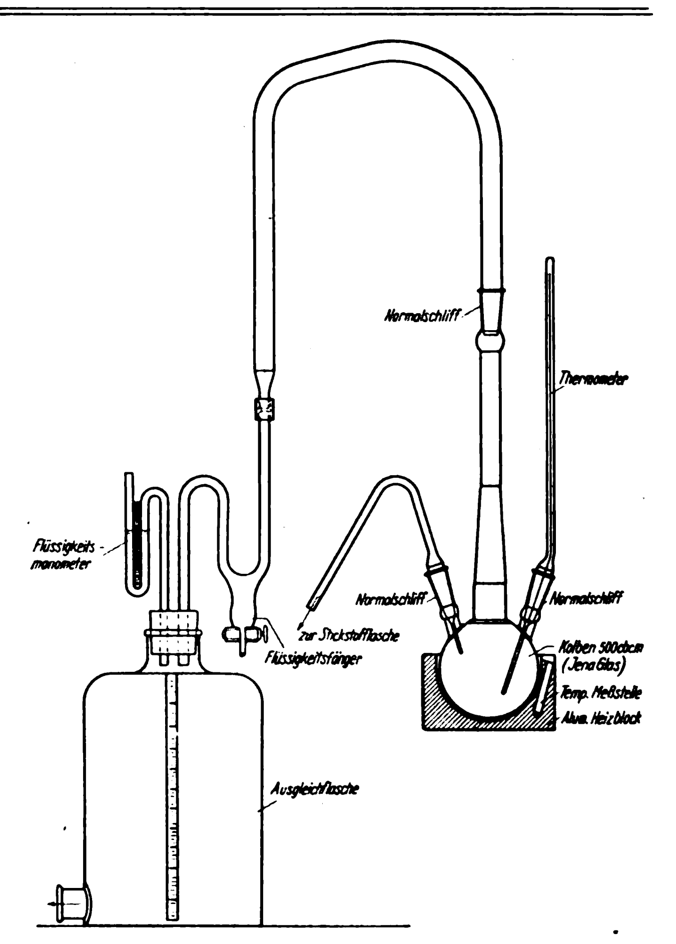


Bild 1. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen. Versuchsapparatur.

B. Versuchsdurchführung.

Für jeden Versuch werden 100 bis 150 g Öl benötigt, und zwar werden Kolben, Öl und Siedesteinchen vor Versuchsbeginn gewogen. Nach dem Zusammensetzen der Apparatur wird der Kolben unter Durchleiten von Stickstoff innerhalb ½ h gleichmäßig für jedes Öl erhitzt, so daß praktisch alle vorhandene Luft aus der gesamten Apparatur entfernt ist. Der für die Beheizung des Aluminiumblockes benötigte Gasstrom für den Brenner wird so reguliert, daß alle Öle gleichmäßig erhitzt werden, so daß die eigentliche Versuchstemperatur (korrigiert) innerhalb 1 h (einschl. der Einleitungszeit) bei allen Ölen erreicht wird. Als Reaktionszeiten wurden 2 bis 6 h gewählt, einschl. der Zeitdauer, in welcher das Öl mit Stickstoff durchgeblasen und die Apparatur mit Stickstoff gefüllt wird. Die Temperatur wird während des Versuches auf ± 5° C konstant gehalten. Bei der Erhitzung muß insbesondere darauf geachtet werden, daß ein Temperaturrückgang, der bei einer außerordentlich starken Zersetzung mancher Öle eintreten kann, durch stärkere Beheizung vermieden wird. Nach 2 bis 6 h Wärmebehandlung wird der Kolben auf Zimmertemperatur abgekühlt, zurückgewogen und der Erhitzungsverlust bestimmt. Bei der Wärmebehandlung entstehen bei höheren Versuchstemperaturen Gase, d. h. nicht kondensierbare Kohlenwasserstoffe, die in dem nachgeschalteten Auffanggefäß gesammelt, ge-

messen und untersucht werden. Die gesamte gebildete Gasmenge wird zur besseren Vergleichsmöglichkeit auf 15° je 760 mm Q.-S. umgerechnet. Die flüssigen Produkte werden auf verschiedene chemisch-physikalische Eigenschaften untersucht und mit den Ausgangsprodukten verglichen. Neben den allgemein üblichen chemisch-physikalischen Kennzahlen, wie Dichte, Refraktion, Viskosität, Säure- und Verseifungszahl, wurden zur Beurteilung der Veränderung des Öles durch die thermische Behandlung noch die Verkokungszahlen nach Conradson und Ramsbottom sowie die Molekulargewichte und die Bromzahl nach Mc. Ilhiney in das Untersuchungsprogramm einbezogen. Infolge ihres Gehaltes an zwei- und vermutlich auch dreifachen Bindungen sind die durch die thermische Behandlung gebildeten, ungesättigten Stoffe äußerst reaktionsfähige Körper, die sich namentlich unter dem Einfluß von Luftsauerstoff bei der Verwendung im Motor leicht nachteilig verändern. Zur Charakterisierung dient u. a. ihr Halogenadditionsvermögen. Es ist gelungen, mit Hilfe der Bromzahl nach Mc. Ilhiney bei Anwendung eines entsprechend großen Bromüberschusses brauchbare, reproduzierbare Versuchswerte zu erhalten. Das Verfahren zur Bestimmung der Bromzahl nach Mc. Ilhiney wird im folgenden beschrieben und die wichtigsten Einzelheiten kurz besprochen.

Bromzahlbestimmung nach Mc. Ilhiney. Eine gewogene Menge Öl (etwa 1 g bei stark ungesättigten Ölen etwa 0,2 g) wird in einen trockenen, mit Glasstopfen versehenen Erlenmeyer gebracht und 10 cm³ CCl_4 zugesetzt. Hierzu werden 10 cm³ $^1/_3$-n-Bromlösung in CCl_4 (also je Liter 26,64 g Br) gegeben. Die Mischung wird 15 min stehen gelassen. Dann werden 10 cm³ 10 proz. KJ-Lösung und 25 cm³ Wasser und etwa 2 Tropfen Stärkelösung zugesetzt und der Kolben geschüttelt. Es wird mit $^1/_{10}$-n-Thiosulfat titriert. Nach Beendigung der Titration werden 5 cm³ einer neutralen, 2 proz. Lösung von KJO_3 zugefügt. Hierdurch wird so viel Jod in Freiheit gesetzt als dem gebildeten Bromwasserstoff äquivalent ist und durch Titrieren dieses Jods wird das substituierende Brom festgestellt. Die Lösung des KJO_3 soll durch Zusatz einer abgemessenen Menge zu einer KJ-Lösung auf Säuregehalt untersucht werden; wenn Jod in Freiheit gesetzt wird, so titriert man es mit Thiosulfat und berichtigt die Ausrechnung entsprechend. Das KJ, das Thiosulfat und das Wasser werden auf Neutralität geprüft. Durch einen Blindversuch wird der Titer der Br-Lösung festgestellt.

Berechnung. Werden a cm³ für den Blindversuch, b cm³ für die Titration, c cm³ für die 2. Titration (nach Zusatz des KJO_3) verbraucht, so beträgt die Menge des addierten Br im Öl 0,008 c g. Die Bromzahl bedeutet die Anzahl g Br, die 100 g Öl aufnehmen.

Nach Untersuchungen von Casimir und Dimitriu [37] können die nach der Mc. Ilhineyschen Methode bestimmten Bromindexe von Mineralölen mitunter kleiner sein als die wirklichen, weil neben der Bromwasserstoffsäure, die aus den Substitutionsreaktionen herrührt, noch ein Überschuß an dieser Säure titriert wird, welcher der Unbeständigkeit der Halogenderivate der hochmolekularen Kohlenwasserstoffe (sei es den Additions- oder den Substitutionsderivaten), sowie der hydrolytischen Wirkung des Wassers der Reagenzien gegenüber diesen Derivaten zuzuschreiben ist.

Casimir und Dimitriu schlagen vor, daß folgende zusätzliche Bedingungen erfüllt werden:

1. Ein nicht zu großer Überschuß an Halogen (50 bis 70%);
2. kurze Reaktionszeiten (60 min);
3. Arbeit im Dunkeln und bei niedriger Temperatur;
4. Titration des der Bromwasserstoffsäure entsprechenden Jods sofort nach Zugabe der Jodatlösung und nur bis zur ersten, einige Sekunden dauernden Entfärbung der Lösung.

Diese Vorschläge von Casimir und Dimitriu sind in der oben erwähnten Arbeitsweise bereits berücksichtigt.

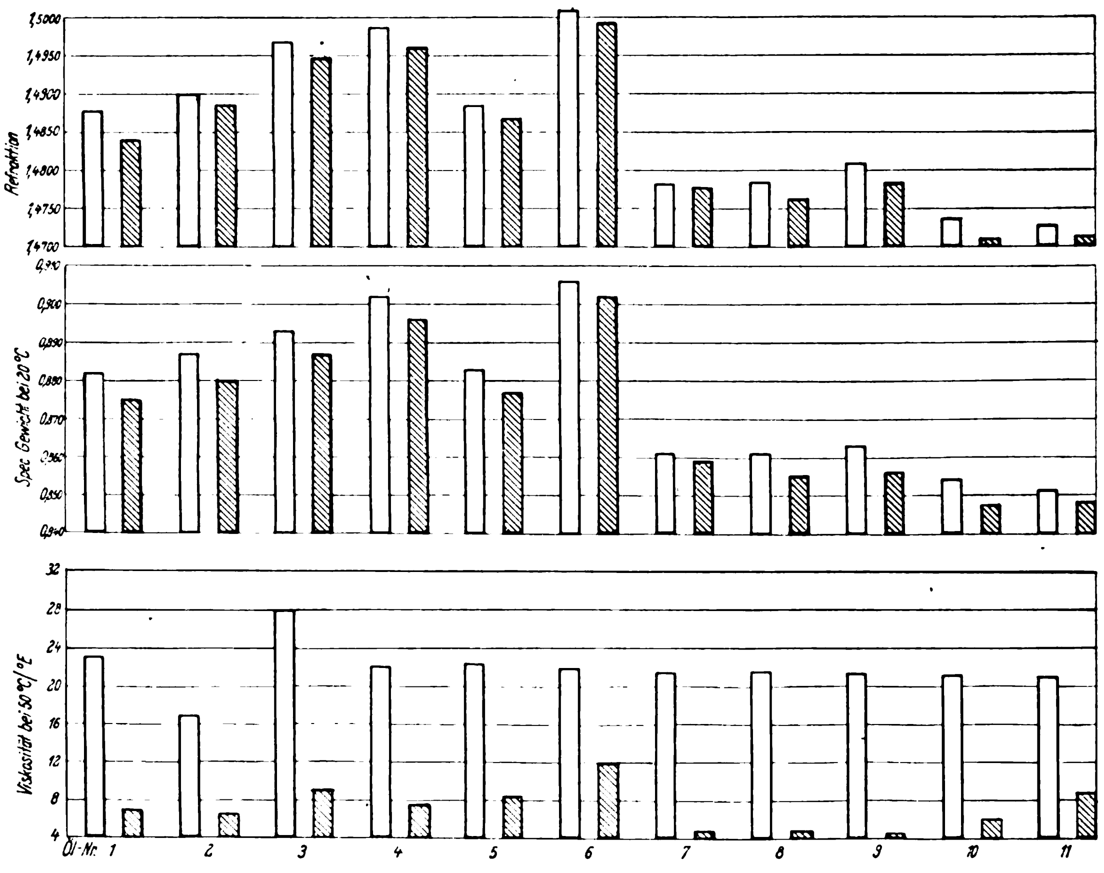


Bild 2. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen.

C. Versuchsergebnisse.

1. 6 h bei 400° C in Stickstoffatmosphäre.

In Zahlentafel 1 und in Bild 2 bis 8 sind zunächst die Versuchsergebnisse und die Veränderungen der verschiedenen Eigenschaften, die bei einer 6stündigen thermischen Behandlung in Stickstoffatmosphäre erhalten worden sind, aufgetragen.

Zur besseren Übersicht werden die Öle nach ihrer Herkunft in die graphischen Darstellungen eingeordnet. Je nach ihrer Herkunft waren die behandelten Öle mehr oder weniger nachgedunkelt, ohne daß aber Schlammabscheidungen bei einer Probe festgestellt werden konnten. Die Veränderungen in der Refraktion, Bild 2, sind als sehr gering anzusprechen, außer bei einigen synthetischen Ölen, die gegenüber den mineralischen Ölen eine etwas größere Abnahme zeigen. Es dürfte sich aber erübrigen, auf diese Veränderungen näher einzugehen, zumal diesen Eigenschaften eine praktisch geringere Bedeutung zuerkannt wird.

Ein wesentlich anderes Bild ergibt schon der Vergleich der Viskosität bei 50° C der Ausgangsstoffe mit den thermisch behandelten Ölen, Bild 2. Hier kann man bereits beträchtliche Differenzen feststellen. Die günstigste thermische Beständigkeit zeigt das Öl Nr. 6 (naphthenbasisch), während die Öle 7, 8, 9 und 10 (synthetisch) gegenüber den anderen mineralischen Ölen teilweise bis zu 80% Viskositätsabnahme bei 50° C erkennen lassen. Das Öl 11 (synthetisch) zeigt dagegen die gleiche Viskositätsabnahme wie ein paraffinbasisches Öl. Ein ähnliches Verhalten ist auch aus der Molekulargewichtsabnahme der behandelten Öle zu entnehmen, Bild 3. Übereinstimmend mit der Viskositätsabnahme zeigt auch hier das Öl 6 (naphthenbasisch) die geringste Molekulargewichtsabnahme. Während die anderen mineralbasischen Öle Molekulargewichtsabnahmen aufweisen, die innerhalb gleicher Grenzen liegen, haben die synthetischen Öle übereinstimmend mit der Viskositätsabnahme auch die größte Molekulargewichtsabnahme. In Bild 4 ist die Beziehung zwischen prozentualer Viskositätsabnahme der Öle und prozentualer Molekulargewichtsabnahme graphisch aufgetragen worden. Diese Darstellung läßt eine einigermaßen brauchbare Beziehung derjenigen Schmierstoffe erkennen, die in ihren Ausgangsstoffen etwa die gleiche Viskosität bei 50° C haben. Die in der graphischen Darstellung herausfallenden Punkte entsprechen Ausgangsstoffen mit starken Viskositätsabweichungen vom Durchschnitt.

Entsprechend der Viskositäts- und Molekulargewichtsabnahme müßte auch der Gehalt an ungesättigten Stoffen steigen. Diese Feststellung konnte im allgemeinen nicht gemacht werden, denn es bestand keine Beziehung zwischen Molekulargewicht und Bromzahl oder Viskosität bei 50° C und Bromzahl, Bild 5 und 6. Die teilweise Veränderung der Säure- und Verseifungszahlen dürfte bei den gefetteten Ölen 4 und 5 auf Zersetzung von zugegebenen pflanzlichen oder tierischen Netzungsstoffen zurückzuführen sein.

Zahlentafel 1. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen.

Bezeichnung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Eingangs-Nr.	136/37	69/37	Lg. 5	183/34	17/37	192/34	20 a/37	56 a/37	78/37	414 c/36	414 B/36
Einwaage											
ursprünglich . . . . . g	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0	150,0
nach Erhitzen . . . . »	145,3	144,2	143,3	144,6	143,3	146,5	119,2	129,3	130,5	137,5	137,1
Verlust . . . . »	4,7	5,8	6,7	5,4	6,7	3,5	31,8	20,7	19,5	12,5	12,9
Gasmenge von 150 g Öl											
N_2-frei 0/760 mm QS l	0,105	0,087	0,087	0,115	0,106	0,067	0,236	0,210	0,139	0,117	0,061
Refraktion											
ursprünglich . . . n_D 20	1,4878	1,4900	1,4969	1,4987	1,4885	1,5018	1,4782	1,4783	1,4808	1,4736	1,4727
nach Erhitzen . . »	1,4841	1,4874	1,4949	1,4962	1,4866	1,4992	1,4777	1,4763	1,4783	1,4710	1,4712
Spez. Gew. bei 20° C kg/l											
ursprünglich . . . . »	0,882	0,887	0,893	0,902	0,883	0,906	0,861	0,861	0,863	0,854	8,851
nach Erhitzen . . . »	0,875	0,880	0,887	0,896	0,877	0,902	0,859	0,855	0,856	0,847	0,848
Abnahme . . . . . »	0,007	0,007	0,006	0,006	0,006	0,004	0,002	0,006	0,007	0,007	0,003
Visk. bei 50° C											
ursprünglich . . . . ^0_E	23,2	17,0	28,1	22,0	22,4	21,9	21,5	21,6	21,4	20,6	21,1
nach Erhitzen . . . »	7,21	6,63	9,1	7,66	8,5	11,9	4,8	4,9	4,3	5,98	8,4
Abnahme . . . . . %	68,9	61,0	67,9	65,0	62,0	45,5	77,5	77,7	80,0	71,0	60,2
Säurezahl											
ursprünglich mgKOH/g	0,0	0,0	0,0	0,0	0,04	0,03	0,0	0,05	0,0	0,23	0,0
nach Erhitzen »	0,0	0,0	0,0	0,0	1,30	0,0	0,03	0,03	0,0	0,0	0,0
Änderung . . . »	± 0	± 0	± 0	± 0	+ 1,26	− 0,03	+ 0,03	− 0,02	± 0	− 0,23	± 0
Verseifungszahl											
ursprünglich mgKOH/g	0,06	0,25	0,17	4,84	3,81	0,17	0,0	0,22	0,24	0,61	0,16
nach Erhitzen »	0,11	0,09	0,32	2,24	2,24	0,22	0,16	0,17	0,14	0,32	0,14
Änderung . . »	+ 0,05	− 0,16	+ 0,15	− 2,60	− 1,26	+ 0,05	+ 0,16	− 0,05	− 0,10	− 0,29	− 0,02
Conradsonverkokung											
ursprünglich . . . . %	0,25	0,20	1,23	0,77	0,43	0,73	0,03	0,05	0,13	0,13	0,13
nach Erhitzen . . . »	0,33	0,26	1,47	0,81	0,45	0,74	0,14	0,13	0,30	0,14	0,14
Änderung . . . . . »	+ 0,08	+ 0,06	+ 0,24	+ 0,05	+ 0,02	+ 0,01	+ 0,11	+ 0,08	+ 0,17	+ 0,01	+ 0,01
Ramsbottomverkokung											
ursprünglich	0,26	0,29	1,03	0,76	0,49	0,63	0,07	0,16	0,22	0,18	0,17
nach Erhitzen	0,33	0,39	1,23	0,81	0,52	0,76	0,20	0,15	0,79	0,19	0,19
Änderung	+ 0,07	+ 0,10	+ 0,20	+ 0,05	+ 0,03	+ 0,10	+ 0,13	− 0,01	+ 0,57	+ 0,01	+ 0,02
Bromzahl (Mc. Ilhiney)											
ursprünglich . . g/100 g	1,3	1,1	5,2	10,4	5,1	1,1	0,0	1,8	2,2	3,7	4,6
nach Erhitzen . »	8,4	8,2	10,5	8,9	10,9	6,3	9,4	9,4	11,2	8,2	10,6
Änderung . . . »	+ 7,1	+ 7,1	+ 5,3	− 1,5	+ 5,8	+ 5,2	+ 9,4	+ 7,6	+ 9,0	+ 4,5	+ 6,0
Molekulargewichtsbestimmung											
ursprünglich	691	635	665	567	697	569	734	719	758	730	668
nach Erhitzen	499	465	450	451	553	506	468	478	460	503	545
Änderung	− 192	− 170	215	− 116	− 144	− 63	− 266	− 241	− 298	− 227	− 123

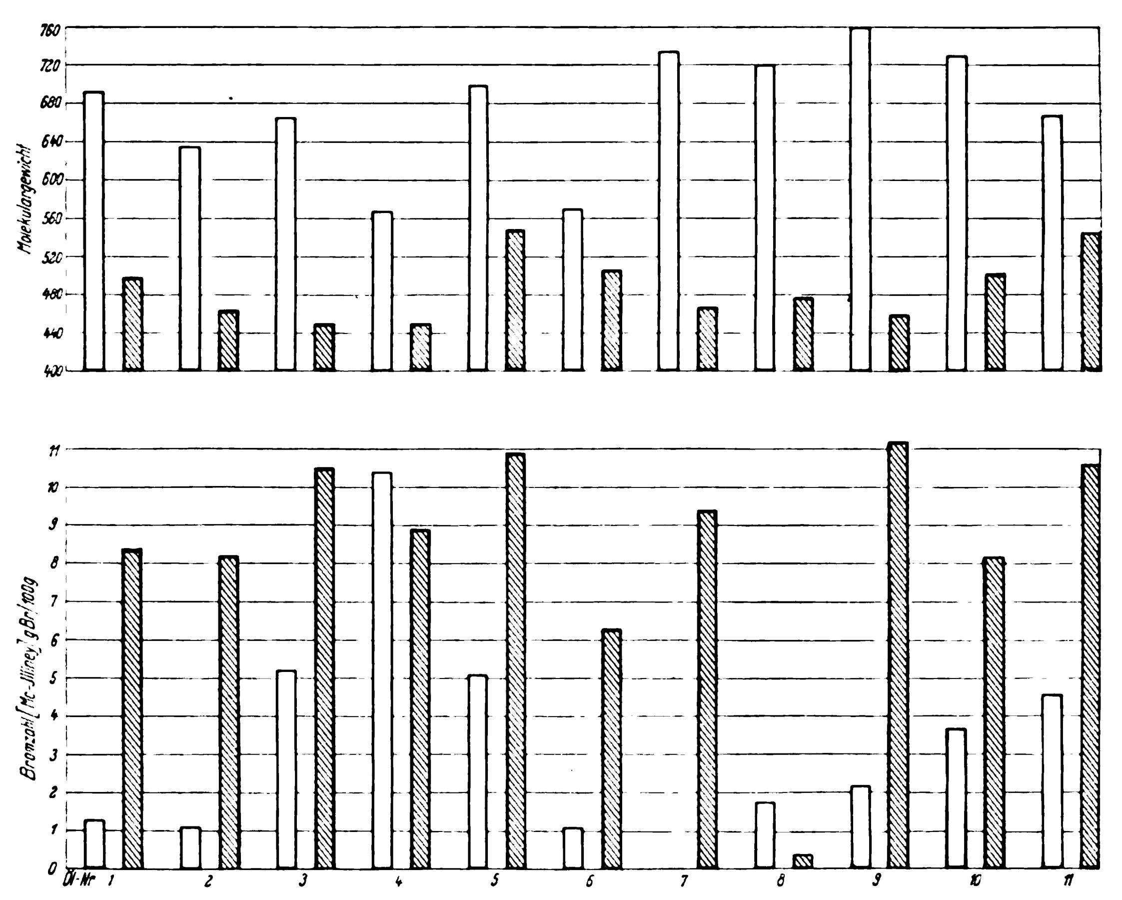


Bild 3. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen.

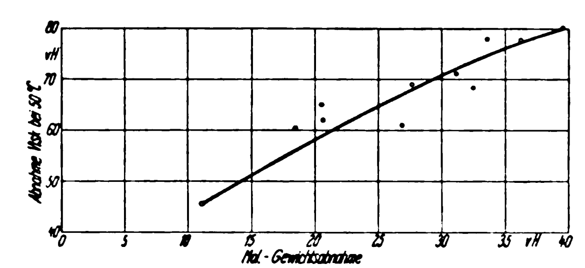


Bild 4. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen. Beziehung: % Abnahme der Visk. bei 50° C % Mol.-Gewichtsabnahme der thermisch behandelten Öle.

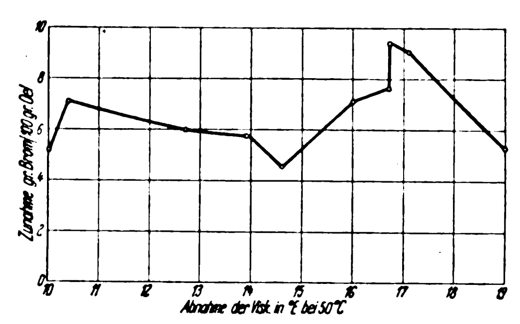


Bild 5. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen. Beziehung: Zunahme g Brom/100 g Öl Abnahme der Visk. bei 50° C in °E. der thermisch behandelten Öle.

Die Conradson- und Ramsbottom-Verkokungswerte, Bild 7, zeigen übereinstimmend bei allen Ölen bis auf die Öle 3 und 9 nur geringe Zunahmen gegenüber den Ausgangsstoffen. Öl 3 ist ein Flugmotorenöl auf Bright-Stockbasis, das infolge seiner Herkunft gegen Temperaturzunahme besonders empfindlich ist. Das Öl 9 ist ein synthetisches Produkt, das auch entsprechend den anderen Untersuchungsdaten sehr wenig stabil gegen erhöhte Temperatur ist. Die Gasmenge

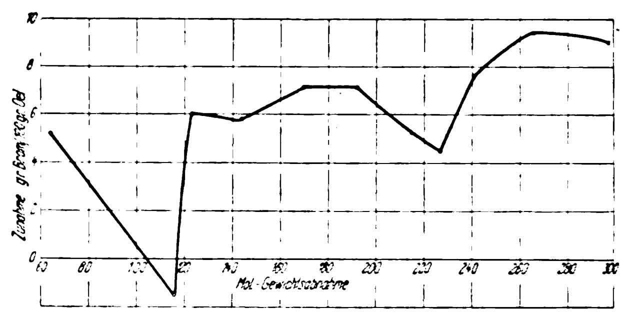


Bild 6. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen. Beziehung: Zunahme g Brom/100 g Öl Mol.-Gewichtsabnahme der thermisch behandelten Öle.

wurde auf stickstoffreies Gas umgerechnet, um etwaige Fehler auszuschalten und um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu erzielen. Wenn auch diese Aufstellung nur bedingten Wert hat, so gestattet sie doch immerhin eine Übersicht über die Größe der auftretenden Verluste. In Bild 8 sind die bei der Wärmebehandlung auftretenden Verluste und die erhaltenen Gasmengen gegenübergestellt.

2. Thermische Beständigkeit in Abhängigkeit von Temperatur und Zeit.

Eine Ergänzung erfahren die Versuche der thermischen Beständigkeit (6 h/400° C) durch zusätzliche Bestimmungen, die bei 6 h/300° C und 6 h/375° C, sowie 2 und 4 h bei 400° C durchgeführt worden sind. Für diese Versuchsreihen wurden drei Schmierstoffe ausgewählt, und zwar:

a) ein Mineralöl (paraffinbasisch) 1,
b) ein Syntheseöl (Kogasin-Verfahren) 12,
c) ein Syntheseöl (Hydrier-Verfahren) 13.

Die Versuchsergebnisse sind in Zahlentafel 2 sowie in Bild 9 zusammengestellt. Die Zeit- und Temperaturversuche lassen erkennen, daß eine beginnende Zersetzung bei den hier

Bild 7. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen.

Bild 8. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen.

untersuchten Schmierstoffen erst bei 375° C zu beobachten ist, denn Versuche, die bei 300° C und 6stündiger Behandlung in Stickstoffatmosphäre durchgeführt worden sind, ergeben in den untersuchten chemisch-physikalischen Eigenschaften noch keine Veränderungen. Das behandelte Mineralöl ergibt auch im Gegensatz zu den beiden behandelten Syntheseölen bei 375° C nur ganz geringe Veränderungen. Der Einfluß der Temperatur auf die thermische Beständigkeit ist aus den Veränderungen der Untersuchungsdaten, wie z. B. Abnahme der Viskosität bei 50° C und Zunahme der Bromzahl, in Bild 9 besonders deutlich zu ersehen. Diese Eigenschaften verändern sich zwischen 375 und 400° C besonders stark. Eine weitere Temperatursteigerung dürfte sich auf Grund dieser Ergebnisse erübrigen, da fast alle Schmierstoffe bereits bei 375° C eine lebhafte und sehr schnell ansteigende Zersetzung zeigen. Die Versuche mit zunehmender Zeitdauer (2, 4 und 6 h) wurden demgemäß nur bei 400° C durchgeführt. Der Einfluß der Erhitzungsdauer



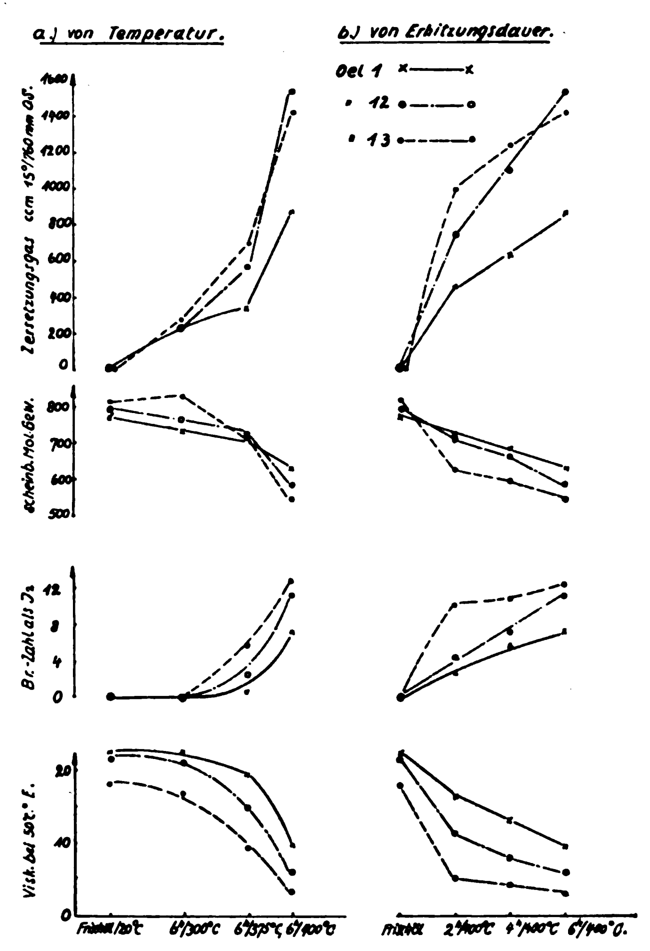


Bild 9. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen in Abhängigkeit.

zeigt, daß zu Beginn der Erhitzung sehr starke Veränderungen in den untersuchten Eigenschaften festzustellen sind, die dann allmählich Konstanz erreichen. Das würde besagen, daß zum größten Teil eine Versuchsdauer von 2 h/400° C für die Bestimmung der thermischen Beständigkeit von Schmierstoffen ausreichen würde. Das schlechteste thermische Verhalten innerhalb dieser Versuchsreihen zeigt das Syntheseöl 13, nämlich: starke Viskositäts- und Molekular-Gewichtsabnahme. Auch in der Menge des aufgefangenen Zersetzungsgases sowie dessen Zusammensetzung kommt das schlechte thermische Verhalten dieses Schmierstoffes zum Ausdruck.

Ein direkter Vergleich mit den Untersuchungsdaten des Mineralöles kennzeichnet die bestehenden Unterschiede noch stärker. Neben der bereits erwähnten Veränderung der Viskosität bei 50° C, dem Molekulargewicht und der Bromzahl sind die Verschiebungen in der Zusammensetzung der Zersetzungsgase mit zunehmender Zeitdauer und Temperatur bei der thermischen Behandlung besonders erwähnenswert. Hier tritt vor allem die Menge der gebildeten »SKW« sowie des Methans und seiner Homologe in den Vordergrund. Diese bei den Syntheseölen besonders großen Mengen dürften die Annahme stützen, daß einerseits bei den Syntheseölen die Ketten nicht so stabil sind, wie bei dem untersuchten mineralischen Schmierstoff und andererseits, daß bei den Syntheseölen auch eine größere Anzahl von Ketten vorhanden sind.

3. Alterungsverhalten der thermisch behandelten Schmierstoffe (6 h/400° C).

Von den in Stickstoffatmosphäre behandelten Schmierstoffen wurde neben der Viskosität bei 50° C, dem Molekulargewicht und der Bromzahl auch das Alterungsverhalten bestimmt. Die Alterung wurde nach dem DVL-Oxydationsverfahren durchgeführt. Dieses Verfahren hat gegenüber anderen Alterungsverfahren den Vorzug einer schnellen Untersuchungsmöglichkeit bei nur kleinen Versuchsmengen: Im folgenden wird das Prüfverfahren kurz beschrieben.

Zur Anwendung gelangen jeweils 10 g Schmierstoff, die in einer eben abgeschliffenen, flachen Schale aus Jenaer Glas von 92 mm Dmr. und 20 mm Höhe eingewogen werden. Die Erhitzung dieser Schalen erfolgt in einem Aluminiumblock, der gleichzeitig 6 solcher Schalen aufnehmen kann. Dieser Aluminiumblock ist mit Seiten- und Bodenheizung versehen, die vermittels eines Regulierwiderstandes eine Temperaturkonstanz von $\pm 1{,}0°$ C gestattet. Die Versuchsdauer beträgt 4 h und die Versuchstemperatur kann den Wünschen entsprechend eingestellt werden, und zwar muß die Blocktemperatur auf die gewünschte Öltemperatur, die mittels Thermoelement in der Schale gemessen wird, geeicht werden. (Die Versuchstemperatur für die zu oxydierenden Öle betrug im vorliegenden Fall 275° C korrigiert.) Die Alterung der Schmierstoffe wird bei diesem Verfahren in Luftatmosphäre durchgeführt. Nach der 4stündigen Versuchsdauer werden die Schalen zurückgewogen und die Differenz zwischen der Einwaage und Rückwaage mal 10 ergibt die Flüchtigkeit in %. Der Rückstand in der Schale wird sorgfältig ausgekratzt und zur Bestimmung des Asphaltgehaltes entsprechend DIN DVM 3616 angesetzt. Die gefundene Menge Asphalt dividiert durch die Einwaage mal 100 ergibt % Asphalt im Restöl. Diese beiden Faktoren

Zahlentafel 2. Untersuchungsergebnisse der »Thermischen Beständigkeit« in Abhängigkeit von Zeit und Temperatur.

Ölbezeichnung	Zeitdauer/ Temperatur h/° C	Einwaage g	Verlust g	Gasmenge ccm 15°/760 mm QS	Zusammensetzung der Gase							Visk./50° C °E	Br. Zahl J_2	Mol.-Gew.
					% CO_2	% SKW	% O_2	% CO	% H_2	% CH_4 C_2H_6 usw.	% N_2			
Öl 1 (168/38)	Frischöl	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	22,70	0,0	770
»	6 h 300° C	100,07	0,02	229	7,5	0,0	1,0	0,0	0,0	0,7	90,8	22,48	0,0	735
»	6 h 375 »	106,52	0,0	331	3,7	0,0	0,3	0,0	0,0	0,6	95,4	19,59	0,3	702
»	2 h 400 »	100,56	0,05	437	0,7	0,0	0,2	0,0	0,0	0,5	98,6	16,32	2,4	720
»	4 h 400 »	100,08	0,34	615	1,1	1,7	0,5	0,0	0,0	2,7	94,0	12,94	5,2	685
»	6 h 400 »	101,40	0,71	872	2,2	6,0	0,4	0,0	0,0	10,3	81,1	9,95	7,3	625
Öl 12 (249/37)	Frischöl	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21,55	0,0	789
»	6 h 300° C	98,42	0,0	230	1,0	0,0	0,3	0,0	0,0	0,5	98,2	21,42	0,0	763
»	6 h 375 »	102,00	0,58	556	0,8	1,6	0,3	0,0	0,0	3,0	94,3	14,70	2,3	722
»	2 h 400 »	101,70	1,12	742	0,9	3,4	0,6	0,2	0,0	6,0	88,6	11,15	4,2	709
»	4 h 400 »	99,94	1,86	1099	0,8	12,6	0,5	0,2	0,0	16,7	69,2	7,95	7,5	664
»	6 h 400 »	102,65	4,50	1505	0,8	19,6	0,4	0,5	0,0	25,7	53,0	6,13	11,2	580
Öl 13 (316/37)	Frischöl	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17,89	0,9	811
»	6 h 300° C	101,78	0,0	261	0,5	0,0	1,0	0,0	0,0	0,6	97,9	16,93	0,0	825
»	6 h 375 »	103,02	0,41	683	0,4	3,0	0,9	0,0	0,0	5,2	90,5	8,70	5,5	714
»	2 h 400 »	101,37	0,85	975	0,5	11,9	0,7	0,3	0,0	17,9	68,8	5,25	10,1	623
»	4 h 400 »	104,21	1,89	1225	0,3	14,5	0,8	0,5	0,0	21,9	62,0	4,73	10,8	594
»	6 h 400 »	101,16	2,21	1394	0,8	16,8	0,8	0,8	0,0	24,2	56,6	3,45	12,4	574

% Flüchtigkeit und % Asphalt im Restöl kennzeichnen das Alterungsverhalten nach dem DVL-Verfahren.

Die Alterungsergebnisse sind in Zahlentafel 3 denjenigen des Frischöles gegenübergestellt. Ein Vergleich läßt erkennen, daß bei den mineralischen Schmierstoffen zum größten Teil eine Verbesserung des Oxydationsverhaltens festzustellen ist, insbesondere bei dem Schmierstoff 3 um etwa 54% und bei den Schmierstoffen 4 und 6 um etwa 10 bzw. 5%. Nur der Schmierstoff 1 zeigt von den mineralischen Schmierstoffen nach der thermischen Behandlung eine geringe Verschlechterung seines Oxydationsverhaltens, während die synthetischen Schmierstoffe, mit Ausnahme des Schmierstoffes 11 nach der thermischen Behandlung fast durchweg Zunahme in den Asphalt- und Flüchtigkeitswerten zeigen.

Zahlentafel 3. Alterungsverhalten der thermisch behandelten Schmierstoffe (6 h/400° C, Stickst. Atm.)

Bezeichnung	Eing.-Nr.	Frischöl Spez. Gew. 20° C	Frischöl DVL-Oxydation Flüchtigkeit %	Frischöl DVL-Oxydation Asphalt %	Thermisch behand. Öl Spez. Gew. 20° C	Thermisch behand. Öl DVL-Oxydation Flüchtigkeit	Thermisch behand. Öl DVL-Oxydation Asphalt
Öl 1	136/37	0,882	74,0	4,3	0,875	74,0	4,7
Öl 2	69/37	0,887	73,0	4,6	0,880	77,0	4,6
Öl 3	Lg 7	0,893	62,0	13,0	0,887	67,0	5,9
Öl 4	183/34	0,902	78,0	12,4	0,896	79,0	11,4
Öl 6	191/34	0,906	76,0	14,2	0,902	76,0	13,6
Öl 7	20a/37	0,861	80,0	3,3	0,859	86,0	5,8
Öl 8	56a/37	0,861	80,0	4,1	0,855	82,0	4,4
Öl 9	78/37	0,863	69,0	1,5	0,856	67,0	2,3
Öl 10	414c/36	0,854	71,0	1,3	0,847	80,0	2,1
Öl 11	414 B/36	0,851	75,0	1,9	0,848	80,0	1,8

4. Ringanalyse.

Eine Anzahl der thermisch behandelten Schmierstoffe (6 h/400° C) sowie deren Ausgangsprodukte sind auch nach der Ringanalyse von Vlughter, Watermann und van Westen [38] untersucht worden. Die Ringanalyse wurde zur Bestimmung des durchschnittlichen Ringgehaltes von Kohlenwasserstoffen ausgearbeitet und ist von den Verfassern in einer ausführlichen Arbeit mit zahlreichen Beispielen beschrieben worden. Die Verfasser bedienen sich dabei der Beziehung zwischen spezifischer Refraktion und Molekulargewicht von gesättigten Kohlenwasserstoffen. Unter Anwendung dieses Verfahrens wurde von 6 verschiedenen Schmierstoffen die Zusammensetzung errechnet, deren Ergebnisse in Zahlentafel 4 zu ersehen sind. Die verschiedenen Ergebnisse der behandelten Öle lassen in der Zusammenstellung (wie früher bereits erwähnt) gegenüber den zugehörigen Frischölen z. T. eine weitgehende Molekülverkleinerung erkennen, die im wesentlichen auch in der errechneten Bruttoformel zum Ausdruck kommt. Der Gehalt in % an aromatischen und naphthenischen Ringen ist bei den untersuchten Schmierstoffen sehr verschieden, desgleichen die Anzahl der errechneten Doppelbindungen. Die letzteren werden aus der Molekularrefraktion errechnet. Bei bekannter Zusammensetzung der Stoffe kann die Molekularrefraktion auch aus den Atomrefraktionen seiner Elemente unter Berücksichtigung der Bindungsart errechnet werden. Die Atomrefraktion für Kohlenstoff beträgt nach neueren Bestimmungen 2,418, für Wasserstoff 1,100 und für Kohlen-

Zahlentafel 4. Konstitution und Zusammensetzung von einigen Flugmotorenölen vor und nach rein thermischer Behandlung.

Eigenschaften	Öl 1 Frischöl	Öl 1 6 h 400° e N_2 Atmosph.	Öl 4 Frischöl	Öl 4 6 h 400° e N_2 Atmosph.	Öl 7 Frischöl	Öl 7 6 h 400° e N_2 Atmosph.	Öl 3 Frischöl	Öl 3 6 h 400° e N_2 Atmosph.	Öl 6 Frischöl	Öl 6 6 h 400° e N_2 Atmosph.	Öl 10 Frischöl	Öl 10 6 h 400° e N_2 Atmosph.
Spez. Gew. bei 20° C kg/l	0,882	0,875	0,902	0,896	0,861	0,855	0,893	0,885	0,906	0,902	0,854	0,847
Refraktion . . . . $n_{D_{20}}$	1,4878	1,4841	1,4979	1,4962	1,4783	1,4763	1,4969	1,4937	1,5005	1,4992	1,4736	1,4710
Viskosität bei 50°C . °E	23,2	7,21	22,0	7,66	21,6	4,9	28,1	9,1	21,9	11,9	20,6	5,98
Bromzahl nach Mc. Ilhinoy . . g/100 g	1,3	8,4	10,4	8,9	1,8	9,4	5,2	10,5	1,1	6,3	3,7	8,2
Anilinpunkt . . . . °C	124	112,6	107,6	97,4	128,4	109,0	120,0	109,0	113,0	107,0	135,8	123,5
Molekular-Gewicht . . .	691	499	567	451	719	478	665	450	569	506	730	503
Elementaranalyse:												
Kohlenstoff . . . . %	86,3	86,4	86,5	86,8	86,1	86,2	86,6	87,1	86,4	87,4	85,9	85,7
Wasserstoff . . . . »	13,3	13,6	12,9	13,0	13,7	13,8	12,9	12,9	12,2	12,6	13,9	14,0
Sauerstoff + Stickstoff + Schwefel . . . . »	0,4	0,0	0,6	0,2	0,2	0,0	0,5	0,0	1,4	0,0	0,2	0,0
Bruttoformel . . . . »	C 50,1 H 89,8	C 35,9 H 58,2	C 41,1 H 73,8	C 32,7 H 58,6	C 51,7 H 98,6	C 34,4 H 65,2	C 48,2 H 86,8	C 32,6 H 58,8	C 41,6 H 69,8	C 36,9 H 53,2	C 52,5 H 100	C 36,2 H 68,6
scheinbare allgemeine Formel	C_nH_{2n} — 10,4	C_nH_{2n} — 13,b	C_nH_{2n} — 8,4	C_nH_{2n} — 6,8	C_nH_{2n} — 4,8	C_nH_{2n} — 3,6	C_nH_{2n} — 9,6	C_nH_{2n} — 6,4	C_nH_{2n} — 13,4	C_nH_{2n} — 20,6	C_nH_{2n} — 5,0	C_nH_{2n} — 3,8
Mol.-Refr. $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{M}{d}$ . .	225,55	163,10	185,12	147,03	236,40	157,71	217,69	147,49	186,90	164,82	240,52	165,74
Summe der Atomrefrakt. Äquivalent	219,92	150,82	180,56	143,53	233,47	154,89	212,02	143,50	177,37	147,74	236,94	162,99
Errechnete Zahl der Doppelbdg.	3,3	7,0	2,6	2,0	1,7	1,6	3,3	2,3	5,4	9,8	2,0	1,6
Spez. Refr. $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d}$ . .	0,3253	0,3258	0,3251	0,3213	0,3286	0,3297	0,3277	0,3287	0,3250	0,3261	0,3295	0,3298
Anilinpunkt, gefunden °C	124,0	112,6	107,6	97,4	128,4	109,0	120,0	109,0	113,0	107,0	135,8	123,5
» , abgelesen »	130,5	118,0	121,7	108,0	136,3	121,0	131,3	117,4	124,1	118,5	135,8	123,5
Differenz . . . . . . »	6,5	5,4	14,1	10,6	7,9	12,0	11,3	8,4	11,1	11,5	—	—
Anilinpunkterhöhung . .	5,2	4,3	11,3	8,5	6,3	9,6	9,0	6,7	8,9	9,2	—	—
Anilinpunkt, errechnet nach Hydrierung °C	129,2	116,9	118,9	105,9	134,7	118,6	129,0	115,7	121,9	116,2	135,8	123,5
Aromaten- 0,85 × Anilinpunkterhöhung	4,5	4,0	9,6	7,5	5,4	8,0	7,7	5,7	7,6	7,8	0	0
Spezifische Refraktion aus Anilinpunkt	0,3245	0,3249	0,3232	0,3205	0,3275	0,3278	0,3258	0,3272	0,3235	0,3243	0,3295	0,3298
Naphthenische Ringe %	21,0	25,0	23	39	10,0	0,0	14,0	12,0	25,0	24,0	7,5	10
Aromatische Ringe . »	4,0	4,0	10	8	6,0	8,0	8,0	6,0	8,0	8,0	0	0
Paraffinische Seitenkette . . . . »	75,0	71,0	67	53	84,0	82,0	78,0	82,0	67,0	68,0	92,5	90

stoff-Doppelbindungen 1,733. Die Zu- bzw. Abnahme der errechneten Doppelbindungen im Molekül bei der thermischen Behandlung soll gleichfalls zur Beurteilung herangezogen werden. Die thermische Behandlung der Schmierstoffe schließt zwei Teilprozesse in sich, und zwar primär Aufspaltung in kleinere Bruchstücke und sekundär Polymerisation dieser Bruchstücke. Diese beiden Vorgänge dürften daher auch größtenteils die bei der thermischen Behandlung der Schmierstoffe sich ergebenden Veränderungen bei der Ringanalyse bestimmen. Wenn bei dieser Art der Spaltung auch die aus den Molekülen primär entstehenden Radikale usw. nicht erfaßbar sind, so ist doch mit Hilfe der Ringanalyse die Möglichkeit gegeben, wenigstens einigermaßen die Veränderung im Aufbau zu erkennen. Bei allen Erklärungen, die sich aus dem Vergleich der Untersuchungsergebnisse der Ringanalyse im folgenden ergeben werden, ist besonders darauf hinzuweisen, daß dieselben nur ein allgemeines Bild zulassen. In der Annahme, daß die Folgerungen aus der Ringanalyse den tatsächlich durch die thermische Behandlung eingetretenen Veränderungen entsprechen, ergeben sich nachstehende Möglichkeiten. Der thermisch behandelte Schmierstoff 1 zeigt gegenüber seinem Frischöl eine Zunahme an naphthenischen Ringen von 4% auf Kosten der paraffinischen Seitenketten, dabei ist gleichzeitig eine Steigerung der errechneten Doppelbindungen von 3,3 auf 7,0 festzustellen. In diesem Falle dürften infolge der thermischen Einwirkung primär durch Krackung ungesättigte Kohlenwasserstoffe entstanden sein, die teilweise sekundär durch Polymerisation naphthenische Ringe gebildet haben.

Der thermisch behandelte Schmierstoff 4 läßt in den naphthenischen Ringen eine Zunahme von 16% gegenüber seinem Ausgangsöl erkennen. Die aromatischen Ringe sowie die Anzahl der Doppelbindungen zeigen geringe Abnahme. Bei diesem Schmierstoff dürften infolge der thermischen Einwirkungen entsprechend dem Schmierstoff 1 gleichfalls auf Grund einer überwiegenden Polymerisation naphthenische Ringe gebildet worden sein. Die Abnahme an aromatischen Ringen ist auf teilweise Aufspaltung zurückzuführen, ob dieselbe aber in einem solchen Ausmaß, wie teilweise die Ringanalyse zeigt, eintritt, möge dahingestellt bleiben. Der Schmierstoff 7 ergibt nach der thermischen Behandlung eine Abnahme von 2% an paraffinischen Seitenketten, die als Zunahme in den aromatischen Ringen erscheinen. Diese Zunahme könnte so erklärt werden, daß durch Krackung Radikale gebildet worden sind, die entweder direkt zur Aromatenbildung oder durch Polymerisation erst zu naphthenischen Ringen und durch anschließende Dehydrierung dieser naphthenischen Ringe zur Bildung von aromatischen Ringen geführt haben. Die Zusammensetzung des thermisch behandelten Schmierstoffes 3 ergibt gegenüber seinem zugehörigen Ausgangsöl in den aromatischen sowie in den naphthenischen Ringen eine Abnahme von je 2%. Die paraffinischen Seitenketten erfahren demgemäß eine Steigerung von 78 auf 82%. Die Anzahl der errechneten Doppelbindungen fallen um 1,0 auf 2,3%. Die Ringe sind z. T. durch Crackung aufgespalten worden (auch hier gilt das vorstehend Gesagte).

Der thermisch behandelte Schmierstoff 6 ergibt in der Ringanalyse gegenüber seinem Ausgangsöl nur unwesentliche Veränderungen. Die Steigerung der errechneten Doppelbindungen von 5,4 auf 9,8 kann nur auf Krackung zurückzuführen sein.

Der Schmierstoff 10 ergibt nach seiner thermischen Behandlung in der Ringanalyse gleichfalls nur geringe Veränderung. Die Zunahme an naphthenischen Ringen von 7,5 auf 10% kann gleich wie bei dem Schmierstoff 1 auch durch Krackung und anschließender Polymerisation der ungesättigten Kohlenwasserstoffe erklärt werden.

III. Besprechung der Versuchsergebnisse.

A. Allgemeine Betrachtungen zu den Ergebnissen 6 h/400° C.

Das Verhalten von synthetischen und mineralischen Flugmotorenölen bei rein thermischer Einwirkung wurde zunächst an der Veränderung verschiedener Eigenschaften mit Hilfe der hierfür gebräuchlichen chemischen und physikalischen Untersuchungsmethoden verfolgt. Von allen Kennzahlen ist für das rein thermische Verhalten eines Flugmotorenöles die Veränderung der Viskosität bei 50° C, das Molekulargewicht und die Bromzahl besonders kennzeichnend. Auf Grund der Untersuchungsergebnisse war zu erkennen, daß Öle mit hohen Molekulargewicht (in diesem Falle fast alle synthetischen) gegen erhöhte Temperatur weniger beständig sind als die Flugmotorenöle mit niedrigerem Molekulargewicht (mineralisch). Zu der gleichen Feststellung kommt auch Woog in seinen Versuchen über Thermostabilität von Ölen, über die in der Literaturbesprechung bereits berichtet wurde.

Die Veränderung der Schmierstoffe durch die thermische Einwirkung kommt am stärksten in der Viskositätsabnahme zum Ausdruck. Die größte Viskositätsabnahme zeigt mit 80% das Öl 9 (synthetisch), dem die anderen synthetischen Öle in geringen Abständen folgen, ausgenommen das Öl 11 (gleichfalls synthetisch), das in der Viskositätsabnahme sowie auch in den anderen Eigenschaften das gleiche Verhalten erkennen läßt wie die mineralischen Flugmotorenöle, deren Viskositätsabnahme zwischen 45 bis 68% liegen. Auch die Zunahme der Bromzahl, d. h. die Bildung von additionsfähigen Produkten, ist bei den synthetischen Ölen höher als bei den Ölen auf Mineralölbasis.

Der Einfluß der rein thermischen Einwirkung auf die Viskosität der Öle dürfte für ihre motorische Bewährung von grundsätzlicher Bedeutung sein. Entsprechende Hinweise über das Viskositätsverhalten sind aus den bereits erwähnten Veröffentlichungen von Hugel, Mikeska und Zorn [12, 13, 14] zu entnehmen. In der vorliegenden Arbeit konnten die Zusammenhänge zwischen chemischer Konstitution und Viskositätsverhalten verschiedener Kohlenwasserstoffe nicht untersucht werden, immerhin wäre, im Hinblick auf die Viskositätseigenschaften, die Kenntnis der strukturellen Veränderung der thermisch behandelten Schmierstoffe von besonderer Bedeutung. Die chemischen Folgen dieser thermischen Veränderung dürften nämlich praktisch ausschlaggebend sein. Bei Verringerung der Viskosität ist z. B. mit einer Steigerung des Ölverbrauches zu rechnen. Für die Schmierung bei höheren Temperaturen muß eine ausreichende Menge genügend stabiler Moleküle zurückbleiben, die einen tragfähigen Schmierfilm gewährleisten. Bei der vorliegenden Arbeit war die Annahme zugrunde gelegt worden, daß durch Verdampfung oder Crackung bestimmte Ölanteile verschwinden, während der Rest die Schmierung übernehmen muß.

Man sollte annehmen, daß die in Stickstoffatmosphäre stabilsten Öle auch das günstigste motorische Verhalten erkennen lassen. Diese Annahme konnte durch die motorische Prüfung der Schmierstoffe im Einzylinder-Prüfmotor nicht immer bestätigt werden, denn es wurde festgestellt, daß gerade die thermisch unstabilen Schmieröle — in diesem Falle die synthetischen Flugmotorenöle — ein günstigeres Verhalten zeigen als die teilweise sehr stabilen mineralischen Flugmotorenöle. Eine mögliche Erklärung dafür bestünde in der Annahme, daß bei solchen Ölen unter der Einwirkung von Temperatur und verdichteter Luft — vielleicht auch anoxydierte — Kraftstoffmoleküle und primär aufgespaltene Schmierölmoleküle sich zu thermisch beständigen, hochsiedenden und nicht verkokenden Molekülen zusammenlagern. Welchen Reaktionen die verschiedenen Schmierstoffe bei der praktischen Verwendung im einzelnen unterworfen sind, kann wegen der Unkenntnis der Beschaffenheit der im Motor entstehenden Veränderungsprodukte nicht gesagt werden. Die Verschiedenheit des chemischen und des motorischen Verhaltens der Schmierstoffe wird am besten durch die Gegenüberstellung der Untersuchungsergebnisse von zwei Flugmotorenölen verschiedener Herkunft gekennzeichnet. Wenn man die Flugmotorenöle 6 (naphthenisch) und 7 (synthetisch), von denen das laboratoriumsmäßige Verhalten gegen Oxydation sowie die motorische Prüfung bekannt ist, auf Grund ihrer Versuchsergebnisse miteinander vergleicht, Zahlentafel 5, so erkennt man, daß das Öl 6

Zahlentafel 5. Thermische Beständigkeit von Flugmotorenölen: Gegenüberstellung von 2 thermisch behandelten Ölen (6 h 400° C).

	Öl Nr. 6 naphthenisch	Öl Nr. 7 synthetisch
Erhitzungsverluste . . . . %	2,3	21,2
Gasmenge (N_2-frei) l	0,067	0,236
Abnahme der Visk. bei 50° C %	45,5	77,5
» des Molekular-Gew. »	63	266
Zunahme der Bromzahl g/100 g	5,2	9,4
Laufzeit im Siemens-Prüfmotor h	5,5	12
Kerzenringtemp. 380° C		(Eing.-Nr. 1,36)
Alterungsverhalten, DVL-Verf. 4 h 275° C:		
Flüchtigkeit . . . . . . %	80,0	80,0
Asphalt . . . . »	15,2	4,2

(naphthenbasisch) gegenüber dem Öl 7 (synthetisch) in allen Untersuchungsergebnissen ein günstigeres thermisches Verhalten in Stickstoffatmosphäre zeigt. In Gegenwart von Luft liegen die Verhältnisse, nach den bisherigen Ergebnissen aus der Alterungsprüfung und dem motorischen Verhalten ganz anders, denn es konnte durch Prüfläufe in einem Einzylinderprüfmotor bei etwa gleichen Betriebstemperaturen festgestellt werden, daß das Öl 7 (synthetisch) sich motorisch viel besser bewährt als das Öl 6. Die Alterungsprüfung, bei 275° C durchgeführt, bestätigt die motorischen Ergebnisse; allerdings ist zu berücksichtigen, daß die vielfach größere Asphaltmenge bei der Oxydation des naphthenischen Öles im Motor einen so großen Einfluß haben kann, daß der Wert des Prüflaufes für die Beurteilung der rein thermischen Beständigkeit verringert bzw. vollkommen annulliert wird.

B. Alterungsverhalten und Ringanalyse der Ausgangsöle sowie der thermisch behandelten Schmierstoffe (6 h/400° C).

Die in den Versuchsergebnissen bereits besprochenen Oxydationsversuche der thermisch behandelten Schmierstoffe sollten zeigen, inwieweit durch die rein thermische Behandlung sich Veränderungen der motorischen Brauchbarkeit ergeben werden. Die Gütebewertung der motorischen Brauchbarkeit soll im vorliegenden Fall durch die DVL-Oxydationsergebnisse übernommen werden, da dieselben, wie einer entsprechenden Arbeit von Philippovich [40] entnommen werden kann, eine annähernde Beziehung zu den Laufzeiten bis zum Kolbenringverkleben in einem Siemens-Prüfmotor erkennen lassen. In Zahlentafel 6 sind die Oxydationsergebnisse einiger Frischöle sowie ihrer thermisch behandelten Öle der nach der Ringanalyse ermittelten Zusammensetzung gegenübergestellt worden. Diese Aufstellung ermöglicht bei näherer Betrachtung eine Reihe von Feststellungen, die allerdings nur unter der Voraussetzung zutreffen, daß, wie bereits einmal erwähnt, die Ergebnisse der Ringanalyse den tatsächlichen chemischen Vorgängen entsprechen. Die Frischöle 4 und 6 mit 10 bzw. 8% an aromatischen Ringen haben von allen untersuchten Schmierstoffen das schlechteste motorische Verhalten, dagegen sind die motorischen Ergebnisse der Schmierstoffe 10 und 1 mit 0,0 bzw. 4,0% an aromatischen Ringen als sehr gut zu bezeichnen. Würde man daher bei den untersuchten Schmierstoffen auf Grund ihres Oxydationsverhaltens sowie ihrer motorischen Prüfungsergebnisse in Anlehnung an die Ergebnisse der Ringanalyse eine Gütebezifferung aufstellen, so wäre zunächst festzustellen, daß mit fallendem Gehalt an aromatischen Ringen der motorische Wert der Schmierstoffe steigt. Wie aus der Zahlentafel 6 zu entnehmen ist, dürfte daher für die praktische Verwendung ein aromatenfreies Kohlenwasserstoffgemisch, wie z. B. der untersuchte Schmierstoff 10 mit 0,0% an aromatischen Ringen und einer Laufzeit von über 15 h im Siemens-Prüfmotor bzw. ein Gemisch mit geringem Gehalt an aromatischen Ringen, wie z. B. der Schmierstoff 1 mit 4% und einer Laufzeit im Prüfmotor von 12,5 h, erwünscht sein. Eine Bekräftigung erfahren die vorgenannten Überlegungen zusätzlich durch die bekannte Tatsache, daß die Aromaten in Gegenwart anderer Kohlenwasserstoffe Oxydationsreaktionen sehr zugänglich sind und überdies auch sehr leicht zur Koksbildung neigen. Es ist sicherlich anzunehmen, daß auch die Menge der naphthenischen Ringe das Gesamtbild beeinflussen wird, denn streng genommen kann der Einfluß des Aromatengehaltes nur bei solchen Schmierstoffen zum Vergleich herangezogen werden, die sonst gleiche bzw. ähnliche Zusammensetzung haben. Wenn man demgemäß die Untersuchungsergebnisse der Zahlentafel 6 einem Vergleich unterzieht, so ist festzustellen, daß solche Schmierstoffe sich motorisch am besten verhalten, die neben einem hohen Gehalt an paraffinischen Seitenketten möglichst wenig aromatische Ringe im Molekül haben, bei möglichst geringer Anzahl von Doppelbindungen im Molekül. Die Abweichung, die sich bei dem Schmierstoff 6 hinsichtlich seines Gehaltes an aromatischen Ringen, 8%, und seiner Laufzeit von 5,5 h gegenüber dem Schmierstoff 3 mit gleichfalls 8% an aromatischen Ringen und einer Laufzeit von 7 h ergeben, dürfte einerseits auf die größere Anzahl von errechneten Doppelbindungen pro Molekül und andererseits auf den höheren Gehalt an naphthenischen Ringen zurückzuführen sein. Waterman, Lendertse und Palm [41] haben sich mit ähnlichen Versuchen befaßt. Die Verfasser haben von einer Reihe von Schmierstoffen den Gehalt an aromatischen und naphthenischen Ringen sowie das mittlere Molekulargewicht ermittelt. Die Ergebnisse sind dann dem Oxydationsverhalten nach dem Slight-Test gegenübergestellt worden. Aus den in der Arbeit angeführten Zahlentafeln kann entnommen werden, daß die Schmierstoffe mit 0,0% an aromatischen Ringen auch die geringste Schlammbildung nach der Oxydation ergeben und daß mit steigendem Gehalt an aromatischen Ringen im allgemeinen auch eine Zunahme von Schlammstoffen nach der Oxydation zu erkennen ist. Diese Erkenntnisse bestätigen in großen Zügen die eigenen Überlegungen. Auf Grund dieser allgemeinen Feststellungen dürfte auch zum größten Teil das verbesserte Oxydationsverhalten einiger thermisch behandelter

Zahlentafel 6. Alterungsverhalten und Ringanalyse der Ausgangsöle sowie der thermisch behandelten Schmierstoffe (6 h/400° C N^2-Atmosphäre).

Eigenschaften	Öl 1		Öl 4		Öl 7		Öl 3		Öl 6		Öl 10	
	Frischöl	6 h/400° C	Frischöl	6 h/400° C	Frischöl	6 h/400° C	Frischöl	6 h/400° C	Frischöl	6 h/400° C	Frischöl	6 h/400° C
Zahl der errechneten Doppelbindungen . . .	3,3	7,0	2,6	2,0	1,7	1,6	3,3	2,3	5,4	9,8	2,0	1,6
Naphthenische Ringe %	21	25	23	39	10	10	14	12	25	24	7,5	10
Aromatische » »	4	4	10	8	6	8	8	6	8	8	0	0
Paraffinische Seitenketten . . . . . . »	75	71	67	53	84	82	78	82	67	68	92,5	90
Oxydationsverhalten (DVL):												
Flüchtigkeit . . . %	74	74	78	79	80	86	62	67	76	76	71	80
Asphalt . . . . . »	4,3	4,7	12,4	11,4	3,3	5,8	13,0	5,9	14,2	13,6	1,3	2,1
Laufzeit (Siemens-Prüfmotor) . . . . h	12,5	—	6	—	12	—	7	—	5,5	—	15	—

Schmierstoffe zu erklären sein, das auffallend bei dem Öl 3 in Erscheinung tritt. Dieser Schmierstoff läßt in der Ringanalyse und der Anzahl der errechneten Doppelbindungen entsprechende Veränderungen erkennen, die für das verbesserte Oxydationsverhalten sprechen. Der thermisch behandelte Schmierstoff 4 zeigt ähnliche Verhältnisse. Da auf Grund des verbesserten Oxydationsverhaltens auch eine bessere Laufzeit im Prüfmotor zu erwarten sein dürfte, d. h. Verbesserung der motorischen Verwendung durch die thermische Behandlung, so ist andererseits auch festzustellen, s. Zahlentafel 6, daß durch die thermische Behandlung in Stickstoffatmosphäre auch Verschlechterung im Oxydationsverhalten (und damit auch vermutlich Verschlechterung in der motorischen Verwendung) eintreten kann, wie dieses aus dem Beispiel des untersuchten synthetischen Öles 7 zu ersehen ist, das nach der thermischen Behandlung eine geringe Zunahme des Gehaltes an aromatischen Ringen nach der Ringanalyse zeigt. Entsprechende motorische Versuche mit Ölen, die laboratoriumsmäßig Oxydationsverbesserung bzw. Oxydationsverschlechterung nach der thermischen Behandlung ergeben haben, konnten infolge der zeitraubenden Vorbereitungen bisher nicht durchgeführt werden, sollen aber sofort nach Fertigstellung einer genügenden Versuchsmenge stattfinden. Die Veränderung im Oxydationsverhalten der thermisch behandelten Öle findet durch die bei der thermischen Behandlung eingetretene Spaltung eine Erklärung. Mit Hilfe der Ringanalyse läßt sich mit einigen Einschränkungen angeben, ob durch die thermische Behandlung eine Zu- bzw. Abnahme der Anzahl von aliphatischen Ketten bzw. aromatischen und naphthenischen Ringen zu erwarten ist. Zu ähnlichen Feststellungen über die Anwendungsmöglichkeit der Ringanalyse kommt auch Kadmer [42] in seinem Beitrag »Zur Konstitutionsaufklärung von Mineralschmierölen«. Für die praktische Beurteilung ergibt lediglich der Vergleich mit dem Oxydationsverhalten einige Hinweise, die aber auch wegen der nur beschränkten Erkenntnisse, die auf Grund der Ringanalyse zu erhalten sind, nicht verallgemeinert werden können. Hier dürfte die Ermittlung des spezifischen Parachor, der gleichzeitig auch den Grad der Verzweigung der Kohlenwasserstoffketten zu bestimmen gestattet, eine bessere Deutung zulassen. Entsprechende Vergleichsversuche sind bereits von Heinze, Marder und Pohl [43] bei der Untersuchung von hochmolekularen Kohlenwasserstoffen mit Erfolg durchgeführt worden.

IV. Zusammenfassung.

Es wurden eine Reihe von Flugmotorenölen verschiedener Herkunft in Stickstoffatmosphäre auf ihr thermisches Verhalten untersucht und ihre Veränderung gegenüber den Ausgangswerten festgestellt. Zusammenfassend kann gesagt werden:

1. daß aus der Veränderung der Viskosität bei 50° C, der Bromzahl, dem Molekulargewicht, der Zusammensetzung des aufgefangenen Zersetzungsgases Schlüsse auf das thermische Verhalten der untersuchten Schmierstoffe gezogen werden können,
2. daß auf Grund der Versuche, die in Abhängigkeit von Zeit und Temperatur durchgeführt wurden, der Temperatur- und Zeitpunkt der beginnenden Zersetzung ermittelt werden kann. In diesem Zusammenhang konnte festgestellt werden, daß der Temperatureinfluß auf die thermische Beständigkeitsprüfung größer ist als der zeitliche Einfluß, und daß ein Temperaturmaximum von 400° C für die Beständigkeitsprüfung der Schmierstoffe ausreicht. Von den untersuchten Schmierstoffen zeigen die synthetischen Schmieröle fast übereinstimmend bei 6 h/375° C beginnende Zersetzung, dagegen der mineralische Schmierstoff erst bei 2 h/400° C,
3. daß die Bestimmung des Alterungsverhaltens der thermisch behandelten Schmierstoffe nach dem DVL-Verfahren:
   a) erkennen läßt, daß die bei der thermischen Behandlung festgestellte Oxydationsverbesserung bzw. -verschlechterung größtenteils auf vorausgegangene Spaltung zurückzuführen ist, das würde besagen, daß bei höheren Temperaturen (400° C) die Spaltung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Oxydation ausübt,
   b) weiterhin die Möglichkeit in sich schließt, auf Grund seiner z. T. engen Verbindung mit den Laufzeiten eines Siemens-Prüfmotors Voraussagen über das praktische Verhalten der thermisch behandelten Stoffe zu machen,
4. daß mit Hilfe der Ringanalyse, die für die praktische Beurteilung ausreichend erscheint, auf Grund der Veränderungen, die sich bei der thermischen Behandlung der Schmierstoffe ergeben, Schlüsse gezogen werden können:
   a) auf die Thermostabilität des betreffenden Schmierstoffes,
   b) auf das motorische Verhalten, wenn man den jeweilig ermittelten Gehalt an aromatischen Ringen, die einen gewissen Einfluß auf das Oxydationsverhalten sowie auf die Laufzeit zu haben scheinen, zum Vergleich heranzieht,
5. daß die Gegenüberstellung von mineralischen und synthetischen Flugmotorenölen erkennen läßt, daß die synthetischen Flugmotorenöle, soweit dieselben hier behandelt worden sind, trotz guter Alterungsbeständigkeit thermisch den mineralischen Ölen unterlegen sind. Es muß daraus geschlossen werden, daß die synthetischen Flugmotorenöle Zersetzungsprodukte bilden, die unter dem Einfluß der Luft bzw. Sauerstoff sich günstiger verhalten als diejenigen der mineralischen Flugmotorenöle,
6. daß die größte thermische Beständigkeit von allen behandelten Schmierstoffen ein naphthenbasisches Flugmotorenöl hat, und daß die Beständigkeit in der Reihenfolge gefettet, paraffinbasisch, synthetisch abnimmt.

Auf Grund der Versuchsergebnisse wird vorgeschlagen, die Prüfung der thermischen Beständigkeit von Flugmotorenölen unter folgenden Bedingungen in Stickstoffatmosphäre durchzuführen:

1. Reaktionszeit einschließlich der Einleitungszeit 6 h,
2. Reaktionstemperatur im Öl 400° C (korrigiert),
3. anzuwendende Ölmenge 150 g.

Das behandelte Öl wird auf dieVeränderung des spezifischen Gewichtes bei 20°, der Viskosität bei 50° C, der Bromzahl nach Mc. Ilhiney und dem Molekulargewicht untersucht und den gleichen des Frischöles gegenübergestellt.

Schrifttum.

[1] Pye, Surface Films and Lubrication. Roy. Soc. (1936), S. 754.
[2] Bowden and Riddler, Roy. Soc. Bd. 154, S. 640.
[3] Rosen, SAE Bd. 40 (1937), Nr. 4, S. 165/172.
[4] Baß, Shell-Aviation-News, Oktober 1936.
[5] Beall, Selections of oils for high output engines. SAE Bd. 39 (1936), Oktober.
[6] Kyropoulus, Automobiltechn. Z. Bd. 32, S. 619.
[7] F. J. Slee, Ind. Eng. Chem. Bd. 54 (1935), S. 809/14.
[8] Francis, Ind. Eng. Chem. Bd. 20 (1928), S. 277.
[9] Tschernoshukow u. Krejn, Neftjanoje Chostjaistwo Bd. 23 (1932), S. 285.
[10] F. O. Rice, Ind. Eng. Chem. (1934).
[11] Kolomazki u. Stepanzoff, Neftjanoje Chostjaistwo Bd. 10 (1936); Übersetzung: Motorenbetrieb und Maschinenschmierung Nr. 12, Petroleum Bd. 10 (1937).
[12] Hugel, Chimie et Industrie Bd. 26 (1932), S. 1282.
[13] Mikeska, Ind. Eng. Chem. Bd. 28 (1936), S. 970/94.
[14] Zorn, Angew. Chemie Bd. 50 (1937), S. 791/97.
[15] H. Koch u. G. Ibing, Brennstoff-Chemie, Bd. 16 (1935), S. 261/68.



[16] Sava, Petroleum (1931), S. 130.
[17] Bestushew, Erdöl u. Teer (1931), S. 208.
[18] Sachanen u. Tilitschejew, Berichte d. dtsch. chem. Ges. (1929), S. 593.
[19] Ipatiew u. Petrow, Berichte d. dtsch. chem. Ges. 1930, S. 329/31.
[20] Schultze, Angew. Chemie Bd. 49 (1936), S. 284.
[21] Ubbelohde u. St. Philippide, Diss. Karlsruhe 1914; Ubbelohde u. Schülke, Diss. Tübingen 1916.
[22] Evers, Wissenschaftl. Veröffentl. Siemens Konzern Bd. 4 (1925), S. 324.
[23] Maillard, Congrès du Graissage. Straßburg 1931, S. 308.
[24] Koetschau, Von den Kohlen u. Mineralölen III (1930), S. 110.
[25] Woog, Contribution a l'ètude de Graissage. Onctuositè Influence Moleculaires, 1926, S. 140.
[26] Freund und Thamms, Petroleum Bd. 41 (1933), S. 6.
[27] s. unter [11].
[28] Tschernoshukow, Welterdölkongreß Paris 1937; Ref. Angew. Chemie Bd. 50 (1937), S. 877.
[29] Bestushew s. unter [17].
[30] Tschernoshukow, Petrol. Ind. (1928), Nr. 7.
[31] Koetschau, s. unter [24].
[32] Estradère, Comptes Rendus des Séances de l'academie des Sciences (1937), Nr. 1, S. 46/48.
[33] Dixmier und Lion, Vortrag, Welterdölkongreß Paris 1937.
[34] Heinze und Obenaus, Angew. Chemie Bd. 48 (1935), S. 587.
[35] Noack, Öl u. Kohle Bd. 13 (1937), S. 961/67.
[36] Marder und Tolkmitt, Öl u. Kohle Bd. 14 (1938), S. 615/19 u. S. 635/37.
[37] Casimir und Dimitriu, Petroleum (1933), Nr. 33.
[38] Vlughter, Waterman und van Westen, Petr. Techn. Bd. 21 (1935), S. 661/707.
[39] Woog, s. unter [7].
[40] Ar. Philippovich, Luftfahrtforschung Bd. 14 (1937), S. 254.
[41] Watermann, Leendertse und Palm, Petr. Techn. Bd. 23 (1937), S. 483/90.
[42] Kadmer, Öl u. Kohle Bd. 14 (1938), S. 32/39.
[43] Heinze, Marder und Pohl, Diss. TH. Berlin.

Die eindeutige Kennzeichnung des Flugzustandes in der Nähe der Mindestgeschwindigkeit.

Von F. Hoppe.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Bordgeräte und Navigation.

Nach Erörterung der Schwierigkeit, aus der Staudruckanzeige Rückschlüsse auf die in dem jeweiligen Flugzustand noch vorhandene Reserve an Auftriebskräften zu ziehen, wird die Beobachtung der Grenzschichtverhältnisse durch eine Gesamtdruckmessung kurz über der Flügeloberseite vorgeschlagen. Eine Kombination mit der Fahrtmesseranlage ist möglich. Einige Windkanal- und Flugversuchsergebnisse werden mitgeteilt. Die Fragen der praktischen Anwendung werden besprochen.

Gliederung.

I. Notwendigkeit eines Bordmeßgerätes für die Auftriebsreserve.

Die durch Einbuße an Höchstgeschwindigkeit und Zugeständnisse an Gewicht (Tragflügelgröße) und durch technische Komplikationen (Landeklappen) meist teuer erkauften Landeeigenschaften eines Flugzeuges, insbesondere sein Mindeststaudruck und seine Mindestlandestrecke, werden in der Flugpraxis nur selten voll ausgenutzt. Meist wird mit unnötig viel Fahrt zur Landung angesetzt, so daß die Landestrecke unnötig lang wird. Jedenfalls müssen bei jeder Landung, insbesondere wenn sie im Verband erfolgt, wesentlich größere Strecken (von hohen Hindernissen bis zum Ende des Rollfeldes gerechnet) zur Verfügung stehen, da erfahrungsgemäß das Aufsetzen auf einem vorher bestimmten Punkt mit Mindestgeschwindigkeit sehr schwierig ist, ein Hinsetzen möglichst kurz hinter einem Hindernis aber ganz besonderes Geschick erfordert. Dementsprechend war auch seit je die Landung einer der Hauptgegenstände der ganzen fliegerischen Ausbildung.

Der Grund für diesen Tatbestand liegt zu einem erheblichen Teil in der Schwierigkeit für den Flugzeugführer, sich über den Flugzustand in der Nähe der Mindestgeschwindigkeit in jedem Augenblick klar zu sein. Unter »Flugzustand« ist hier in erster Linie die noch vorhandene »relative Auftriebsreserve« $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a}$ zu verstehen, die gleichbedeutend ist mit der bahnsenkrechten Beschleunigung, die der Pilot beim Übergang von dem c_a-Wert des stationären Fluges auf das $c_{a\,max}$ erzwingen kann.

II. Staudruck und Anstellwinkel als Maß für die Auftriebsreserve.

Wie wenig die übliche Fahrtmesseranlage zu einer Kennzeichnung des Flugzustandes geeignet ist, zeigen Bild 1a und 1b. In ihnen ist der Staudruck über der Auftriebsreserve aufgetragen, und zwar für einen Meßbereich des Fahrtmessers von $q = 70$ bis 2720 kg/m², entsprechend $V_0 = 120$ bis 750 km/h am Boden und für eine Mindestgeschwindigkeit des Flugzeugs $V_{0-min} = 180$ km/h. Wie man sieht, ist der Bereich des Wertes $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a}$ von 0,2 bis 0 — in dieser Gegend spielt sich der ganze Landevorgang, wenn er die technischen Möglichkeiten einigermaßen herausholt, ungefähr ab — nur durch eine Staudruckdifferenz von 33 kg/m² gekennzeichnet, das heißt also durch 1,3% des gesamten Meßbereichs.

Die Skala des üblichen Fahrtmesser-Anzeigegeräts ist nun nicht proportional dem Staudruck, sondern proportional der Wurzel aus dem Staudruck geteilt ($V_0 = \sqrt{\frac{2g}{\gamma_0} \cdot q}$, worin $\gamma_0 = 1{,}225$ gesetzt ist), also zugunsten der kleinen Staudrücke verzerrt. Trägt man diese Fahrtmesseranzeige über der Auftriebsreserve auf, so entspricht, wie Bild 1a und 1b zeigen, dem Bereich $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a} = 0{,}2$ bis 0 eine Differenz von 18 km/h, das sind immerhin schon 3% des Meßbereichs[1]). Zu einer genügend klaren Kennzeichnung des Flugzustandes reicht aber auch diese Anzeige erfahrungsgemäß längst noch nicht. Eine noch weiter gehende Verzerrung hat keinen Zweck mehr, da die Anzeige des Gerätes dann zu unsicher werden würde; denn es bleibt ja dabei, daß der für die ganze Messung zur Verfügung stehende Druckbereich nur 1,3% vom Druckmeßbereich ist!

Immer wieder ist deshalb erwogen worden, neben dem gewöhnlichen Fahrtmesser noch einen besonderen Landefahrtmesser mit kleinerem Meßbereich vorzusehen. Aber selbst wenn auf diese Weise die Deutlichkeit der Anzeige befriedigend gemacht werden könnte, so würde das wenig helfen, da die Anzeige nicht eindeutig mit dem Flugzustand zusammenhängt. Änderungen im Fluggewicht, in der Klappenstellung, Drosselstellung, bahnsenkrechte Beschleunigungen usw. ändern den Zusammenhang zwischen Staudruck und Flugzustand. In Bild 1a und b ist als Beispiel die Kurve für eine um 16% kleinere Mindestgeschwindigkeit gestrichelt eingezeichnet. Sie entspricht also etwa dem Fall, daß das Flugzeug während des Fluges sein Fluggewicht um 30% verringert hat. Sie weicht von der Kurve für das volle Fluggewicht um fast doppelt so große Beträge ab, wie sie dem interessierenden Bereich der Auftriebsreserve entsprechen.

Eine bessere Kennzeichnung erhält man durch den Anstellwinkel, den unter anderen der Franzose Constantin immer wieder für seine Apparate zugrunde gelegt hat. Bild 1a und 1b zeigen den Verlauf von $\alpha/\alpha_{c_{a\,max}}$ unter der Voraussetzung eines konstanten Wertes für $\frac{d c_a}{d \alpha}$ (wobei α natür-

[1]) Das ist bekanntlich der tiefere Grund, warum man seinerzeit bei der historischen »geschwindigkeitsproportionalen« Teilung geblieben ist. Man hätte nur den Ausdruck »km/h« ausmerzen sollen, da er immer wieder zu Irrtümern Anlaß gibt. Die Aufschrift »Fahrt« hätte genügt, und es hätte sich einbürgern können, von »200 Fahrt« statt »200 km/h« zu sprechen.

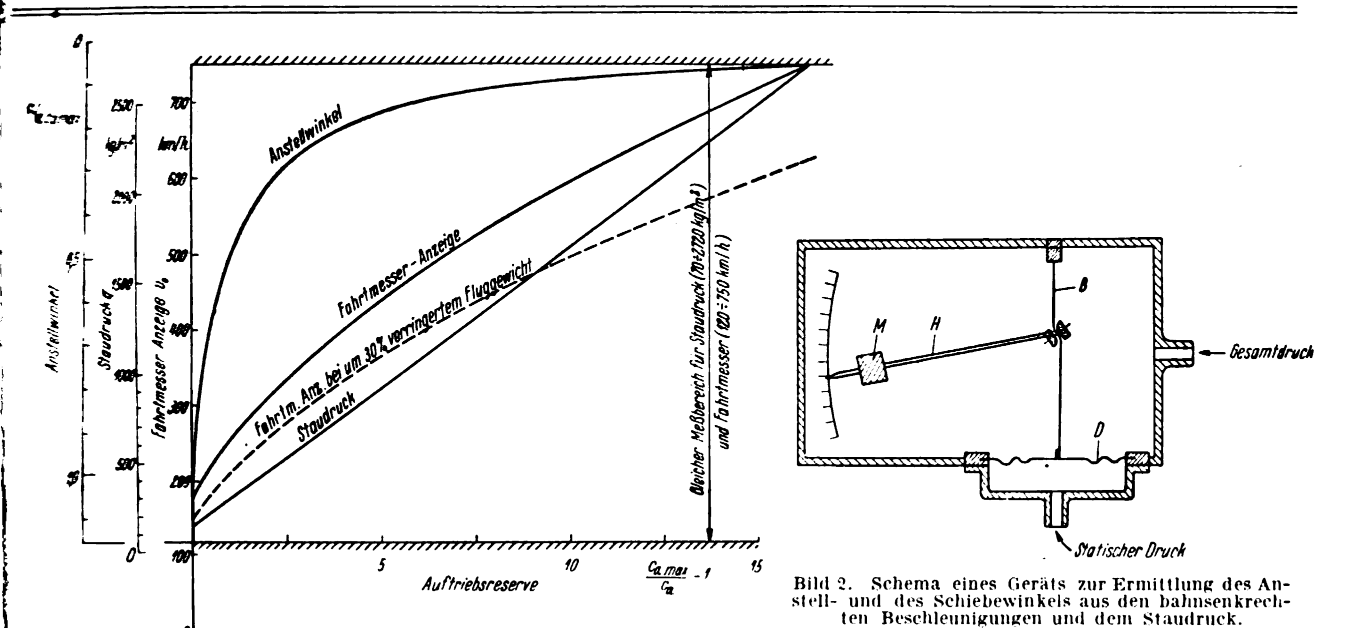


Bild 1a. Staudruck. Fahrtmesseranzeige und Anstellwinkel als Maße für die Auftriebsreserve, für ein Flugzeug mit einer Mindestgeschwindigkeit $v_{0\,min} = 180$ km/h.

Die Skalen sind jeweils linear, und zwar in solchem Maßstab, daß sich für Staudruck und Fahrtmesseranzeige die gleiche Skalenlänge von $q = 70$ kg/m² (entspr. $v_0 = 120$ km/h) bis $q = 2720$ kg/m² (entspr. $v_0 = 750$ km/h) ergibt; beim Anstellwinkel ist nur die im Bilde obere Grenze dieselbe, die untere Grenze wurde wegen des vom Beladungszustand unabhängigen Zusammenhanges nur 15 % über das α des $c_{a\,max}$ gelegt.

Bild 2. Schema eines Geräts zur Ermittlung des Anstell- und des Schiebewinkels aus den bahnsenkrechten Beschleunigungen und dem Staudruck.

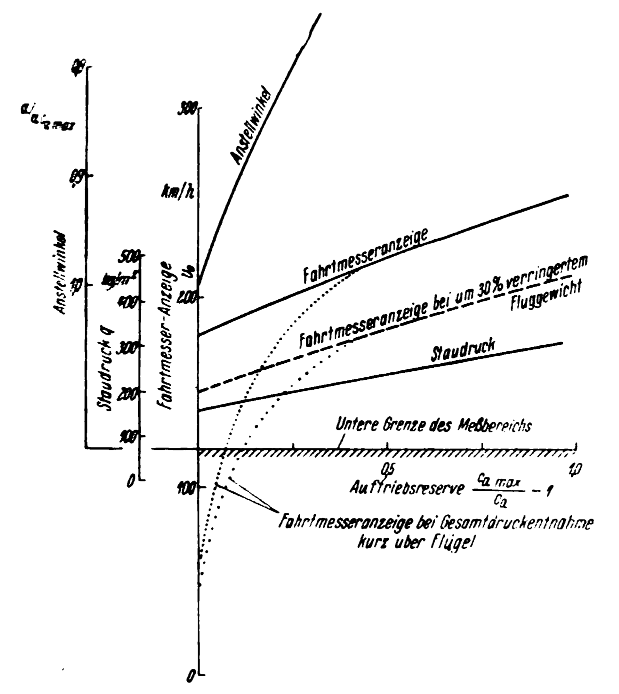


Bild 1b. Das Gebiet der Landung aus Bild 1a in vergrößerten Maßstäben herausgezeichnet. Die dickpunktierte Kurve zeigt den Verlauf der Fahrtmesseranzeige bei Gesamtdruckentnahme über der Flügeloberseite für den in Bild 5 punktiert eingezeichneten Verlauf des Gesamtdruckabfalles.

lich von $c_a = 0$ aus gezählt ist). Zum besseren Vergleich mit den anderen Kurven ist $\alpha/\alpha\, c_{a\,max}$ von oben nach unten aufgetragen. Dieser Zusammenhang ist nicht mehr abhängig von dem jeweiligen Beladungszustand des Flugzeuges, und einer Änderung der Auftriebsreserve von 0,2 bis 0 entspricht 15% des Skalenumfanges. Das ist also unvergleichlich viel besser; aber Umstände, die die Größe des kritischen Anstellwinkels beeinflussen, z. B. Eisansatz, aber auch schon die Änderung der Drosselstellung und der Einstellung mancher Landehilfsmittel (z. B. Vorflügel!), verderben die Eindeutigkeit der Anzeige im hier gemeinten Sinne. Vor allem sind aber die Vorrichtungen, die zur Anstellwinkelmessung üblich sind, wie z. B. Windfahnen und Winkelrohre weit vor dem Flügel, statische Bohrungen im Flügel und ähnliches, wegen der leichten Verletzbarkeit und der nur sehr schwer zu erreichenden Betriebssicherheit bei Regen und Vereisung für den allgemeinen Flugbetrieb wenig geeignet. Auch muß erst durch Flugversuch an jedem Muster ein geeigneter Anbringungsort bzw. die Eichkurve für den Anbringungsort ermittelt werden.

Ein Gerät, das den c_a-Wert oder den Anstellwinkel ohne irgendwelche zusätzlichen Ausbauten am Flugzeug aus der bahnsenkrechten Beschleunigung und dem Staudruck ermittelt, zeigt schematisch Bild 2: Die Masse M sitzt auf dem Hebel H, der bei seiner Bewegung das Bändchen B S-förmig durchbiegt und dadurch den Hebelarm für die Kraft der Staudruckdose D verändert, die die Spannung des Bändchens bestimmt. Insoweit die elastischen Kräfte von Dose und Bändchen vernachlässigt werden können, ist die Stellung des Hebels H proportional dem Verhältnis zwischen bahnsenkrechter Beschleunigung und Staudruck, also bei konstanter Flächenbelastung proportional dem c_a-Wert und damit dem Anstellwinkel. Man kann die Form der Durchbiegung so wählen, daß der Hebel H in jedem Augenblick in die momentane Flugrichtung zeigt, so daß tatsächlich nur die bahnsenkrechten Beschleunigungen auf ihn wirken. Durch Höherlegen des Schwerpunktes ist aber auch eine gewisse Berücksichtigung des Propellerstrahleinflusses auf dem Umwege über die bahnparallelen Beschleunigungen möglich. Die Richtkraft dieses Gerätes ist unabhängig vom Staudruck, weil bei sinkendem Staudruck der Hebelarm, an dem die Dose wirkt, entsprechend größer wird. Das Gerät mißt übrigens auch den Schiebewinkel nach demselben Prinzip, indem sich die Massenmomente des Hebels H um die Hochachse mit den von den Kräften der Staudruckdose abhängigen Torsionsmomenten des Bändchens zusammensetzen. Der Einfluß einer Landeklappenverstellung und einer Änderung der Beladung muß durch zusätzliche Mittel erfaßt werden, was im ersteren Falle leicht ist (Nullpunktsverstellung des Geräts entsprechend der Landeklappenstellung), im zweiten Fall aber schwierig, weil die Messung des Fluggewichts im Fluge nicht mit einfachen Mitteln möglich ist. Den Nachteil, daß die Eichung des Gerätes auf die besonderen Eigenschaften des Flugzeugmusters abgestimmt werden muß, hat es mit der Windfahne und anderen Geräten gemein. — Im weiteren Sinn kann dies Gerät als ein Staudruckmesser mit verzerrter Skala aufgefaßt werden, dessen Meßfeder durch eine den bahnsenkrechten Beschleunigungen ausgesetzte Masse ersetzt ist.

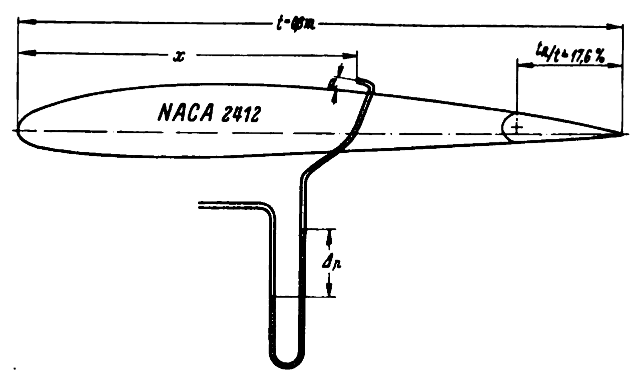


Bild 3. Gesamtdruckentnahme kurz über Flügeloberseite. Flügelschnitt des Windkanalmodells.

III. Die Grenzschichtdicke als Maß für die Auftriebsreserve.

a) Grundgedanke.

Die unmittelbare Ursache dafür, daß der Auftriebsbeiwert mit der Vergrößerung des Anstellwinkels nicht mehr wächst, ist die zunehmende Ablösung der Strömung von der Oberseite des Tragflügels. Sie kündet sich bereits mehrere Anstellwinkelgrade vorher an durch eine Verdickung der Grenzschicht auf der Oberseite des Flügels. Bringt man kurz über der Flügelbeplankung ein Rohr zur Messung des Gesamtdruckes an (Bild 3), so wird dies im normalen Flugzustand sich außerhalb der Grenzschicht befinden und daher denselben Druck liefern, der in ungestörter Strömung weit vor dem Flugzeug gemessen würde (denn innerhalb einer Potentialströmung ist der Gesamtdruck vom Ort unabhängig); bei Annäherung an das $c_{a_{max}}$ aber wird das Gesamtdruckrohr über dem Flügel von der Grenzschicht erreicht, es wird daher einen geringeren Druck als ein Gesamtdruckrohr in der ungestörten Strömung anzeigen. Der Grad der Annäherung an das $c_{a_{max}}$ ist offensichtlich durch die Differenz dieser Gesamtdrücke ziemlich eindeutig meßbar. Um die Anzeige bei einem gegebenen Flugzeug vom Fluggewicht und von bahnsenkrechten Beschleunigungen frei zu machen, müßte man noch durch Fluggewicht und Beschleunigung (vgl. Bild 2) oder durch sonstige, die auf den Flügel wirkende Last kennzeichnende Drücke dividieren oder noch besser durch den Staudruck, weil man dann auch von den Besonderheiten des Flugzeugmusters unabhängig wird.

b) Windkanalmessungen an einem Flügelmodell.

Zur Klärung der Verhältnisse wurden im großen Windkanal der DVL an einem glatten, rechteckigen Modellflügel (Flügelschnitt NACA 2412, Report Nr. 460, s. Bild 3) von 4 m Spannweite und 0,8 m Flügeltiefe $\left(\frac{F}{b^2} = 1:5\right)$, einem Dickenverhältnis $d/t = 0{,}12$ mit einer Wölbungsklappe von 17,5% der Flügeltiefe Versuche angestellt. Die Anblasegeschwindigkeit betrug dabei 50 m/s, so daß der Kennwert mit 40000 mm m/s in der Größenordnung des Kennwertes wirklicher Flugzeuge beim Landevorgang lag. Es wurden in der Mitte der Spannweite über der oberen Flügelbeplankung eine Anzahl Gesamtdruckröhrchen angebracht, und zwar befanden sich die Mündungen der Röhrchen bei den drei durchgeführten Versuchsreihen in der Entfernung $\frac{x}{t} = 0{,}375$, 0,56 bzw. 0,75 von der Flügelvorderkante. Bild 4, 5 und 6 zeigen das Ergebnis, und zwar ist die Druckdifferenz Δp zwischen dem ungestörten Gesamtdruck und dem über der Flügeloberseite entnommenen Gesamtdruck, dividiert durch den Staudruck q, über der »Auftriebsreserve« $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a}$ aufgetragen.

Wie zu erwarten, tritt eine Druckdifferenz um so früher, das heißt bei um so größerem $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a}$ auf, je dichter an der Flügeloberseite und je weiter hinten das Meßröhrchen sich befindet. Betrachtet man den Einfluß der Klappenstellungen, so ist dieser bei hinten liegender Meßstelle erheblich, und zwar in dem Sinn, daß die Wirkung um so später eintritt, je stärker die Klappe angestellt ist. Bei der mittleren Anordnung der Meßstelle $\frac{x}{t} = 0{,}56$ ist der Einfluß der Klappenstellung nur noch gering, bei der vordersten

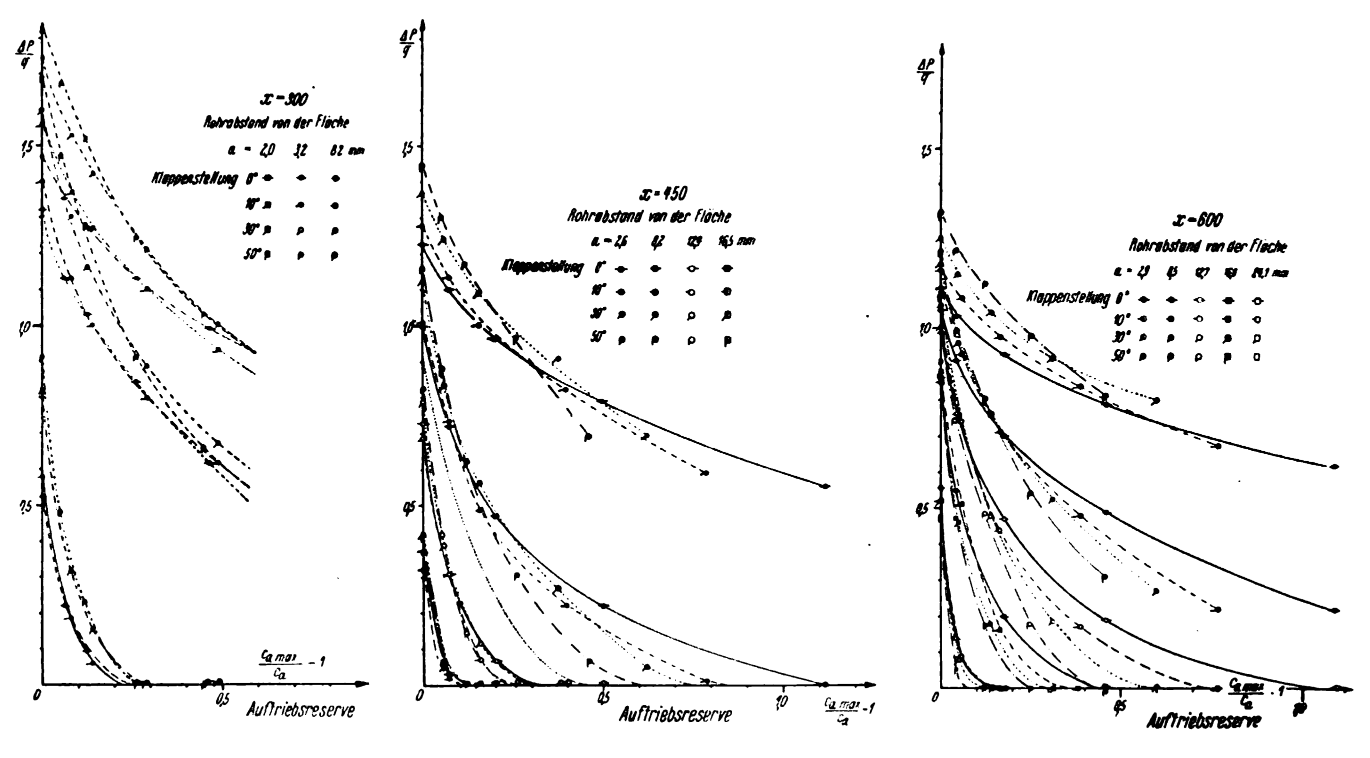


Bild 4, 5 und 6. Gesamtdruckabfall kurz über der Flügeloberseite in Abhängigkeit von der Auftriebsreserve für drei verschiedene Entfernungen x des Meßröhrchens von der Flügelvorderkante. Windkanalmessung an glattem Modell, $b = 4$ m, $t = 0{,}8$ m (Flügelschnitt siehe Bild 3).

Die punktierte Linie in Bild 5 wurde Bild 1b zugrunde gelegt.

$\frac{x}{t} = 0{,}375$ liegt er bereits umgekehrt, das heißt, bei angestellter Klappe tritt die Wirkung früher ein. Will man also die Wirkung unabhängig von der Klappenstellung haben, so hat man etwa in das Gebiet $\frac{x}{t} = 0{,}4$ bis 0,5 zu gehen. Für den Abstand a des Meßrohrs von der Flügelbeplankung empfiehlt sich bei $\frac{x}{t} = 0{,}5$ ein $\frac{a}{t} = \frac{1}{80}$, um bei $\frac{c_{a\,max} - c_a}{c_a} = 0{,}2$ schon eine kräftige Wirkung zu bekommen.

Zu näherer Kennzeichnung der Versuchsbedingungen sei noch erwähnt, daß das Flügelmodell äußerst glatt war, und daß die Ablösung plötzlich und längs der ganzen Spannweite ziemlich gleichzeitig auftrat. Bei Flügeln mit rauherer Oberfläche wird man das Meßrohr natürlich in etwas größerem Abstand anbringen müssen.

c) Sinngemäße Anwendung auf das Flugzeug.

Durch diese Windkanalergebnisse sind also die Vorüberlegungen bestens bestätigt. Es muß jedoch noch einiges über die sinngemäße Übertragung auf den Fall des wirklichen Flugzeugs gesagt werden. Beim wirklichen Flugzeug beeinflussen Propellerstrahl- und Rumpfeinfluß, ferner Aufbauten, Unsauberkeiten in der Formgebung, schließlich auch die Gestalt des Flügelgrundrisses, eine etwaige Verwindung, die Verteilung der Klappeneinstellwinkel über die Spannweite usw. die Grenzschichtverhältnisse, so daß deren Ausbildung an verschiedenen Stellen der Spannweite verschieden ist. Eine den Windkanalergebnissen angenähert gleiche Wirkung wird jedoch insoweit vorhanden sein, als die Grenzschichtverhältnisse des Flügelschnittes, an dem das Meßrohr angebracht ist, ungefähr den mittleren Grenzschichtverhältnissen des ganzen Flügels entsprechen. Sind die Grenzschichtverhältnisse am Ort des Meßrohres günstiger als im Durchschnitt, so ergibt sich eine zu kleine bzw. verspätete Anzeige; bis zu einem gewissen Grade kann man aber dadurch einen Ausgleich schaffen, daß man das Meßrohr näher an die Flügelbeplankung bringt. Sinngemäßes gilt im umgekehrten Fall.

Wirklich ungeeignet sind also nur solche Anbringungsorte, deren Grenzschichtverhältnisse je nach den Flugbedingungen einmal zu günstig, ein anderes Mal zu ungünstig gegenüber dem Durchschnitt über die Spannweite liegen. Wie die Erfahrung bisher zeigte, sind Schwierigkeiten dieser Art aber nicht häufig, so daß die Anbringung von mehreren Meßrohren an verschiedenen Stellen des Flügels (die angesichts der Kleinheit der Rohre aerodynamisch völlig unbedenklich wäre) zum Zwecke der Druckmittelung wohl niemals nötig sein dürfte. Anders ist es mit den beiden Flügelhälften, insbesondere bei Flugzeugen mit Seitenmotoren. Beim Fliegen mit ausgefallenem Seitenmotor liegen die Grenzschichtverhältnisse auf der Seite dieses Motors viel ungünstiger als auf der andern, so daß die Anbringung je eines Meßrohres auf jeder Flügelhälfte zweckmäßig erscheint. Damit hat man dann aber auch ein einwandfreies Warngerät, das sich als eine wirksame Waffe gegen die leider so häufigen Unfälle beim Fliegen mit ausgefallenem Seitenmotor erweisen dürfte.

Daß der Anbringungsort weit außerhalb des Luftschraubenstrahls liegen muß, ist wohl selbstverständlich.

d) Vereinigung des Geräts mit dem Fahrtmesser.

Die Differenz der Gesamtdrücke ändert sich bei zweckmäßiger Anbringung der Sonde so stark mit dem Flugzustand (sie kann, wie Bild 4 bis 6 zeigen, sogar den Staudruck selbst erreichen und überschreitet ihn, wenn am Ort des Meßröhrchens Ablösung mit Rückströmung herrscht), daß ihr gegenüber die in Frage kommenden Änderungen des Mindeststaudruckes wenigstens in dem hier hauptsächlich betrachteten Fall der Landung keine große Rolle mehr spielen. Man wird also eine qualitativ durchaus brauchbare Anzeige auch dann schon erhalten, wenn man auf die Division durch den Staudruck oder durch eine die Flügelbelastung charakterisierende Größe verzichtet. Nimmt man ferner statt des ungestörten Gesamtdruckes den ungestörten statischen Druck als Vergleichsdruck, so bekommt man bei Annäherung an den Mindeststaudruck außer dem Abfall des Gesamtstaudruckes noch den Abfall des Staudruckes in die Messung. Das macht freilich für die Vergrößerung der charakteristischen Meßdruckunterschiede nicht mehr viel aus, da sich der Staudruck in dem interessierenden Bereich ja nur wenig ändert; aus demselben Grund wird aber auch die Eindeutigkeit der Anzeige dadurch nur wenig gestört. Also auch die Druckdifferenz zwischen dem über der Flügeloberseite entnommenen Gesamtdruck und dem ungestörten statischen Druck gibt eine qualitativ durchaus brauchbare Anzeige.

Der Vorteil einer solchen Anordnung besteht darin, daß dann mit dem jetzt üblichen Fahrtmesser-Anzeigegerät gearbeitet werden kann, daß man also keinerlei neue Geräte zu schaffen und das Instrumentenbrett durch kein neues Gerät zu belasten braucht. Im normalen Flugzustand zeigt ein so geschalteter Fahrtmesser die Fahrt genau so wie früher; in der Nähe der Mindestgeschwindigkeit hingegen geht der Zeiger mit fortschreitender Verringerung der Auftriebsreserve immer weiter zurück. Da der Pilot vernünftigerweise in den Bereich der Mindestgeschwindigkeit nur bei Start und Landung hineingehen soll, wo immer nur der Flugzustand und nicht etwa die Geschwindigkeit interessiert, so ist gegen die Verwendung ein und desselben Anzeigegerätes für beide Zwecke nichts einzuwenden. Beim Rollen während des Starts zeigt das Gerät wie ein bisheriger Fahrtmesser, wenn das Flugzeug genügend gedrückt wird; ungenügendes Drücken, das den Start unnötig verlängert, führt zu verringerter Anzeige. Selbst beim Überziehen im beschleunigten Flugzustand (Kurve, Looping) wird das schnelle Zurückgehen des Zeigers weit unter die vorher noch vorhandene Anzeige immer noch eine auffallende Warnung sein.

Die Anzeige eines so geschalteten Geräts ist, auf Grund der Windkanalergebnisse errechnet, in Bild 1b miteingetragen, und zwar ist der in Bild 5 punktiert eingezeichnete Verlauf für den Druckabfall in der Grenzschicht zugrunde gelegt. Wie man sieht, ändert sich der Charakter der Fahrtmesseranzeige im Bereich der Mindestgeschwindigkeit völlig in dem erwünschten Sinne. Einer Änderung der Auftriebsreserve von 0,2 bis 0 entspricht jetzt ein Zeigerausschlag von 120 km/h oder, wenn man nur bis zur unteren Grenze des Meßbereichs des normalen Fahrtmessers rechnet, 53 km/h; das sind 16% bzw. 7% des Skalenumfanges. Und dieser Zeigerausschlag ist wirklich in erster Linie von der Auftriebsreserve und nur verhältnismäßig wenig von den sonstigen Bedingungen, z. B. von der Beladung abhängig: Einer Anzeige von 140 z. B. entspricht bei dem hohen Fluggewicht ($v_{0\,min} = 180$ km/h) eine Auftriebsreserve von 0,11, bei dem um 30% kleineren Fluggewicht ($v_{0\,min} = 150$ km/h) eine Auftriebsreserve von 0,18.

Die beabsichtigte Wirkung tritt nicht in genügend klarer Weise auf, wenn man auch den statischen Druck kurz über dem Flügel entnimmt, wie das bei der früher gelegentlich anzutreffenden Anbringung des ganzen Staurohres über der Flügelhinterkante der Fall ist. Das mit wachsendem Anstellwinkel, besonders aber bei Beginn der Ablösung eintretende Absinken des statischen Druckes an der Flügeloberseite tritt dann der beabsichtigten Wirkung entgegen. Im übrigen verbietet sich eine derartige Anordnung bei Vorhandensein von Landeklappen sowieso wegen der starken Beeinflussung des örtlichen statischen Drucks der Flügeloberseite durch die Klappenstellung.

F. L. Thompson hat Versuche mit einem Gesamtdruckrohr gemacht, das auf der Oberseite kurz hinter der Flügelnase angebracht war[2]). Da er aber als Vergleichsdruck den statischen Druck an derselben Stelle nahm, so war die Wirkung bei ihm zunächst unbefriedigend. Erst nachdem er durch Aufsetzen einer scharfen Kante auf die Flügelnase (s. Bild 7) dafür sorgte, daß bei einem gewissen Anstellwinkel die Strömung am Ort des Meßrohres abriß, bekam

[2]) S. NACA Techn. Note Nr. 670.

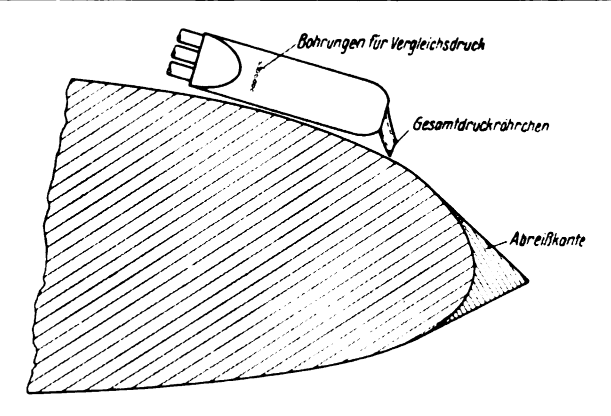


Bild 7. NACA Stall-Warning Indikator von F. L. Thompson. Nach Techn. Note 670.

er genügend deutliche Druckunterschiede. Damit hat er sein Gerät aber zum reinen Warngerät gegen ein Überschreiten eines willkürlich gewählten bzw. durch Versuche zu ermittelnden Anstellwinkels gemacht, und arbeitet in aerodynamisch unerwünschter Weise mit örtlicher Ablösung der Strömung vom Flügel. Bei einer Änderung der Größe des kritischen Anstellwinkels, besonders bei Eisansatz an der Flügelvorderkante, muß das Gerät versagen.

e) Praktische Erprobung im Fluge.

Der oben geschilderte Gedankengang wurde an den Flugzeugen He 45, Ju 86, W 34, Ju 52 erprobt, und zwar in der einfachen Form in Verbindung mit der Fahrtmesseranlage. Dazu wurde neben dem in üblicher Weise angeschlossenen Fahrtmesser ein zweiter mit nach unten vergrößertem Meßbereich angebracht. Beide Fahrtmesser waren an die gleiche statische Sonde angeschlossen, der Gesamtdruckanschluß des zweiten Fahrtmessers war jedoch mit einem Pitotrohr verbunden, das über der Hinterkante des Hauptflügels, und zwar etwa in der Mitte der halben Spannweite angebracht war[3]). Die Höhe der Stauöffnung über dem Flügel betrug je nach Größe und aerodynamischer Beschaffenheit des Flugzeuges 6 bis 15 cm. Die Flugzeuge wurden mit verschiedenen Fluggewichten bzw. verschiedenen Klappenstellungen im Vollgasflug, Drosselflug und Gleitflug ganz langsam auf möglichst hohe Anstellwinkel gebracht, so daß der Flugzustand möglichst stationär war. Dabei wurden die Anzeigen der Fahrtmesser verglichen, teilweise auch kinematographisch aufgenommen.

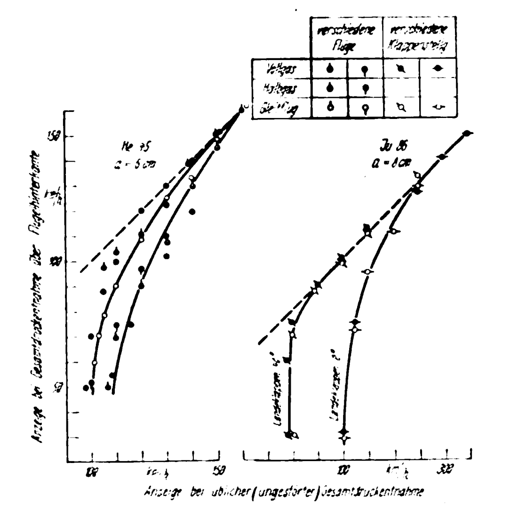
[3]) Daß nur diese hinterste Lage der Sonde erprobt wurde, hat seinen Grund darin, daß diese Flugversuche bereits vor den oben geschilderten Windkanalversuchen, und zwar in der Jahren 1936 und 1937 stattfanden und die Tatsache, daß die Grenzschicht an der Hinterkante dicker ist, im Vordergrund der Betrachtungen stand.

Es ergaben sich die in Bild 8 bis 11 dargestellten Kurven: bei großen Flugstaudrucken zeigen die Fahrtmesser beide gleich; mit der Annäherung an den Mindeststaudruck, bei der der übliche Fahrtmesser nur noch sehr wenig reagiert, geht der Fahrtmesser mit Gesamtdruckentnahme über Flügelhinterkante immer weiter zurück. Dieses starke Zurückgehen der Anzeige bis auf fast Null war immer wieder ein sicheres Zeichen für die Annäherung an das $c_{a\,max}$, ohne wesentliche Beeinflussung durch die durch Fluggewicht, Landeklappenstellung und Drosselstellung bestimmte Mindestgeschwindigkeit. Bei den Flugzeugen mit Landeklappe mußte freilich der Abstand der Sonde von der Flügelbeplankung der Klappenstellung entsprechend verändert werden: wo das nicht geschah, ergab sich entweder eine zu geringe Anzeige im normalen Fluge mit hochgezogenen Klappen oder, wie im Beispiel von Bild 9, Ju 86, ein zu spätes Einsetzen der Wirkung bei angestellten Klappen. Wenn auch ein entsprechender Hebelmechanismus, der diese Änderung selbsttätig bewirkt, sehr einfach ist, so ist er doch aus betrieblichen Gründen und wegen der Vereisungsschwierigkeiten unerwünscht. Aus diesem Anlaß wurden die oben mitgeteilten Windkanalmessungen gemacht, die zeigen, daß man mit einer Anbringung der Gesamtdrucksonde weiter vorn genügend unabhängig von der Klappenstellung wird.

Daß bei den mitgeteilten Messungen die mit der üblichen Fahrtmesseranlage angezeigten Geschwindigkeiten nicht immer richtig sind, hat mit dem neuen Vorschlag an sich nichts zu tun, sondern beruht auf der bedauerlichen Tatsache, daß die Entnahme des statischen Druckes bei manchen Flugzeugen nicht in genügend ungestörter Strömung, d. h. nicht genügend weit vor dem Flügel bzw. vor dem Rumpf erfolgt. — Die Streuung ist stellenweise erheblich (s. z. B. die Messungen mit He 45, Bild 8), aber das dürfte die praktische Brauchbarkeit kaum nennenswert vermindern, da die beabsichtigte Wirkung immer noch kraß genug in Erscheinung tritt, um danach das Flugzeug steuern zu können.

f) Weitere Auswirkungen.

Zum Schluß ist wohl noch eine Bemerkung angebracht über die weitere Auswirkung der geringfügigen baulichen Maßnahmen, die zur Erreichung dieser Wirkung notwendig sind. Zunächst die Trennung von statischer Sonde und Gesamtdrucksonde. Sie ergibt wesentlich einfachere Bauformen für beide und hat — darüber wird später berichtet werden — in jeder Hinsicht zuverlässigere, leistungsfähigere (Regen, Vereisung, Schräganblasung, Durchfluß, Genauigkeit) und fabrikatorisch billigere Geräte ergeben, hat sich also nur als Vorteil erwiesen; die dabei entstandene besondere Form der statischen Sonde erlaubt sogar ein etwas kürzeres und wesentlich leichteres Halterohr, was den geringfügigen Nachteil eines besonderen Anbringungsortes



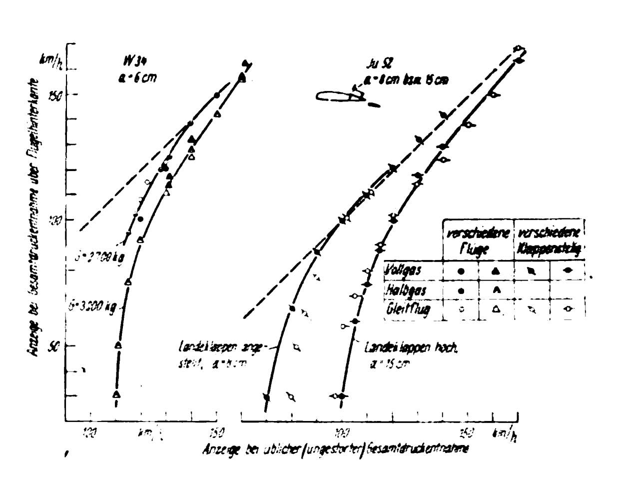


Bild 8, 9, 10 und 11. Vergleich der serienmäßig eingebauten Fahrtmesseranlage mit einer, bei der der Gesamtdruck über der Flügelhinterkante entnommen wird. Flugmessungen.

für das Gesamtdruckrohr wohl aufhebt. Was das Anzeigegerät anbetrifft, so ist eine geringfügige Ausdehnung des Meßbereichs nach unten mit wesentlich verringerten Ansprüchen an Meßgenauigkeit und mit einer nur qualitativen Beschriftung, etwa einem roten Strich, erwünscht. Sie ist aber nicht unbedingt notwendig. Da bei den meisten Flugzeugen die Mindestgeschwindigkeit erheblich oberhalb der unteren Grenze des Meßbereichs des eingebauten Fahrtmessers liegt, gibt auch schon das jetzt übliche Anzeigegerät einen vorlaufig genügenden Anzeigebereich (siehe das Beispiel von Bild 1b!). Dadurch ist die Einführung wesentlich erleichtert.

Besonders wichtig dürfte diese Anordnung für die Blindlandung werden, die ja unter der Unzulänglichkeit der heutigen Fahrtmesseranlage zur Kennzeichnung des Flugzustandes besonders leidet. Das gilt erst recht, wenn man die Blindlandung mit Hilfe einer Automatik ausführen will. In beiden Fällen wird eine Verringerung der Anschwebelängen ohne Vergrößerung des Risikos, ein Aufsetzen mit kleinster Fahrt und ein möglichst kurzer Auslauf mit der neuen Anordnung im Masseneinsatz wirklich erreichbar sein.

Es sei ferner daran erinnert, daß eine solche Gesamtdruckmessung im Grenzschichtgebiet ein viel geeigneterer Ausgangspunkt für eine selbsttätige Klappenverstellung die doch zur Entlastung der Besatzung unbedingt geschaffen werden sollte) ist, als etwa der Staudruck, und zwar sowohl wegen der physikalisch richtigeren Wirkung, d. h. des eindeutigeren Zusammenhanges, als auch wegen der sehr viel größeren, für die gleiche Änderung des Flugzustandes zur Verfügung stehenden Druckdifferenzen.

IV. Zusammenfassung.

1. Die übliche Fahrtmesseranlage gestattet in keiner irgendwie brauchbaren Weise Rückschlüsse auf den Flugzustand bei der Landung, weil dieser sich nur in einem sehr kleinen Teil des Gesamtausschlagsbereichs widerspiegelt und der Zusammenhang durch andere Einflüsse, z. B. den verschiedener Beladung des Flugzeugs, völlig überdeckt wird. Eher ist schon der Anstellwinkel ein Maß für den Flugzustand.

2. Der kurz über der Flügeloberseite entnommene Gesamtdruck gestattet ziemlich eindeutige Rückschlüsse auf den Zustand der Grenzschicht und damit auf die in dem jeweiligen Flugzustand noch vorhandenen Reserven an Auftrieb zur Krümmung der Flugbahn. Der zweckmäßigste Meßort ist der Außenflügel außerhalb des Propellerstrahls, etwa 0,4 bis 0,7 Flügeltiefen hinter der Flügelvorderkante und je nach Glätte des Flügels $^1/_{60}$ bis $^1/_{80}$ der Flügeltiefe über der Flügelbeplankung. Als Vergleichsdruck kann der statische Druck und als Anzeigegerät der übliche Fahrtmesser genommen werden, ohne daß er dadurch seinen Aufgaben in den normalen Flugzuständen entzogen wird.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 6 SEITE 205 BIS 240 | MÜNCHEN, 30. 6. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.



Band 18 — 30. Juni 1941 — Lfg. 6

Auftriebsverteilungsrechnungen für eine systematische Reihe von Doppeldeckeranordnungen.

Von D. Küchemann.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Institut für theoretische Aerodynamik.

In einer früheren Arbeit[1]) *ist ein Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung über die einzelnen Flügel eines Doppeldeckers angegeben worden. Eine Reihe von durchgerechneten Beispielen zeigte gute Übereinstimmung mit Messungen, konnte aber keinen systematischen Überblick über den Einfluß der einzelnen Parameter Staffelung, Flügelabstand, Spannweitenverhältnis usw. auf die Auftriebsverteilung geben. Der vorliegende Bericht bringt nun die Ergebnisse einer systematischen Reihe von Rechnungen für Doppeldeckeranordnungen von Rechteckflügeln, bei denen die Parameter Staffelung, Flügelabstand und Spannweitenverhältnis so weitgehend verändert sind, daß man im Bereich der üblichen Anordnungen interpolieren kann. Einige Beispiele zeigen außerdem den Einfluß eines trapezförmigen Flügelumrisses.*

Gliederung.

Bezeichnungen.

Allgemein bezieht der Index o die Größe auf den Oberflügel und der Index u die Größe auf den Unterflügel.

a	Staffelung der Flügel = Abstand der tragenden Wirbel ($t/4$-Punkte) in Flugrichtung, positiv, wenn Unterflügel hinten,
h	Flügelabstand = Abstand der tragenden Wirbel senkrecht zur Flugrichtung,
t	Flügeltiefe ($\bar{t}$ Mittelwert),
b	Flügelspannweite,
$\eta_0 = 2\,y_0/b_0$	dimensionslose Koordinate in Spannweitenrichtung; entsprechend η_u,
α	Anstellwinkel gegen die Nullauftriebsrichtung,
$\alpha_{i_{ou}}$	Durch den Unterflügel am Oberflügel fremdinduzierter Anstellwinkel. Entsprechend $\alpha_{i_{uo}}$.
$c_{a_0} = \dfrac{A_0}{\frac{\varrho}{2} v^2 t_0}$	Auftriebsbeiwert am Flügelschnitt; entsprechend c_{a_u},
$\overline{c_{a_0}} = \dfrac{\overline{A_0}}{\frac{\varrho}{2} v^2 F_0}$	Gesamtauftriebsbeiwert eines Flügels; entsprechend $\overline{c_{a_D}}$: Gesamtauftriebsbeiwert der Zelle, bezogen auf die Gesamtfläche,
$\gamma_0 = \dfrac{c_{a_0}\, t_0}{2\, b_0}$	dimensionsloser Beiwert der Zirkulation; entsprechend γ_u.

[1]) D. Küchemann, Berechnung der Auftriebsverteilung über die einzelnen Flügel eines Doppeldeckers. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 543 oder Jahrbuch 1938 d. d. Luftfahrtforschung, S. I/138.

I. Einleitung.

Das Rechenverfahren, welches dem vorliegenden Bericht zugrunde liegt, ist ausführlich in der unter Fußnote 1 angegebenen Arbeit dargestellt. Es setzt voraus, daß die beiden Flügel durch je ein Wirbelsystem im Sinne der Prandtlschen Tragflügeltheorie ersetzt werden können. Die am Orte des einen Flügels durch die Gegenwart des anderen hervorgerufenen Zusatzgeschwindigkeiten werden in eine Anstellwinkeländerung umgerechnet, welche als zusätzliche Verwindung die Auftriebsverteilung der Flügel abändert. Folgende, für die praktische Berechnung der Luftkräfte an einer Doppeldeckerzelle wichtigen Größen können bestimmt werden:

1. Die durch gegenseitige Beeinflussung hervorgerufene Verwindung an jedem Flügel,
2. die Auftriebsverteilung über die Spannweite an jedem Flügel,
3. Gesamtauftrieb und induzierter Widerstand jedes Flügels.

In eine solche Rechnung geht eine große Zahl von Parametern ein. Außerdem erfordert die vollständige Doppeldeckerberechnung immerhin einigen Zeitaufwand. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher, für einen möglichst großen Parameterbereich die Ergebnisse vollständig durchgeführter Rechnungen bereitzustellen.

II. Die Wahl der Parameter.

Es wurden im wesentlichen drei Rechteckflügel gleicher Tiefe mit den Seitenverhältnissen $b^2/F = 4{,}5$, 6 und 7,5 in verschiedenen Doppeldeckeranordnungen untersucht, in einigen Fällen auch Trapezflügel mit $b^2/F = 6$ und der Zuspitzung $t_a/t_i = 2/3$. Für die Staffelung a wurden die Werte $-0{,}5\,t$ (Unterflügel vorn), 0, $+0{,}5\,t$ in einigen Beispielen auch $+t$ angenommen, für den Flügelabstand h die Werte t und $1{,}2\,t$. Das Profil der Flügel ist NACA 2412 mit $(dca/d\alpha)_{\Lambda=\infty} = 5{,}56$ nach einer Göttinger Messung. Die Ergebnisse sind für drei (von der Nullauftriebsrichtung gerechnete) Anstellwinkel $\alpha = 5^0$, 10^0 und 15^0 angegeben. Für andere Profile kann man α entsprechend dem anderen $dca/d\alpha$ umrechnen. Von einer Schränkung der Tragflügel gegeneinander wurde abgesehen. Für die praktisch nur vorkommenden kleinen Schränkungswinkel kann man, ohne einen unzulässigen Fehler zu machen, eine lineare Abhängigkeit zwischen $\alpha_{i_{ou}}$ und α_u bzw. $\alpha_{i_{uo}}$ und α_o annehmen und die Ergebnisse umrechnen.

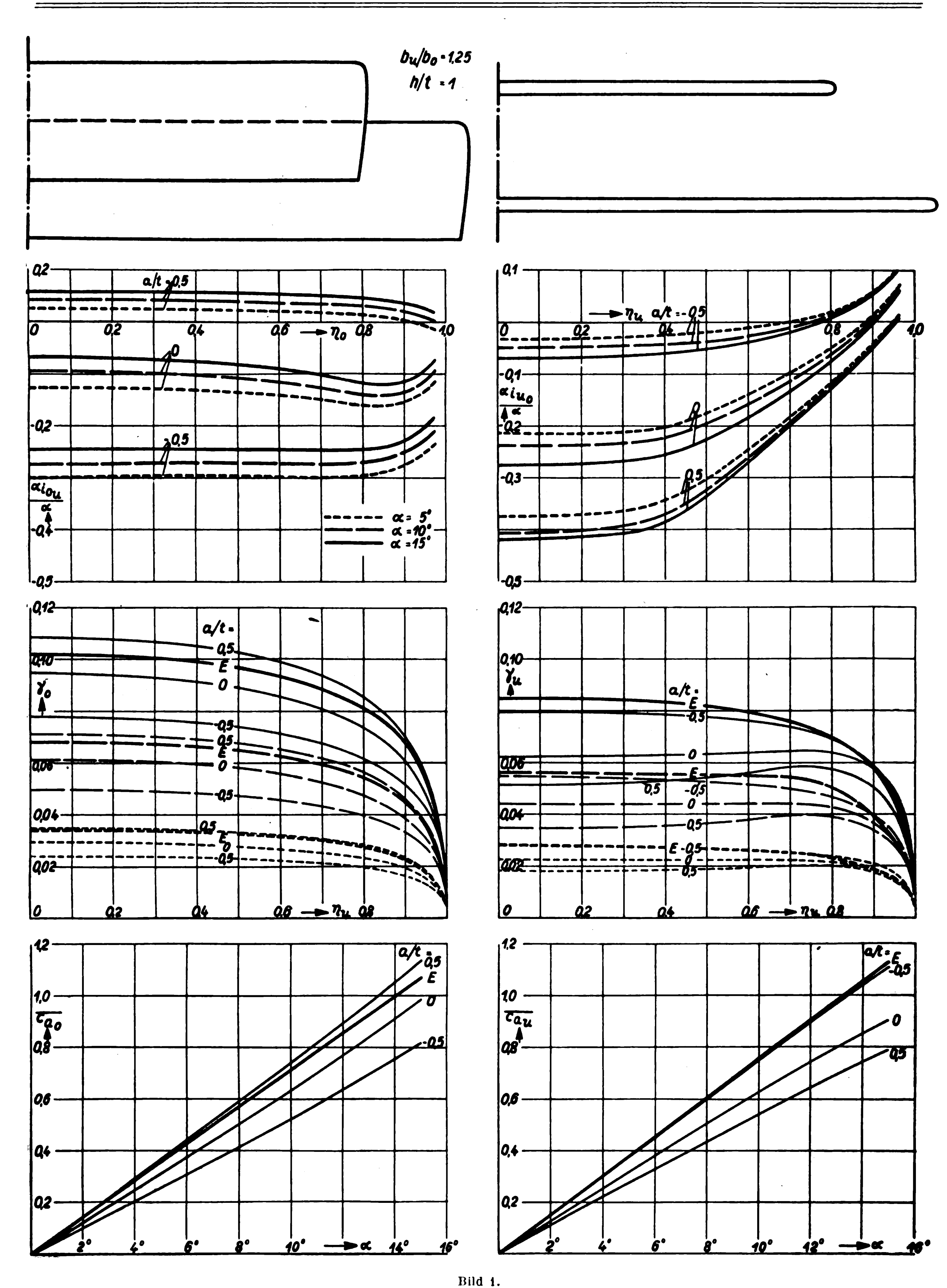
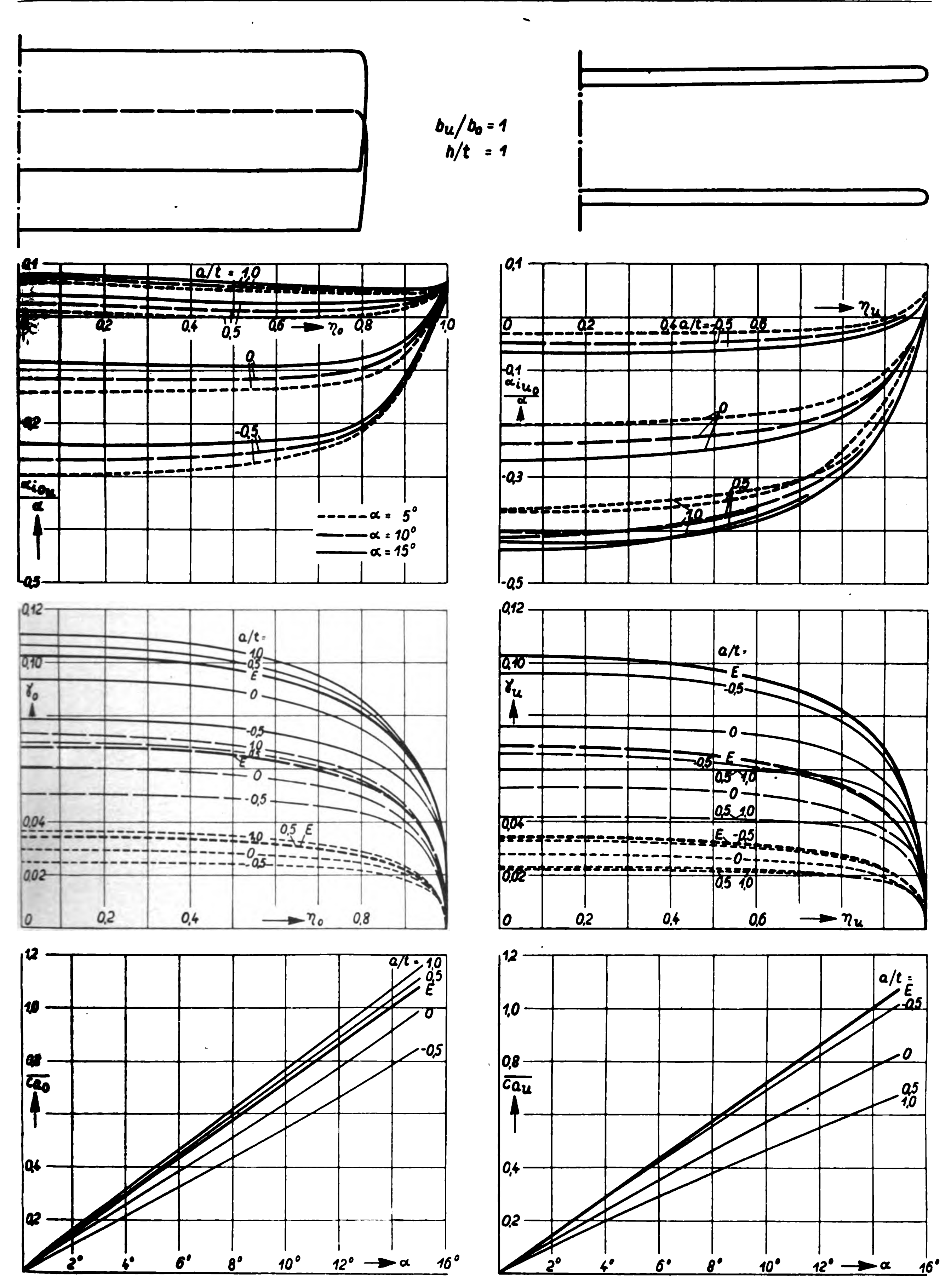


Bild 1.

Bild 1 bis 6. Rechenergebnisse der verschiedenen Doppeldeckeranordnungen.



$b_u/b_o = 1$
$h/t = 1$
a/t = 1,0
0,5
0
-0,5
$\alpha = 5°$
$\alpha = 10°$
$\alpha = 15°$
η_o
η_u
$\alpha_{i_{o_u}}/\alpha$
$\alpha_{i_{u_o}}/\alpha$
γ_o
γ_u
E
$\overline{c_{a_o}}$
$\overline{c_{a_u}}$
2° 4° 6° 8° 10° 12° α 16°

Bild 2.

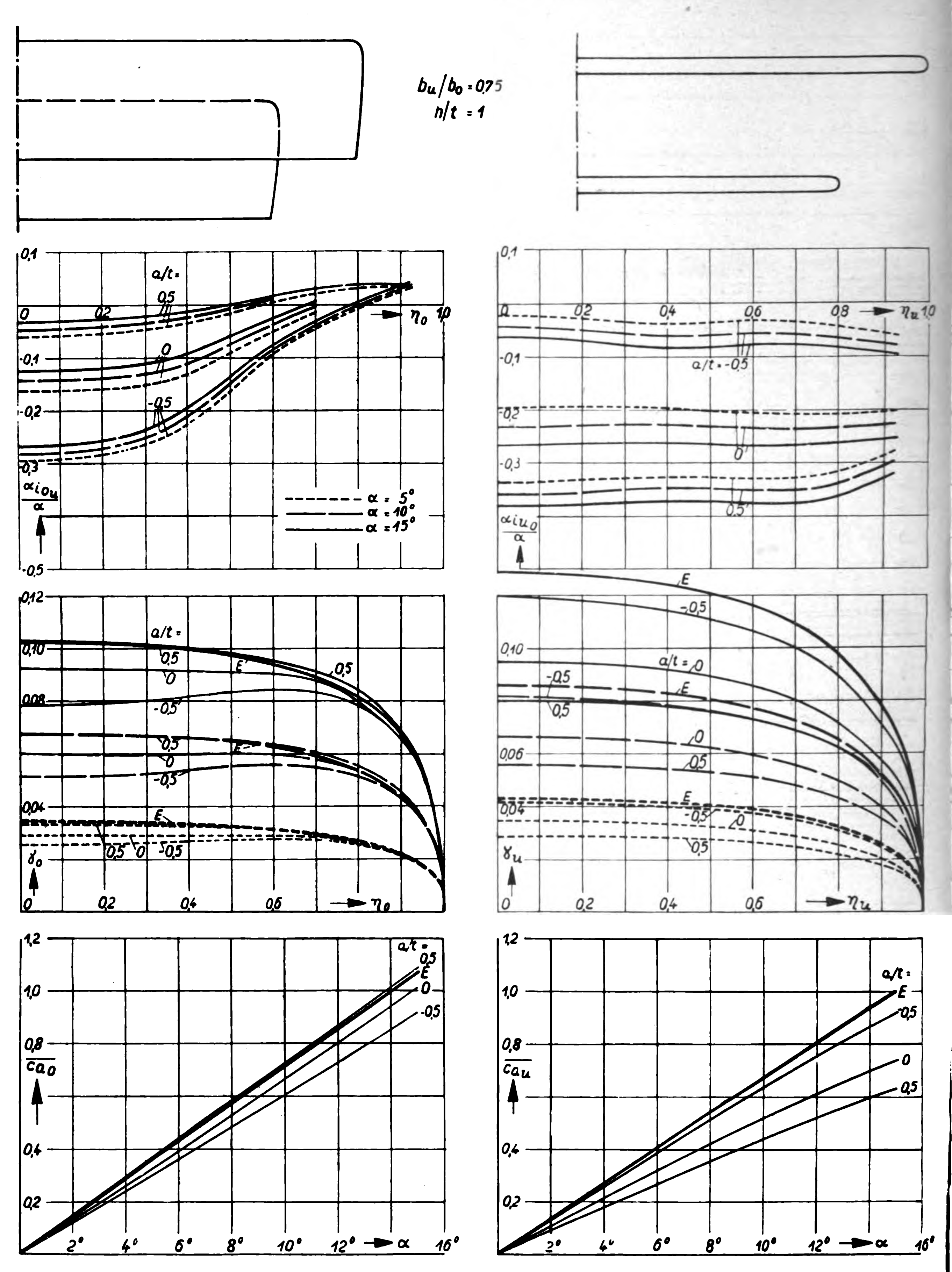
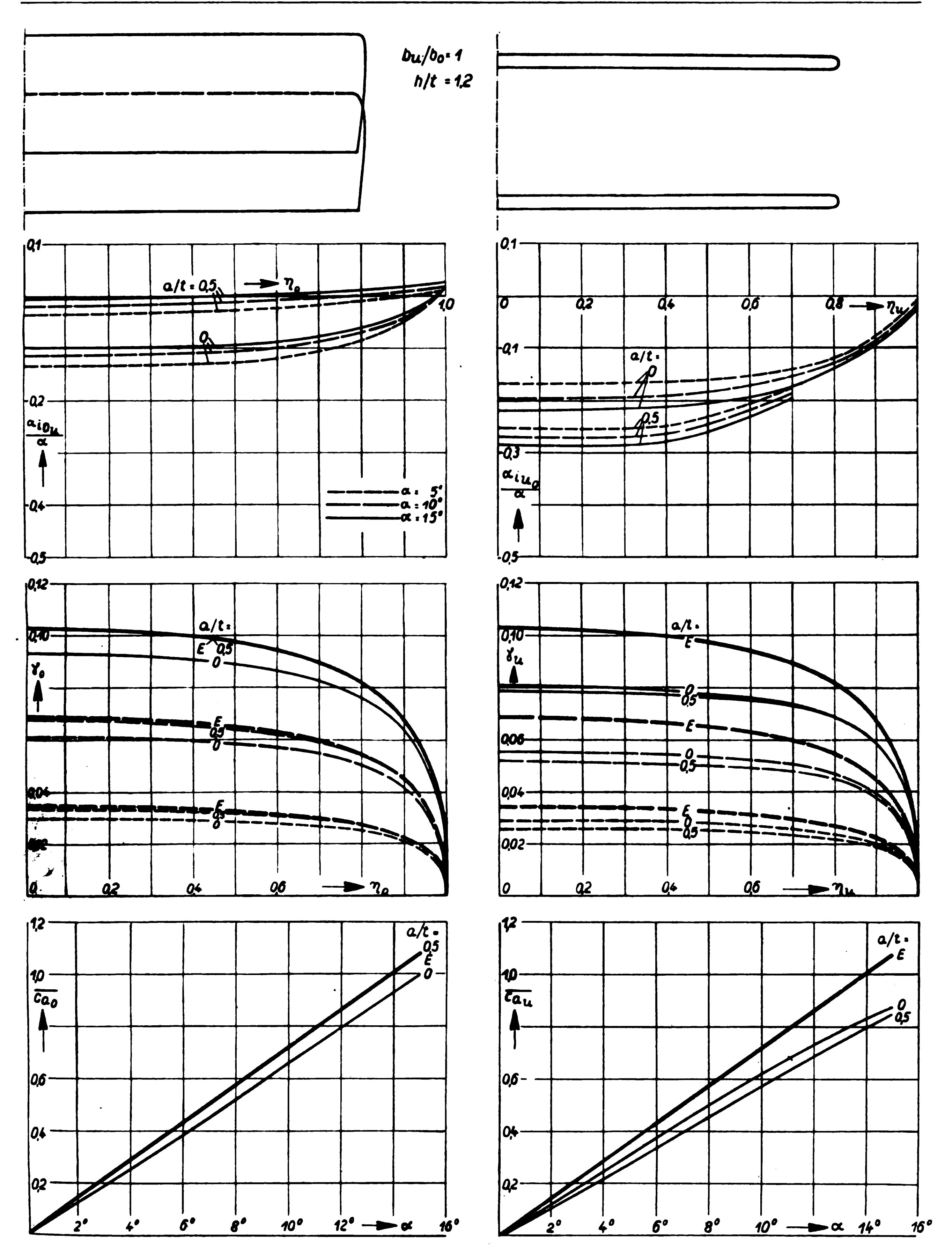
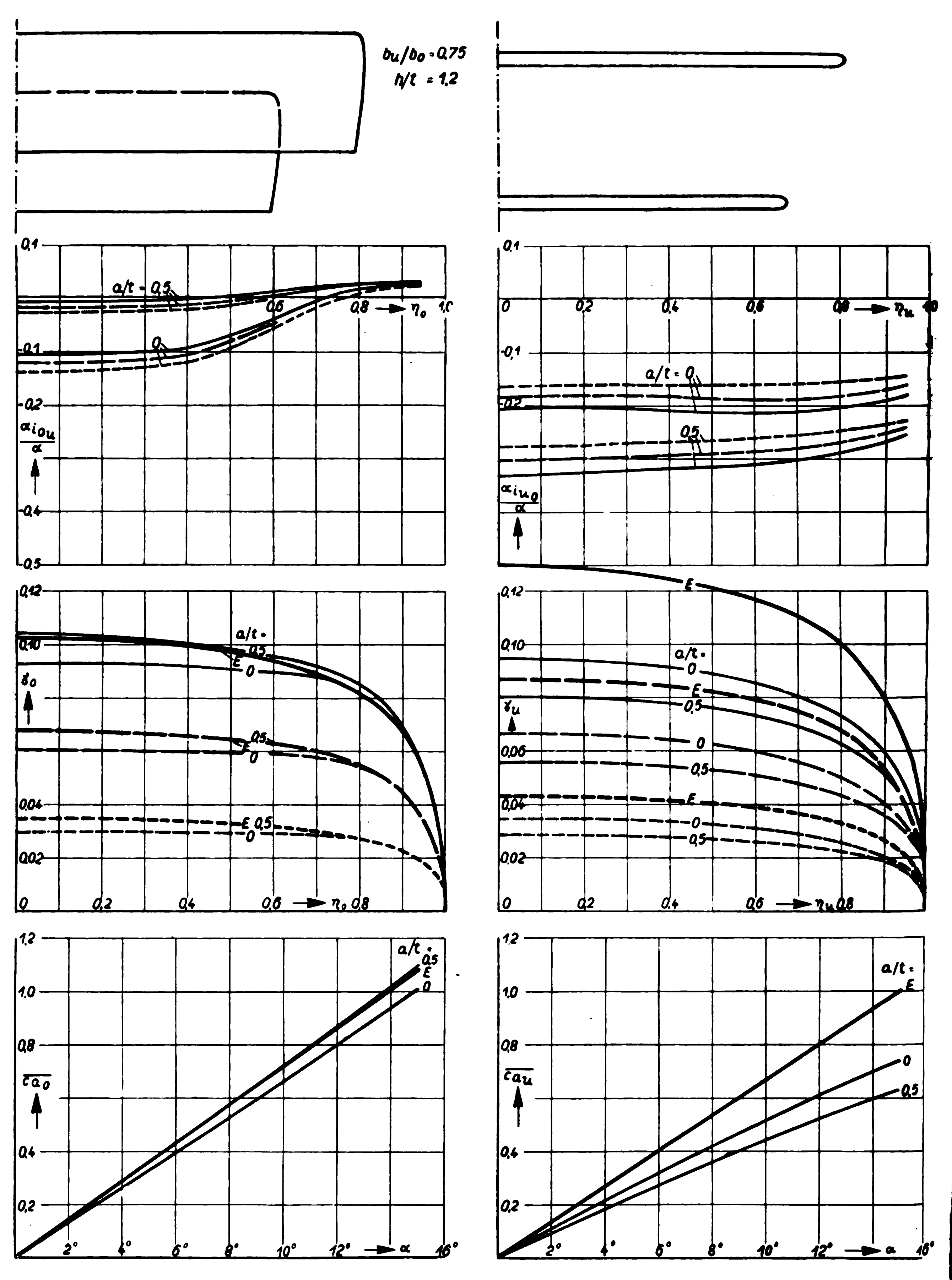


Bild 3.



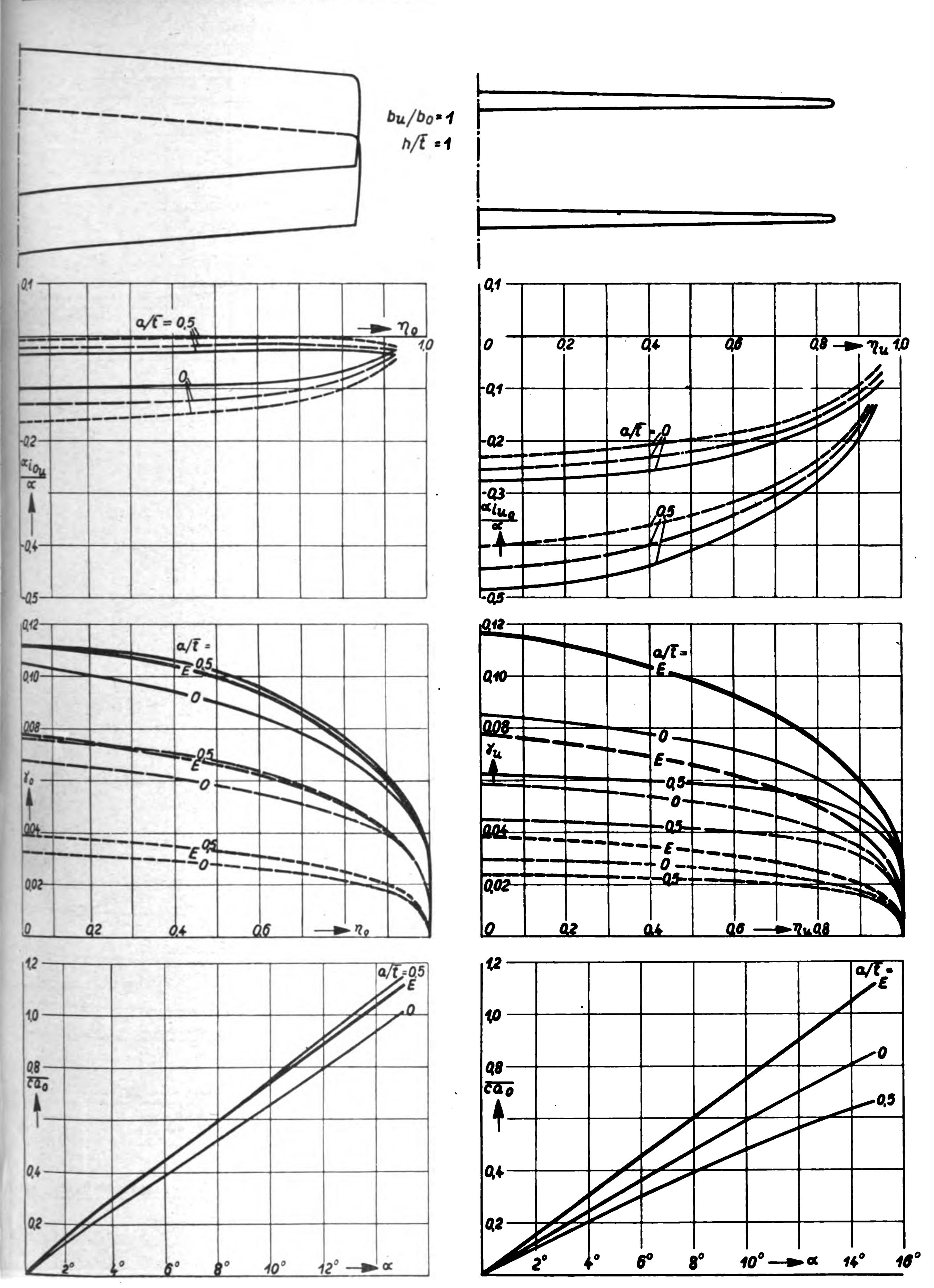
bu/bo = 1
h/t = 1,2
a/t = 0,5
0
α = 5°
α = 10°
α = 15°
a/t:
E
0,5
0
η_o
η_u
$\frac{\alpha_{i o_u}}{\alpha}$
$\frac{\alpha_{i u_o}}{\alpha}$
γ_o
γ_u
$\overline{c_{a_o}}$
$\overline{c_{a_u}}$
α

Bild 4.



$b_u/b_o = 0{,}75$
$h/t = 1{,}2$
a/t = 0,5
0
η_o
$\frac{\alpha_{i_{o_u}}}{\alpha}$
a/t = 0
0,5
η_u
$\frac{\alpha_{i_{u_o}}}{\alpha}$
a/t =
0,5
E
0
γ_o
γ_u
η_o
η_u
a/t =
0,5
E
0
$\overline{c_{a_o}}$
$\overline{c_{a_u}}$
α

Bild 5.

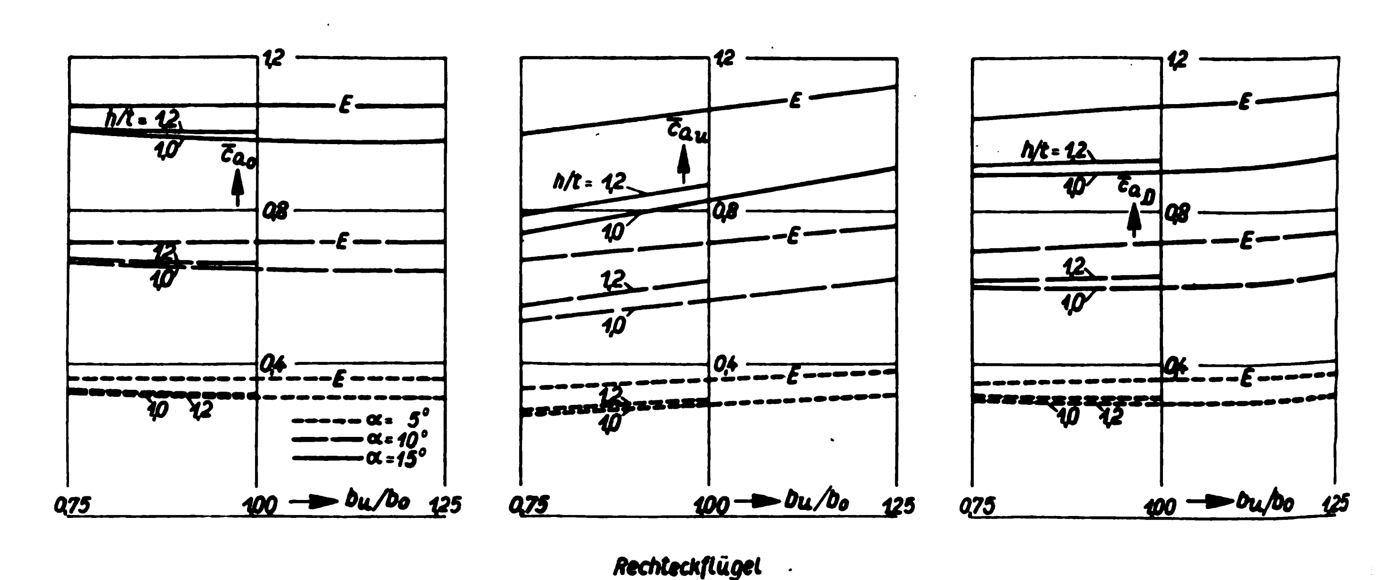


bu/bo = 1
h/t = 1
a/t = 0,5
0
→ η_o
1,0
a/t = 0
0,5
→ η_u
α_{iou}/α
α_{iuo}/α
γ_o
γ_u
a/t =
0,5
E
0
→ η_o
→ η_u
c_{ao}
a/t = 0,5
E
0
→ α
a/t = E
0
0,5

Bild 6.

Rechteckflügel

Bild 7. Auftriebsbeiwerte in Abhängigkeit von der Staffelung; $b_u/b_o = 1$.



Rechteckflügel

Bild 8. Auftriebsbeiwerte in Abhängigkeit vom Spannweitenverhältnis; $a = 0$.

III. Ergebnisse.

In Bild 1 bis 6 sind die Ergebnisse zusammengestellt. Jedes Bild enthält die Anordnung im Grundriß (für $a = 0{,}5\,t$) und im Aufriß, darunter die zusätzlichen Verwindungen beider Flügel, dann die Auftriebsverteilungen über die Spannweite und unten die Gesamtauftriebsbeiwerte jedes Flügels über α. Der induzierte Widerstand wurde nicht angegeben; er kann aus den aufgetragenen Ergebnissen leicht berechnet werden. — Die mit E bezeichneten Kurven sind die Werte für den einzelnen Flügel ohne Beeinflussung.

Aus Bild 1 bis 6 kann man sich nun Querschnitte machen, wie das z. B. für $c_a\,(\alpha)$ in Bild 7 und 8 geschehen ist. Man erkennt z. B. aus Bild 7, daß man durch Änderung der Staffelung den Gesamtauftrieb der Zelle nicht wesentlich beeinflussen kann, wohl aber die Verteilung des Auftriebs auf Ober- und Unterflügel. Erst eine Vergrößerung des Flügelabstandes bringt eine merkliche Verringerung des durch gegenseitige Beeinflussung entstehenden Auftriebsverlustes.

Von entscheidendem Einfluß auf die Flugeigenschaften ist die Auftriebsverteilung über die Spannweite der einzelnen Flügel. Um die Belastungsverhältnisse der Flügel schneller zu übersehen, ist in Bild 9 als Beispiel der örtliche c_a-Wert über der Spannweite aufgetragen. Hier zeigen sich wesentliche Unterschiede zwischen den einzelnen Anordnungen. — Bild 7 bis 9 sind gebracht worden, um zu zeigen, in welcher Weise man die Zusammenstellungen in Bild 1 bis 6 auswerten kann. Man erkennt außerdem, daß die Möglichkeit besteht, für vorgegebene Parameter sich durch Interpolation alles Wissenswerte zu verschaffen.

IV. Zusammenfassung.

Nach einem früher angegebenen Verfahren (Fußnote 1) werden für eine systematische Reihe von Doppeldeckeranordnungen die durch gegenseitige Beeinflussung hervorgerufene Verwindung, die Auftriebsverteilung über die Spannweite und der Gesamtauftrieb jedes Flügels berechnet. Die Parameter Staffelung, Flügelabstand, Spannweitenverhältnis der Flügel sind so weitgehend verändert, daß man im Bereich der üblichen Anordnungen interpolieren kann.

Abgeschlossen Dezember 1938.

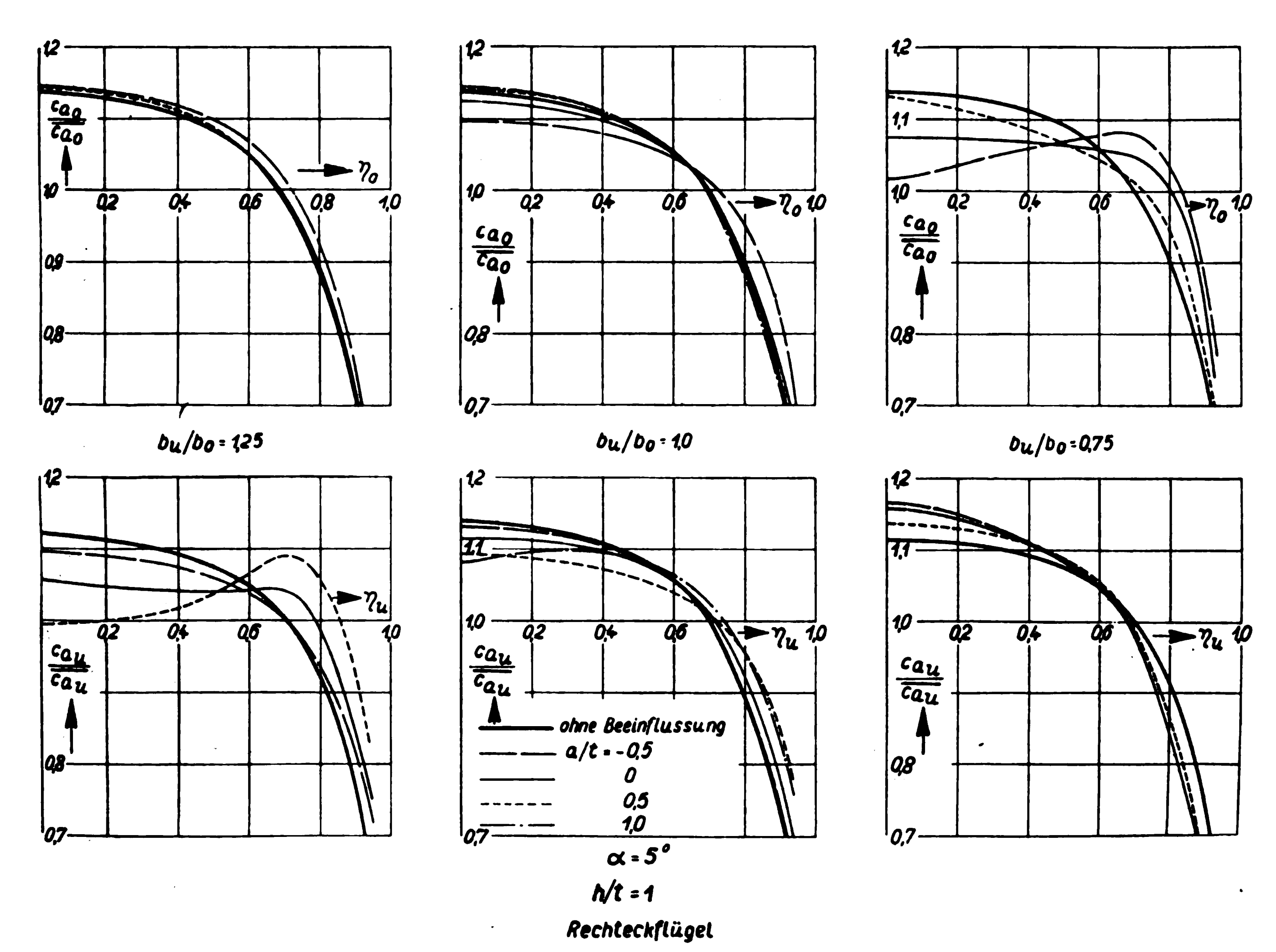


Bild 9. Auftriebsbeiwerte über der Spannweite.

Zur Statik von Kreisringspanten in Flugzeugdruckkabinen.

Von W. Stieda VDI.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. b. m. H., Bremen.

Für Kreisringspante in Flugzeugdruckkabinen mit tangentialer Stützung durch die Rumpfhaut werden Biegemomente, Normal- und Querkräfte bei Einleitung äußerer Kräfte bzw. eines Momentes mit bekannten Methoden rechnerisch genau ermittelt, wobei auch Kreisringspante mit veränderlichen Trägheitsmomenten betrachtet werden. Gegenüber der für nichtkreisförmige Spante üblichen schrittweisen, zum Teil graphischen Methode stellt bei Kreisringspanten diese Ermittlung eine genauere und gleichzeitig einfachere Rechnungsart vor.

Gliederung.

I. Allgemeines und Schrifttumshinweise.

Für Flugzeugdruckkabinen wird aus Gewichtsgründen meist kreisförmiger Rumpfquerschnitt gewählt. Wie im folgenden gezeigt wird, erzeugt nämlich der Innendruck, der für die Bemessung der Spanten von ausschlaggebender Bedeutung ist, bei kreisförmigem Querschnitt nur Normalkräfte, die im wesentlichen in der umgebenden Haut bleiben. Auch bei Kreisringspanten mit veränderlichem Trägheitsmoment treten bei Innendruck keine Biegemomente sondern nur Normalkräfte auf. Bei nicht kreisförmigem Querschnitt dagegen müssen die Spanten bei Innendruck auch für Biegemomente bemessen werden, welche wesentlich höheres Gewicht zur Folge haben.

Im folgenden werden kreisförmige Ringspante mit gleichbleibendem und veränderlichem Trägheitsmoment bei Einleitung äußerer Kräfte berechnet, wobei Stützung durch eine zylindrische umgebende Rumpfhaut berücksichtigt wird. Es werden für verschiedene Belastungsfälle die Biegemomente, Normal- und Querkräfte für den Spant ermittelt. Zugrunde gelegt werden dabei die Aufsätze von Pohl, Berechnung der Ringversteifungen dünnwandiger Hohlzylinder, Der Stahlbau (1931), Nr. 14 und von Wise, Analysis of Circular Rings for Monocoque Fuselages, J. Aeronaut. Scie. (1939), Nr. 11. Beide Aufsätze behandeln nur Kreisringspante mit gleichbleibendem Trägheitsmoment. Pohl verwendet den elastischen Mittelpunkt nach Müller-Breslau zur Bestimmung der statisch Überzähligen, so daß sein Verfahren bei veränderlichem Trägheitsmoment infolge Verschiebung des elastischen Mittelpunktes aus dem Kreismittelpunkt nicht ohne weiteres verwendbar ist. Wise verzichtet auf die vereinfachte Auffindung der zwei bzw. drei statisch Überzähligen mittels des elastischen Mittelpunktes, sondern bestimmt alle neun bzw. fünf Verschiebungswerte δ_{ik} nach Müller-Breslau. Da dieses Verfahren umständlich ist, bringt er nicht den ganzen Rechnungsgang. Allerdings bestimmt er auch die Normalkräfte und Querkräfte für die drei Lastfälle: Radialkraft, Tangentialkraft und Moment, für die Pohl nur die Biegemomente ermittelt hat. Wise behandelt ebenfalls nicht den Fall veränderlichen Trägheitsmomentes im Kreisringspant.

Im folgenden Aufsatz werden die zwei bzw. drei statisch Überzähligen nach dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit von Castigliano ermittelt. Fälle beliebig veränderlichen Trägheitsmomentes können ohne großen Aufwand auf Grund der einmal ermittelten Differentialquotienten der Arbeit nach den statisch Überzähligen behandelt werden. Einige Fälle sind durchgeführt.

Die Gleichungen für Biegemoment, Normalkraft und Querkraft bei gleichbleibendem Trägheitsmoment und für einige Fälle veränderlicher Trägheitsmomente sind für $\varphi = 15^0$, 30^0, 45^0 usw. ausgerechnet und graphisch dargestellt, wobei die Darstellungsart von Pohl verwendet wurde. Außer den drei auch von Pohl und Wise gebrachten Hauptlastfällen: Radialkraft, Tangentialkraft und Moment am Kreisringspant mit tangentialer Stützung wird noch der Fall sinusförmig verteilter Belastung behandelt, der für Berücksichtigung der Luftsogkräfte an Flugzeugrümpfen benötigt wird.

Ebenso wie in den Aufsätzen von Pohl und Wise wird die Exzentrizität zwischen stützender Zylinderhaut und Schwerlinie des Spantprofils vernachlässigt, da es sich bei der üblichen Bauhöhe der Flugzeugrumpfspante nur um einen geringfügigen Fehler handelt.

II. Innendruck bei kreisförmigem Querschnitt.

Eine zylindrische Rumpfröhre sei mit Innendruck belastet. Zur Bestimmung der Kräfte und Momente schneiden wir den Kreisringspant oben auf und bringen an der Schnittstelle die drei statisch Überzähligen X_a, X_b und X_c an, von denen die Querkraft X_b wegen Symmetrie null wird, Bild 1 und 2. Der Innendruck p erzeugt dann am statisch bestimmten Hauptsystem folgende Biegemomente, wobei aufbiegende Momente stets positiv sein mögen:

$$dP = p \cdot ds; \; ds = r\,d\alpha;$$

$$dM_{0\varphi} = r \sin(\varphi - \alpha) \cdot p \cdot r\,d\alpha;$$

$$M_{0\varphi} = +\int_0^\varphi r \sin(\varphi - \alpha)\, p \cdot r \cdot d\alpha$$

$$= + p \cdot r^2 - p \cdot r^2 \cdot \cos\varphi \quad (1)$$

Ferner haben wir für $X_a = -1$ (Bild 2):

$$M_a = +(r - r\cos\varphi) \quad (2)$$

und für $X_c = -1$:

$$M_c = +1 \quad (3)$$

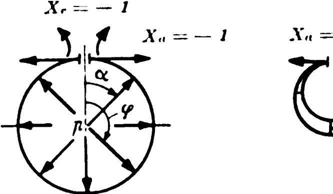
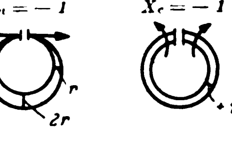


Bild 1. Kreisringspant mit Innendruck.



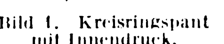


Bild 2. Anbringung der statisch Überzähligen.

Wir bestimmen nun wie auch in allen weiteren Lastfällen die statisch Überzähligen nach dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit von Castigliano.

$$M = M_0 - X_a \cdot M_a - X_c \cdot M_c$$
$$= p\,r^2 - p\,r^2 \cos\varphi - X_a \cdot (r - r\cos\varphi) - X_c;$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_a} = -(r - r\cos\varphi); \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_a} \cdot ds;$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = -\int_0^{2\pi} (p\,r^2 - p\,r^2\cos\varphi - X_a(r - r\cos\varphi) - X_c)\cdot(r - r\cos\varphi)\,r\,d\varphi$$

$$= \Big[2\,p\,r^2\sin\varphi - \frac{p\,r^2}{4}\sin 2\varphi - \frac{3}{2}\,p\,r^2\varphi - 2X_a\cdot r\sin\varphi + \frac{3}{2}X_a\cdot r\cdot\varphi + X_a\cdot\frac{r}{4}\sin 2\varphi - X_c\cdot\sin\varphi + X_c\cdot\varphi\Big]_0^{2\pi} \quad (4)$$

$$= -3\,r^2 p + 3\,r\,X_a + 2\,X_c; \quad (5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = \int \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot ds$$

$$= -\int_0^{2\pi} (p\,r^2 - p\,r^2\cos\varphi - X_a\cdot r + X_a\cdot r\cos\varphi - X_c)\,r\,d\varphi$$

$$= \Big[p\,r^2\cdot\varphi - p\,r^2\sin\varphi - X_a\cdot r\cdot\varphi + X_a\cdot r\sin\varphi - X_c\cdot\varphi\Big]_0^{2\pi} \quad (6)$$

$$= +2\,r^2 p - 2\,r\,X_a - 2\,X_c \quad (7)$$

Aus Gl. (5) und (7) erhalten wir:

$$X_a = p\cdot r; \quad X_c = 0;$$
$$M = p\,r^2 - p\,r^2\cos\varphi - p\,r\,(r - r\cos\varphi) = 0!$$

Demnach treten bei gleichmäßiger Innenbelastung eines Kreisquerschnittes keine Biegemomente im Spant, sondern nur Normalkräfte $N = p\cdot r =$ konst. auf, die im wesentlichen in der Zylinderhaut bleiben. Die anfängliche Annahme, daß der Innendruck von der zylindrischen Haut auf den Ringspant übertragen wird, trifft also nur in geringem Maße zu.

Wir untersuchen im folgenden noch den Fall, daß der Ringspant veränderliches Trägheitsmoment hat, und wie vorher der Kreisringquerschnitt mit Innendruck belastet wird, Bild 3.

$$J_1 = n\cdot J_2;$$
$$J_1 = J_c; \quad \frac{J_c}{J_2} = n; \quad \frac{J_c}{J_1} = 1.$$

Wir integrieren die Gl. (4) und (6) mit den Grenzen 0 bis π und $n$fach von π bis 2π:

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = \Big[-\frac{3}{2}\,p\,r^2\pi + \frac{3}{2}X_a\,r\,\pi + X_c\cdot\pi\Big] + n\Big[-\frac{3}{2}\,p\,r^2\pi + \frac{3}{2}X_a\cdot r\,\pi + X_c\cdot\pi\Big];$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = [p\,r^2\pi - X_a\cdot r\cdot\pi - X_c\cdot\pi] + n\,[p\,r^2\pi - X_a\cdot r\,\pi - X_c\cdot\pi].$$

Wir addieren die Gleichungen:

$$0 = -\frac{3}{2}\,p\,\pi\,r^2(n+1) + \frac{3}{2}X_a\cdot r\,\pi\,(n+1) + X_c\cdot\pi\,(n+1) + p\,r^2\pi\,(n+1) - X_a\cdot r\,\pi\,(n+1) - X_c\cdot\pi\,(n+1);$$

$$0 = \Big(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\Big)(p\cdot r - X_a); \quad X_a = p\cdot r; \quad X_c = 0.$$

Auch bei veränderlichem Trägheitsmoment des Kreisringspantes treten keine Biegemomente, sondern nur Normalkräfte auf. Dieser Nachweis läßt sich leicht auf beliebig sprungweise veränderliches Trägheitsmoment ausdehnen.

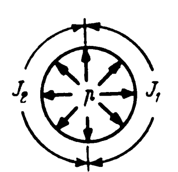


Bild 3. Kreisringspant mit veränderlichem Trägheitsmoment.

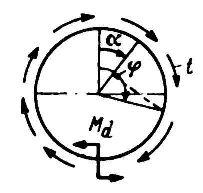


Bild 4. Einleitung eines Momentes M_d in einem tangential gestützten Kreisringspant.

III. Einleitung eines Momentes in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung.

Der Schubfluß in der Haut bei Aufbringung eines Momentes ist, vgl. Bild 4:

$$t = \frac{M\,d}{2\,\pi\,r^2} = \text{konst.} \quad (8)$$

Zur Bestimmung der drei statisch Überzähligen schneiden wir wieder den Spant oben auf. Das Moment M_0 infolge M_d und Schubfluß t entspr. Bild 4 wird folgendermaßen ermittelt: ein Lastteilchen $t\cdot r\cdot d\alpha$ erzeugt an der Stelle mit dem Winkel φ ein Moment:

$$d\,M_{0\varphi} = t\,(r - r\cos(\varphi - \alpha))\,r\,d\alpha \quad \text{(aufbiegend, positiv)}$$

$$M_{0\varphi} = t\,r^2\int_0^{\varphi}(1 - \cos(\varphi - \alpha))\,d\alpha$$
$$= t\,r^2(\varphi - \sin\varphi) \quad \text{im I. und II. Quadranten} \quad (9)$$

Im III. und IV. Quadranten setzen wir statt φ den Wert $(2\pi - \varphi)$ ein und erhalten zubiegend, daher negativ:

$$M_{0\varphi} = -t\,r^2(2\pi - \varphi - \sin(2\pi - \varphi))$$
$$= t\,r^2(\varphi - \sin\varphi - 2\pi) \quad (10)$$

Die Momente der drei statisch Unbekannten sind, vgl. Bild 5:

$$M_a = +(r - r\cos\varphi); \quad M_b = +r\cdot\sin\varphi; \quad M_c = +1.$$

Also bekommen wir:

$$\frac{\partial M}{\partial X_a} = -(r - r\cos\varphi); \quad \frac{\partial M}{\partial X_b} = -r\sin\varphi; \quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = \int \frac{M}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial X_a}\cdot r\,d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi}(t\,r^2\varphi - t\,r^2\sin\varphi - X_a\cdot r + X_a\cdot r\cos\varphi - X_b\,r\sin\varphi - X_c)\,(r - r\cos\varphi)\,r\,d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi}(-t\,r^2\,2\pi)\,(r - r\cos\varphi)\,r\,d\varphi$$

$$= \Big[\frac{t\,r^2}{2}\Big(\varphi^2 - \varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big) - X_a\cdot r\cdot\frac{3}{2}\varphi + X_a\cdot r\Big(2\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big) + X_b\cdot r\Big(\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big) - X_c(\varphi + \sin\varphi)\Big]_0^{2\pi} + \Big[t\,r^2\,2\pi\,(\sin\varphi - \varphi)\Big]_{\pi}^{2\pi} \quad (11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = -3\,X_a\cdot r - 2\,X_c; \quad (12)$$

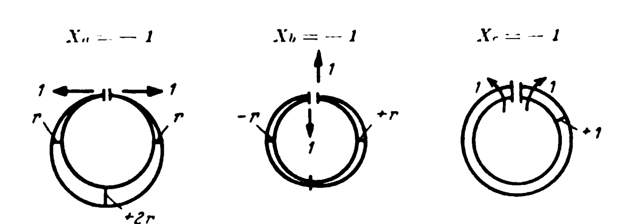


Bild 5. Anbringung der statisch Überzähligen.

$$\frac{\partial A}{\partial X_b} = 0 = -\int_0^{2\pi} (t\,r^2\,\varphi - t\,r^2 \sin\varphi - X_a \cdot r$$

$$+ X_a \cdot r \cos\varphi - X_b\, r \sin\varphi - X_c)\, r \sin\varphi\, r\, d\varphi$$

$$- \int_\pi^{2\pi} (-t\,r^2\, 2\pi)\, r \sin\varphi\, r\, d\varphi$$

$$= \Big[t\,r^2 \Big(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{2} \Big)$$

$$+ X_a \cdot r \Big(\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big) + X_b \cdot r \Big(\frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{2} \Big)$$

$$+ X_c \cdot \cos\varphi \Big]_0^{2\pi} + \Big[t\,r^2\, 2\pi \cos\varphi \Big]_\pi^{2\pi} \quad \ldots\ldots (13)$$

$$= + t\,\pi\,r^2 - X_b\,\pi\,r \quad \ldots\ldots (14)$$

$$X_b = + t\,r = + \frac{M\,d}{2\,\pi\,r};$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = -\int_0^{2\pi} (t\,r^2\,\varphi - t\,r^2 \sin\varphi - X_a \cdot r$$

$$+ X_a \cdot r \cos\varphi - X_b \cdot r \sin\varphi - X_c)\, r\, d\varphi$$

$$- \int_\pi^{2\pi} (-t\,r^2\, 2\pi)\, r\, d\varphi$$

$$= \Big[t\,r^2 \frac{\varphi^2}{2} + t\,r^2 \cos\varphi - X_a \cdot r\,\varphi$$

$$+ X_a \cdot r \sin\varphi + X_b \cdot r \cos\varphi - X_c \cdot \varphi \Big]_0^{2\pi}$$

$$+ \Big[- t\,r^2\, 2\pi\,\varphi \Big]_\pi^{2\pi} \quad \ldots\ldots (15)$$

$$= - 2\,X_a \cdot r - 2\,X_c \quad \ldots\ldots (16)$$

Aus Gl. (12) und (16) folgt $X_a = 0$, $X_c = 0$. Wir erhalten also im I. und II. Quadranten:

$$M = \frac{M\,d}{2\,\pi} (\varphi - 2 \sin\varphi) \quad \ldots\ldots (17)$$

bzw. im III. und IV. Quadranten:

$$M = \frac{M\,d}{2\,\pi} (\varphi - 2 \sin\varphi - 2\,\pi) \quad \ldots\ldots (18)$$

Die erhaltene Momentenlinie stellt gleichzeitig die Einflußlinie für das Biegemoment infolge eines wandernden Lastmomentes dar.

Wir bestimmen jetzt noch die Normal- und Querkräfte im Kreisringspant infolge des Momentes M_d, vgl. Bild 6:

$$N = N_0 - N_b \cdot X_b;$$

$$d\,N_0 = t \cdot r \cos(\varphi - \alpha) \cdot d\,\alpha \quad \text{(Druck)}$$

$$N_0 = -\int_0^{\varphi} t\,r \cos(\varphi - \alpha)\, d\,\alpha$$

$$= - t\,r \sin\varphi \quad \ldots\ldots (19)$$

Mit $N_b = +1 \sin\varphi$ wird die gesamte Normalkraft

$$N = - t\,r \sin\varphi - t\,r \sin\varphi = - 2\,t\,r \sin\varphi$$

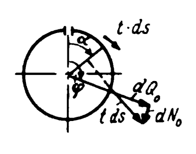
$$= - \frac{M\,d}{2\,\pi} \cdot (\sin\varphi) \quad \ldots\ldots (20)$$

Demnach haben wir im I. und II. Quadranten Druck und im III. und IV. Quadranten Zug.

Ähnlich bestimmen wir die Querkraft:

$$Q = Q_0 - X_b \cdot N_b;$$

$$d\,Q_0 = t\,r \sin(\varphi - \alpha)\, d\,\alpha;$$



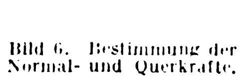


Bild 6. Bestimmung der Normal- und Querkräfte.

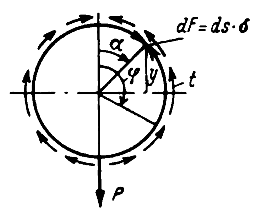


Bild 7. Einleitung einer Radialkraft P in einem tangential gestützten Kreisringspant.

$$Q_0 = \int_0^{\varphi} t\,r \sin(\varphi - \alpha)\, d\,\alpha = t\,r - t\,r \cos\varphi \quad \ldots (21)$$

Mit $Q_b = 1 \cos\varphi$ ist also:

$$Q = t\,r - t\,r \cos\varphi - t\,r \cos\varphi = t\,r\,(1 - 2\cos\varphi)$$

$$= \frac{M\,d}{2\,\pi\,r} \cdot (1 - 2\cos\varphi) \quad \ldots\ldots (22)$$

Durch Einsetzen verschiedener Werte von φ in die Gl. (17), (18), (20) und (22) erhalten wir den Verlauf von M, N und Q über den Kreisspant (s. Tafel 1).

IV. Einleitung einer radialen Kraft in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung.

Bei Belastung einer zylindrischen Röhre mit einer in der Symmetrieachse wirkenden Kraft ist bekanntlich der Schubfluß nicht konstant, sondern mit dem statischen Moment anwachsend und abklingend, vgl. Bild 7,

$$t = \frac{P}{2} \cdot \frac{2}{J} \int d\,F \cdot y = \frac{P}{J} \int \delta \cdot y\, d\,s \quad \ldots (23)$$

In Polarkoordinaten mit dem Kreisträgheitsmoment

$$J = \pi\, r^3\, \delta$$

wird

$$t = \frac{P}{\pi\, r^3\, \delta} \cdot \int \delta \cdot r \cdot \cos\alpha\; r\, d\,\alpha = \frac{P}{\pi\, r} \sin\alpha \quad \ldots (24)$$

Wir denken uns wieder den Spant oben aufgeschnitten. Ein Lastteilchen $t \cdot r \cdot d\,\alpha$ erzeugt an der Stelle mit $\sphericalangle\,\varphi$ ein Moment:



Tafel 1.

$$d M_{0\varphi} = -t\, r\, d\alpha\, (r - r\cos(\varphi - \alpha))$$
$$= -\frac{P}{\pi r} \sin\alpha \cdot r^2 (1 - \cos(\varphi - \alpha))\, d\alpha;$$

$$M_{0\varphi} = -\frac{P}{\pi r} \int_0^\varphi (\sin\alpha - \sin\alpha\cos(\varphi - \alpha))\, d\alpha$$
$$= -\frac{P}{\pi r}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\cdot\sin\varphi\right)$$

gültig von 0 bis π (25)

Wegen Symmetrie ist $X_b = 0$, so daß wir X_a und X_c bestimmen:

$$M = -\frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) - X_a \cdot r(1 - \cos\varphi) - X_c;$$

$$\frac{\partial M}{\partial X_a} = -(r - r\cos\varphi);\quad \frac{\partial M}{\partial X_c} = -1;$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = -2\int_0^\pi \left(-\frac{P\cdot r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - X_a\cdot(r - r\cos\varphi) - X_c\right)(r - r\cos\varphi)\, r\, d\varphi$$
$$= \left[-\frac{P r}{\pi}\left(\varphi - \sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right.\right.$$
$$- \sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{4}\cdot\sin^2\varphi$$
$$\left. - \frac{\varphi}{8} + \frac{1}{16}\sin 2\varphi\right) - X_a\cdot r\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\left. - X_c(\varphi - \sin\varphi)\right]_0^\pi \qquad (26)$$
$$= -\frac{7}{8} P\cdot r - X_a\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi r - X_c\cdot\pi; \qquad (27)$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = -2\int_0^\pi \left(-\frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - X_a\cdot(r - r\cos\varphi) - X_c\right) r\, d\varphi$$
$$= \left[-\frac{P r}{\pi}\left(\varphi - \sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - X_a\cdot r(\varphi - \sin\varphi) - X_c\cdot\varphi\right]_0^\pi \qquad (28)$$
$$= -\frac{P r}{2} - X_a\cdot\pi\cdot r - X_c\cdot\pi \qquad (29)$$

Aus Gl. (27) und (29) erhalten wir

$$X_a = -\frac{3P}{4\pi};\quad X_c = +\frac{P r}{4\pi};$$

und damit

$$M = -\frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) + \frac{3P}{4\pi}(r - r\cos\varphi) - \frac{P r}{4\pi}$$
$$= -\frac{P r}{4\pi}(2 - \cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi) \qquad (30)$$

Die erhaltene Momentenlinie ist gleichzeitig Einflußlinie für das Biegemoment infolge einer wandernden radialen Einzelkraft $P = 1$.

Wir bestimmen noch die Normal- und Querkräfte im Kreisringspant für diesen Fall:

$$d N_{0\varphi} = t\, r\cos(\varphi - \alpha)\, d\alpha$$
$$= +\frac{P}{\pi}\cdot\sin\alpha\cos(\varphi - \alpha)\, d\alpha \quad \text{(Zug)}$$

$$N_{0\varphi} = \int_0^\varphi + \frac{P}{\pi}(\sin\alpha\cdot\cos(\varphi - \alpha))\, d\alpha$$
$$= +\frac{P\cdot\varphi}{2\pi}\sin\varphi \qquad (31)$$

Mit $N_a = -1\cdot\cos\varphi$; $N_c = 0$ wird

$$N = +\frac{P\cdot\varphi}{2\pi}\cdot\sin\varphi - \frac{3P}{4\pi}\cdot\cos\varphi$$
$$= +\frac{P}{2\pi}\left(\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi\right) \qquad (32)$$

Ähnlich wird die Querkraft ermittelt:

$$Q_{0\varphi} = \int_0^\varphi \frac{P}{\pi}\sin\alpha\sin(\varphi - \alpha)\, d\alpha$$
$$= \frac{P}{2\pi}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \qquad (33)$$

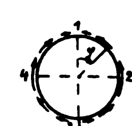
$$Q_a = 1\cdot\sin\varphi;\quad Q_c = 0;$$

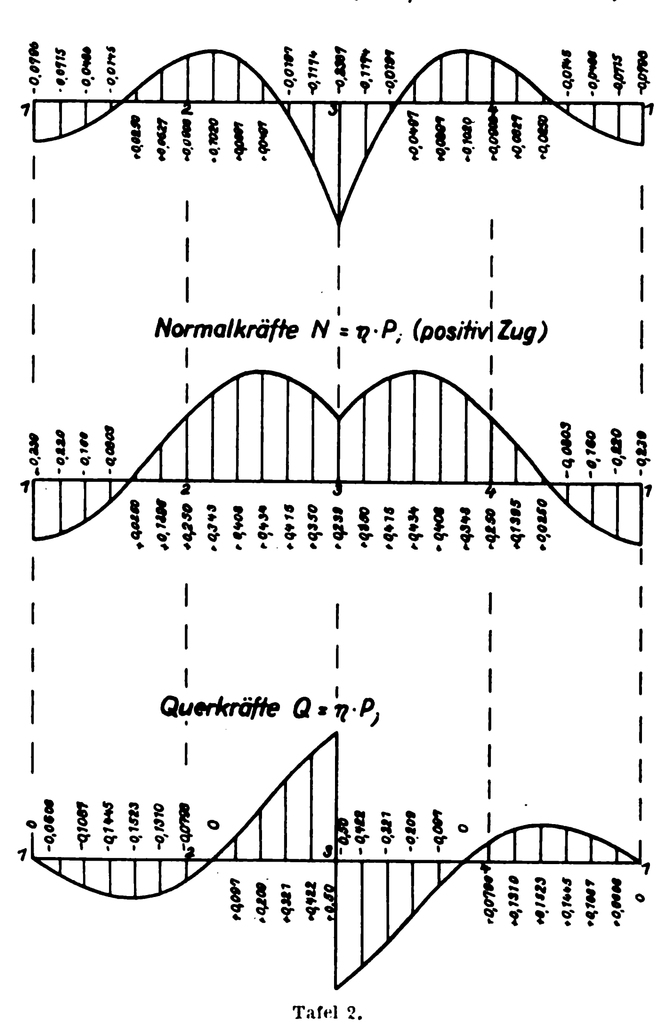
$$Q = \frac{P}{2\pi}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - \frac{3P}{4\pi}\sin\varphi$$
$$= -\frac{P}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi + \varphi\cos\varphi\right) \qquad (34)$$

Durch Einsetzen verschiedener Werte von φ in die Gl. (30), (32) und (34) erhalten wir die Biegemomente, Normalkräfte und Querkräfte. Auch die Linien für N und Q stellen die Einflußlinien infolge einer wandernden Radialkraft P vor. (Tafel 2.)

V. Einleitung einer tangentialen Kraft P in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung.

Bei Aufbringung einer tangentialen Kraft an dem tangential gestützten Kreisringspant lassen sich die Hautstütz-





Tafel 2.

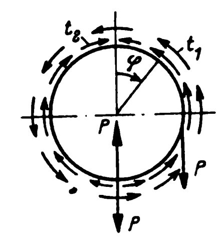


Bild 8. Einleitung einer Tangentialkraft P in einem tangential gestützten Kreisringspant.

kräfte durch Hinzufügen zweier radialer, sich gegenseitig aufhebender Kräfte P ermitteln. Es folgen zwei Schubflüsse (s. unter III. und IV.), vgl. Bild 8:

$$t_1 = \frac{P \cdot r}{2\pi r^2} = \frac{P}{2\pi r}$$

und

$$t_2 = \frac{P}{\pi r} \cdot \sin\varphi.$$

Im I. und II. Quadranten addieren sich diese Schubflüsse, im III. und IV. Quadranten subtrahieren sie sich. Wir schneiden den Spant wieder oben auf und ermitteln die drei statisch Überzähligen. Die Wirkung von P erstreckt sich dabei nur auf den II. Quadranten.

Das Moment infolge t_1 lautet im I. und II. Quadranten:

$$M_{0\varphi} = -r^2 \cdot t_1 (\varphi - \sin\varphi) = -\frac{P r}{2\pi}(\varphi - \sin\varphi) \quad (35)$$

Im III. und IV. Quadranten durch Einsetzen von $(2\pi - \varphi)$ statt φ:

$$M_{0\varphi} = +\frac{P r}{2\pi}(2\pi - \varphi + \sin\varphi) \quad \ldots\ldots (36)$$

Infolge t_2 im I. und II. Quadranten:

$$M_{0\varphi} = -\frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) \quad \ldots (37)$$

Im III. und IV. Quadranten durch Einsetzen von $(2\pi - \varphi)$ statt φ:

$$M_{0\varphi} = -\frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi + \frac{2\pi - \varphi}{2}\sin\varphi\right) \quad \ldots (38)$$

Im II. Quadranten haben wir außerdem ein Moment infolge P:

$$M_{0\varphi} = +P \cdot r \cdot (1 - \sin\varphi) \quad \ldots\ldots (39)$$

Aus dem Gesamtmoment erhalten wir wieder $\frac{\partial M}{\partial X_a}$, $\frac{\partial M}{\partial X_b}$ und $\frac{\partial M}{\partial X_c}$ und bekommen durch Integration:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x_a} = 0 = &\left[\frac{P r}{2\pi}\left(\frac{\varphi^2}{2} - \varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right]_0^{\pi} \\ &+ \left[\frac{P r}{\pi}\left(\frac{11}{8}\varphi - \frac{5}{2}\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \frac{5}{16}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{4}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi} \\ &- \left[\frac{P r}{2\pi}\left(2\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - 2\pi\sin\varphi + \varphi\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &+ \left[\frac{P r}{\pi}\left(\frac{11}{8}\varphi - \frac{5}{2}\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \frac{5}{16}\sin 2\varphi \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\pi}{2}\sin^2\varphi + \frac{\varphi}{4}\sin^2\varphi - \pi\cdot\cos\varphi\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &- \left[P r\left(\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &+ \left[x_a \cdot r\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right. \\ &\left. + x_b \cdot r\left(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right) + X_c \cdot (\varphi - \sin\varphi)\right]_0^{2\pi} \quad (40)\end{aligned}$$

$$0 = \frac{9}{4} P r - \frac{1}{2} P r \pi + X_a \cdot 3\pi r + X_c \cdot 2\pi \quad \ldots\ldots (41)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial X_b} = 0 = &\left[\frac{P r}{2\pi}\left(-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\ &+ \left[\frac{P r}{\pi}\left(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{\varphi^2}{4}\sin^2\varphi \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\varphi^2}{8}\cos 2\varphi + \frac{\varphi}{8}\sin 2\varphi + \frac{1}{16}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi} \\ &- \left[\frac{P r}{2\pi}\left(-2\pi\cos\varphi + \varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &+ \left[\frac{P r}{\pi}\left(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \frac{\pi}{2}\varphi - \frac{\pi}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi^2}{4}\sin^2\varphi \right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{\varphi^2}{8}\cos 2\varphi + \frac{\varphi}{8}\sin 2\varphi + \frac{1}{16}\cos 2\varphi\right)\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &- \left[P r\left(-\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &+ \left[X_a r\left(-\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right. \\ &\left. + X_b r\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right) - X_c \cdot \cos\varphi\right]_0^{2\pi} \quad \ldots\ldots (42)\end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P r}{2} + \frac{P r \pi}{4} + X_b \cdot r\pi \quad \ldots\ldots (43)$$

$$X_b = -\frac{P}{4\pi}(\pi - 2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = &\left[\frac{P r}{2\pi}\left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos\varphi\right)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{P r}{\pi}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)\right]_0^{\pi} \\ &- \left[\frac{P r}{2\pi}\left(2\pi\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \cos\varphi\right)\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &+ \left[\frac{P r}{\pi}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi - \pi\cos\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &- \left[P r(\varphi + \cos\varphi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[X_a r(\varphi - \sin\varphi) - X_b r\cos\varphi + X_c\varphi\right]_0^{2\pi} \\ &\quad \ldots\ldots (44)\end{aligned}$$

$$0 = 2 P r - \frac{1}{2} P r \pi + X_a \cdot 2\pi r + X_c \cdot 2\pi \quad \ldots\ldots (45)$$

Aus Gleichung (41) und (45) erhalten wir:

$$X_a = -\frac{P}{4\pi};\; X_c = -\frac{P r}{4\pi}(3 - \pi).$$

Die endgültigen Momente sind also in den Quadranten I bis IV:

$$\begin{aligned}M_{\mathrm{I}} &= -\frac{P r}{2\pi}(\varphi - \sin\varphi) - \frac{P r}{\pi}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) \\ &\quad + \frac{P}{4\pi}(r - r\cos\varphi) + \frac{P}{4\pi}(\pi - 2)\, r\sin\varphi + \frac{P r}{4\pi}(3 - \pi) \\ &= -\frac{P r}{4\pi}\left[(2\varphi + \pi)(1 - \sin\varphi) - 3\cos\varphi\right] \quad \ldots (46)\end{aligned}$$

$$M_{\mathrm{II}} = +\frac{P r}{4\pi}\left[(3\pi - 2\varphi)(1 - \sin\varphi) + 3\cos\varphi\right] \quad \ldots (47)$$

$$M_{\mathrm{III\,IV}} = +\frac{P r}{4\pi}\left[(3\pi - 2\varphi)(1 - \sin\varphi) - 3\cos\varphi\right] \quad \ldots (48)$$

Ähnlich wie in den vorhergehenden Fällen ermitteln wir die Normal- und Querkräfte:

$$N_{\mathrm{I}} = +\frac{P}{2\pi}\left[\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right] \quad \ldots (49)$$

$$N_{\mathrm{II}} = +\frac{P}{2\pi}\left[\left(\varphi - \frac{3}{2}\pi\right)\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right] \quad \ldots (50)$$

$$N_{\mathrm{III\,IV}} = +\frac{P}{2\pi}\left[\left(\varphi - \frac{3}{2}\pi\right)\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right] \quad \ldots (51)$$

$$Q_{\mathrm{I}} = \frac{P}{2\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\varphi - \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi\right] \quad \ldots (52)$$

$$Q_{\mathrm{II}} = \frac{P}{2\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\varphi - \left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right)\cos\varphi\right] \quad \ldots (53)$$

$$Q_{\mathrm{III\,IV}} = \frac{P}{2\pi}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\varphi + \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)\cos\varphi\right] \quad \ldots (54)$$

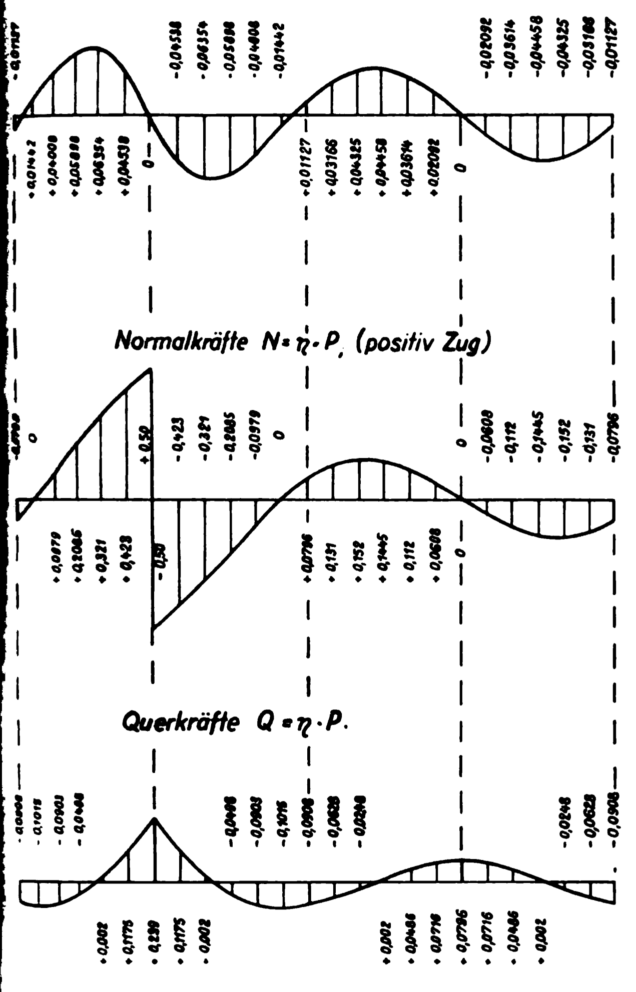
Durch Einsetzen verschiedener Werte von φ in die Gleichungen erhalten wir die in Tafel 3 aufgetragenen Biegemomente, Normal- und Querkräfte. Sie stellen wieder die Einflußlinien infolge einer wandernden tangentialen Kraft P vor.

VI. Einleitung einer sinusförmig verteilten Belastung in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung.

Um die am Flugzeugrumpf angreifenden Luftkräfte berücksichtigen zu können, wird noch der Fall sinusförmig verteilter Belastung untersucht, vgl. Bild 9.



3. Einleitung einer tangentialen Kraft P in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung



Tafel 3.

Die Belastung sei:

$$p = -p_{\max} \cdot \cos\alpha \left(\text{von } \frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{3\pi}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

$p_v = p_{\max} \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\pi - \alpha)$; Vertikalkomponente

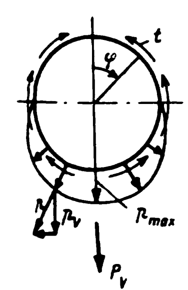
$$P_v = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p_{\max} \cdot \cos\alpha \cdot \cos(\pi-\alpha)\, r\, d\alpha = r\, p_{\max} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (56)$$

Der Schubfluß ist dann entsprechend Gl. (24):

$$t = \frac{p_{\max}}{2} \cdot \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Bei Aufschneiden des Spantes oben folgt aus t:

$$M_0 = -\frac{r^2 p_{\max}}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) \quad \ldots \quad (58)$$



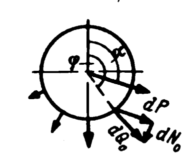


Bild 10. Bestimmung der Normal- und Querkräfte.

Bild 9 (links). Einleitung einer sinusförmig verteilten Belastung.

Aus $p = p_{\max} \cdot \cos\alpha$ folgt im II. und III. Quadranten:

$$dP = p \cdot r\, d\alpha;$$

$$dM_{0\varphi} = p \cdot r\, d\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha) \cdot r$$
$$= -p_{\max} \cdot r^2 \cos\alpha \sin(\varphi - \alpha)\, d\alpha;$$

$$M_{0\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} r^2 p_{\max} \cos\alpha \sin(\varphi-\alpha)\, d\alpha$$

$$= -r^2 p_{\max}\left(\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - \frac{\pi}{4}\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) \quad (59)$$

Wegen Symmetrie ist wieder $X_b = 0$; also bekommen wir

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{r^2 p_{\max}}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right)(1-\cos\varphi)\, r^2\, d\varphi$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -r^2 p_{\max}\left(\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - \frac{\pi}{4}\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)(1-\cos\varphi)\, r^2\, d\varphi$$

$$-\int_0^{\pi}(X_a r(1-\cos\varphi) + X_c)(1-\cos\varphi)\, r^2\, d\varphi$$

$$= -r^2 p_{\max}\left[+\frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{\pi}{8}\sin^2\varphi - \frac{\varphi}{4}\sin^2\varphi + \frac{\varphi}{8} - \frac{1}{16}\sin 2\varphi - \frac{1}{8}\sin 2\varphi - \frac{\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \text{Gl. (26)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Dabei muß in Gl. (26) P durch $\frac{r^2 p_{\max} \cdot \pi}{2}$ ersetzt werden.

$$= -\frac{10}{16}\pi r^2 p_{\max} + r^2 p_{\max} - \frac{3}{2} X_a \cdot \pi r - X_c \cdot \pi \quad (61)$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{r^2 p_{\max}}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) r\, d\varphi$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -r^2 p_{\max}\left(\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - \frac{\pi}{4}\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) r\, d\varphi$$

$$-\int_0^{\pi}[X_a \cdot r(1-\cos\varphi) + X_c]\, r\, d\varphi$$

$$= -r^2 p_{\max}\left[\frac{\pi}{4}\cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \text{Gl. (28)} \quad (62)$$

(Dabei in Gl. (28) P durch $\frac{r^2 p_{\max} \cdot \pi}{2}$ ersetzt)

$$= -r^2 p_{\max} \cdot \frac{\pi}{2} + r^2 p_{\max} - X_a \cdot \pi r - X_c \pi \quad . \ (63)$$

Aus Gleichung (61) und (63) erhält man:

$$X_a = -p_{\max} \cdot \frac{r}{4}; \quad X_c = +r^2 p_{\max}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right).$$

Man erhält damit für die Quadranten I bis IV:

$$M_{\mathrm{I}} = -\frac{r^2 p_{\max}}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) + \frac{r^2 p_{\max}}{4}(1-\cos\varphi) - r^2 p_{\max}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -r^2 p_{\max}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\cos\varphi - \frac{\varphi}{4}\sin\varphi\right) \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

$$M_{\mathrm{II}} = -r^2 p_{\max}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\cos\varphi + \frac{\varphi}{4}\sin\varphi - \frac{\pi}{4}\sin\varphi\right) \quad (65)$$

Wir bestimmen nun noch die Normal- und Querkräfte, vgl. Bild 10:

infolge t:

$$N_{0\varphi} = + \frac{r\,p_{\max}}{4} \cdot \varphi \sin\varphi;$$

infolge p:

$$d\,P = p \cdot ds = p_{\max} \cdot \cos\alpha \cdot r\,d\alpha$$

$$d\,N_{0\varphi} = p_{\max} \cdot \cos\alpha \cdot r\,d\alpha \sin(\varphi - \alpha)$$

$$N_{0\varphi} = p_{\max} \cdot r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos\alpha \sin(\varphi - \alpha)\,d\alpha$$

$$= p_{\max} \cdot r \left[\frac{\varphi}{2} \sin\varphi - \frac{\pi}{4} \sin\varphi + \frac{1}{2} \cos\varphi\right] \qquad (66)$$

Also erhalten wir:

$$N_{\mathrm{I}} = + p_{\max} \cdot \frac{r}{4} (\varphi \sin\varphi - \cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

$$N_{\mathrm{II}} = + p_{\max} \cdot \frac{r}{4} (-\varphi \sin\varphi + \pi \sin\varphi - 3\cos\varphi) \quad (68)$$

Ähnlich erhalten wir die Querkräfte:

$$Q_{0\varphi\,(p)} = p_{\max} \cdot r \left[\frac{1}{2} \cos^2\varphi \sin\varphi + \frac{\varphi}{2} \cos\varphi - \frac{\pi}{4} \cos\varphi + \frac{1}{2} \sin^3\varphi - \frac{1}{2} \sin\varphi\right] \quad (69)$$

und damit:

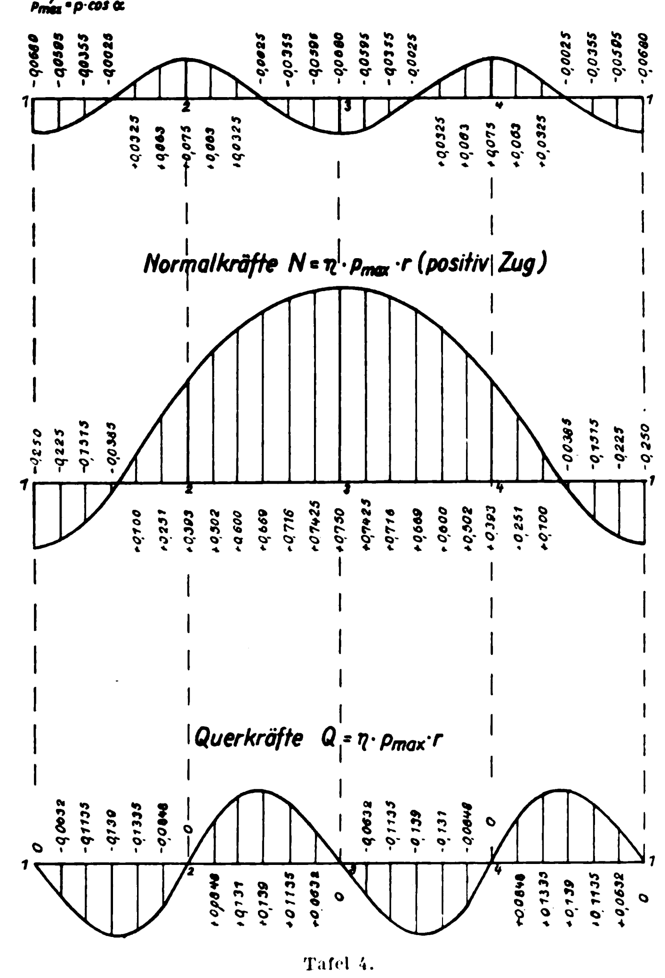
$$Q_{\mathrm{I}} = - p_{\max} \cdot \frac{r}{4} \varphi \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

$$Q_{\mathrm{II}} = p_{\max} \cdot \frac{r}{4} (2\cos^2\varphi \sin\varphi + \varphi\cos\varphi - \pi\cos\varphi + 2\sin^3\varphi - 2\sin\varphi) \quad (71)$$

4. Einleitung einer sinusförmigen Belastung in einen Kreisringspant mit tangentialer Stützung.

$p_{\max} \cdot p \cdot \cos\alpha$

Biegemomente $M = \eta \cdot p_{\max} \cdot r^2$ (positiv außen Druck)



Tafel 4.

Durch Einsetzen verschiedener Werte von φ in die Gl. (64), (65), (67), (68) und (70), (71) erhält man die in Tafel 4 aufgetragenen Biegemomente, Normal- und Querkräfte.

Zur Probe für das maximale Biegemoment im untersten Spantpunkt M_u verwenden wir die Momentenlinie von Bild 2 als Einflußlinie für die sinusförmige Belastung und erhalten:

$$M_{(\varphi)} = \frac{r}{4\pi} (2 - \cos\varphi - 2\varphi \sin\varphi) \quad \text{Einflußlinie}$$

$$d\,M = p_{\max} \cdot \cos\varphi \cdot ds \cdot M_{(\varphi)};$$

$$M_u = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{p_{\max} \cdot r^2}{4\pi} (2\cos\varphi - \cos^2\varphi - 2\varphi \sin\varphi \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= - p_{\max} \cdot r^2 \cdot 0{,}068.$$

Der Wert für M_u entspricht dem aus Gl. (64) für $\varphi = \pi$ errechneten.

Als weitere Probe muß der Wert $\int M\,ds$ null werden, was für diesen wie auch für die drei vorhergehenden Fälle stimmt.

VII. Behandlung der gleichen Lastfälle bei veränderlichem Trägheitsmoment des Spantes.

In dem unter III. behandelten Fall sei das Trägheitsmoment nach Bild 11 veränderlich, vgl. Bild 11:

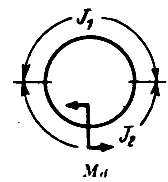


Bild 11. Veränderliches Trägheitsmoment.

$$J_1 = J_c;$$

$$J_2 = n \cdot J_1; \quad \frac{J_c}{J_2} = \frac{1}{n}.$$

Unter Verwendung der Gl. (11), (13) und (15) integrieren wir über die Bereiche 0 bis $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π, wobei der mittlere Bereich mit $\frac{1}{n}$ multipliziert wird:

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = \left[-X_a r \left(\frac{3\pi}{2} - 4\right) - X_c (\pi + 2)\right] + \frac{1}{n}\left[-X_a r \left(\frac{3\pi}{2} + 4\right) - X_c (\pi - 2)\right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = [-X_a r (\pi - 2) - X_c \cdot \pi] + \frac{1}{n}[-X_a r (\pi + 2) - X_c \pi].$$

Demnach ist auch bei veränderlichem Trägheitsmoment

$$X_a = 0; \qquad X_c = 0.$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_b} = 0 = \left[2\,t\,r^2 - t\,r^2 \frac{\pi}{2} - X_b r \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{n}\left[-2\,t\,r^2 + \frac{3}{2}\,t\,r^2 \pi - X_b r \frac{\pi}{2}\right]$$

Es ergeben sich folgende Werte für X_b:

$\frac{1}{n} =$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$X_b = \frac{M\,d}{2\pi r} \cdot$	1,0	0,758	0,637	0,563	0,515	0,405

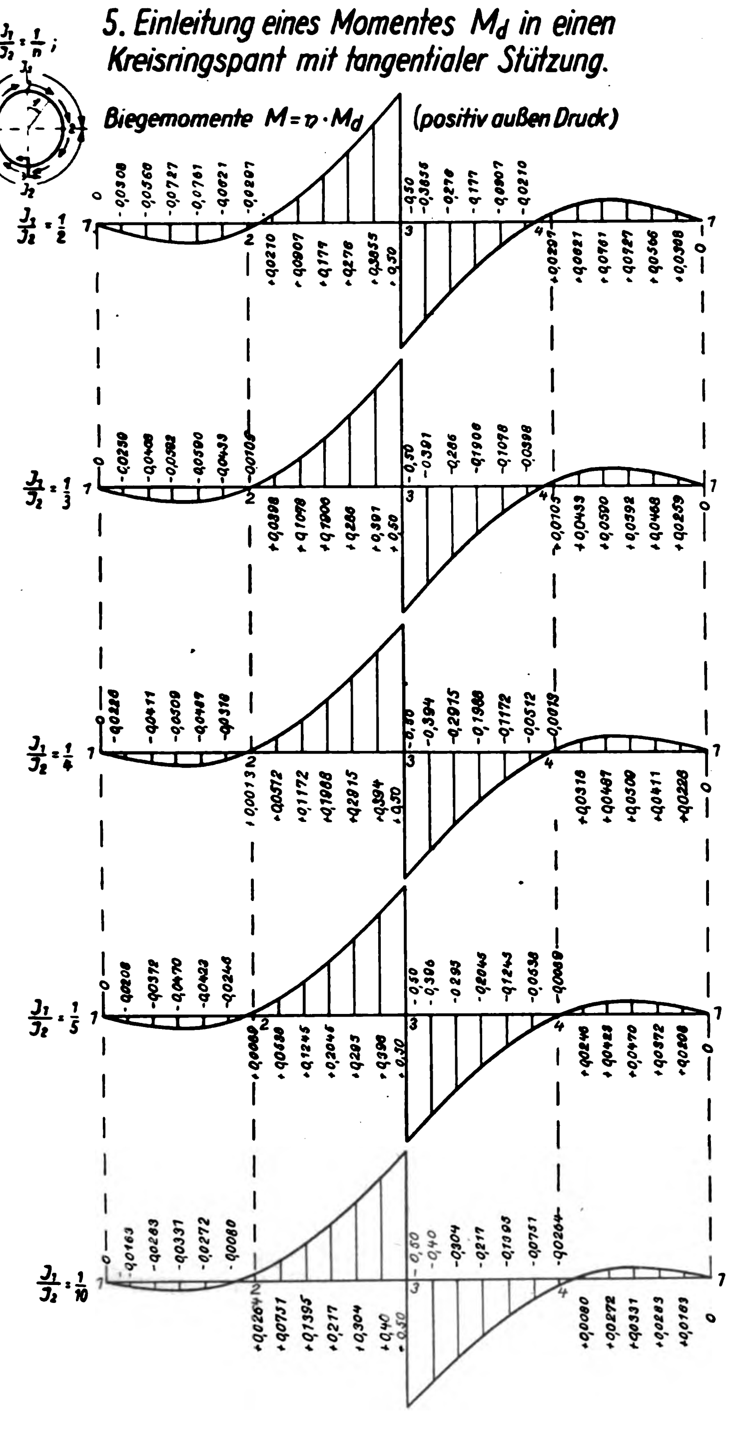
und damit die Gesamtmomente

$$M = \frac{M\,d}{2\pi} (\varphi - \eta \cdot \sin\varphi) \ldots (-2\pi) \text{ für III. u. IV. Quadr. zusätzlich!}$$

Dabei hat η folgende Werte:

$\frac{1}{n} =$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$\eta =$	2,0	1,758	1,637	1,563	1,515	1,405

Die Momente sind in Tafel 5 aufgetragen. Probe $\int M\,ds$ ergibt null.



Tafel 5.

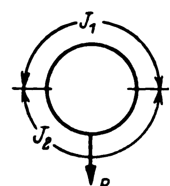


Bild 12. Veränderliches Trägheitsmoment.

Wir verändern schließlich in dem unter IV. behandelten Fall das Trägheitsmoment nach Bild 12:

$$J_1 = J_c; \quad J_2 = n \cdot J_1; \quad \frac{J_c}{J_2} = \frac{1}{n}.$$

Die Integration erfolgt von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und mit $\frac{1}{n}$ multipliziert von $\frac{\pi}{2}$ bis π: Nach Gl. (26) und (28) ist dann:

$$\frac{\partial A}{\partial X_a} = 0 = \left[-\frac{Pr}{\pi}\left(\frac{13\pi}{16} - \frac{5}{2}\right) - X_a r\left(\frac{3\pi}{4} - 2\right) - X_c\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] + \frac{1}{n} \cdot \left[-\frac{Pr}{\pi}\left(\frac{\pi}{16} + \frac{5}{2}\right) - X_a r\left(\frac{3\pi}{4} + 2\right) - X_c\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right];$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_c} = 0 = \left[-\frac{Pr}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\right) - X_a r\left(\frac{\pi}{1} - 1\right) - X_c \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{n} \cdot \left[-\frac{Pr}{\pi}\left(\frac{3}{2}\right) - X_a r\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - X_c \frac{\pi}{2}\right].$$

Es ergeben sich die Unbekannten und Faktoren

$\frac{1}{n} =$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
$X_a = -\frac{P}{\pi} \cdot$	0,75	0,706	0,675	0,642	0,622	0,555
$X_c = +\frac{Pr}{\pi} \cdot$	0,25	0,207	0,1875	0,1695	0,1613	0,1372
$\eta =$	0,5	0,505	0,5125	0,5272	0,5393	0,5822
$\xi =$	0,25	0,298	0,325	0,358	0,378	0,445

wobei unter Einsetzen der Faktoren die Biegemomente lauten:

$$M = -\frac{Pr}{\pi}(\eta - \xi \cos\varphi - 0{,}5\,\varphi \sin\varphi).$$

Die Momente sind in Tafel 6 aufgetragen. Die Probe $\int M\,ds$ ergibt null.

Ähnlich lassen sich die Biegemomente bei veränderlichem Trägheitsmoment des Kreisringspantes für die unter V. und VI. gerechneten Fälle auf Grund des aufgestellten Rechnungsganges ermitteln. Auch können die Trägheitsmomente ohne großen Aufwand beliebig anders sprungweise verändert werden. Mit Rücksicht auf den Umfang der vorliegenden Arbeit konnten weitere Fälle nicht durchgeführt werden. Auch sind die dazugehörigen Normal- und Querkräfte hier nicht zusammengestellt worden.

VIII. Zusammenfassung.

Für kreisförmige Ringspante mit gleichbleibendem und veränderlichem Trägheitsmoment sind Biegemomente, Normalkräfte und Querkräfte bei Einleitung eines Momentes, einer Radialkraft, einer Tangentialkraft und einer sinusförmig verteilten Belastung unter Berücksichtigung tangentialer Stützung ermittelt. Damit in der Praxis vorkommende weitere Fälle veränderlichen Trägheitsmomentes ebenfalls behandelt werden können, sind die ausgerechneten Integralwerte $\partial A/\partial X$ aufgeführt. Die Anwendung der Ergebnisse des vorliegenden Aufsatzes in der Praxis bringt eine wesentliche Zeit- und Arbeitsersparnis gegenüber der sonst üblichen Methode, die Spanten mit Zerlegung der verschiedenen Momentenflächen in kleinere Abschnitte nach Müller-Breslau zu rechnen, außerdem bringt sie größere Genauigkeit.

IX. Schrifttum.

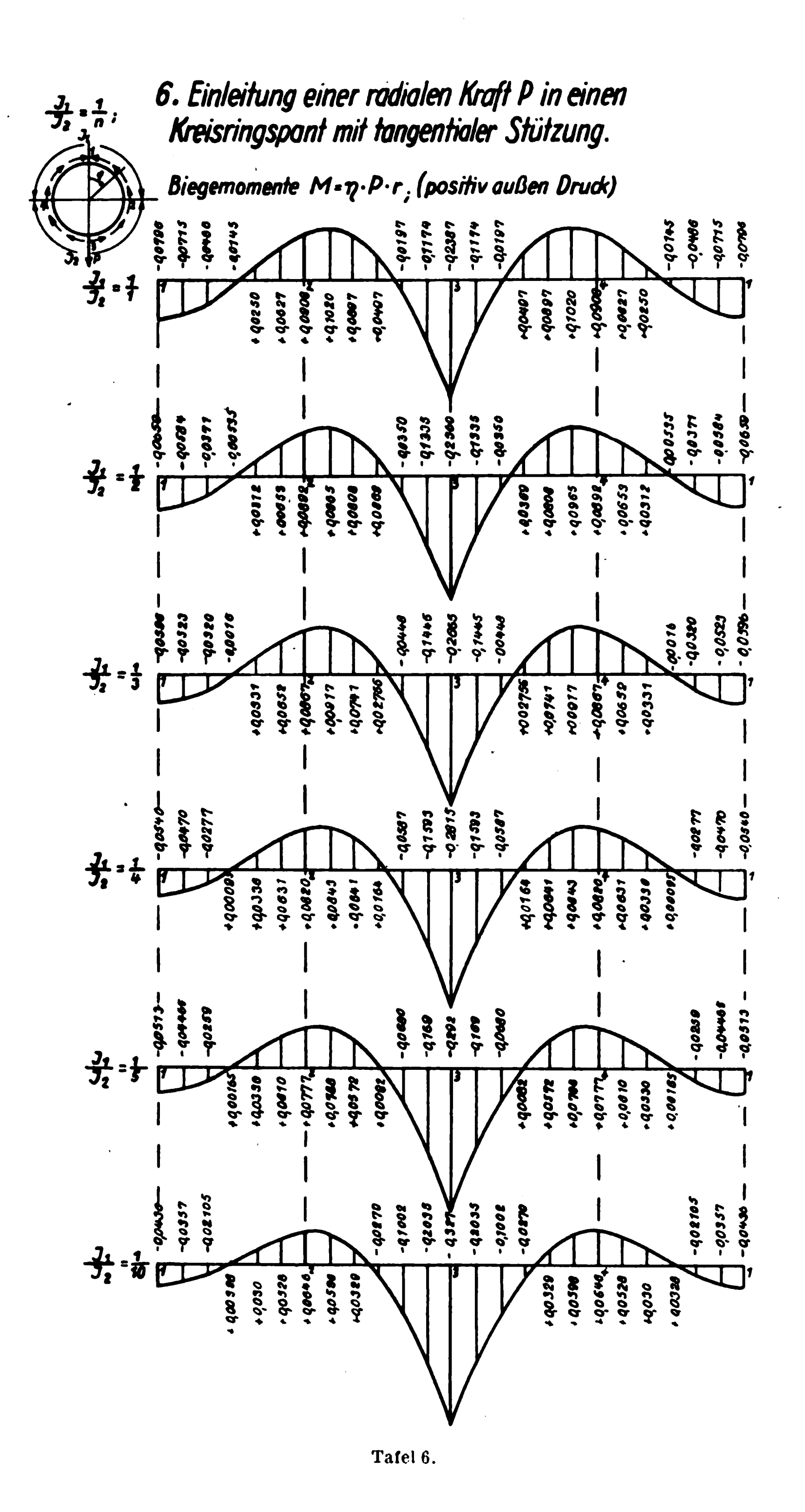
[1] Pohl, Berechnung der Ringversteifungen dünnwandiger Hohlzylinder. Der Stahlbau (1931), Nr. 14.
[2] Joseph A. Wise, Analysis of Circular Rings for Monocoque Fuselages. J. Aeronaut. Scie. (1939), Nr. 11.

Weiteres Schrifttum über Statik von Kreisringen, jedoch mit anderen Lastfällen und ohne tangentiale Stützung:

[3] Ernest J. A. Greenwood, Jr., A Method of Stress Analysis of Monocoque Fuselage Circular Rings. J. Aeronaut. Scie. (1936), Nr. 12.

[4] E. E. Lundquist und W. F. Burke, General Equations for the Stress Analysis of Rings. NACA-Report Nr. 509 (1934).

[5] J. G. Willis, Stress Analysis of Engine Mounting Rings. J. Aeronaut. Scie. (1939), Nr. 7.



Tafel 6.

Zur Theorie der Ringwaage.

Von Dipl.-Ing. Hans Weidemann*).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand darin, für die in der chemischen Industrie und der meteorologischen Meßtechnik verwandten Ringwaage die Schwingungsgleichung zu bestimmen, die den zeitlichen Ablauf des Bewegungsvorganges kennzeichnet. Ferner ließ sich ein mathematischer Ausdruck angeben, der lediglich von den geometrischen Abmessungen der Ringwaage und der sie mit der Meßstelle verbindenden Rohrleitung abhängt und der ein Maß für die Trägheit des Gerätes ist. Die Kenntnis der Trägheit gestattet einen qualitativen Vergleich der Geräte untereinander.

Gliederung.

1. Einleitung.

Die Ringwaage findet in Verbindung mit Drosselgeräten (Normdüse, Normblende) in der chemischen Industrie zur Messung von Gas-, Luft- und Flüssigkeitsmengen oder drucken und in Verbindung mit Staurohren oder Düsen in der Meteorologie zur Böenregistrierung Verwendung. Da die Ringwaage über verhältnismäßig große Verstellkräfte verfügt, ist sie als Geber zur Fernregistrierung von Meßgrößen gut geeignet.

Wie aus dem spärlich vorhandenen Schrifttum hervorgeht, ist die statische Momentengleichung, wie sie E. Schmidt in Z. VDI Bd. 80 (1936), S. 635, angibt, schon lange bekannt und sie liegt wohl auch den Berechnungen der die Ringwaage herstellenden Firmen zugrunde.

Bei der Berechnung der Schwingungsgleichung spielten ähnliche Betrachtungen eine Rolle, wie sie bei der Berechnung der Bewegungsgleichungen für Galvanometer Verwendung finden. Da das exakte mathematische Problem bei der Ringwaage verhältnismäßig kompliziert ist, waren vereinfachende Annahmen unvermeidlich.

2. Arbeitsweise der Ringwaage.

Die Ringwaage besteht, wie Bild 1 zeigt, aus einem, an den Rändern meist gerundeten, rechteckigen Hohlring H, der zur Hälfte mit einer Sperrflüssigkeit w, meist Wasser, ... ist. Der Ring wird durch eine Trennfläche F in zwei ... und e geteilt, an die vermittels der Anschluß- ...ckmeßleitungen R angeschlossen wer- ...öglichst klein zu halten, ist der Ring ...ende Schneide S ge- ...ängegewicht G ...t. Die Druck- ...hen der Sperr- ...chiebt, bis Δp ... der Sperrflüssig- ...ist. Andererseits ...r Ring in Drehung ... dann, wenn das ...urch die Anhänge- ...ate ist. Durch ge- ... sich der Meßbereich

Ein ... Poten... den Str... Aufbau ... nung U, ... $\frac{8\eta l}{\pi r^4}$ dem W... widerstand ... r^5 ... eters bei verschiedenen

*) s. W. Oppelt ... Luftdruckvariometers ... Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1...

... Göring, Braunschweig.

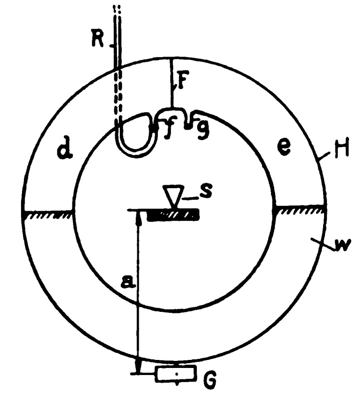


Bild 1. Schematische Skizze der Ringwaage.

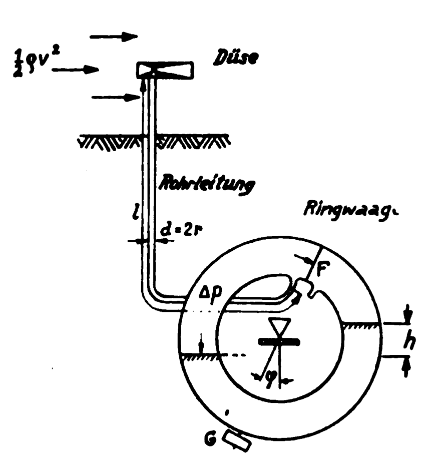


Bild 2. Schematische Skizze einer Meßanordnung mit der Ringwaage.

der Ringwaage verändern. Eine obere Grenze ist ihm durch die größte Höhe der Spiegeldifferenz der Sperrflüssigkeit gesetzt, die ihrerseits durch die Abmessungen des Ringes festgelegt ist. Die Menge und das spezifische Gewicht der Sperrflüssigkeit haben auf die Anzeige der Ringwaage keinen Einfluß, da die Resultierende aller hydrostatischen Druckkräfte durch die Drehachse geht und weil eine Verschiebung der Sperrflüssigkeit im Ring keinerlei Drehmomente erzeugen kann. Das Meßprinzip besteht also in einem reinen Auswiegen der Differenzdrucke. Die Ringwaage kann sowohl für positive als auch für negative Druckdifferenzen verwendet werden.

3. Statische Momentengleichung.

Wie Bild 2 zeigt, sei der eine Anschlußnippel der Ringwaage mit Hilfe einer Rohrleitung mit irgendeiner Meßstelle verbunden, an der ein gegen den statischen Druck der Luft gemessener Über- bzw. Unterdruck Δp herrscht. Der andere Anschlußnippel stehe mit der Außenluft in Verbindung.

Infolge der an der Meßstelle vorhandenen Druckdifferenz Δp strömt durch die Rohrleitung so lange Luft oder Gas in die Kammer d ein bzw. aus ihr heraus und verschiebt die Sperrflüssigkeit solange, bis

$$\Delta p = \gamma \cdot h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist; wenn γ das spezifische Gewicht der Sperrflüssigkeit und h die Spiegeldifferenz derselben ist.. Δp wird in mm WS oder kg/m² gemessen.

Der Druck wirkt ferner auf die Trennwand F des Ringes, der sich so weit dreht, bis das durch die Anhängegewichte G verursachte Gegendrehmoment dem Moment der Druckkraft das Gleichgewicht hält.

Für den Gleichgewichtszustand gilt: Summe aller Momente gleich Null.

Folglich ist

$$\Delta p \cdot F \cdot r_m = G \cdot a \cdot \sin \varphi$$

und

$$\Delta p = \frac{G \cdot a}{F \cdot r_m} \cdot \sin \varphi$$

oder

$$\Delta p = k \cdot \sin \varphi \text{ (kg/m}^2) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Solange der Funktionswert sin φ nicht wesentlich von dem im Bogenmaß gemessenen Argument φ abweicht, kann man beide, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, gleichsetzen. Bei einem Winkelausschlag von 23° beträgt der Fehler rd. 2,5%. Dann ist

$$\Delta p = k \cdot \varphi \text{ (kg/m}^2) \quad \ldots \ldots \quad (2a)$$

Die Formel 2a, die statische Momentengleichung, besagt, daß der Winkelausschlag der Ringwaage der angelegten Druckdifferenz proportional ist.

Die Konstante k gibt an, welcher Differenzdruck notwendig ist, um den im Bogenmaß gemessenen Winkelausschlag 1 hervorzurufen. Sie wird durch die geometrischen Abmessungen des Ringes gekennzeichnet. Ihr reziproker Wert $K = \frac{1}{k}$ ist die »statische Ringwaagenkonstante«. Sie gibt den im Bogenmaß gemessenen Winkel an, um den der Ring ausschlägt, wenn man den in kg/m² gemessenen Differenzdruck 1 an ihn anlegt.

Die statischen Eichkurven der Ringwaage, $\varphi = f(\Delta p)$ sind Gerade, deren Neigungswinkel α durch die Größe der statischen Ringwaagenkonstante gekennzeichnet ist.

$$\frac{d(\varphi)}{d(\Delta p)} = \frac{F \cdot r_m}{G \cdot a} = \frac{1}{k} = K = \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \quad (3)$$

Bild 3 zeigt einige Eichkurven, wobei die Größe der Anhängegewichte als Parameter gewählt wurde.

4. Schwingungsgleichung.

Legt man an ein Galvanometer plötzlich eine Spannung bekannter Größe an, so stellt sich der Zeiger in einer bestimmten Zeit, die von der Größe der Dämpfung abhängig ist, auf seinen Sollwert ein, wie Bild 4 zeigt. Wenn man die Induktivität der Galvanometerspule so klein annimmt, daß man sie praktisch vernachlässigen kann, so zeigt die angelegte Spannung einen rechteckigen Verlauf.

Bei der Ringwaage liegen die Verhältnisse anders. Wenn sich an der Meßstelle der Druck nach einer rechteckig verlaufenden Funktion ändert, so ändert er sich im Innern der Ringwaagenkammer, da es sich hier um einen Ausgleichsvorgang handelt, nach einer Exponentialfunktion. Der Druck in der Ringkammer, der der Spannung am Galvanometer vergleichbar ist, erreicht seinen Endwert um so schneller, je kleiner die Strömungswiderstände der Rohrleitung sind, die das ein- bzw. ausströmende Medium zu überwinden hat. Wenn das Trägheitsmoment des Ringes mit J, der Dämpfungsfaktor mit k, das Rückführmoment mit D und das Moment der Druckkraft mit P bezeichnet wird, so lautet die Schwingungsdifferentialgleichung $\varphi = f(t)$ für den Fall, daß die Ringwaage von irgendeinem Ausschlag φ_0 in die Nullage zurückkehrt:

$$J \cdot \varphi^{\cdot\cdot} + k \cdot \varphi^{\cdot} + D \cdot \varphi = P \cdot e^{-z \cdot t} \quad \ldots \quad (4)$$

und für den Fall, daß sie von ihrer Nullage auf irgendeinen Ausschlag φ_0 geht:

$$J \cdot \varphi^{\cdot\cdot} + k \cdot \varphi^{\cdot} + D \cdot \varphi = P \cdot (1 - e^{-z \cdot t}) \quad . . \quad (4a)$$

Der Exponent z der Störungsfunktion ist vom Strömungswiderstand der Rohrleitung und vom Volumen der Ringwaagenkammer abhängig; er wird später noch genauer erläutert werden.

Wir dividieren die Gl. (4) und (4a) durch J und setzen

$$\frac{k}{J} = 2p; \; \frac{D}{J} = \omega_0^2 \text{ und } \frac{P}{J} = P_0;$$

dann lauten sie:

$$\varphi^{\cdot\cdot} + 2p \cdot \varphi^{\cdot} + \omega_0^2 \cdot \varphi = P_0 \cdot e^{-z \cdot t} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

bzw.

$$\varphi^{\cdot\cdot} + 2p \cdot \varphi^{\cdot} + \omega_0^2 \cdot \varphi = P_0 \cdot (1 - e^{-z \cdot t}) \quad . . \quad (5a)$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung setzt sich aus der Lösung der homogenen und der der inhomogenen zusammen. Sie lautet für Gl. (5)

$$\varphi = \varphi_{\text{homog.}} + \varphi_{\text{inhomog.}}$$

$$\varphi = C \cdot e^{-p \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi) + \frac{P_0}{z^2 - 2pz + \omega_0^2} \cdot e^{-zt} \quad (6)$$

Die willkürlichen Konstanten C und ψ ergeben sich aus den Randbedingungen. Sie lauten für Gl. (5): zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi^{\cdot} = 0$. Der Ausdruck

$$\frac{P_0}{z^2 - 2pz + \omega_0^2}$$

ergibt sich zu φ_0. Dann ist:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \frac{z}{\omega_0} \cdot e^{-pt} \cdot \sin \omega_0 t + \varphi_0 \cdot e^{-zt} \quad \ldots \quad (7)$$

Für die Gl. (5a) lauten die Randbedingungen: zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi = 0$ und $\varphi^{\cdot} = 0$. Mithin lautet die Lösung:

$$\varphi = \varphi_0 - \varphi_0 \cdot \frac{z}{\omega_0} \cdot e^{-pt} \cdot \sin \omega_0 t - \varphi_0 \cdot e^{-zt} \quad . . \quad (8)$$

Bild 5 zeigt den Verlauf der Bahnkurven $\varphi = f(t)$. Daraus geht hervor, daß die Bewegung des Ringes im wesentlichen durch den Verlauf der Exponentialfunktion bestimmt wird. Dieser überlagert sich die Eigenschwingung des Ringes in Form einer gedämpften sin-Schwingung. Ihre Amplitude

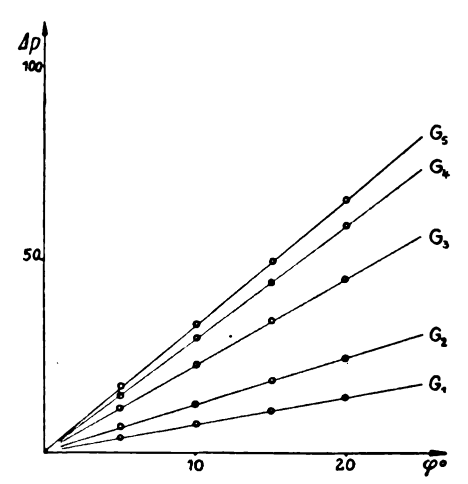


Bild 3. Eichkurven der Ringwaage $\Delta p = f(\varphi)$ bei verschiedenen Anhängegewichten.

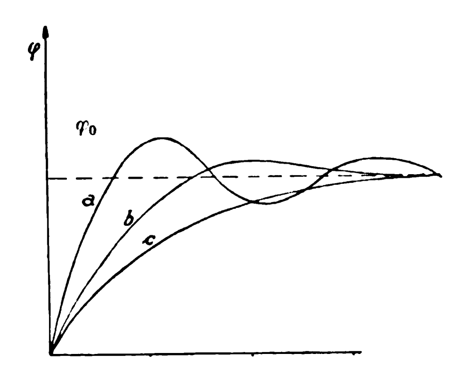


Bild 4. Einschwingvorgang eines Galvanometers bei verschiedenen Dämpfungen.

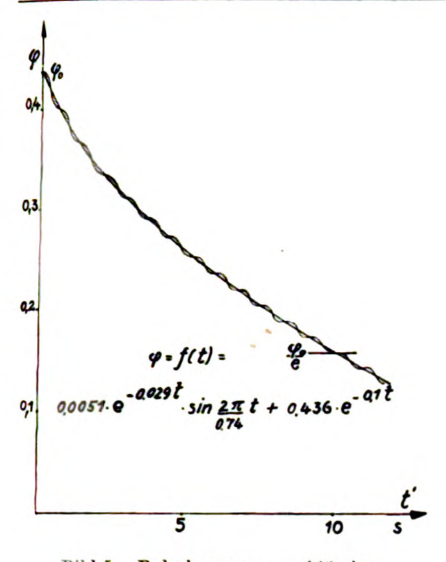


Bild 5. Bahnkurven $\varphi = f(t)$ der Ringwaage.

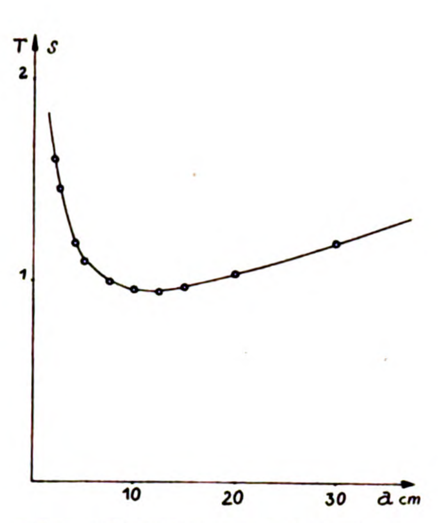


Bild 6. Schwingdauer T in Abhängigkeit vom Abstand a des Anhängegewichtes G.

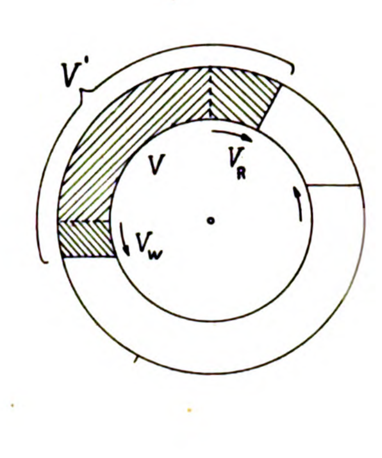


Bild 7. Schematische Darstellung der in die Ringwaage einströmenden Volumina.

ist gleich $\frac{z}{\omega_0}\cdot$ Um möglichst günstige Anzeigeverhältnisse zu bekommen, wäre bei großem Rückführmoment eine möglichst kleine Schwingungsdauer bei kleinstem Trägheitsmoment des Ringes anzustreben. Da die genannten Größen jedoch voneinander abhängig sind, wird man immer auf eine Kompromißlösung angewiesen sein. Aus der Differentiation der Gleichung für die Schwingungsdauer $T = 2\pi \cdot \sqrt{J/D}$ ergibt sich für ein bestimmtes Trägheitsmoment des Ringes J und ein bestimmtes Anhängegewicht G ein günstigster Abstand a des Gewichtes mit der Masse m vom Drehpunkt, bei dem die Schwingungsdauer ein Minimum ist:

$$a_{\text{opt.}} = \sqrt{\frac{J_{\text{Ring}}}{m_{\text{Gew.}}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Bild 6 zeigt die Schwingungsdauer in Abhängigkeit vom Schwerpunktsabstand des Anhängegewichtes bei unveränderlicher Größe desselben.

5. Trägheit.

Es sei wiederum angenommen, daß der eine Anschlußnippel über eine Rohrleitung von der Länge l und vom Durchmesser $2r$ mit der Meßstelle verbunden ist, während der andere Nippel in die umgebende Luft mündet. Das bedeutet, daß sein Strömungswiderstand gegenüber dem der Rohrleitung vernachlässigt werden kann.

Bei einer plötzlichen Druckänderung an der Meßstelle hat die ein- bzw. ausströmende Luft- oder Gasmenge den Strömungswiderstand der Rohrleitung zu überwinden und es verstreicht erst eine bestimmte Zeit, bis der Druck in der Ringkammer die gleiche Größe erreicht hat, wie der an der Meßstelle.

Für die normalen bei der Ringwaage auftretenden Betriebsdrucke kann der Strömungsvorgang in der Rohrleitung als laminar angesehen werden. Demzufolge gehorcht er dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz; es ist dann die sekundliche Menge

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\cdot \Delta p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Ein Vergleich mit einem elektrischen Stromkreis, bei dem die Potentialdifferenz U durch einen Leiter vom Widerstand R den Strom J treibt, zeigt, daß die Formel (10) den gleichen Aufbau besitzt. Dann entspricht der Druck Δp der Spannung U, die Menge Q dem Strom J und der Ausdruck $\frac{8\eta l}{\pi r^4}$ dem Widerstand R. Demzufolge ist der Strömungswiderstand

$$R^* = \frac{8\eta l}{\pi r^4}\cdot\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{s}}{\text{m}^5}\right)^{1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Er ist der Länge direkt und der vierten Potenz des Radius der Rohrleitung umgekehrt proportional.

Das Ein- bzw. Ausströmen der Luft oder des Gases in die Ringkammer und die dadurch bedingte Druckerhöhung bzw. -erniedrigung ist mit der Ladung eines Kondensators vergleichbar. Man kann also der Ringwaage eine Kapazität C^* zuordnen, die folgendermaßen definiert ist:

$$C^* = -\frac{dV}{dp} = \frac{V}{\varkappa\, p_0}\left(\frac{\text{m}^2}{\text{kg}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Hierin ist V der Volumen der Ringkammer, $\varkappa = 1{,}4$ der Exponent der Adiabate und $p_0 = 10000\ \text{kg/m}^2$ der statische Druck der Luft.

Bei langsam verlaufenden Ausgleichsvorgängen kann $\varkappa = 1$ gesetzt werden, bei schnell veränderlichen Vorgängen muß $\varkappa = 1{,}4$ eingesetzt werden.

Infolge des Ausweichens der Sperrflüssigkeit und der Drehung des Ringes treten zusätzliche Volumenänderungen auf, wie Bild 7 zeigt, die bei der Berechnung der Kapazität mitberücksichtigt werden müssen. Sie werden durch die Einführung eines Ersatzvolumens V^* erfaßt, das im folgenden berechnet werden soll. Zu diesem Zweck sei angenommen, daß an der Meßstelle ein Überdruck Δp herrscht und daß demzufolge ein bestimmtes Luftvolumen ΔV in die Ringwaagenkammer einströmt; im Inneren der Kammer, deren Volumen V beträgt, herrscht vor dem Ausgleich der Druckdifferenz der Druck p_0.

Infolge des Ausweichens der Sperrflüssigkeit wird der Raum $V_w = F\cdot h$ freigegeben, der zunächst einmal mit der Luft vom Druck p_0 aufgefüllt werden muß. Infolge der Drehung des Ringes wird der Raum $V_R = F\cdot r_m\cdot\varphi$ freigegeben, der ebenfalls mit Luft vom Druck p_0 aufgefüllt werden muß. Außerdem muß noch ein Luftvolumen V' einströmen, damit in dem gesamten jetzt vorhandenen Raum der Druck $p_0 + \Delta p$ herrscht.

$$\Delta V = V_w + V_R + V'.$$

Mithin ergibt sich das insgesamt einströmende Luftvolumen:

$$\Delta V = V_w + V_R + \frac{\Delta p}{p_0}\cdot(V + V_w + V_R) \quad \ldots \quad (13)$$

Das Ersatzvolumen V^* ist definiert durch die Antwort auf die Frage: Ein wie großes Volumen muß ein Gefäß mit »fester Wand« haben, in welchem nach dem Einströmen der Luftmenge ΔV der Überdruck Δp herrscht?

Es muß die Größe

$$V^* = \frac{p_0}{\Delta p}\cdot\Delta V = \frac{p_0}{\Delta p}\cdot(V_w + V_R) + V + V_w + V_R \quad (14)$$

haben. Das Ersatzvolumen V^* gibt also an, wie groß das Volumen eines Gefäßes mit »fester Wand« sein muß, damit

[1]) s. W. Oppelt und F. Wenke, Theoretische Betrachtung des Luftdruckvariometers und Richtlinien für Entwurf und Prüfung, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 10, S. 537.

in ihm beim Einströmen eines Volumens ΔV derselbe Überdruck Δp herrscht wie in einem Gefäß mit »nachgiebiger Wand«, als das die Ringwaage zu betrachten ist.

Dann ist die Kapazität der Ringwaage:

$$C^* = -\frac{d V^*}{d p} = \frac{V^*}{\varkappa p_0} \left(\frac{m^2}{kg}\right)^{2)}, \quad . \; . \; . \; . \; (15)$$

daraus läßt sich entnehmen, daß Meßgeräte, die eine »nachgiebige Wand« besitzen, wie es ja auch bei den zur Staudruckmessung benutzten Membrangeräten der Fall ist, eine außerordentliche Vergrößerung der Kapazität gegenüber solchen mit »fester Wand« aufweisen. Bei der Ringwaage ist diese Erscheinung viel stärker ausgeprägt als bei Membranmeßgeräten; das geht aus folgendem Beispiel hervor. Eine von mir untersuchte Membrandose eines Fahrtmessers besaß bei einem Volumen von 12,5 cm³ eine Kapazität von 44,5 $\cdot 10^{-10}$ m⁵/kg, während die untersuchte Ringwaage bei einem Volumen von 250 cm³ eine Kapazität von 2,05 $\cdot 10^{-6}$ m⁵/kg hatte. Während sich die Volumen der Geräte etwa wie 1:20 verhalten, verhalten sich ihre Kapazitäten etwa wie 1:460.

So wie man bei einem elektrischen Ausgleichsvorgang von einer Zeitkonstanten spricht, die angibt, nach welcher Zeit irgendeine Größe auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes abgefallen ist bzw. nach welcher Zeit sie sich ihrem Sollwert bis auf den e-ten Teil genähert hat, so kann man auch dem pneumatischen Vorgang des Druckausgleiches eine solche Zeitkonstante zuordnen.

Das Einströmen der Luft durch die Rohrleitung in den Ring ist mit der Aufladung eines Kondensators über einen Widerstand vergleichbar; dem Ausströmen entspricht eine Entladung.

Ein derartiger Kondensatorkreis ist durch seine Zeitkonstante $t' = R \cdot C$ gekennzeichnet. In gleicher Weise ergibt sich die »pneumatische Zeitkonstante« zu

$$t' = R^* \cdot C^* \,(\mathrm{s}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

die als »die Trägheit« der Ringwaage bezeichnet werden soll. Sie ist ein Maß dafür, wie schnell sich der Ausgleichsvorgang vollzieht und sie ist um so größer, je länger und je enger die verbindende Rohrleitung ist je größer das Ringwaagenvolumen ist.

In den meisten Fällen werden beide Ringwaagenkammern durch je eine Rohrleitung von gleichen Dimensionen mit der Meßstelle verbunden sein. Die Wirkung ist so, als ob beide Rohrleitungen hintereinandergeschaltet wären, so daß sich ihre Widerstände addieren. Für die in Parallelschaltung liegenden Kapazitäten gilt dasselbe. Die Trägheit ist dann

$$t' = 2\, R^* \, C^* \,(\mathrm{s}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

²) s. W. Kerris, Einfluß der Rohrleitung bei der Messung periodisch schwankender Drucke. Erscheint demnächst.

Sind die Rohrleitungen jedoch verschieden und ist die Ringwaage unsymmetrisch, so ist für jede Kammer gesondert die pneumatische Zeitkonstante zu bilden und beide zu addieren.

Die Kenntnis der »Trägheit« ermöglicht es, die einzelnen Geräte untereinander zu vergleichen; sie ist also ein Maß für die Güte des betreffenden Gerätes.

Bild 8 zeigt die gerechneten und gemessenen Trägheiten in Abhängigkeit vom Rohrleitungswiderstand. Die Meßpunkte weichen nur wenig von den gerechneten Werten ab.

Bei dem hier vorliegenden Ausgleichsvorgang wird eine dritte Größe, die Massenträgheit des strömenden Mediums, nicht berücksichtigt. Sie tritt nur bei periodischen Vorgängen in Erscheinung. Die Massenträgheit ist elektrisch mit der Induktivität vergleichbar; sie ist folgendermaßen definiert:

$$L^* = \frac{\varrho\, l}{F} = \frac{\varrho \cdot l}{r^2 \pi} \left(\frac{kg\, s^2}{m^5}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Hierin ist ϱ die Dichte des strömenden Mediums, r der Radius und l die Länge der Rohrleitung.

Die Trägheit wächst mit dem Widerstand R^*; eine obere Grenze hat sie nicht, wohl aber eine untere. Macht man den Widerstand R^* sehr klein, so kann der Ring der Druckänderung infolge seiner Massenträgheit nicht mehr folgen. Die untere Grenze ist dann durch die Schwingungsdauer des Ringes gegeben.

Um den Einfluß der Trägheit auf den Meßvorgang zu veranschaulichen, sei angenommen, daß der an der Meßstelle auftretende Meßvorgang einem rechteckförmigen Funktionsverlauf entspricht. Aus Bild 9 geht hervor, daß die Amplitude des Vorganges nur dann richtig vom Anzeigeinstrument wiedergegeben wird, wenn er mindestens 4 bis 5 Zeitkonstanten dauert. Nach etwa 5 Zeitkonstanten hat sich die Amplitude ihrem Endwert auf etwa 0,67% genähert, hat diesen also praktisch erreicht. Ist die Dauer des zu messenden Vorganges kürzer als 5 Zeitkonstanten, so ist die Amplitude entsprechend verfälscht; sie bleibt hinter dem Endwert um so mehr zurück, je kürzer der betreffende Vorgang ist. Aus Bild 9 kann man für die Amplitude bei bekannter Zeitkonstante t' und bekannter Dauer des Vorganges t folgende Beziehung ableiten.

$$A_t = A_{\max} \cdot \left(1 - \frac{1}{n \cdot e}\right),$$

wenn t in n Vielfachen von t' gemessen wird und $e = 2{,}718$ ist. Daraus folgt:

$$A_{\max} = \frac{e \cdot n}{e \cdot n - 1} \cdot A_t{}^{3)}.$$

³) s. H. Weidemann, Zur Trägheit von Staudruckanlagen; Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 7, S. 211.

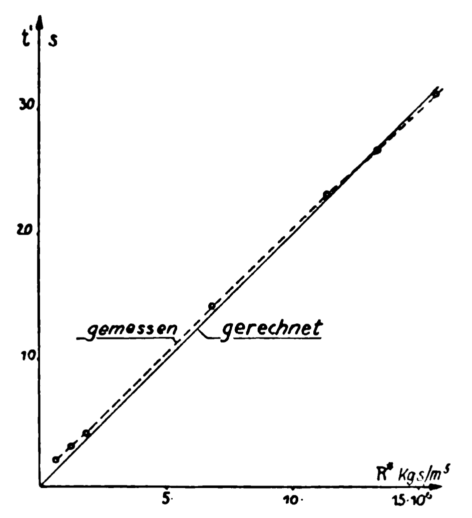


Bild 8. Trägheit t' in Abhängigkeit vom Rohrleitungswiderstand R^*.

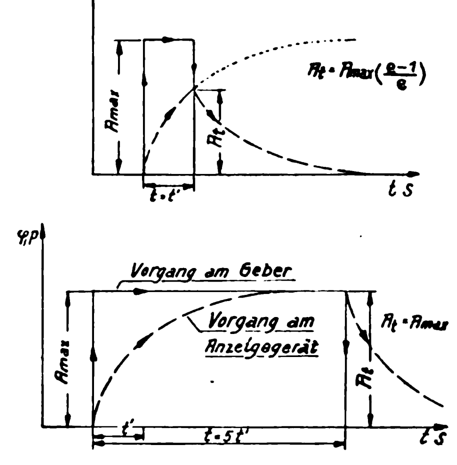


Bild 9. Verlauf eines Drucksprunges an der Meßstelle und am Anzeigegerät.

Der als Trägheit bezeichnete Ausdruck $t' = R^* \cdot C^*$ tritt in der Schwingungsgleichung (4) als Exponent auf; es ist also:

$$z = 1/R^* \cdot C^* \, (s^{-1}).$$

6. Elektrisches Ersatzschema der Ringwaage.

In der technischen Schwingungslehre ist die Ersetzung irgendwelcher mechanischer Schwingungsgebilde durch analoge elektrische vielfach mit Erfolg angewandt worden, zumal die Lösungen der elektrischen Schwingungsdifferentialgleichungen alle bekannt sind.

Bereits im vorigen Kapitel wurden bei der Definition des Widerstandes R^*, der Kapazität C^* und des Trägheitswertes L^* die entsprechenden elektrischen Größen zum Vergleich herangezogen.

Es läßt sich demnach für die Ringwaage folgendes elektrisches Ersatzschema angeben. Ein Kondensator von der Kapazität C^* lädt oder entlädt sich über den Widerstand R^*. Parallel zu dem Kondensator liegt ein zweiter Schwingungskreis, dessen Elemente durch die Daten des Ringes bestimmt sind. Die Induktivität L' dieses Schwingungskreises ist durch das Trägheitsmoment des Ringes, der Widerstand R' durch die Schneidenreibung und die Reibung mit der Außenluft und die Kapazität C' durch das Rückführmoment bestimmt, wie Bild 10 zeigt. Die Sperrflüssigkeit, die bei den handelsüblichen Ringwaagen der direkten Beobachtung nicht zugänglich ist, ist hierbei nicht berücksichtigt. Sowohl die Ladung als auch die Entladung des Kondensators C^* über den Widerstand R^* erfolgt nach einer Exponentialfunktion, der sich die Eigenschwingung des Schwingungskreises (R', C', L') überlagert.

Es können zwei Grenzfälle auftreten. Einmal kann z. B. nach erfolgter Aufladung die Rohrleitung geschlossen werden. Das ist gleichbedeutend mit $R^* = \infty$. Dann sind C^* und C' hintereinandergeschaltet. Ein Energieverbrauch findet dann lediglich in R' statt, d. h. nur die Schneiden und Luftreibung wirken energieverzehrend. Wenn also der Ring um eine durch die jeweilige Größe der Aufladung bestimmte Lage Schwingungen ausführt, so sind diese nur schwach gedämpft.

Zum anderen kann man den Ring arretieren; das entspricht einer Abschaltung des Schwingungskreises. Dann liegt eine einfache Kondensatorladung oder Entladung vor, deren Berechnung keine Schwierigkeiten macht.

7. Dämpfung.

Aus den Gl. (6) und (7) im Kapitel 4 ist zu entnehmen, daß die Amplitude der Eigenschwingung des Ringes mit wachsender Zeit t abnimmt.

Man kann die Größe der Dämpfung entweder aus der ersten Überschwingung ermitteln oder aber nach der folgenden Methode.

Das logarithmische Dekrement zweier gleichsinning aufeinanderfolgender Ausschläge ist:

$$\Lambda = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_n + 2} = e^{p\,T}.$$

Klingt die Anfangsamplitude φ_n nach m ganzen Schwingungen auf die Größe φ_n/e ab, so ist

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_n + 2\,m} = e^{m \cdot p \cdot T} = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Folglich ist

$$\ln e = 1 = p \cdot m\,T = \Lambda \cdot m.$$

Mithin ergibt sich für den Dämpfungsfaktor:

$$p = \Lambda/T = 1/m\,T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Man braucht nur die Anzahl der ganzen Schwingungen zu kennen, nach der die Anfangsamplitude φ_n auf den e-ten Teil abfällt; daraus läßt sich der Dämpfungsfaktor errechnen. Für den Dämpfungsgrad gilt dann $\alpha = \frac{1}{2}$ m.

Einfluß auf die Dämpfung haben die Schneidenreibung, die Luftreibung und der Strömungswiderstand der Rohrleitung.

Der Versuch zeigt, daß der Strömungswiderstand einen großen Einfluß auf die Dämpfung hat. Er ist am größten, wenn der Widerstand klein ist. Das mutet zunächst merkwürdig an, doch das folgende Experiment klärt die Zweifel.

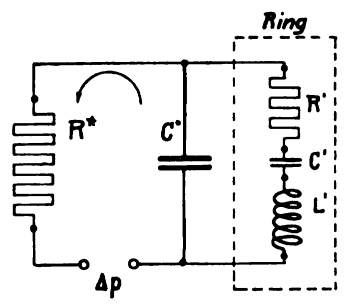


Bild 10. Elektrisches Ersatzschema der Ringwaage.

Der in Ruhe befindliche Ring wird mechanisch um einen bestimmten Winkel, der so gewählt wird, daß die Sperrflüssigkeit noch als ruhend angenommen werden kann, ausgelenkt. Die Auslenkung erfolge etwa in Form eines Stoßes. Dann herrscht in der Ringkammer infolge der relativen Bewegung der Trennfläche zur Sperrflüssigkeit ein sin-förmig schwankender Druck. Ist nun der Rohrleitungswiderstand sehr groß, so kann während einer Schwingung nur eine verschwindend kleine Luftmenge durch die Rohrleitung ein- bzw. ausströmen. Etwaige dadurch bedingte Energieverluste bleiben klein. Es tritt nur die Schneiden- und Luftreibung in Erscheinung, so daß die Dämpfung in diesem Fall nur gering ist.

Anders ist es, wenn der Ring offen ist, wenn also keine Rohrleitung angeschlossen ist und als Strömungswiderstand nur der in den Anschlußnippeln in Erscheinung tritt. Wird der Ring wieder durch plötzliches Anstoßen und Auslenken um den gleichen Winkel in Schwingungen versetzt, so kann der sin-förmig schwankende Druck nicht den Betrag erreichen wie beim vorigen Versuch, weil durch die Nippel ein Druckausgleich mit der Außenluft stattfindet. Infolge des kleinen Strömungswiderstandes strömen weit größere Luftmengen ein und aus. Die dadurch bedingten Energieverluste bedingen eine $2\frac{1}{2}$fache Vergrößerung der Dämpfung. Bild 11 zeigt die Abhängigkeit der Dämpfung vom Rohrleitungswiderstand.

Wenn oben die Einschränkung gemacht wurde, den Winkelausschlag des Ringes so zu wählen, daß die Sperrflüssigkeit als in Ruhe befindlich angesehen werden kann, so ist hier zu beachten, daß bei Verwendung eines großen Strömungswiderstandes, d. h. bei geringer Dämpfung, die Sperrflüssigkeit im Laufe der Zeit durch die Reibung zwischen Ringwand und Flüssigkeit mitgenommen wird, so daß sie mit dem Ring synchrom mitschwingt.

8. Einfluß periodischer Druckschwankungen.

Wenn man an die Ringwaage einen periodisch veränderlichen Druck $p = p_0 \cdot \sin \nu t$ anlegt, so kann man an ihr die gleichen Erscheinungen beobachten, die an einem mit Wechselstrom beschickten Drehspulgalvanometer auftreten.

Unter Zuhilfenahme des elektrischen Ersatzschemas ergibt sich, daß der Kondensator C^* über den Widerstand R^*

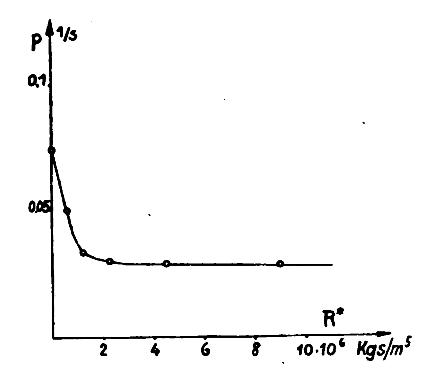


Bild 11. Dämpfungsfaktor p in Abhängigkeit vom Rohrleitungswiderstand R^*.

an dem Wechseldruck $p = p_0 \cdot \sin \nu t$ liegt. Es sei wiederum angenommen, daß die Rohrleitung lang und eng ist, so daß die der Induktivität entsprechende Massenträgheit L^* der Luftteilchen vernachlässigt werden kann. Dann ist für die Bewegung des Ringes der in der Ringkammer herrschende Druck maßgebend.

Seine Amplitude ist:

$$p_c = \frac{p_0}{\nu C^* \sqrt{R^{*2} + \frac{1}{\nu^2 C^{*2}}}} = \frac{p_0}{\sqrt{\nu^2 \cdot C^{*2} \cdot R^{*2} + 1}}$$

seine Phasenverschiebung

$$\operatorname{tg} \psi = -\nu C^* R^*.$$

Die Schwingungsgleichung lautet für diesen Fall

$$J \cdot \varphi^{\cdot\cdot} + k \cdot \varphi^{\cdot} + D \cdot \varphi = \frac{P}{\sqrt{\nu^2 \cdot C^{*2} \cdot R^{*2} + 1}} \cdot \sin \nu t.$$

Man erkennt, daß die Ausschläge des Ringes mit wachsender Erregerfrequenz ν immer kleiner werden, da er infolge seiner Massenträgheit dem erregenden Druck nicht mehr folgen kann. Lediglich wenn die erregende Frequenz ν mit der Eigenfrequenz ω_0 des Ringes zusammenfällt, ist eine Vergrößerung seines Ausschlages zu erwarten. Während der Druck im Inneren der Ringkammer bereits eine Phasenverschiebung ψ gegenüber dem erregenden Druck an der Meßstelle aufweist, hinkt der Ring seinerseits wieder hinter dem Druck im Ringinneren in der Phase nach. Es addieren sich also hier zwei Einflüsse.

Noch verwickelter werden die Verhältnisse, wenn man die Induktivität L^* der Rohrleitung in Rechnung setzt. Dann ist die im Ring befindliche Luftmasse als ein pneumatischer Schwingungskreis zu betrachten, der eine besondere Eigenfrequenz hat. Es können also infolge von Resonanzerscheinungen besonders große Drucke in der Ringkammer auftreten, die die Messung verfälschen. Außerdem kann auch noch der Ring in seiner Eigenfrequenz erregt werden. Für die Phasenverschiebungen gilt das oben Gesagte.

Hieraus kann man entnehmen, daß die Ringwaage zur Messung von periodisch veränderlichen Drucken nicht sonderlich geeignet ist. Bei ihrer Verwendung als Böenregistriergerät dürfte das besonders stören.

9. Zusammenfassung.

Außer der bereits bekannten Momentengleichung (2) wird die Schwingungsgleichung der Ringwaage (4) aufgestellt, die Aufschluß über die Bewegung des Ringes in Abhängigkeit von der Zeit gibt. Als Exponent des Störungsgliedes der Schwingungsgleichung tritt die »Trägheit« des Gerätes in Erscheinung. Diese ist ein Zahlenwert, der sich lediglich aus den geometrischen Abmessungen der Ringwaage und der sie mit der Meßstelle verbindenden Rohrleitung errechnen läßt. Er stellt gleichzeitig ein Maß für die Güte des Gerätes dar und gestattet, diese untereinander zu vergleichen. Mit Hilfe eines elektrischen Ersatzschemas, das man für die Ringwaage angeben kann, lassen sich Verhältnisse besonders übersichtlich gestalten. Eine kurze Betrachtung über den Einfluß von veränderlichen Drücken zeigt, daß die Ringwaage beispielsweise in ihrer Eigenschaft als Böenregistriergerät den gestellten Anforderungen nicht genügt, daß sie in ihrer Anzeige sowohl in der Amplitude als auch in der Phase hinter schnell veränderlichen Vorgängen zurückbleibt, zumal in der Luftfahrtmeßtechnik beispielsweise die Böenspitzen für die Festigkeitsberechnung der Flugzeuge eine besondere Rolle spielen.

10. Schrifttum.

1. ATM, V 1244—1. ATM, J 1233—3. ATM, J 1233—4.
2. E. Schmidt, Messung kleiner Druckunterschiede bei hohen absoluten Drucken. Z. VDI Bd. 80 (1936), S. 635.
3. W. Oppelt u. F. Wenke, Theoretische Betrachtung des Luftdruckvariometers und Richtlinien für Entwurf und Prüfung. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), Lfg. 10, S. 537.
4. W. Kerris, Braunschweig, Einfluß der Rohrleitung auf die Messung periodisch schwankender Drucke. Erscheint demnächst.
5. E. Steinhoff, Ein Beitrag zur Steiggeschwindigkeitsmessung. Erscheint demnächst.
6. H. Weidemann, Zur Trägheit von Staudruckanlagen. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 7, S. 211.
7. R. Witte, Mengen- und Mengenstrommeßverfahren in chemischen und verwandten Betrieben. Die Chemische Fabrik Bd. 11 (1938), Nr. 19/20, S. 229.
8. G. Wünsch und H. Bühle, Meßgeräte im Industriebetrieb. J. Springer, Berlin 1936.
9. L. Zipperer, Technische Schwingungslehre. W. de Gruyter u. Co., Berlin 1927.
10. R. Rüdenberg, Elektrische Schaltvorgänge. J. Springer, Berlin 1933.
11. F. Trendelenburg, Einführung in die Akustik. J. Springer, Berlin 1939.
12. O. Werner, Empfindliche Galvanometer. W. de Gruyter u. Co., Berlin 1928.

Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren.

Von A. Kimmel.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Es wird ein einfaches Rechenverfahren angegeben, mit dem unter weitgehender Anwendung vertafelter Beiwerte die erregenden Dreh- und Biegekräfte (Gas- und Massenkräfte) für den Fall der unmittelbaren (zentrischen) Anlenkung der Pleuelstange mit sehr kleinem Rechenaufwand ermittelt werden können. Für die Harmonischen der Gasbiegekräfte wird eine Schaulinie angegeben, die für die gebräuchlichen Ottomotoren allgemein verwendet werden kann.

Gliederung.

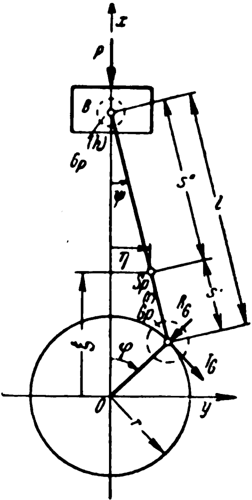


Bild 1. Kurbeltrieb. Ermittlung der erregenden Gaskräfte.

I. Einleitung.

1. Anlaß, Zweck und Umfang der Untersuchungen.

Bei den neuzeitlichen Flugmotorenbauarten ist es erforderlich, die Untersuchung der Schwingungserregung auch auf die höheren Erregerharmonischen auszudehnen. Eingehende rechnerische Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Sternmotoren unter Berücksichtigung der mittelbaren (exzentrischen) Anlenkung der Nebenpleuelstangen haben nun die Notwendigkeit ergeben, einen gegenüber den bisher zumeist üblichen Rechenverfahren einfacheren Lösungsweg zu entwickeln, mit dem auch die erregenden Kräfte höherer Ordnung noch mit tragbarem Rechenaufwand ermittelt werden können.

Dieser Lösungsweg besteht darin, daß man zunächst die gesamten Bewegungsverhältnisse des Kurbeltriebs — wie es bei der Untersuchung des Massenausgleichs von Kolbenmaschinen schon seit längerer Zeit üblich ist[1]) — unter ausschließlicher Verwendung von Fourierreihen darstellt. Eine weitere Vereinfachung des Rechnungsgangs wird dadurch erreicht, daß man zur Berechnung sämtlicher Dreh- und Biegekraftanteile nicht die üblichen Kräftezerlegungen durchführt, sondern die Arbeitsgleichung verwendet[2]). Diese besagt, daß die von den Gas- und Trägheitskräften an die einzelnen Triebwerksteile auf dem zugehörigen Wegelement abgegebene Arbeit gleich der vom Hubzapfen auf dem zugeordneten Wegelement aufgenommenen sein muß.

Durch Verwendung dieses Rechenverfahrens ist ein enger Anschluß an die Untersuchungen des Massenausgleichs von Kolbenmaschinen hergestellt. So können beispielsweise gewisse dort verwendete und in Tafeln zusammengestellte Beiwerte unverändert übernommen werden; einige neue Beiwerte können leicht aus ihnen hergeleitet werden.

Das Rechenverfahren führt schließlich zu Endformeln, die es ermöglichen, die erregenden Dreh- und Biegekräfte verschiedener Ordnung mittels beigegebener Zahlentafeln mit kleinstem Rechenaufwand anzuschreiben.

Die vorliegenden Untersuchungen, die zunächst das Rechenverfahren erläutern sollen, beschränken sich auf den Fall der unmittelbaren (zentrischen) Anlenkung des Pleuels (Einzylindermotor bzw. Triebwerk des Hauptzylinders bei Sternmotoren) sowie auf die Aufstellung der Beiwertetafeln zur Berechnung der Dreh- und Biegekräfte. Außerdem wird der Verlauf der Dreh- und Biegekräfte an Hand zweier Beispiele eingehend erörtert.

Die Vorteile des Rechenverfahrens treten bei der Berechnung der erregenden Dreh- und Biegekräfte für Sternmotoren bei mittelbarer Anlenkung des Nebenpleuels noch mehr hervor. Über diese Untersuchungen soll später gesondert berichtet werden.

2. Die Kinematik des Kurbelgetriebes.

a) Die Bewegung des Kolbens. Bedeutet x die Koordinate des Kolbenbolzens B vom Punkt O aus, so gilt mit den aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnungen

$$x = r\cos\varphi + l\cos\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und nach dem Sinussatz

$$\sin\psi : \sin\varphi = r : l$$

oder

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi = \lambda\sin\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wo $\lambda = \frac{r}{l}$ das Schubstangenverhältnis bedeutet. Aus (2) folgt sofort

[1]) Vgl. z. B. P. Riekert, Der Massenausgleich von Reihenmotoren, insbesondere für die Glieder höherer Ordnung. Diss. Stuttgart 1928. — C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939.

[2]) Die Verwendung der Arbeitsgleichung zur Ermittlung der Gasdrehkraft ist bekannt. Wie nach Abschluß der vorliegenden Untersuchungen bekannt wurde, wird die Arbeitsgleichung auch von K. Tanaka [Rep. aeron. Res. Inst., Tokio Bd. 1 (1925), Nr. 10], jedoch lediglich für die Drehkräfte, benützt.

$$\cos\psi = (1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)^{1/2} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (1), wenn man sofort nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$x = r\cos\varphi + l\,(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi)^{1/2}$$

$$= r\left(\frac{1}{\lambda} + \cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi - \frac{\lambda^3}{8}\sin^4\varphi - \frac{\lambda^5}{16}\sin^6\varphi - \ldots\right).$$

Formt man die Potenzen von $\sin\varphi$ in bekannter Weise in Winkelfunktionen des vielfachen Winkels um, so wird schließlich

$$x = r\left(A_0 + \cos\varphi + \frac{A_2}{4}\cos 2\varphi + \frac{A_4}{16}\cos 4\varphi + \frac{A_6}{36}\cos 6\varphi + \ldots\right) \quad (3)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64}\lambda^3 - \frac{5}{256}\lambda^5 - \ldots \\ A_2 &= \lambda + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{15}{128}\lambda^5 + \ldots \\ A_4 &= -\frac{\lambda^3}{4} - \frac{3}{16}\lambda^5 - \ldots \\ A_6 &= \frac{9}{128}\lambda^5 + \ldots; \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

der allgemeine Ausdruck lautet

$$A_{2\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^{k-\nu}\, 4\nu^2 \binom{\frac{1}{2}}{k}\binom{2k}{k-\nu}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \quad \ldots (4)$$

Aus (3) folgt durch Differentiation nach der Zeit t die Kolbengeschwindigkeit $\left(\text{mit der üblichen Abkürzung } \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$

$$\dot{x} = -r\omega\left(\sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin 2\varphi + \frac{A_4}{4}\sin 4\varphi + \frac{A_6}{6}\sin 6\varphi + \ldots\right) \quad (5)$$

und durch nochmalige Differentiation unter Voraussetzung gleichförmiger Drehschnelle ω die Kolbenbeschleunigung

$$\ddot{x} = -r\omega^2(\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + A_4\cos 4\varphi + A_6\cos 6\varphi + \ldots). \quad (6)$$

Diese Beiwerte A_i werden in der Triebwerksmechanik insbesondere bei der Untersuchung des Massenausgleichs von Kolbenmaschinen mehrfach verwendet[3]). Sie wurden daher bereits früher vertafelt. Für den praktisch vorkommenden Bereich der Schubstangenverhältnisse λ wurden sie jedoch in erweiterter Form berechnet und in Zahlentafel 1 wiedergegeben.

In dieser, sowie in den weiteren Zahlentafeln, schreiten die Eingangswerte λ in Stufen von 0,005 zu 0,005 fort. Zwi-

[3]) Dort sind die Größen A_i ein Maß für die in Richtung der Zylinderachse wirkenden freien Längskräfte i-ter Ordnung; siehe z. B. P. Riekert, a. a. O.

Zahlentafel 1. Beiwerte zur Kinematik des Kurbeltriebs.

λ	A_0	A_2	A_4	A_6	C_1	C_3	C_5	C_7
0,200	4,949619	0,202038	—0,002061	0,000024	1,005077	—0,015346	0,000196	—0,000002
0,205	4,826388	0,207197	—0,002224	0,000027	1,005338	—0,016142	0,000216	—0,000002
0,210	4,708962	0,212364	—0,002394	0,000030	1,005606	—0,016959	0,000239	—0,000003
0,215	4,596938	0,217540	—0,002574	0,000034	1,005881	—0,017799	0,000263	—0,000004
0,220	4,489945	0,222724	—0,002762	0,000039	1,006163	—0,018660	0,000289	—0,000004
0,225	4,387649	0,227917	—0,002960	0,000043	1,006451	—0,019543	0,000317	—0,000005
0,230	4,289743	0,233120	—0,003167	0,000048	1,006747	—0,020448	0,000347	—0,000005
0,235	4,195946	0,238331	—0,003385	0,000054	1,007050	—0,021376	0,000379	—0,000006
0,240	4,106003	0,243553	—0,003612	0,000060	1,007360	—0,022326	0,000413	—0,000007
0,245	4,019675	0,248784	—0,003850	0,000067	1,007677	—0,023299	0,000450	—0,000008
0,250	3,936748	0,254025	—0,004098	0,000074	1,008001	—0,024295	0,000489	—0,000009
0,255	3,857020	0,259277	—0,004358	0,000082	1,008333	—0,025314	0,000531	—0,000010
0,260	3,780306	0,264539	—0,004628	0,000091	1,008672	—0,026357	0,000576	—0,000012
0,265	3,706436	0,269812	—0,004911	0,000101	1,009018	—0,027423	0,000623	—0,000013
0,270	3,635252	0,275096	—0,005205	0,000111	1,009372	—0,028512	0,000673	—0,000015
0,275	3,566607	0,280391	—0,005511	0,000122	1,009732	—0,029626	0,000727	—0,000017
0,280	3,500364	0,285699	—0,005830	0,000134	1,010100	—0,030764	0,000783	—0,000019
0,285	3,436398	0,291019	—0,006162	0,000147	1,010476	—0,031926	0,000844	—0,000021
0,290	3,374591	0,296350	—0,006507	0,000161	1,010859	—0,033113	0,000907	—0,000023
0,295	3,314831	0,301694	—0,006865	0,000176	1,011250	—0,034324	0,000975	—0,000026
0,300	3,257018	0,307051	—0,007238	0,000192	1,011649	—0,035561	0,001046	—0,000029
0,305	3,201054	0,312420	—0,007624	0,000209	1,012055	—0,036823	0,001121	—0,000032
0,310	3,146851	0,317803	—0,008025	0,000228	1,012468	—0,038111	0,001201	—0,000035
0,315	3,094324	0,323200	—0,008441	0,000248	1,012890	—0,039424	0,001284	—0,000039
0,320	3,043395	0,328610	—0,008872	0,000269	1,013320	—0,040764	0,001373	—0,000043
0,325	2,993989	0,334035	—0,009319	0,000292	1,013757	—0,042130	0,001466	—0,000048
0,330	2,946037	0,339474	—0,009781	0,000317	1,014202	—0,043523	0,001564	—0,000053
0,335	2,899474	0,344928	—0,010261	0,000343	1,014656	—0,044943	0,001667	—0,000058
0,340	2,854239	0,350397	—0,010757	0,000371	1,015117	—0,046390	0,001776	—0,000064
0,345	2,810274	0,355882	—0,011270	0,000401	1,015586	—0,047865	0,001890	—0,000070
0,350	2,767523	0,361382	—0,011800	0,000433	1,016064	—0,049367	0,002010	—0,000076
0,355	2,725936	0,366898	—0,012349	0,000468	1,016551	—0,050898	0,002136	—0,000084
0,360	2,685464	0,372431	—0,012916	0,000504	1,017045	—0,052458	0,002268	—0,000092
0,365	2,646060	0,377981	—0,013503	0,000543	1,017548	—0,054046	0,002407	—0,000100
0,370	2,607682	0,383547	—0,014108	0,000584	1,018059	—0,055664	0,002552	—0,000109
0,375	2,570288	0,389131	—0,014733	0,000628	1,018579	—0,057311	0,002704	—0,000119
0,380	2,533839	0,394733	—0,015379	0,000674	1,019108	—0,058989	0,002864	—0,000130
0,385	2,498298	0,400352	—0,016046	0,000724	1,019646	—0,060697	0,003031	—0,000142
0,390	2,463630	0,405991	—0,016733	0,000776	1,020192	—0,062435	0,003206	—0,000154
0,395	2,429801	0,411649	—0,017443	0,000832	1,020747	—0,064205	0,003389	—0,000167
0,400	2,396781	0,417325	—0,018175	0,000890	1,021311	—0,066007	0,003581	—0,000182

schenwerte können ohne Schwierigkeit interpoliert werden. Die in den Tafeln wiedergegebenen Zahlenwerte sind mit einer die praktischen Bedürfnisse meist übersteigenden Genauigkeit angegeben. Und zwar wurden die Beiwerte A_i und die später eingeführten Beiwerte C_i, welche die Grundlage zur Herleitung weiterer Beiwerte bilden, mit größerer Genauigkeit berechnet als die übrigen. Bei allen anderen Beiwerten, wie überhaupt in der ganzen weiteren Untersuchung wurden nur Glieder bis zur Größe λ^6 einschließlich berücksichtigt.

b) Die Bewegung der Pleuelstange. Aus Bild 1 folgt für die Koordinaten des Schwerpunkts S_p der Pleuelstange

$$\xi = r\cos\varphi + s'\cos\psi$$

oder durch Vergleich mit den im vorigen Abschnitt (Ziff. 2a) angegebenen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\xi = \sigma' x + r(1-\sigma')\cos\varphi\\ &\text{mit der Abkürzung } \sigma' = \frac{s'}{l}\text{, und entsprechend unter Zuhilfenahme von (2)}\\ &\eta = \frac{r}{l}(l-s')\sin\varphi = r(1-\sigma')\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Daraus erhält man durch Differentiation nach der Zeit die Geschwindigkeitskomponenten des Pleuelschwerpunkts S_p

$$\text{und}\quad\left.\begin{aligned}\dot\xi &= \sigma'\dot x - r\omega(1-\sigma')\sin\varphi\\ \dot\eta &= r\omega(1-\sigma')\cos\varphi.\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(8)$$

Durch nochmalige Differentiation findet man die Beschleunigungskomponenten des Pleuelschwerpunkts zu

$$\left.\begin{aligned}\ddot\xi &= -\sigma' r\omega^2\Big(\frac{1}{\sigma'}\cos\varphi + A_2\cos2\varphi + A_4\cos4\varphi\\ &\qquad + A_6\cos6\varphi + \ldots\Big)\\ \ddot\eta &= -r\omega^2(1-\sigma')\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Den Drehwinkel ψ des Pleuels erhält man aus (2) unter Zuhilfenahme der arc sin-Reihe und nach Entwicklung in eine Fourierreihe zu

$$\psi = \lambda\Big(C_1\sin\varphi + \frac{C_3}{9}\sin3\varphi + \frac{C_5}{25}\sin5\varphi + \frac{C_7}{49}\sin7\varphi + \ldots\Big);\quad(10)$$

hieraus folgt

$$\dot\psi = \lambda\omega\Big(C_1\cos\varphi + \frac{C_3}{3}\cos3\varphi + \frac{C_5}{5}\cos5\varphi + \frac{C_7}{7}\cos7\varphi + \ldots\Big)\quad(11)$$

und

$$\ddot\psi = -\lambda\omega^2(C_1\sin\varphi + C_3\sin3\varphi + C_5\sin5\varphi + C_7\sin7\varphi + \ldots)\quad(12)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}C_1 &= 1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3}{64}\lambda^4 + \frac{25}{1024}\lambda^6 + \ldots\\ C_3 &= -\frac{3}{8}\lambda^2 - \frac{27}{128}\lambda^4 - \frac{135}{1024}\lambda^6 - \ldots\\ C_5 &= \frac{15}{128}\lambda^4 + \frac{125}{1024}\lambda^6 + \ldots\\ C_7 &= -\frac{35}{1024}\lambda^6 - \ldots;\\ &\;\vdots\\ &\text{der allgemeine Ausdruck lautet}\\ C_{2\nu-1} &= \sum_{k=\nu-1}^{\infty}(-1)^{k-\nu}\frac{(2k-1)(2\nu-1)^2}{k+\nu}\binom{1/2}{k}\binom{2k}{k-\nu+1}\Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^{2k}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Auch diese Beiwerte C_i[4]) sind wieder für alle praktisch vorkommenden Schubstangenverhältnisse berechnet und in Zahlentafel 1 zusammengestellt worden.

[4]) Die Beiwerte C_i werden ebenfalls in der Theorie des Massenausgleichs von Kolbenmaschinen verwendet. Die Bezeichnungen B_i und D_i sind bereits durch die Theorie des Massenausgleichs belegt; um Verwechslungen auszuschließen, wurden sie daher in der vorliegenden Arbeit vermieden.

II. Die Ermittlung der erregenden Drehkräfte.

3. Die Gasdrehkraft.

Liegt das Indikatordiagramm einer Kolbenmaschine als pv-Diagramm vor, so kann die Gasdrehkraft (Tangentialkraft) auf bekanntem zeichnerischem Wege ermittelt werden[5]). Bei den neueren raschlaufenden Brennkraftmaschinen dagegen, bei denen das Indikatordiagramm meist als $p\varphi$-Diagramm (φ = Kurbelwinkel) ermittelt wird, gehen die Vorteile des zeichnerischen Verfahrens wieder verloren. Außerdem ist bei rechnerischen Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen — insbesondere bei Vergleichsrechnungen, bei denen ein beliebig genau vorgegebenes Indikatordiagramm angenommen wird — meist eine größere Genauigkeit erforderlich.

Die rechnerische Ermittlung der Drehkraft aus der Kolbenkraft in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ geschieht am einfachsten mit Hilfe der Arbeitsgleichung. Die Gaskolbenkraft P werde wie üblich positiv gerechnet, wenn sie als Druckkraft auf den Kolben wirkt, Bild 1, die Gasdrehkraft T_G werde als positiv in Kurbeldrehrichtung angenommen. Dann ist die von der Kraft P auf dem Kolbenweg dx geleistete Arbeit $-P\,dx$ gleich der auf dem zugeordneten Weg $r\,d\varphi$ des Hubzapfens geleisteten Arbeit $T_G\,r\,d\varphi$, also

$$T_G\,r\,d\varphi = -P\,dx,$$

oder auf die Zeiteinheit bezogen,

$$T_G\,r\frac{d\varphi}{dt} = -P\frac{dx}{dt}.$$

Hieraus folgt sofort mit $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ und $\dot x$ (5)

$$T_G = -\frac{\dot x}{r\omega}P = P\cdot\Big(\sin\varphi + \frac{A_2}{2}\sin2\varphi + \frac{A_4}{4}\sin4\varphi + \frac{A_6}{6}\sin6\varphi + \ldots\Big)\quad(14)$$

mit den aus Zahlentafel 1 zu entnehmenden Beiwerten A_i. Da diese Beiwerte mit wachsendem Fußzeichen sehr rasch kleiner werden, kann die Reihe in (14) je nach der verlangten Genauigkeit abgebrochen werden.

Da die Gaskolbenkraft P zunächst nicht analytisch gegeben ist, muß sie für jeden Kurbelwinkel aus dem Indikatordiagramm entnommen werden. Der nach (14) ermittelte Verlauf der Gasdrehkraft T_G ist sodann durch eine harmonische Analyse als Fourier-Reihe darzustellen, die bekanntlich für Viertakt von der Form ist[6])

$$\left.\begin{aligned}T_G &= t_0 + t_1\cos1\frac{\varphi}{2} + t_2\cos2\frac{\varphi}{2} + \ldots + t_h\cos h\frac{\varphi}{2} + \ldots\\ &\quad + \tau_1\sin1\frac{\varphi}{2} + \tau_2\sin2\frac{\varphi}{2} + \ldots + \tau_h\sin h\frac{\varphi}{2} + \ldots\\ &= T_0 + T_1\sin\Big(1\frac{\varphi}{2} + \delta_1\Big) + T_2\sin\Big(2\frac{\varphi}{2} + \delta_2\Big) + \ldots\\ &\quad + T_h\sin\Big(h\frac{\varphi}{2} + \delta_h\Big) + \ldots\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Zur Durchführung dieser Analyse können etwa die kürzlich erschienenen Tafeln von Hußmann[7]) verwendet werden, die für eine Unterteilung der Grundperiode in 12, 24, 36 und 72 Teile vorliegen. Um eine für Drehschwingungsuntersuchungen genügend große Zahl von Fourier-Beiwerten ausreichend genau zu erhalten, ist meist eine Einteilung in 72 Teile erforderlich.

Es ist zweckmäßig, für sämtliche Gaskräfte als Nullpunkt einheitlich den »Zündtotpunkt« festzulegen, d. h. den Totpunkt, in dessen Nähe die Zündung vor sich geht, und nicht, wie vielfach üblich[6]), den Ansaugtotpunkt. Die Phasenwinkel δ_h (15) seien daher gleichfalls auf den Zündtotpunkt bezogen[8]). Dies hat den Vorteil, daß die Phasenwinkel gleichmäßig verlaufen, während sie sich bei der Fest-

[5]) Vgl. z. B. Taschenbuch Hütte II, 26. Aufl., S. 91 oder M. Tolle, Regelung der Kraftmaschinen. 3. Aufl., Berlin 1921, S. 11.
[6]) Vgl. z. B. A. Stieglitz, Drehschwingungen in Reihenmotoren. Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929), S. 133.
[7]) A. Hußmann, Tafeln zur harmonischen Analyse und Synthese. Berlin 1938.
[8]) Der Zündtotpunkt wird als Nullpunkt z. B. auch gewählt bei R. M. Hazen und O. V. Montieth, Torsional Vibration of In-Line Aircraft Engines. S.A.E.J. Bd. 43 (1938), S. 338.

legung des Nullpunkts auf den Ansaugtotpunkt beim Übergang von geradzahligen zu ungeradzahligen Harmonischen jeweils sprunghaft ändern. Außerdem ermöglicht die obengenannte Festlegung auch ohne weiteres Vergleiche mit entsprechenden Untersuchungen für Zweitaktmotoren, bei denen der Ansaugtakt fehlt.

Einen weiteren Lösungsweg zur Ermittlung der Gasdrehkraft (und ganz entsprechend für die später behandelte Biegekraft) erhält man dadurch, daß man unmittelbar den durch das $p\varphi$-Diagramm gegebenen Verlauf der Gaskolbenkraft $P(\varphi)$ in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel φ als Fourier-Reihe darstellt, die ähnlich wie (15) von der Form $P(\varphi) = P_0 + \sum_h P_h \sin\left(h\,\frac{\varphi}{2} + \alpha_h\right)$ ist. Diese Fourier-Reihe muß sodann nach den im Anhang angegebenen Formeln mit der in der Klammer von (14) stehenden Fourier-Reihe multipliziert werden.

Wie durch eine Abschätzungsrechnung gezeigt werden kann, entstehen selbst bei sehr hohen Fourier-Beiwerten der gesuchten Reihe für die Gasdrehkraft T_G nur ganz unbedeutende Fehler, auch wenn man die Reihe des Klammerausdrucks von (14) schon sehr bald abbricht (für praktische Bedürfnisse genügt das Mitführen der ersten beiden Glieder!), da die Fourier-Beiwerte dieser Reihe mit wachsendem Fußzeichen sehr viel rascher abnehmen als diejenigen der Reihe $P(\varphi)$. Damit wird aber die Multiplikation der beiden Fourier-Reihen besonders einfach, insbesondere wenn man an Hand der Formeln des Anhangs ein für allemal geeignete Rechenblätter vorbereitet. Besonders groß wird die Zeitersparnis, wenn für das gleiche $p\varphi$-Diagramm sowohl die Drehkräfte als auch die Biegekräfte ermittelt werden müssen. In diesem Fall braucht man nämlich im ganzen nur eine harmonische Analyse durchzuführen [nämlich für die Gaskolbenkraft $P(\varphi)$], während bei dem üblichen, zu Beginn dieses Abschnitts dargestellten Rechenverfahren sowohl für die ermittelten Drehkräfte als auch für die Biegekräfte je eine Analyse durchzuführen ist.

4. Die Massendrehkraft.

a) Die vom Kolben herrührende Massendrehkraft. Die vom Kolben herrührende Massendrehkraft T_K kann in derselben Weise wie die Gasdrehkraft ermittelt werden; es ist jedoch die Gaskraft P durch die Massenkraft $P_K = m_K \ddot{x}$ zu ersetzen, wobei m_K die Masse des Kolbens bedeutet. Damit erhält man entsprechend wie in (14) die vom Kolben herrührende Massendrehkraft[9])

$$T_K = -\frac{\dot{x}}{r\,\omega}\,P_K = -\frac{\dot{x}\,\ddot{x}}{r\,\omega}\,m_K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hieraus folgt mit $\dot{x}$ (5) und $\ddot{x}$ (6), wenn man die im Anhang wiedergegebenen Formeln für die Multiplikation zweier Fourier-Reihen benützt,

$$T_K = m_K r \omega^2 (E_1 \sin\varphi + E_2 \sin 2\varphi + E_3 \sin 3\varphi + E_4 \sin 4\varphi + E_5 \sin 5\varphi + E_6 \sin 6\varphi + E_7 \sin 7\varphi + E_8 \sin 8\varphi + \ldots) \quad (17)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
E_1 &= \frac{A_2}{4} && = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + \frac{15}{512}\lambda^5 + \ldots \\
E_2 &= -\frac{1}{8}(4 - A_2 A_4) && = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda^4}{32} - \frac{\lambda^6}{32} - \ldots \\
E_3 &= -\frac{3}{8}(2 A_2 - A_4) && = -\frac{3}{4}\lambda - \frac{9}{32}\lambda^3 - \frac{81}{512}\lambda^5 - \ldots \\
E_4 &= -\frac{1}{12}(3 A_2^2 - 2 A_2 A_6) && = -\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{8} - \frac{\lambda^6}{16} - \ldots \\
E_5 &= -\frac{5}{48}(6 A_4 - 4 A_6) && = \frac{5}{32}\lambda^3 + \frac{75}{512}\lambda^5 + \ldots \\
E_6 &= -\frac{3}{8} A_2 A_4 && = \frac{3}{32}\lambda^4 + \frac{3}{32}\lambda^6 + \ldots \\
E_7 &= -\frac{7}{12} A_6 && = -\frac{21}{512}\lambda^5 - \ldots \\
E_8 &= -\frac{1}{24}(8 A_2 A_6 + 3 A_4^2) && = -\frac{\lambda^6}{32} - \ldots,
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

wobei wiederum nur Glieder bis zur Größenordnung λ^6 einschließlich mitgeführt wurden. Die Beiwerte E_i sind ebenfalls ein für allemal berechnet worden und für jedes Schubstangenverhältnis aus Zahlentafel 2 zu entnehmen.

b) Die von der Pleuelstange herrührende Massendrehkraft. Zur Näherungsberechnung der vom Pleuel herrührenden Massendrehkraft T_P zerlegt man das Pleuelgewicht G_P in bekannter Weise in zwei Teilgewichte, Bild 1, nämlich den im Kolbenbolzen vereinigt gedachten hin- und hergehenden Teil $G_P^{(h)} = \frac{s'}{l}\,G_P = \sigma' G_P$ und den im Hubzapfen vereinigt gedachten umlaufenden Teil $G_P^{(r)} = \frac{s''}{l}\,G_P = \sigma'' G_P$ mit den Abkürzungen

$$\sigma' \equiv \frac{s'}{l} \text{ und } \sigma'' \equiv \frac{s''}{l}, \text{ wobei } \sigma' + \sigma'' = 1 \text{ ist.} \quad (19)$$

Da der umlaufende Teil keinen Beitrag zur Drehkraft liefert, erhält man entsprechend (16) bzw. (17) angenähert die vom Pleuel herrührende Massendrehkraft, wenn man dort m_K durch $\sigma' \frac{G_P}{g}$ ersetzt.

Für genauere Rechnungen ist jedoch auch die Drehbewegung des Pleuels zu berücksichtigen. Auch hier wird der Lösungsgang durch Verwendung der Arbeitsgleichung besonders übersichtlich. Sind die von der Fortschreitbewegung des Pleuels herrührenden Trägheitskräfte (mit dem in Bild 2 eingetragenen Pfeilsinn) $P_\xi = m_P \ddot{\xi}$ und $P_\eta = m_P \ddot{\eta}$, das von der Drehträgheit des Pleuels herrührende Moment $M_\psi = m_P k_P^2 \ddot{\psi}$ (m_P = Masse des Pleuels, k_P = Trägheitsarm des Pleuels bezogen auf den Schwerpunkt), dann liefert die Arbeitsgleichung sofort

$$\begin{aligned} T_P r \omega &= -P_\xi \dot{\xi} - P_\eta \dot{\eta} - M_\psi \dot{\psi} \\ &= -m_P (\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + k_P^2 \dot{\psi}\ddot{\psi}), \end{aligned}$$

woraus

$$T_P = -\frac{m_P}{r\,\omega}(\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + k_P^2 \dot{\psi}\ddot{\psi}) \quad . \quad . \quad (20)$$

folgt. Hieraus erhält man mit den aus (8), (9), (11) und (12) zu entnehmenden Größen $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\dot{\psi}$ und $\ddot{\psi}$ sowie der Abkürzung

$$\sigma^* \equiv \frac{k_P}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

unter Verwendung der im Anhang angegebenen Multiplikationsformeln für Fourierreihen die vom Pleuel herrührende Massendrehkraft endgültig zu

$$\begin{aligned} T_P = m_P r \omega^2 \big\{ & \sigma' E_1 \sin\varphi + [-\sigma' + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})(1 + E_2)] \sin 2\varphi \\ & + \sigma' E_3 \sin 3\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2}) E_4 \sin 4\varphi + \\ & + \sigma' E_5 \sin 5\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2}) E_6 \sin 6\varphi + \\ & + \sigma' E_7 \sin 7\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2}) E_8 \sin 8\varphi + \ldots \big\} \end{aligned} \quad (22)$$

[9]) Von der Berücksichtigung der Wirkung der Schwere auf Kolben und Pleuel sei hier und im folgenden abgesehen, da diese bei Flugmotoren von sehr kleinem Einfluß auf die erregenden Kräfte ist. Sie könnte übrigens ohne weiteres mit den angegebenen Gleichungen berücksichtigt werden.

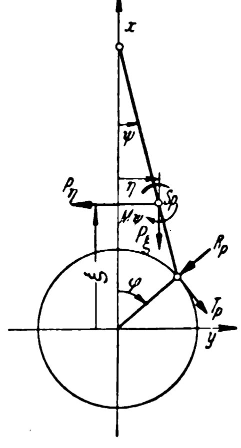


Bild 2. Kurbeltrieb. Ermittlung der erregenden Massenkräfte.

Zahlentafel 2. Beiwerte zur Ermittlung der Drehkräfte.

λ	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
0,200	0,05051	—0,50005	—0,15230	—0,01020	0,00130	0,00016	—0,00001	—0,000002
0,205	0,05180	—0,50006	—0,15623	—0,01073	0,00140	0,00017	—0,00002	—0,000003
0,210	0,05309	—0,50006	—0,16017	—0,01127	0,00151	0,00019	—0,00002	—0,000003
0,215	0,05439	—0,50007	—0,16412	—0,01183	0,00162	0,00021	—0,00002	—0,000003
0,220	0,05568	—0,50008	—0,16808	—0,01240	0,00174	0,00023	—0,00002	—0,000004
0,225	0,05698	—0,50008	—0,17205	—0,01299	0,00187	0,00025	—0,00003	—0,000004
0,230	0,05828	—0,50009	—0,17603	—0,01358	0,00200	0,00028	—0,00003	—0,000005
0,235	0,05958	—0,50010	—0,18002	—0,01420	0,00214	0,00030	—0,00003	—0,000006
0,240	0,06089	—0,50011	—0,18402	—0,01483	0,00228	0,00033	—0,00004	—0,000007
0,245	0,06220	—0,50012	—0,18803	—0,01547	0,00243	0,00036	—0,00004	—0,000007
0,250	0,06351	—0,50013	—0,19206	—0,01613	0,00259	0,00039	—0,00004	—0,000008
0,255	0,06482	—0,50014	—0,19609	—0,01680	0,00276	0,00042	—0,00005	—0,00001
0,260	0,06614	—0,50015	—0,20014	—0,01749	0,00293	0,00046	—0,00005	—0,00001
0,265	0,06745	—0,50017	—0,20420	—0,01820	0,00311	0,00050	—0,00006	—0,00001
0,270	0,06877	—0,50018	—0,20827	—0,01891	0,00330	0,00054	—0,00007	—0,00001
0,275	0,07010	—0,50019	—0,21235	—0,01965	0,00350	0,00058	—0,00007	—0,00002
0,280	0,07143	—0,50021	—0,21646	—0,02040	0,00370	0,00063	—0,00008	—0,00002
0,285	0,07276	—0,50022	—0,22058	—0,02117	0,00391	0,00067	—0,00009	—0,00002
0,290	0,07409	—0,50024	—0,22470	—0,02195	0,00413	0,00072	—0,00009	—0,00002
0,295	0,07542	—0,50026	—0,22885	—0,02275	0,00436	0,00078	—0,00010	—0,00002
0,300	0,07676	—0,50028	—0,23300	—0,02356	0,00460	0,00083	—0,00011	—0,00003
0,305	0,07811	—0,50030	—0,23717	—0,02439	0,00485	0,00089	—0,00012	—0,00003
0,310	0,07945	—0,50032	—0,24136	—0,02524	0,00511	0,00096	—0,00013	—0,00003
0,315	0,08080	—0,50034	—0,24557	—0,02610	0,00538	0,00102	—0,00015	—0,00004
0,320	0,08215	—0,50036	—0,24979	—0,02698	0,00566	0,00109	—0,00016	—0,00004
0,325	0,08351	—0,50039	—0,25402	—0,02788	0,00595	0,00117	—0,00017	—0,00004
0,330	0,08487	—0,50042	—0,25827	—0,02879	0,00625	0,00125	—0,00019	—0,00005
0,335	0,08623	—0,50044	—0,26254	—0,02972	0,00656	0,00133	—0,00020	—0,00005
0,340	0,08760	—0,50047	—0,26683	—0,03067	0,00688	0,00141	—0,00022	—0,00006
0,345	0,08897	—0,50050	—0,27114	—0,03164	0,00721	0,00150	—0,00023	—0,00006
0,350	0,09035	—0,50053	—0,27546	—0,03262	0,00756	0,00160	—0,00025	—0,00007
0,355	0,09173	—0,50057	—0,27981	—0,03363	0,00791	0,00170	—0,00027	—0,00008
0,360	0,09311	—0,50061	—0,28417	—0,03465	0,00828	0,00180	—0,00029	—0,00008
0,365	0,09450	—0,50064	—0,28855	—0,03568	0,00867	0,00191	—0,00032	—0,00009
0,370	0,09589	—0,50068	—0,29295	—0,03674	0,00906	0,00203	—0,00034	—0,00010
0,375	0,09728	—0,50072	—0,29737	—0,03782	0,00947	0,00215	—0,00037	—0,00011
0,380	0,09868	—0,50076	—0,30182	—0,03891	0,00989	0,00228	—0,00039	—0,00012
0,385	0,10009	—0,50080	—0,30628	—0,04002	0,01033	0,00241	—0,00042	—0,00013
0,390	0,10150	—0,50085	—0,31077	—0,04116	0,01078	0,00255	—0,00045	—0,00014
0,395	0,10291	—0,50090	—0,31528	—0,04231	0,01125	0,00269	—0,00049	—0,00015
0,400	0,10433	—0,50095	—0,31981	—0,04348	0,01173	0,00284	—0,00052	—0,00017

mit den Abkürzungen E_i (18), die sofort für jedes Schubstangenverhältnis aus Zahlentafel 2 zu entnehmen sind.

Zur Ermittlung der gesamten Massendrehkraft von Kolben und Pleuel sind die zusammengehörigen sin- und cos-Glieder gleichen Arguments in den beiden Gleichungen (17) und (22) zu addieren. Die Gesamtdrehkraft T erhält man schließlich aus der Gasdrehkraft T_G sowie den Massendrehkraftanteilen T_K und T_P von Kolben und Pleuel nach der Vorschrift $T = T_G + T_K + T_P$, also durch algebraische Addition der Einzelanteile.

5. Verlauf der Gas- und Massendrehkräfte.

Als Beispiel wurde aus einem wirklichen Indikatordiagramm der bekannte kennzeichnende Verlauf der Gasdrehkräfte in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel nach Gleichung (14) für einen Motorzylinder mit dem mittleren indizierten Druck $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm², der Zylinderbohrung $d = 120$ mm, dem Hub $s = 140$ mm und dem Schubstangenverhältnis $\lambda = 0{,}318$ ermittelt und in Bild 3 dargestellt. Ferner sind dort die Massendrehkräfte für ein ungefähr dem Argus AS 8 B-Motor entsprechendes Kurbeltriebwerk unter Zugrundelegung einer Motordrehzahl $n = 2000$ U/min und schließlich der Verlauf der Gesamtdrehkraft wiedergegeben.

Zur Veranschaulichung wurde außerdem die Massendrehkraft des Kolbens nach (17) sowie die Massendrehkraft des Pleuels unter Berücksichtigung seiner Drehträgheit nach (22) berechnet und in Bild 4 getrennt wiedergegeben. Um den Genauigkeitsgrad der Rechnung ohne Berücksichtigung der Drehträgheit des Pleuels beurteilen zu können, wurde in

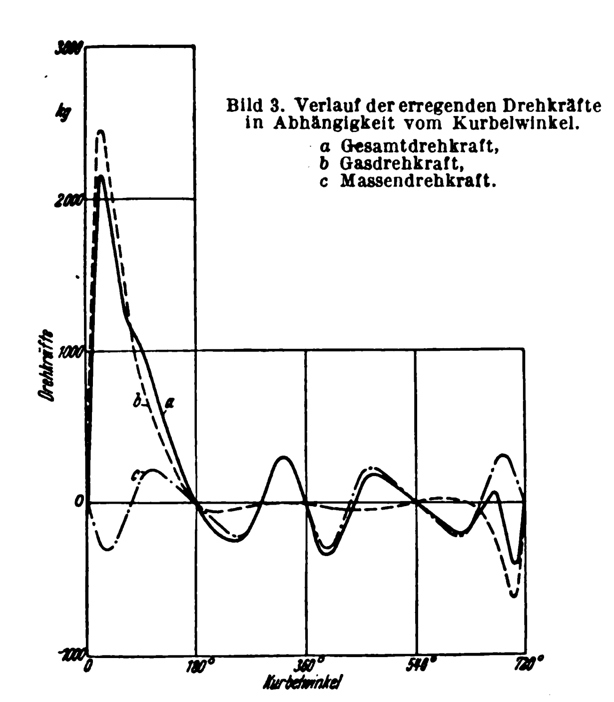


Bild 3. Verlauf der erregenden Drehkräfte in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.
a Gesamtdrehkraft,
b Gasdrehkraft,
c Massendrehkraft.



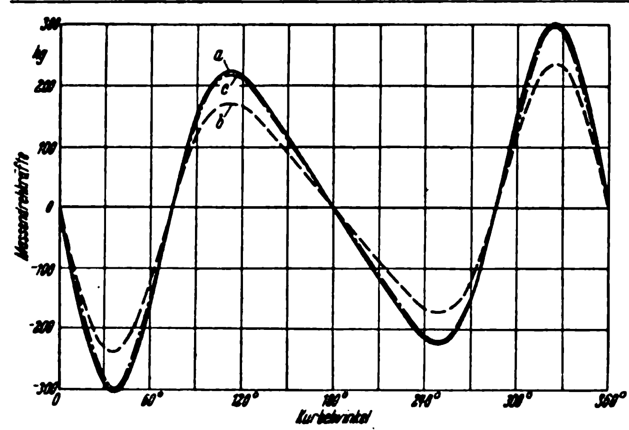


Bild 4. Verlauf der Massendrehkraftanteile von Kolben und Pleuel in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel.
a Gesamtmassendrehkraft,
b Massendrehkraft des Kolbens,
c Gesamtmassendrehkraft bei Näherungsrechnung für das Pleuel.

Bild 4 noch die gesamte Massendrehkraft unter Zugrundelegung dieses Näherungswerts eingetragen. Die größte Abweichung beträgt, bezogen auf die Massendrehkraft des Pleuels 6,3%, bezogen auf die gesamte Massendrehkraft dagegen nur 1,4%.

Aus den nach (14) rechnerisch ermittelten Gasdrehkräften wurden durch rechnerische harmonische Analyse mit 72 Ordinaten die zugehörigen Harmonischen (bezogen auf das Viertaktarbeitsspiel) ermittelt und wie üblich in Hundertteilen des mittleren Drucks in Bild 5 sowie in Zahlentafel 3, welche auch die (auf den Zündtotpunkt bezogenen) Phasenwinkel enthält, dargestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte eingetragen, die von Stieglitz[10]) für einen Motor mit $p_{mi} = 5{,}46$ kg/cm² und $\lambda = 0{,}292$ sowie von Carter[11]) für einen Motor mit $p_{mi} = 7{,}98$ kg/cm² und $\lambda = 0{,}292$ ermittelt wurden.

Zahlentafel 3. Die Harmonischen der Gasdrehkräfte ($\lambda = 0{,}318$, $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm²).

$$T_g = T_0 + \sum_h t_h \cos h\frac{\varphi}{2} + \sum_h \tau_h \sin h\frac{\varphi}{2}$$
$$= T_0 + \sum_h T_h \sin\left(h\frac{\varphi}{2} + \delta_h\right).$$

Harmonische h	cos-Beiwert t_h kg/cm²	sin-Beiwert τ_h kg/cm²	Scheitelwert $T_h = \sqrt{t_h^2 + \tau_h^2}$ kg/cm²	Scheitelwert in % von p_{mi}	Phasenwinkel δ_h
0.	1,767	—	1,767	15,96	—
1.	3,235	2,074	3,843	34,71	57°20′
2.	1,608	3,145	3,532	31,91	27°05′
3.	0,100	3,253	3,254	29,40	1°45′
4.	—0,345	2,486	2,509	22,67	— 7°55′
5.	—0,456	2,077	2,127	19,21	— 12°25′
6.	—0,500	1,776	1,845	16,67	— 15°45′
7.	—0,607	1,445	1,567	14,15	— 22°45′
8.	—0,599	1,134	1,283	11,59	— 27°50′
9.	—0,590	0,858	1,042	9,41	— 34°30′
10.	—0,522	0,644	0,829	7,49	— 39°00′
11.	—0,481	0,480	0,680	6,14	— 45°05′
12.	—0,409	0,347	0,537	4,85	— 49°40′
13.	—0,342	0,255	0,426	3,85	— 53°20′
14.	—0,274	0,198	0,326	2,95	— 54°10′
15.	—0,233	0,151	0,278	2,51	— 57°05′
16.	—0,199	0,114	0,229	2,07	— 60°10′
17.	—0,180	0,069	0,193	1,74	— 69°00′
18.	—0,157	0,042	0,162	1,47	— 75°00′
19.	—0,151	0,012	0,151	1,37	— 85°25′
20.	—0,133	—0,007	0,133	1,20	— 93°00′
21.	—0,123	—0,017	0,124	1,12	— 97°50′
22.	—0,114	—0,023	0,117	1,06	—101°25′
23.	—0,101	—0,037	0,107	0,97	—110°05′
24.	—0,082	—0,038	0,090	0,82	—114°50′
25.	—0,068	—0,043	0,081	0,73	—122°20′
26.	—0,056	—0,046	0,072	0,65	—129°25′
27.	—0,040	—0,054	0,067	0,61	—143°20′
28.	—0,026	—0,050	0,056	0,51	—152°30′
29.	—0,019	—0,053	0,055	0,50	—160°15′

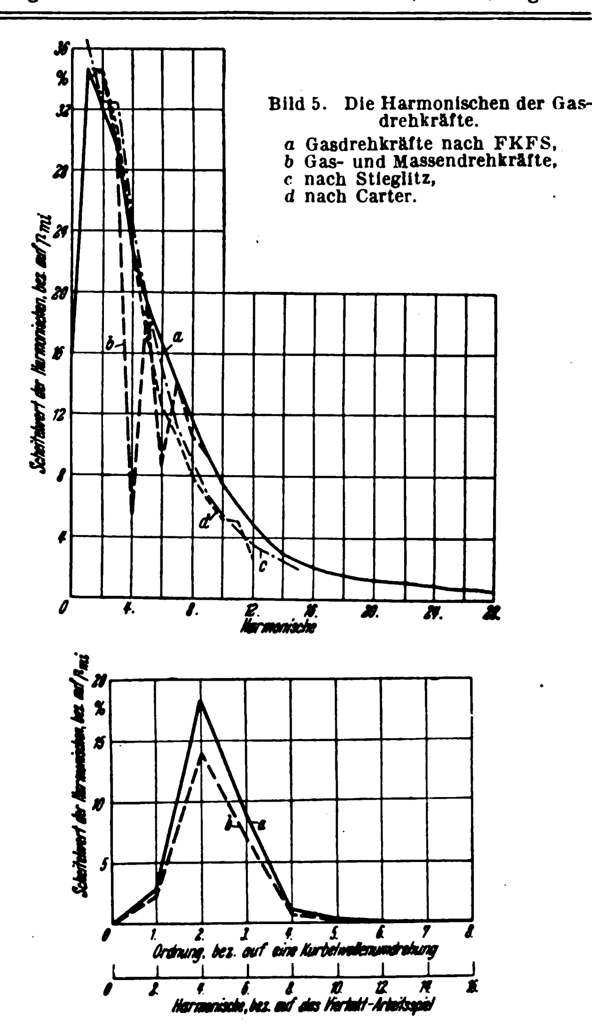


Bild 5. Die Harmonischen der Gasdrehkräfte.
a Gasdrehkräfte nach FKFS,
b Gas- und Massendrehkräfte,
c nach Stieglitz,
d nach Carter.

Bild 6. Die Harmonischen der Massendrehkräfte.
a Kolben + Pleuel,
b Kolben.

Bild 5 zeigt, daß die von Stieglitz gemachte Annahme, wonach die Größe der einzelnen Harmonischen im wesentlichen nur vom mittleren Druck abhängt und diesem geradlinig verhältig ist (wenigstens für die niederen Harmonischen), auch für die heute üblichen Mitteldrücke noch zutrifft. Die Schaulinie von Stieglitz kann daher abgesehen von Sonderfällen, bei denen der genaue Verlauf auf Grund des zugehörigen Indikatordiagramms erforderlich ist, bei den heute gebräuchlichen Bauarten der Ottomotoren immer noch verwendet werden.

Um einen Überblick über die Harmonischen der Massendrehkräfte zu geben, sind diese für dasselbe Beispiel und für dieselbe Motordrehzahl $n = 2000$ U/min in Bild 6 wiedergegeben, und zwar die Anteile des Kolbens und des Pleuels getrennt. Die Größe der Harmonischen ist (lediglich wegen des leichteren Vergleichs mit den Gasdrehkräften) ebenfalls wieder in Hundertteilen des mittleren Drucks angegeben. Schließlich sind in Bild 5 noch für das behandelte Beispiel die Massendrehkräfte unter Berücksichtigung des Phasenwinkels zu den Gasdrehkräften hinzugenommen worden.

III. Die Ermittlung der erregenden Biegekräfte.

6. Die Gasbiegekraft.

Auch für die Ermittlung der Biegekräfte läßt sich die Arbeitsgleichung mit Vorteil nutzbar machen. Dabei denkt

[10]) A. Stieglitz, a. a. O.

[11]) B. C. Carter und N. S. Muir, Torsional Resonance Characteristics of a 12-Cylinder Vee Aero Engine. Rep. Mem. Aeronaut. Res. Comm. Nr. 1304, London 1934.

Zahlentafel 4. Beiwerte zur Ermittlung der Biegekräfte.

λ	F_0	F_2	F_4	F_6	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
0,200	—0,1016	0,1021	—0,0005	0,000004	—0,51030	—0,05051	—0,47933	—0,15076	—0,01052	0,00128	0,00016	—0,00001	—0,000002
0,205	—0,1042	0,1047	—0,0006	0,000004	—0,51084	—0,05180	—0,47824	—0,15456	—0,01108	0,00138	0,00018	—0,00002	—0,000002
0,210	—0,1068	0,1074	—0,0006	0,000005	—0,51139	—0,05309	—0,47713	—0,15837	—0,01166	0,00148	0,00020	—0,00002	—0,000003
0,215	—0,1094	0,1101	—0,0007	0,000006	—0,51196	—0,05438	—0,47599	—0,16219	—0,01225	0,00159	0,00022	—0,00002	—0,000003
0,220	—0,1121	0,1128	—0,0007	0,000006	—0,51254	—0,05568	—0,47481	—0,16601	—0,01287	0,00171	0,00024	—0,00002	—0,000004
0,225	—0,1147	0,1154	—0,0008	0,000007	—0,51314	—0,05698	—0,47360	—0,16983	—0,01350	0,00183	0,00026	—0,00002	—0,000004
0,230	—0,1174	0,1182	—0,0008	0,000008	—0,51375	—0,05828	—0,47236	—0,17365	—0,01414	0,00196	0,00029	—0,00003	—0,000005
0,235	—0,1200	0,1209	—0,0009	0,000009	—0,51438	—0,05958	—0,47109	—0,17748	—0,01481	0,00209	0,00031	—0,00003	—0,000005
0,240	—0,1227	0,1236	—0,0009	0,00001	—0,51502	—0,06089	—0,46979	—0,18131	—0,01550	0,00223	0,00034	—0,00003	—0,000006
0,245	—0,1254	0,1263	—0,0010	0,00001	—0,51568	—0,06219	—0,46845	—0,18514	—0,01620	0,00238	0,00037	—0,00004	—0,000007
0,250	—0,1280	0,1291	—0,0011	0,00001	—0,51636	—0,06351	—0,46708	—0,18898	—0,01692	0,00253	0,00040	—0,00004	—0,000008
0,255	—0,1307	0,1318	—0,0011	0,00001	—0,51705	—0,06482	—0,46568	—0,19282	—0,01766	0,00269	0,00044	—0,00004	—0,000009
0,260	—0,1334	0,1346	—0,0012	0,00002	—0,51776	—0,06613	—0,46424	—0,19667	—0,01842	0,00285	0,00048	—0,00005	—0,00001
0,265	—0,1361	0,1374	—0,0013	0,00002	—0,51848	—0,06745	—0,46276	—0,20052	—0,01920	0,00302	0,00052	—0,00005	—0,00001
0,270	—0,1389	0,1402	—0,0013	0,00002	—0,51922	—0,06877	—0,46126	—0,20437	—0,02001	0,00320	0,00056	—0,00006	—0,00001
0,275	—0,1416	0,1430	—0,0014	0,00002	—0,51998	—0,07010	—0,45972	—0,20823	—0,02083	0,00339	0,00060	—0,00007	—0,00001
0,280	—0,1443	0,1458	—0,0015	0,00002	—0,52075	—0,07142	—0,45814	—0,21209	—0,02167	0,00358	0,00065	—0,00007	—0,00002
0,285	—0,1471	0,1486	—0,0016	0,00003	—0,52154	—0,07275	—0,45652	—0,21595	—0,02253	0,00378	0,00070	—0,00008	—0,00002
0,290	—0,1498	0,1515	—0,0017	0,00003	—0,52235	—0,07408	—0,45487	—0,21982	—0,02342	0,00399	0,00076	—0,00008	—0,00002
0,295	—0,1526	0,1543	—0,0018	0,00003	—0,52318	—0,07542	—0,45318	—0,22370	—0,02433	0,00421	0,00081	—0,00009	—0,00002
0,300	—0,1553	0,1572	—0,0019	0,00003	—0,52402	—0,07676	—0,45146	—0,22757	—0,02526	0,00443	0,00087	—0,00010	—0,00002
0,305	—0,1581	0,1601	—0,0020	0,00004	—0,52488	—0,07810	—0,44970	—0,23146	—0,02621	0,00466	0,00094	—0,00011	—0,00003
0,310	—0,1609	0,1630	—0,0021	0,00004	—0,52576	—0,07944	—0,44789	—0,23534	—0,02719	0,00491	0,00101	—0,00012	—0,00003
0,315	—0,1637	0,1659	—0,0022	0,00004	—0,52665	—0,08079	—0,44605	—0,23923	—0,02819	0,00516	0,00108	—0,00013	—0,00003
0,320	—0,1665	0,1688	—0,0023	0,00005	—0,52757	—0,08215	—0,44417	—0,24313	—0,02921	0,00541	0,00115	—0,00014	—0,00003
0,325	—0,1694	0,1717	—0,0024	0,00005	—0,52850	—0,08350	—0,44225	—0,24703	—0,03026	0,00568	0,00123	—0,00015	—0,00004
0,330	—0,1722	0,1747	—0,0026	0,00005	—0,52945	—0,08486	—0,44029	—0,25094	—0,03133	0,00596	0,00131	—0,00016	—0,00004
0,335	—0,1750	0,1776	—0,0027	0,00006	—0,53042	—0,08622	—0,43828	—0,25485	—0,03243	0,00624	0,00140	—0,00017	—0,00004
0,340	—0,1779	0,1806	—0,0028	0,00006	—0,53141	—0,08759	—0,43624	—0,25876	—0,03356	0,00654	0,00149	—0,00019	—0,00005
0,345	—0,1808	0,1836	—0,0029	0,00007	—0,53241	—0,08896	—0,43415	—0,26269	—0,03471	0,00685	0,00159	—0,00020	—0,00005
0,350	—0,1837	0,1866	—0,0031	0,00007	—0,53344	—0,09033	—0,43202	—0,26661	—0,03589	0,00716	0,00169	—0,00022	—0,00005
0,355	—0,1865	0,1897	—0,0032	0,00008	—0,53449	—0,09171	—0,42985	—0,27054	—0,03709	0,00749	0,00180	—0,00023	—0,00006
0,360	—0,1895	0,1927	—0,0034	0,00009	—0,53555	—0,09309	—0,42763	—0,27448	—0,03833	0,00782	0,00192	—0,00025	—0,00007
0,365	—0,1924	0,1958	—0,0035	0,00009	—0,53664	—0,09448	—0,42536	—0,27842	—0,03959	0,00817	0,00203	—0,00027	—0,00007
0,370	—0,1953	0,1989	—0,0037	0,00010	—0,53774	—0,09587	—0,42305	—0,28237	—0,04088	0,00852	0,00216	—0,00028	—0,00008
0,375	—0,1983	0,2020	—0,0039	0,00011	—0,53887	—0,09726	—0,42070	—0,28632	—0,04220	0,00889	0,00229	—0,00030	—0,00009
0,380	—0,2012	0,2051	—0,0040	0,00011	—0,54001	—0,09866	—0,41829	—0,29028	—0,04356	0,00927	0,00243	—0,00033	—0,00009
0,385	—0,2042	0,2083	—0,0042	0,00012	—0,54118	—0,10006	—0,41584	—0,29425	—0,04494	0,00966	0,00257	—0,00035	—0,00010
0,390	—0,2072	0,2114	—0,0044	0,00013	—0,54237	—0,10147	—0,41334	—0,29822	—0,04635	0,01006	0,00272	—0,00037	—0,00011
0,395	—0,2102	0,2146	—0,0046	0,00014	—0,54358	—0,10288	—0,41079	—0,30220	—0,04780	0,01048	0,00288	—0,00039	—0,00012
0,400	—0,2132	0,2178	—0,0048	0,00015	—0,54481	—0,10430	—0,40819	—0,30618	—0,04928	0,01090	0,00304	—0,00042	—0,00013



man sich, Bild 1, für die Betrachtung der Biegeschwingungen den Winkel φ vorübergehend festgehalten und setzt (wie es auch für die Behandlung der Drehkräfte vorausgesetzt wird) starres Pleuel voraus. Außerdem werde wieder die Gaskolbenkraft P als positiv gerechnet, wenn sie als Druckkraft auf den Kolben wirkt. Die auf den Hubzapfen wirkende Radialkraft R_G, im folgenden auch Gasbiegekraft genannt, werde als positiv in Richtung gegen die Kurbelwellenachse angenommen. Sei schließlich noch dr positiv bei einer Vergrößerung von r und dx positiv in $+$ x-Richtung, dann gilt nach der Arbeitsgleichung, wenn in jedem Augenblick der Winkel φ festgehalten wird,

$$-P\,dx = -R_G\,dr$$

oder

$$R_G = P\,\frac{\partial x}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Den Ausdruck $\frac{\partial x}{\partial r}$ erhält man sofort aus (3), wenn man noch beachtet, daß die Beiwerte A_i (4) Funktionen von r sind, zu

$$\frac{\partial x}{\partial r} = F_0 + F_1 \cos\varphi + F_2 \cos 2\varphi + F_4 \cos 4\varphi + F_6 \cos 6\varphi + \ldots \quad (24)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= -\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{16}\lambda^3 - \frac{15}{128}\lambda^5 - \ldots \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{45}{256}\lambda^5 + \ldots \\ F_4 &= -\frac{\lambda^3}{16} - \frac{9}{128}\lambda^5 - \ldots \\ F_6 &= \frac{3}{256}\lambda^5 + \ldots; \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \ldots \quad (25)$$

der allgemeine Ausdruck lautet

$$F_{2\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^{k-\nu} \binom{-1/2}{k-1} \binom{2k}{k-\nu} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1} \quad \ldots \quad (25)$$

Auch diese Beiwerte sind für die gebräuchlichen Schubstangenverhältnisse sofort zahlenmäßig aus Zahlentafel 4 zu entnehmen. Die Betrachtung der Zahlenwerte F_i zeigt, daß diese mit wachsendem Fußzeichen sehr rasch kleiner werden.

Aus (23) und (24) erhält man schließlich die Gasbiegekraft zu

$$R_G = P\,(F_0 + F_1 \cos\varphi + F_2 \cos 2\varphi + F_4 \cos 4\varphi + F_6 \cos 6\varphi + \ldots) \quad (26)$$

mit den aus Zahlentafel 4 zu entnehmenden Beiwerten F_i, wobei zu beachten ist, daß nach (25) $F_1 = 1$ ist. Diese Reihe kann entsprechend der verlangten Genauigkeit abgebrochen werden. Für die weitere Behandlung der Gasbiegekräfte gilt sinngemäß das bereits im Abschnitt 3 über die Gasdrehkräfte Gesagte. Man stellt die Gasbiegekräfte schließlich wieder ähnlich wie in (15) in der Form

$$R_G = R_0 + \sum_h R_h \sin\left(h\,\frac{\varphi}{2} + \vartheta_h\right)$$

dar.

7. Die Massenbiegekraft.

a) Die vom Kolben herrührende Massenbiegekraft. Die Berechnung der vom Kolben herrührenden Massenbiegekraft R_K erfolgt in entsprechender Weise, wie bei der Gasbiegekraft, wobei jedoch die Gaskraft durch die Massenkraft des Kolbens $P_K = m_K \ddot{x}$ zu ersetzen ist. Damit wird entsprechend wie in (23)

$$R_K = m_K \ddot{x}\,\frac{\partial x}{\partial r}\,.$$

Mit $\ddot{x}$ (6) und $\frac{\partial x}{\partial r}$ (24) erhält man hieraus unter Verwendung der im Anhang angegebenen Multiplikationsformeln die vom Kolben herrührende Massenbiegekraft

$$R_K = m_K r \omega^2 (G_0 + G_1 \cos\varphi + G_2 \cos 2\varphi + G_3 \cos 3\varphi + G_4 \cos 4\varphi + G_5 \cos 5\varphi + G_6 \cos 6\varphi + G_7 \cos 7\varphi + G_8 \cos 8\varphi + \ldots) \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= -\frac{1}{2}[F_1 + F_2 A_2 + F_4 A_4] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{16}\lambda^4 - \frac{5}{32}\lambda^6 - \ldots \\ G_1 &= -\frac{1}{2}[2F_0 + F_1 A_2 + F_2] \\ &= -\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda^3}{16} - \frac{15}{512}\lambda^5 - \ldots \\ G_2 &= -\frac{1}{2}[2F_0 A_2 + F_1 + F_2 A_4 + F_4 A_2] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{13}{32}\lambda^4 + \frac{11}{32}\lambda^6 + \ldots \\ G_3 &= -\frac{1}{2}[F_1(A_2 + A_4) + F_2 + F_4] \\ &= -\frac{3}{4}\lambda - \frac{3}{32}\lambda^3 - \frac{9}{512}\lambda^5 - \ldots \\ G_4 &= -\frac{1}{2}[2F_0 A_4 + F_2(A_2 + A_6) + F_6 A_2] \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} - \frac{5}{16}\lambda^4 - \frac{5}{16}\lambda^6 - \ldots \\ G_5 &= -\frac{1}{2}[F_1(A_4 + A_6) + F_4 + F_6] \\ &= \frac{5}{32}\lambda^3 + \frac{45}{512}\lambda^5 + \ldots \\ G_6 &= -\frac{1}{2}[2F_0 A_6 + F_2 A_4 + F_4 A_2] \\ &= \frac{3}{32}\lambda^4 + \frac{5}{32}\lambda^6 + \ldots \\ G_7 &= -\frac{1}{2}[F_1 A_6 + F_6] = -\frac{21}{512}\lambda^5 - \ldots \\ G_8 &= -\frac{1}{2}[F_2 A_6 + F_4 A_4 + F_6 A_2] = -\frac{\lambda^6}{32} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Diese Beiwerte sind für die gebräuchlichen Schubstangenverhältnisse sofort zahlenmäßig aus Zahlentafel 4 zu entnehmen.

b) Die von der Pleuelstange herrührende Massenbiegekraft. Wie bei den Massendrehkräften kann man sich auch bei den Massenbiegekräften des Pleuels zur Näherungsberechnung das Pleuelgewicht wieder in die beiden Teilgewichte $G_P^{(h)} = \sigma' G_P$ im Kolbenbolzen und $G_P^{(r)} = \sigma'' G_P$ im Hubzapfen zerlegt denken. Die Massenbiegekraft kann dann nach (27) berechnet werden, wobei jedoch statt der Kolbenmasse m_K die Teilmasse $\sigma' \frac{G_P}{g}$ zu setzen ist. Das zweite im Hubzapfen sitzende Teilgewicht $\sigma'' G_P$ ergibt (im Gegensatz zu den Massendrehkräften) ebenfalls einen radialen Kraftanteil, und zwar eine durch die Fliehkraft bedingte, von der Kurbelwellenachse weggerichtete gleichbleibende Kraft

$$R_P^{(r)} = -\sigma''\,\frac{G_P}{g}\,r\,\omega^2.$$

Die gesamte Massenbiegekraft des Pleuels wird damit näherungsweise

$$R_P = m_P r \omega^2 [-\sigma'' + \sigma' (G_0 + G_1 \cos\varphi + G_2 \cos 2\varphi + G_3 \cos 3\varphi + G_4 \cos 4\varphi + \ldots)] \quad (29)$$

mit den Beiwerten G_i (28), die aus Zahlentafel 4 zu entnehmen sind.

Zur genauen Berechnung des Massenbiegekraftanteils des Pleuels unter Berücksichtigung seiner Drehträgheit geht man in entsprechender Weise wie in Abschnitt 4b vor. Mit den in Bild 2 eingetragenen Trägheitskräften $P_\xi = m_P \ddot{\xi}$ und $P_\eta = m_P \ddot{\eta}$ sowie dem von der Drehträgheit des Pleuels herrührenden Moment $M_\psi = m_P k_P^2 \ddot{\psi}$ liefert die Arbeitsgleichung für die Massenbiegekraft des Pleuels

$$-R_P\,dr = -P_\xi\,d\xi - P_\eta\,d\eta - M_\psi\,d\psi$$

oder

$$R_P\,dr = m_P \ddot{\xi}\,d\xi + m_P \ddot{\eta}\,d\eta + m_P k_P^2 \ddot{\psi}\,d\psi,$$

woraus

$$R_P = m_P\left(\ddot{\xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial r} + \ddot{\eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial r} + k_P^2\,\ddot{\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (30)$$

folgt. Hierbei sind die Reihen für $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$ und $\ddot{\psi}$ aus (9) und (12) zu entnehmen.

Die Ausdrücke $\frac{\partial \xi}{\partial r}$, $\frac{\partial \eta}{\partial r}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ findet man ebenfalls rasch. Aus (7) folgt zunächst durch partielle Ableitung nach r unter Berücksichtigung von (24)

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \sigma' F_0 + F_1 \cos\varphi + \sigma' F_2 \cos 2\varphi + \sigma' F_4 \cos 4\varphi + \sigma' F_6 \cos 6\varphi + \ldots \quad (31)$$

mit den Abkürzungen F_i (25). Aus (7) folgt sofort

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = (1 - \sigma') \sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Schließlich findet man noch aus (10)

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{l}\,(H_1 \sin\varphi + H_3 \sin 3\varphi + H_5 \sin 5\varphi + H_7 \sin 7\varphi + \ldots) \quad . \; . \; . \; . \quad (33)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= 1 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{15}{64}\lambda^4 + \frac{175}{1024}\lambda^6 + \ldots \\ H_3 &= -\frac{1}{8}\lambda^2 - \frac{15}{128}\lambda^4 - \frac{105}{1024}\lambda^6 - \ldots \\ H_5 &= \frac{3}{128}\lambda^4 + \frac{35}{1024}\lambda^6 + \ldots \\ H_7 &= -\frac{5}{1024}\lambda^6 - \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (33a)$$

Damit folgt schließlich aus (30) nach Anwendung der im Anhang angegebenen Multiplikationsformeln für **die vom Pleuel herrührende Massenbiegekraft** unter Berücksichtigung seiner Drehträgheit

$$\begin{aligned} R_P = m_P r \omega^2 \{ &-\sigma'' + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})\, G_0 + \sigma' G_1 \cos\varphi + \\ &+ [(\sigma^{*2} - \sigma'\sigma'') + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})\, G_2] \cos 2\varphi \\ &+ \sigma' G_3 \cos 3\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})\, G_4 \cos 4\varphi \\ &+ \sigma' G_5 \cos 5\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})\, G_6 \cos 6\varphi \\ &+ \sigma' G_7 \cos 7\varphi + (\sigma'^2 + \sigma^{*2})\, G_8 \cos 8\varphi + \ldots \} \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

mit den Beiwerten G_i (28), die in Zahlentafel 4 zusammengestellt sind.

8. Verlauf der Gas- und Massenbiegekräfte.

Als **Beispiel I** werde derselbe Zylinder eines Reihenmotors wie in Abschnitt 5 bei den Drehkräften, ebenfalls

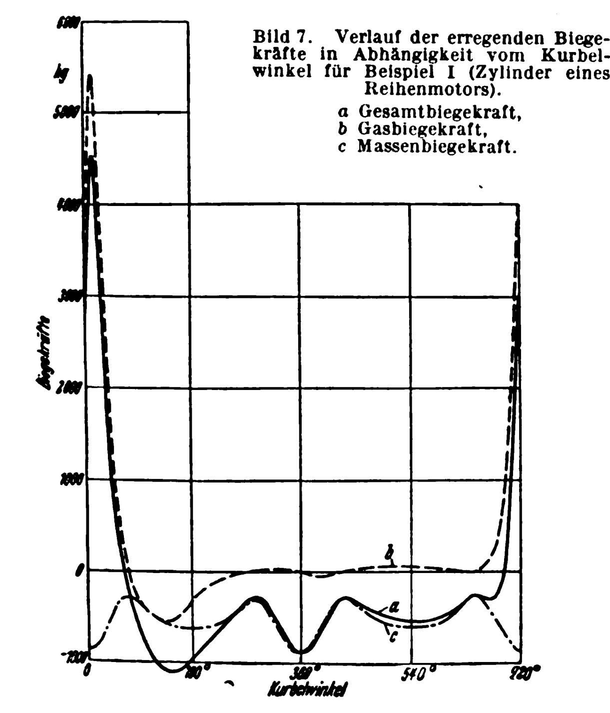


Bild 7. Verlauf der erregenden Biegekräfte in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für Beispiel I (Zylinder eines Reihenmotors).
a Gesamtbiegekraft,
b Gasbiegekraft,
c Massenbiegekraft.

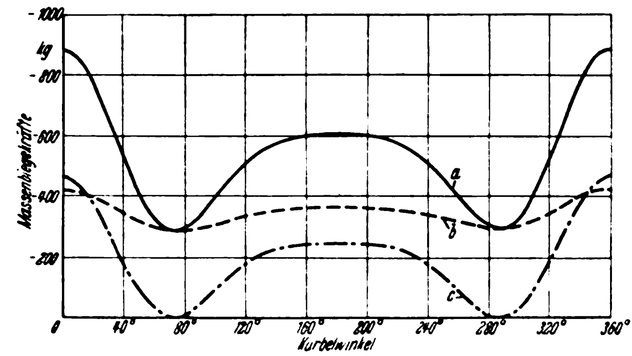


Bild 8. Verlauf der Massenbiegekraftanteile von Kolben und Pleuel in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für Beispiel I.
a Pleuel + Kolben,
b Pleuel,
c Kolben.

wieder mit $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm², betrachtet. Für dieses Beispiel wurde zunächst der Verlauf der Gasbiegekräfte aus einem wirklichen Indikatordiagramm nach (26) berechnet und in Bild 7 wiedergegeben. Außerdem sind dort der Verlauf der Massenbiegekräfte für eine Motordrehzahl $n = 2000$ U/min sowie schließlich der Verlauf der gesamten erregenden Biegekraft dargestellt. Bild 7 zeigt, daß während des größten Teils der Kurbelumdrehung die Gesamtbiegekraft negativ, also von der Kurbelwellenachse weggerichtet ist und ihre Richtung nur in der Nähe des Verbrennungshöchstdrucks kurzzeitig umkehrt. Die größte auftretende Gasbiegekraft R_G ist nur wenig kleiner als die höchste auf den Kolben wirkende Gaskraft P.

Zur genaueren Untersuchung der Massenbiegekräfte ist der nach (27) berechnete Anteil des Kolbens sowie der nach (34) berechnete Anteil des Pleuels in Bild 8 getrennt dargestellt. Die Massenbiegekraft des Pleuels ist ebenso wie die des Kolbens — die jedoch zweimal während eines Umlaufs zu Null wird — während des ganzen Umlaufs negativ, also von der Kurbelwellenachse weggerichtet. Zum Vergleich wurde die Massenbiegekraft des Pleuels außerdem noch angenähert nach (29), wo die Pleuelstange in zwei Teilgewichte zerlegt gedacht wird, berechnet. Die größte Abweichung gegenüber der genaueren Rechnung unter Berücksichtigung der Pleuelträgheit beträgt ungefähr 4%, bezogen auf die gesamte Massenbiegekraft.

Als **Beispiel II** wurde der Hauptzylinder eines Neun-Zylinder-Sternmotors gewählt, wobei der mittlere Druck $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm² beibehalten wurde. Das Schubstangenverhältnis ist $\lambda = 0{,}242$, die Zylinderbohrung $d = 154$ mm, der Hub $s = 160$ mm; die Massenverhältnisse entsprechen denen des Bramo 323-Motors. Die zur Berechnung der Massenbiegekräfte zugrunde gelegte Motordrehzahl ist $n = 2100$ U/min. Der für dieses Beispiel berechnete Verlauf der Gas- und Massenbiegekräfte ist in Bild 9 dargestellt. Die Massenkräfte haben hier einen größeren Einfluß auf die Gesamtkraft als im Beispiel I.

Das Ergebnis der wieder mit 72 Ordinaten durchgeführten harmonischen Analyse der Gasbiegekräfte für Beispiel I zeigen Bild 10 sowie Zahlentafel 5, welche auch die (auf den Zündtotpunkt bezogenen) Phasenwinkel enthält. Die entsprechende Schaulinie für Beispiel II deckt sich mit derjenigen für Beispiel I fast vollkommen; auch die Phasenwinkel stimmen weitgehend überein. Wie bei den Drehkräften ist auch hier anzunehmen, daß bei den heute noch gebräuchlichen Mitteldrücken die Größe der Harmonischen im wesentlichen nur vom mittleren indizierten Druck abhängt und diesem verhältig ist. Die Größe der Harmonischen wurde daher wieder unmittelbar in Hundertteilen des Mitteldrucks dargestellt. Der in Bild 10 wiedergegebene Verlauf kann daher für die gebräuchlichen Bauarten von Ottomotoren mit ausreichender Genauigkeit verwendet werden, falls nicht für Sonderfälle auf Grund des zugehörigen Indikatordiagramms der genauere Verlauf erforderlich ist.

Zum Vergleich sind in Bild 10 für dasselbe Beispiel die Harmonischen der **Gasdrehkräfte** strichpunktiert ein-

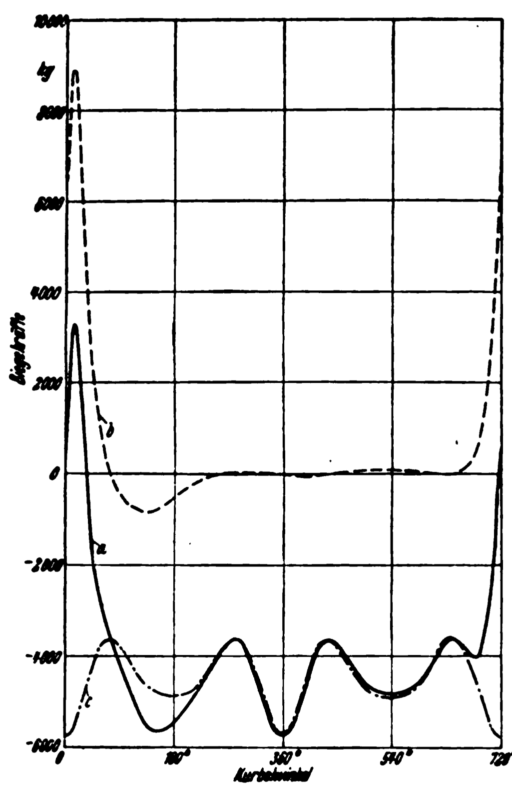


Bild 9. Verlauf der erregenden Biegekräfte in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel für Beispiel II (Hauptzylinder eines 9-Zylinder-Sternmotors).
a Gesamtbiegekraft, *b* Gasbiegekraft, *c* Massenbiegekraft.

Zahlentafel 5. Die Harmonischen der Gasbiegekräfte ($\lambda = 0{,}318$, $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm²).

$$R_G = R_0 + \sum_h r_h \cos h \frac{\varphi}{2} + \sum_h \varrho_h \sin h \frac{\varphi}{2}$$
$$= R_0 + \sum_h R_h \sin\left(h \frac{\varphi}{2} + \vartheta_h\right).$$

Harmonische h	cos-Beiwert r_h kg/cm²	sin-Beiwert ϱ_h kg/cm²	Scheitelwert $R_h = \sqrt{r_h^2 + \varrho_h^2}$ kg/cm²	Scheitelwert in % von p_{mi}	Phasenwinkel ϑ_h
0.	2,421	—	2,421	21,87	—
1.	5,633	—0,731	5,680	51,31	97°25′
2.	6,347	0,571	6,373	57,57	84°50′
3.	5,735	2,211	6,146	55,52	68°55′
4.	4,227	2,432	4,877	44,05	60°05′
5.	3,252	2,273	3,968	35,84	55°05′
6.	2,601	2,017	3,292	29,73	52°10′
7.	1,971	1,934	2,762	24,95	45°30′
8.	1,459	1,711	2,249	20,31	40°25′
9.	1,013	1,529	1,834	15,60	33°40′
10.	0,715	1,301	1,485	13,41	28°50′
11.	0,444	1,141	1,225	11,06	21°15′
12.	0,274	0,957	0,996	9,00	16°00′
13.	0,122	0,831	0,839	7,58	8°20′
14.	0,030	0,705	0,705	6,37	2°25′
15.	—0,074	0,589	0,594	5,36	— 7°10′
16.	—0,095	0,476	0,485	4,39	— 11°15′
17.	—0,132	0,418	0,438	3,96	— 17°30′
18.	—0,157	0,368	0,400	3,61	— 23°05′
19.	—0,205	0,292	0,356	3,22	— 35°05′
20.	—0,183	0,218	0,285	2,58	— 40°00′
21.	—0,180	0,187	0,259	2,34	— 43°55′
22.	—0,184	0,160	0,244	2,20	— 49°00′
23.	—0,191	0,098	0,215	1,94	— 62°50′
24.	—0,148	0,061	0,160	1,45	— 67°35′
25.	—0,138	0,045	0,145	1,31	— 71°55′
26.	—0,133	0,026	0,135	1,22	— 78°55′
27.	—0,120	—0,010	0,121	1,09	— 94°35′
28.	—0,085	—0,019	0,087	0,79	—102°35′
29.	—0,069	—0,021	0,072	0,65	—106°55′

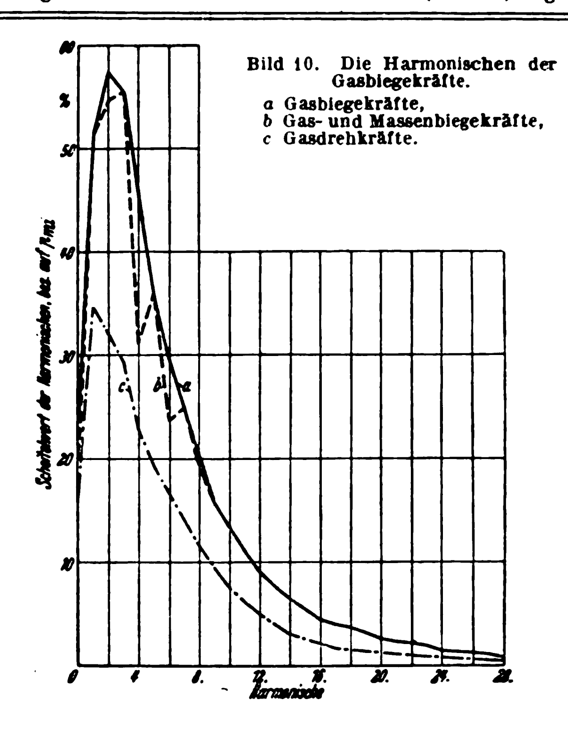


Bild 10. Die Harmonischen der Gasbiegekräfte.
a Gasbiegekräfte,
b Gas- und Massenbiegekräfte,
c Gasdrehkräfte.

getragen. Während der Größtwert der Harmonischen der Gasdrehkräfte ungefähr 35% des Mitteldrucks beträgt, liegt derjenige der Gasbiegekräfte wesentlich höher, nämlich bei ungefähr 58% des Mitteldrucks. Die höheren Harmonischen der Gasbiegekräfte zeigen einen ähnlich abfallenden Verlauf wie diejenigen der Gasdrehkräfte.

In Bild 11 ist der Verlauf der Harmonischen der Massenbiegekräfte für Beispiel I bei der Drehzahl $n = 2000$ U/min dargestellt. Außerdem wurden die Harmonischen der Massenbiegekräfte noch in Bild 10 unter Berücksichtigung des Phasenwinkels zu den Gasbiegekräften hinzugenommen.

Zur Erläuterung des in Abschnitt 3 angegebenen weiteren Lösungswegs zur Berechnung der Gasdreh- und Biegekräfte sind sodann noch in Bild 12 die Harmonischen der Gaskolbenkraft $P(\varphi)$ für Beispiel II dargestellt. Diese Schaulinie zeigt — abgesehen von den allerniedersten Harmonischen — einen ähnlich abfallenden Verlauf wie diejenigen der Gasdreh- bzw. Gasbiegekräfte in Bild 5 und 10. Schließlich zeigt Bild 13 die zu den Harmonischen von Bild 12

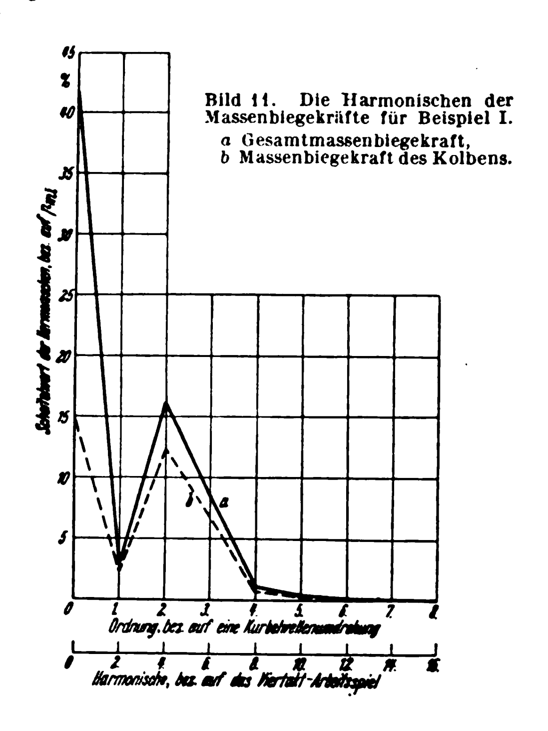


Bild 11. Die Harmonischen der Massenbiegekräfte für Beispiel I.
a Gesamtmassenbiegekraft,
b Massenbiegekraft des Kolbens.

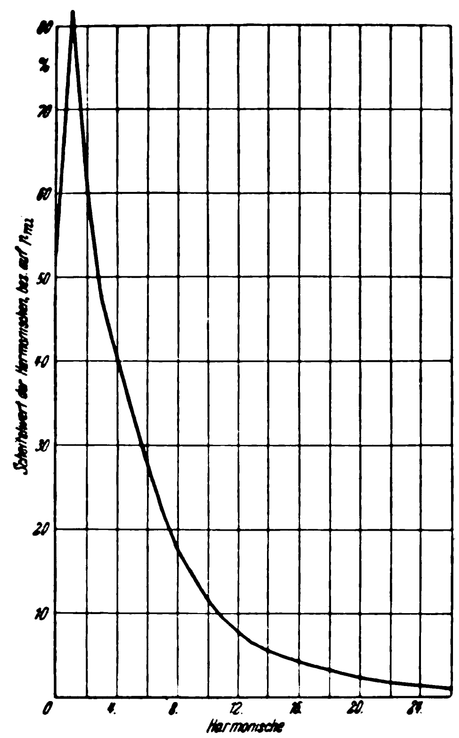


Bild 12. Die Harmonischen der auf den Kolben wirkenden Gaskraft $P(\varphi)$.

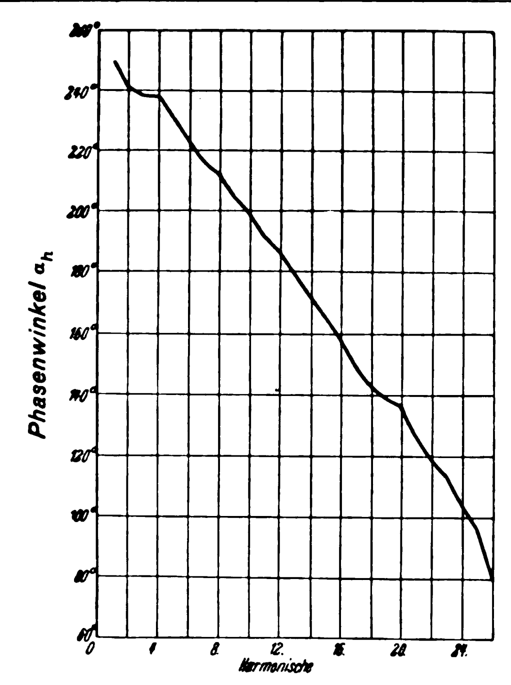


Bild 13. Die auf die Form $P = P_0 + \sum_h P_h \sin\left(h\,\frac{\varphi}{2} + \alpha_h\right)$ bezogenen Phasenwinkel der Harmonischen der Gaskolbenkraft $P(\varphi)$ von Bild 12.

gehörenden, auf die Form $P = P_0 + \sum_h P_h \sin\left(h\,\frac{\varphi}{2} + \alpha_h\right)$ bezogenen Phasenwinkel, gerechnet vom Zündtotpunkt aus.

IV. Anhang.

9. Formeln für die Multiplikation zweier Fourierreihen.

Bei der Herleitung der folgenden Formeln wird durchweg vorausgesetzt, daß die höheren Fourierbeiwerte rasch abklingen. Diese Voraussetzung ist bei den Untersuchungen über die Schwingungserregung immer erfüllt. Die Herleitung selbst, auf deren Wiedergabe verzichtet sei, erfolgt durch Ausmultiplizieren und trigonometrische Umformungen.

a) **Multiplikation zweier ganzwinkliger Fourierreihen.** Unter der Voraussetzung, daß $b_0 = \beta_0 = 0$ ist, gilt

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i\varphi + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \sin i\varphi\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sin k\varphi\right] = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + r_n)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (q_n + s_n)\sin n\varphi,\\
&\text{mit den Abkürzungen}\\
&p_0 = a_0\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\alpha_i + b_i\beta_i)\\
&p_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+n}\alpha_i + b_{i+n}\beta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{\infty}(a_{i-n}\alpha_i + b_{i-n}\beta_i)\\
&q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(b_{i+n}\alpha_i - a_{i+n}\beta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{\infty}(a_{i-n}\beta_i - b_{i-n}\alpha_i)\\
&r_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n}(a_{n-i}\alpha_i - b_{n-i}\beta_i)\\
&s_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i=n}(a_{n-i}\beta_i + b_{n-i}\alpha_i).
\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

b) **Multiplikation einer halbwinkligen und einer ganzwinkligen Fourierreihe.** Die Aufgabe, eine halbwinklige und eine ganzwinklige Fourierreihe miteinander zu multiplizieren, tritt zuweilen bei der Berechnung von Gasdrehkräften auf, wenn man die Harmonischen auf eine Kurbelwellenumdrehung bezieht.

Unter der Voraussetzung, daß $b_0 = \beta_0 = 0$ ist, gilt

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i\,\frac{\varphi}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \sin i\,\frac{\varphi}{2}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos k\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sin k\varphi\right] = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_n + r_n)\cos n\,\frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(q_n + s_n)\sin n\,\frac{\varphi}{2}\\
&\text{mit den Abkürzungen}\\
&p_0 = a_0\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(a_{2i}\alpha_i + b_{2i}\beta_i)\\
&p_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(a_{2i+n}\alpha_i + b_{2i+n}\beta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq\frac{n}{2}}^{\infty}(a_{2i-n}\alpha_i + b_{2i-n}\beta_i)\\
&q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(b_{2i+n}\alpha_i - a_{2i+n}\beta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq\frac{n}{2}}^{\infty}(a_{2i-n}\beta_i - b_{2i-n}\alpha_i)\\
&r_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i\leq\frac{n}{2}}(a_{n-2i}\alpha_i - b_{n-2i}\beta_i)\\
&s_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i\leq\frac{n}{2}}(a_{n-2i}\beta_i + b_{n-2i}\alpha_i).
\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

10. Eine weitere Herleitung der erregenden Dreh- und Biegekräfte.

Der Vollständigkeit halber sei im folgenden noch der Rechnungsgang zur Ermittlung der Dreh- und Biegekräfte ohne Verwendung der Arbeitsgleichung angedeutet, und zwar soll die Berechnung wie üblich mit Hilfe von Kräftezerlegungen durchgeführt werden. Dabei wird jedoch in

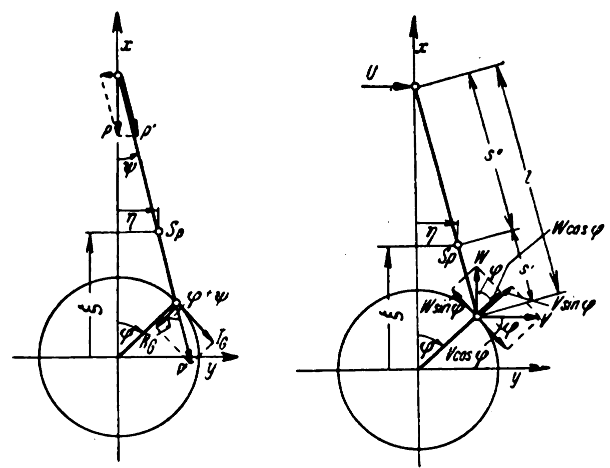


Bild 14. Kräftezerlegung für die erregenden Gaskräfte.

Bild 15. Kräftezerlegung für die erregenden Massenkräfte.

größerem Umfang von den in Abschnitt 2 angegebenen kinematischen Gleichungen Gebrauch gemacht, wodurch sich die Rechnungen stark vereinfachen.

Zur Ermittlung der Gasdreh- und -biegekräfte zerlegt man, Bild 14, die Gaskolbenkraft P in die Stangenkraft $P' = P/\cos\psi$ und diese wieder in die Gasdrehkraft

$$T_G = P' \sin(\varphi + \psi) = P(\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\psi) \quad . \quad . \quad (37)$$

und in die Gasbiegekraft

$$R_G = P' \cos(\varphi + \psi) = P(\cos\varphi - \sin\varphi \operatorname{tg}\psi) \quad . \quad . \quad (38)$$

Hierin ist der Ausdruck für $\operatorname{tg}\psi$ aus (2) und (2a) zu entnehmen und in eine Fourierreihe umzuformen, womit man schließlich wieder die Ausdrücke T_G (14) bzw. R_G (26) erhält.

Zur Ermittlung der vom Kolben herrührenden Massendreh- und -biegekräfte ist in (37) und (38) die Gaskolbenkraft P durch die Trägheitskraft des Kolbens $m_K \ddot{x}$ zu ersetzen. Dabei ist die Kolbenbeschleunigung $\ddot{x}$ als Fourierreihe aus (6) zu entnehmen und sodann mit dem (ebenfalls in eine Fourierreihe entwickelten) Klammerausdruck von (37) und (38) zu multiplizieren. Diese Rechnungen führen dann schließlich auf T_K (17) bzw. R_K (27). Die Näherungsberechnung der vom Pleuel herrührenden Massenkräfte, wobei das Pleuelgewicht in zwei Teilgewichte zerlegt wird, geschieht entsprechend.

Zur genaueren Berechnung der vom Pleuel herrührenden Massendreh- und -biegekräfte unter Berücksichtigung der Pleueldrehträgheit geht man am besten von den Bewegungsgleichungen des Pleuels aus. Diese lauten, wenn die in Bild 15 eingetragenen Kräfte die auf die Pleuelstange wirkenden Kräfte bedeuten,

$$m_P \ddot{\xi} = W$$
$$m_P \ddot{\eta} = U + V$$
$$m_P k_P^2 \ddot{\psi} = V s' \cos\psi + W s' \sin\psi - U s'' \cos\psi.$$

Hierin sind die Ausdrücke $\ddot{\xi}$ und $\ddot{\eta}$ aus (9) sowie $\ddot{\psi}$ aus (12) und sodann $\sin\psi$ aus (2) und $\cos\psi$ aus (2a) zu entnehmen. Aus den damit berechenbaren Größen V und W erhält man, wenn man zur Berücksichtigung des Vorzeichens noch beachtet, daß V und W die vom Hubzapfen auf das Pleuel wirkenden Kräfte sind, die vom Pleuel herrührende Massendrehkraft

$$T_P = W \sin\varphi - V \cos\varphi$$

und die entsprechende Biegekraft, positiv gegen die Kurbelwellenachse gerechnet,

$$R_P = V \sin\varphi + W \cos\varphi.$$

Sämtliche Ausdrücke sind sodann noch in Fourierreihen zu entwickeln. Diese Rechnungen führen schließlich auf T_P (22) und R_P (34).

V. Zusammenfassung.

Es wurde ein einfaches Rechenverfahren zur Ermittlung der erregenden Dreh- und Biegekräfte bei Flugmotoren angegeben, mit dem auch die erregenden Kräfte höherer Ordnung noch mit kleinem Rechenaufwand gefunden werden können. Dieses Rechenverfahren wurde in der vorliegenden Arbeit zunächst für den Fall der unmittelbaren Anlenkung des Pleuels (Zylinder von Reihenmotoren bzw. Hauptzylinder von Sternmotoren) erläutert. Zahlentafeln vereinfachen die zahlenmäßige Ermittlung der erregenden Kräfte wesentlich. Für zwei praktische Beispiele wurde der Verlauf der erregenden Gas- und Massenkräfte eingehend erörtert.

Für die Harmonischen der erregenden Gasbiegekräfte wurde eine Schaulinie aufgestellt, die der bekannten, von Stieglitz für die Gasdrehkräfte angegebenen entspricht, und die für die gebräuchlichen Bauarten der Ottomotoren allgemein verwendet werden kann.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 7 SEITE 241 BIS 274 | MÜNCHEN, 19. 7. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 | 19. Juli 1941 | Lfg. 7

Adolf Baeumker fünfzig Jahre.



Der Chef der Forschungsabteilung beim Technischen Amt des Reichsluftfahrtministeriums, Ministerialdirigent Adolf Baeumker, begeht am 14. Juli d. J. seinen 50. Geburtstag. Dies ist für alle Angehörigen der Luftfahrtforschung eine sehr willkommene Gelegenheit, um ihm ihren Dank abzustatten für seine weitblickende und großzügige Förderung der Forschung auf dem Gesamtgebiet der Luftfahrt. Es erfüllt mich mit Freude und Stolz, dies im Namen aller an dieser Forschung Beteiligten hier tun zu dürfen.

Aus einer Umgebung mit vielseitigen geistigen Interessen stammend — sein Vater war Universitätsprofessor der Geschichte und hat in Breslau, Bonn, Straßburg und München gewirkt —, ergriff er 1908 mit Begeisterung die Offizierslaufbahn. 1910 zum Leutnant befördert, sehen wir ihn bereits 1913 als Bataillonsadjutant eines Infanterieregiments; Mitte 1915 kommt er als Flugzeugbeobachter zur Fliegertruppe. Seine hohen Fähigkeiten in bezug auf Organisationsfragen führen ihn im späteren Verlauf des Weltkrieges in verschiedene Kommandostellen bei technischen Truppen und in den Generalstab des Feldheeres. Nach dem Kriegsende und einem Intermezzo durch Beteiligung am Grenzschutz im Osten finden wir ihn bald wieder als Mitarbeiter militärischer Stellen in Berlin. Sein lebhaftes Interesse für alle Luftfahrtfragen führte ihn in dieser Zeit in den Kreis der »Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt«, der er sehr bald ein treues Mitglied wurde. Ich erinnere mich noch deutlich des lebhaften jungen Offiziers, den wir um ein Referat in Sachen der Luftfahrerkarten gebeten hatten. Es mag im Jahre 1920 gewesen sein. Jedenfalls veranlaßte uns der persönliche Eindruck von ihm bereits in diesen Jahren, ihn um seine Mitwirkung im Vorstandsrat der WGL zu bitten, der er auch freudig zustimmte. Er hat in den allgemeinen Beratungen, besonders aber auch innerhalb des Ausschusses für Flugzeugnavigation, durch seine klare sachliche Art sehr fördernd gewirkt, auch schon 1921 die Leitung eines Lehrgangs zur Fortbildung höherer Lehrer auf dem Gebiet der Luftfahrt übernommen. Auch den Segelflug-Wettbewerben auf der Rhön und in Rossitten brachte er lebhaftestes Interesse entgegen und hat über diese in der Fachpresse berichtet.

In den Jahren 1926 und 1927 hat er als Luftfahrt-Sachverständiger an den Beratungen der »Abrüstungskonferenz« in Genf mitgewirkt. Nach Abschluß dieser Aufgabe nahm er 1927 als Offizier seinen Abschied, um als Beamter im Reichsverkehrsministerium ein Referat zu übernehmen, zu dem unter anderem die Betreuung der flugtechnischen Neuentwicklungen und der Luftfahrtforschung gehörte. Damit wurde er dem Aufgabenkreis zugeführt, in dem er später bei der Schaffung der neuen Luftwaffe so überaus verdienstvolle Arbeit leisten konnte. Einer großzügigen Tätigkeit waren damals, in der Zeit des parlamentarischen Regimes, noch starke Fesseln angelegt und es waren auch ein paarmal sehr schmerzliche Rückschläge durch Streichung von Haushaltsmitteln durch den Reichstag vorgekommen. Immerhin war diese Kampfzeit, in der er u. a. auch die Abtrennung der Haushaltsmittel für Entwicklung und Forschung von denjenigen für Beschaffung durchsetzen konnte, eine sehr förderliche Vorbereitungszeit für die späteren großen Aufgaben.

Der Kreis der Luftfahrtforschung war damals noch klein. Der Kreis der Anstaltsleiter, die für sie tätig waren, versammelte sich als »Deutscher Forschungsrat für Luftfahrt« in regelmäßigen Zusammenkünften bei den einzelnen Instituten, wobei die jeweils dringlichen Aufgaben verteilt und durchgesprochen wurden. Ein kleineres Zimmer in dem jeweiligen Institut genügte damals den räumlichen Anforderungen für solche Beratungen.

Der große Umbruch im Januar 1933 führte auch die bisherige Luftfahrtabteilung des Reichsverkehrsministeriums aus dem engen dort gezogenen Rahmen heraus, zunächst in ein »Reichskommissariat für Luftfahrt«, später in das Reichsluftfahrtministerium. Hiermit wurde Baeumker endgültig seiner großen Aufgabe, Betreuung der Luftfahrtforschung, zugeführt und konnte diese planmäßig und großzügig ausbauen. Einen wesentlichen Teil dieser Arbeiten bildete neben den Neuplanungen bei den Instituten auch die geistige Betreuung der dort und bei der Industrie tätigen Fachleute.

Die Notwendigkeit, für die jeweils wichtigen Teilaufgaben der Forschung Arbeitsausschüsse zur Verfügung der Behörden zu haben, führte ihn bereits 1933 dazu, neben den öffentlich zugänglichen Ausschüssen der »Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt« die »Vereinigung für Luftfahrtforschung« zu gründen, deren Mitarbeiter von der Behörde selbst ernannt wurden. Es steckt eine ungeheure Summe wertvollster Arbeit in diesen Ausschußberatungen. In aufsteigender Entwicklung kam es dann auf Befehl des Reichsmarschalls Hermann Göring und des Staatssekretärs für Luftfahrt, Generalfeldmarschall Milch, unter der persönlichen Initiative Baeumkers im März 1936 zur Gründung der »Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung«, die neben der Weiterführung der Arbeiten der Vereinigung für Luftfahrtforschung auch die bisherigen Aufgaben der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt übernahm und auch ihr Augenmerk auf die Heranführung der hierfür geeigneten Leistungen der Luftfahrtforschung und -technik an eine größere Öffentlichkeit zu richten hatte. Baeumker hat sich auch dieser Aufgabe mit einer ganz besonderen Liebe gewidmet und der Lilienthal-Gesellschaft einen der Bedeutung der Luftfahrt entsprechenden Rahmen geschaffen. In einer großen Ansprache hat er jedesmal seine Ideen für die Weiterführung der Arbeiten der Gesellschaft bekanntgegeben. Durch meine Mitarbeit im Präsidium der Lilienthal-Gesellschaft weiß ich, daß er in allen solchen Dingen immer der führende Kopf gewesen ist, der jeweils vorausdenkend sich überlegt hatte, was nun und was künftig zu tun wäre; auch den schönen künstlerischen und geselligen Rahmen der Veranstaltungen entwarf er mit sicherem Geschmack immer selbst. Die vielen Fachtagungen für Einzelgebiete, die neben den allgemeinen Vorträgen der Lilienthal-Gesellschaft die wissenschaftliche Arbeit vorwärts zu treiben hatten, bedeuteten aber auch jetzt noch die eigentliche Kernaufgabe der Lilienthal-Gesellschaft. Die öffentlichen Tagungen dienten im übrigen nicht nur zur Unterrichtung eines größeren Kreises von den Leistungen der Forschung und dadurch auch der Hebung des Ansehens der Forscher, sondern durch die freie Aussprache bei den Fachvorträgen auch der Entdeckung von jungen Nachwuchskräften der Forschung. Der Nachwuchsförderung dienen auch die Preisausschreiben der Lilienthal-Gesellschaft.

Auf die großzügige Nachwuchsförderung an den Hochschulen durch Errichtung der flugtechnischen Fachgruppen, wie überhaupt durch den Ausbau des flugtechnischen Unterrichts der Hochschulen an sich, ein Kapitel für sich, das Herrn Baeumker sehr am Herzen liegt, möchte ich hier nur hingewiesen haben.

Die Krönung des Aufbaues der Forschung erfolgte im Juli 1936 durch die Gründung der »Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung«, der vor allem der Gedanke zugrunde lag, gegenüber dem an sich ja notwendigen Spezialistentum eine Stelle zu schaffen, in der die notwendigen Querverbindungen zwischen den einzelnen Fachgebieten vorhanden sind, und die in der Lage ist, von höherer Warte aus die Gesamtausrichtung der jeweils nötigen Forschung zu überwachen. Ihrer Ausgestaltung galt Baeumkers unablässliches Bemühen. Die Deutsche Akademie der Luftfahrtforschung wirkt schon heute, wie ihre Arbeiten zeigen, durch Zusammenfassung der führenden Forscher aller an dem Gesamtziel mitarbeitenden Einzelfächer ungemein segensreich.

Ich habe bisher noch nicht viel von den Forschungsinstituten selbst gesagt. Es ist ja allgemein bekannt, welch große Entwicklung diese seit der Wiederwehrhaftmachung des deutschen Volkes genommen haben. An Hand des heutigen Zustandes wird man Herrn Baeumker gern bestätigen, daß er mit seinem weitblickenden Ausbau durchaus nicht des Guten zuviel getan hat. Alle geschaffenen Forschungseinrichtungen sind für die weitere Höherentwicklung unserer deutschen Luftwaffe voll beschäftigt, und es hätte nur gewünscht werden können, daß nicht zeitweilig diese Einrichtungen gegenüber anderen als noch dringlicher angesehenen Arbeiten zurückgestellt werden mußten! Jedenfalls kann Herr Baeumker heute angesichts seiner hier geschilderten umfassenden Leistungen mit großer Befriedigung auf das zurückblicken, was er zum Besten der deutschen Luftwaffe hat erreichen können.

Wenn wir von der Luftfahrtforschung nun vor ihn hintreten, um ihm zu seinem 50. Geburtstage unsere herzlichen und aufrichtigen Glückwünsche darzubringen, so ist uns das Bewußtsein, daß er zur Zeit unter der Nachwirkung einer schweren Erkrankung von der Stätte seiner Wirksamkeit abwesend sein muß, sehr schmerzlich, und so muß unser allererster Wunsch sein, daß er bald seine volle Gesundheit wiedererlangen möchte, um so mit dem alten Tatwillen seine für uns unentbehrlichen großen Fähigkeiten wieder in den Dienst der deutschen Luftfahrtforschung stellen zu können. Möchte es ihm danach vergönnt sein, uns noch viele, viele Jahre in alter Frische führend voranzuschreiten.

L. Prandtl.

Sechskomponenten-Messungen an Rechteckflügeln mit V-Form und Pfeilform in einem großen Schiebewinkelbereich.

Von Egon Möller[1]).

Bericht des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Braunschweig.

Der Bericht enthält Sechskomponenten-Messungen an drei Rechteckflügeln (Gö 387) — einem geraden Flügel, einem mit 6° V-Form und einem mit 15° Pfeilform. Sämtliche sechs Luftkraftkomponenten sind dabei in einem großen Schiebewinkel- und Anstellwinkelbereich gemessen worden.

Der Einfluß der V-Form und der Pfeilform auf das Schiebe-Rollmoment ist stark stabilisierend. Die Richtungsstabilität (Schiebe-Giermoment) wird durch Pfeilform vergrößert, durch V-Form nur wenig vermindert. Durch Abrunden der scharfkantigen Flügelenden werden die Stabilitätseigenschaften des Flügels nur unwesentlich beeinflußt. Die Druckpunktlage bei festem Anstellwinkel ist praktisch unabhängig vom Schiebewinkel.

Gliederung.

I. Einleitung.

Im Hinblick auf Fragen, die mit den Flugeigenschaften der Seitenstabilität zusammenhängen, gewinnen systematische Messungen an Flugzeugen bei unsymmetrischer Anströmung (Schieben) neuerdings ein ständig wachsendes Interesse. Derartige systematische Sechskomponentenmessungen sowohl an Flügel allein als auch an Flügelrumpfanordnungen sind bisher sehr wenig veröffentlicht worden, und die vorhandenen Messungen umfassen meist nur einen sehr beschränkten Bereich von Anstell- und Schiebewinkel.

[1]) Diplom-Arbeit der Technischen Hochschule Braunschweig, Abteilung Luftfahrt. Berichter: Prof. Dr. H. Schlichting.

Als Vorarbeit für systematische Sechskomponentenmessungen an Flügel-Rumpfanordnungen wurden die vorliegenden Versuche an drei Rechteckflügeln — gerade, mit 6° V-Form und mit 15° Pfeilform — durchgeführt. Sie schließen sich aus Vergleichsgründen eng an frühere Messungen von H. Blenk [1] an, erweitern diese aber im Anstell- und Schiebewinkelbereich beträchtlich. Mit den von H. Blenk durchgeführten Messungen wurde eine gute Übereinstimmung erzielt. In diesem Zusammenhang möge noch auf Messungen an Flügeln mit verschiedener Umrißform von J. Bamber [2] hingewiesen werden.

Unsere Messungen ergeben durch ihren wesentlich größeren Schiebewinkelbereich ($\tau = -30°$ bis $+30°$ gegenüber $-3°$ bis $+8°$ bei H. Blenk) neue Aufschlüsse über das Verhalten der symmetrischen Luftkräfte (Auftrieb, Widerstand und Kippmoment) bei Schräganströmung. Ferner bieten die vorliegenden Messungen einen willkommenen experimentellen Beitrag zu der Theorie des schiebenden Flügels von J. Weissinger [5]. In einem zusammenfassenden Bericht von H. Schlichting [6] wurde bereits auf die Ergebnisse des vorliegenden Berichtes Bezug genommen.

Aus diesen Gründen mögen die Messungen im folgenden kurz mitgeteilt werden.

II. Bezeichnungen.

a) Definitionen.

Die Festlegung aller Bezeichnungen Vorzeichen und Bezugsachsen ist aus Bild 1 zu ersehen. Sie unterscheiden sich von den früher bei der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen gebräuchlichen (s. Seiferth, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4) nur dadurch, daß Roll- und Giermoment mit $F \cdot b$ dimensionslos gemacht wurden

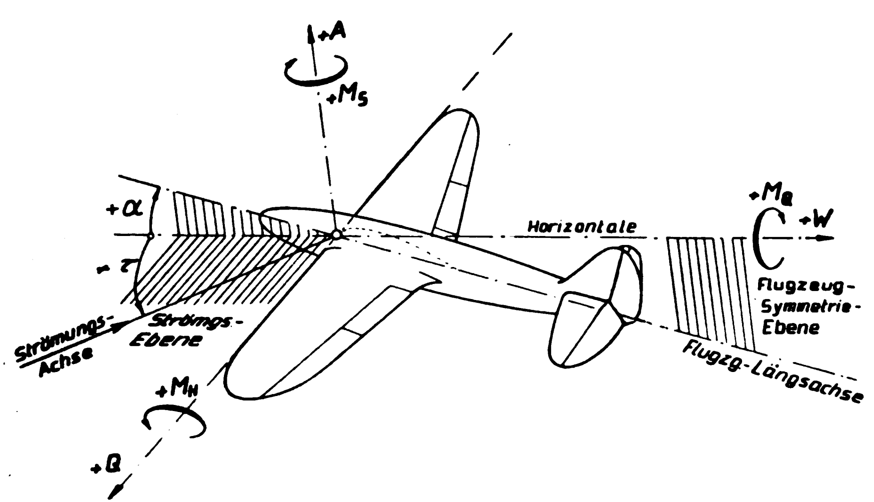


Bild 1. Kräfte, Momente und Winkel am Flugzeug.

im Unterschied zu $F \cdot t$ bei der AVA. Dementsprechend sind die Definitionen wie folgt:

Die Strömungsachse hat die Richtung des Geschwindigkeitsvektors; sie liegt in einer Horizontalebene und geht durch den vordersten Punkt der Profilsehne in Flügelmitte.

Die Strömungsebene wird gebildet durch Strömungsachse und Flugzeugquerachse durch den vordersten Punkt der Profilsehne in Flügelmitte.

Der Anstellwinkel α ist der Winkel zwischen Profilsehne in Flügelmitte und »Strömungsebene«.

Der Seitenwinkel τ ist der Winkel zwischen »Strömungsachse« und »Flugzeugsymmetrieebene«. Er ist positiv bei Anströmung von backbord. Bei $\tau = 0$ stimmen somit alle Definitionen mit denen der Dreikomponentenmessungen überein.

Die drei Bezugsachsen für die Luftkraftmomente gehen durch den vordersten Punkt der Profilsehne in Flügelmitte.

Die Längsachse ist identisch mit der Schnittgeraden von »Strömungsebene« und »Flugzeugsymmetrieebene« und liegt horizontal.

Die Hochachse ist die vertikale flugbahnfeste Hochachse.

Die Querachse ist die flugzeugfeste Querachse.

b) Zeichenerklärung.

α = geometrischer Anstellwinkel
τ = Seitenwinkel (siehe Bild 1)
ν = Winkel der V-Form des Flügels
F = Flügelfläche = 0,1125 m²
b = Flügelspannweite = 0,750 m
t = Flügeltiefe = 0,150 m
$A = c_a q F$ = Auftrieb (parallel zur Hochachse)
$W = c_w q F$ = Widerstand (parallel zur Längsachse)
$Q = c_Q q F$ = Querkraft (parallel zur Querachse)
$M_H = c_{mH} q F t$ = Kippmoment (Moment um die Querachse; positiv, wenn kopflastig)
$M_Q = c_{mQ} q F b$ = Rollmoment (Moment um die Längsachse; positiv, wenn Backbordflügel nach oben drehend)
$M_S = c_{mS} q F b$ = Giermoment (Moment um die Hochachse; positiv, wenn Backbordflügel nach vorn drehend).

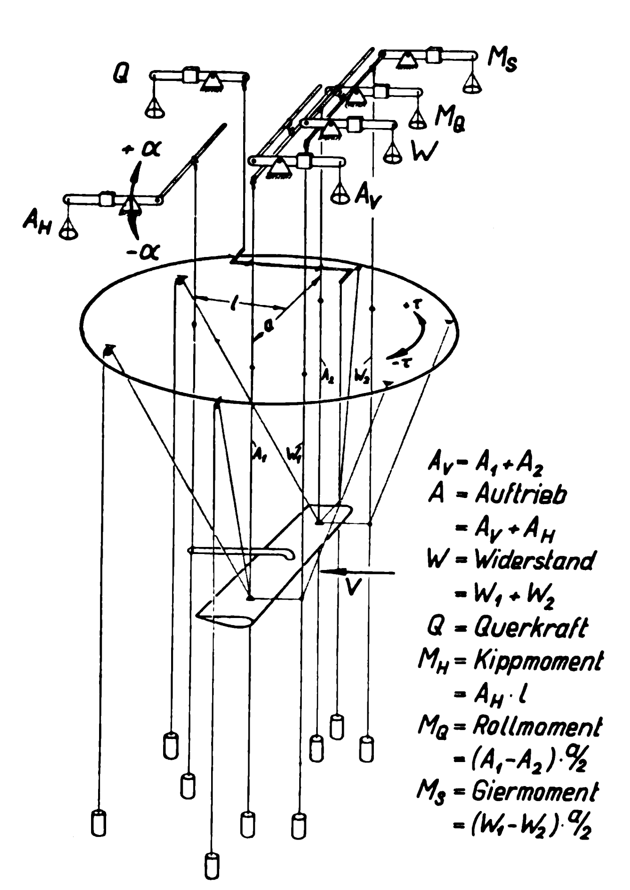


Bild 2. Schematische Darstellung der Windkanalwaage.

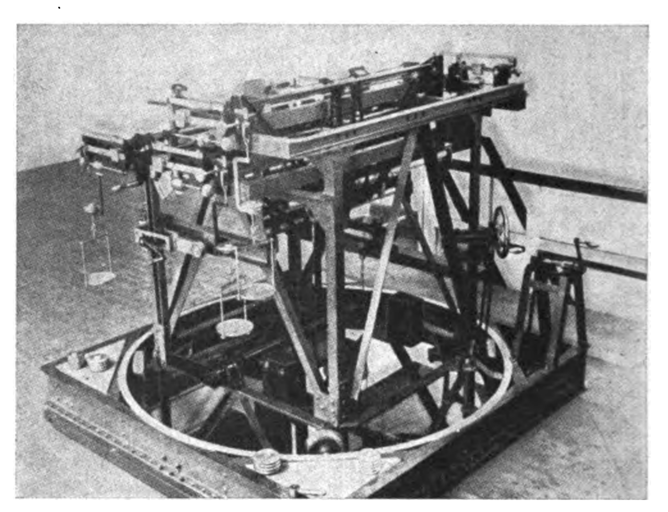


Bild 3. Ansicht der Sechskomponentenwaage.

III. Der Windkanal und die Sechskomponentenwaage des AIB.

Die Messungen wurden ausgeführt im 1,2 m-Windkanal des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Braunschweig bei einer Windgeschwindigkeit von v = 40 m/s. Die Re-Zahl betrug $Re = \frac{v \cdot t}{\nu} = 4{,}2 \cdot 10^5$ (Flügeltiefe der verwendeten Modelle t = 0,15 m). Der Windkanal besitzt eine kreisförmige Düse von 1,2 m Durchmesser. Sein Turbulenzgrad ist verhältnismäßig gering; aus Widerstandsmessungen an Kugeln wurde die kritische Kugelkennzahl ($c_w = 0{,}3$) bestimmt zu $\left(\frac{v\,d}{\nu}\right)_{\text{krit.}} = 3{,}2 \cdot 10^5$; der Turbulenzfaktor ist somit 1,2.

Der Windkanal ist mit einer rein mechanischen Sechskomponentenwaage[2]) ausgerüstet (Bild 2 und 3), die im folgenden kurz beschrieben werden soll. In ihrem Aufbau, Bild 2, lehnt sich diese Waage stark an die im Göttinger 2,25 m-Kanal vorhandene Sechskomponentenwaage [3] an.

Die gesamte Waagenanordnung ist auf einer Drehscheibe oberhalb des Strahles, die um eine vertikale Achse um 360° gedreht werden kann, angebracht. Die Drehscheibe ihrerseits ruht auf einem Wagen, der auf Schienen quer zum Strahl fahrbar ist; sie trägt das eigentliche Waagengerüst, siehe Bild 3. Zu beiden Seiten des Gerüstes sind je drei rein mechanische Hebelwagen angeordnet, siehe Bild 2, die durch Verwendung zweier Verschiebe- sowie mehrerer Auflegegewichte die folgenden Meßbereiche aufweisen:

Bezeichnung der Waage		Meßbereich (G_{max})	Kleinste Ablesung
Widerstand	W	20 kg	2 g
Auftrieb vorn	A_v	60 kg	5 g
Auftrieb hinten	A_H	20 kg	2 g
Querkraft	Q	20 kg	2 g
Rollmoment	M_Q	2 mkg	2 mg
Giermoment	M_S	2 mkg	2 mg

Die Messung des Rollmomentes M_Q geschieht mittels der vorderen Auftriebskomponenten A_1 und A_2, siehe Bild 2, die des Giermomentes M_S mittels der Widerstandskomponenten W_1 und W_2. Zu diesem Zweck sind die beiden zugehörigen Waagenhebel zweiteilig in der Weise ausgeführt, daß der untere Hebel wahlweise durch Schnellkupplung

[2]) Die Waage wurde konstruiert und gebaut von der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen.



an beiden Momentenwaagen fest oder in der Drahtebene schwenkbar mit dem oberen verbunden ist; der obere Hebel läßt über eine Hebelwaage die Kraft in den Drähten bestimmen ($A_v = A_1 + A_2$ bzw. $W = W_1 + W_2$) und nach Entkupplung kann über den unteren Hebel an der zugehörigen gegenüberliegenden Waage das Moment (M_Q bzw. M_s) gemessen werden.

Das Modell ist an sechs Drähten befestigt, die zugleich der Weiterleitung der auftretenden Kräfte nach den Waagen dienen und von denen drei nach oben (A_1, A_2, A_H), zwei nach vorn (W_1, W_2) und einer seitwärts (Q) verläuft. Die Drähte mit den Kräften W_1, W_2 und Q werden, da sie waagerecht verlaufen, in die vertikale Richtung umgelenkt unter Zuhilfe je eines Festpunktes am Waagengerüst. Durch eine besondere Eichung wird dem bestimmten Verhältnis der angezeigten zu den angreifenden Kräften W_1, W_2 und Q Rechnung getragen. Der seitliche Abstand der Drähte A_1 und A_2 kann verändert werden im Bereich 80 bis 800 mm.

Sämtlichen Gewichten wird durch Spanngewichte, die zur Dämpfung in einem Wasserbehälter unterhalb des Strahles hängen, eine geeignete Vorspannung erteilt. Die Drahtstärken bewegen sich je nach den zu erwartenden Kräften zwischen 0,3 und 0,6 mm.

Die Einstellung des Anstellwinkels geschieht durch Verschiebung der hinteren Auftriebswaage (A_H) samt ihrer Ablesewaage in vertikaler Richtung. Dabei dreht sich das Modell um die Achse durch die vorderen Aufhängepunkte (A_1 und A_2). Der Anstellwinkelbereich beträgt $\pm 45^0$.

Der Schiebewinkel wird eingestellt durch Drehen des ganzen Waagengerüstes auf der Drehscheibe. Es können Schiebewinkel von 0 bis 360° gemessen werden.

Das sich aus der beschriebenen Art der Waage und der Modellaufhängung ergebende Koordinatensystem ist waagefest. Die Bezugsachsen für die Kräfte und Momente, vgl. Bild 1, sind folgende:

Achsen des waagefesten Systems:

Bezeichnung	Längsachse	Hochachse	Querachse
Lage	waagerecht, in Flugzeug-Symm.-Ebene	senkrecht, flugbahnfeste Hochachse	waagerecht, flugzeugfeste Querachse

IV. Verwendete Modelle.

Die Messungen wurden an drei Rechteckflügeln mit dem Profil Gö 387 ohne Verwindung durchgeführt, die sich nur durch V-Form und Pfeilform voneinander unterscheiden, siehe Bild 4. Die Flügelformen wurden aus dem Grunde gewählt, weil die unsymmetrischen Luftkräfte von Pfeil- und V-Form stark abhängig sind. Die Maße der Flügel sind:

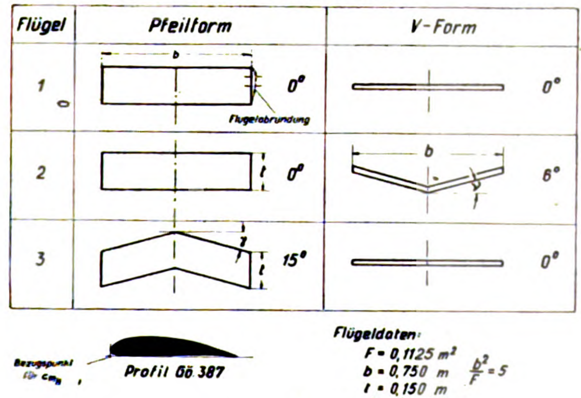


Bild 4. Modellübersicht.

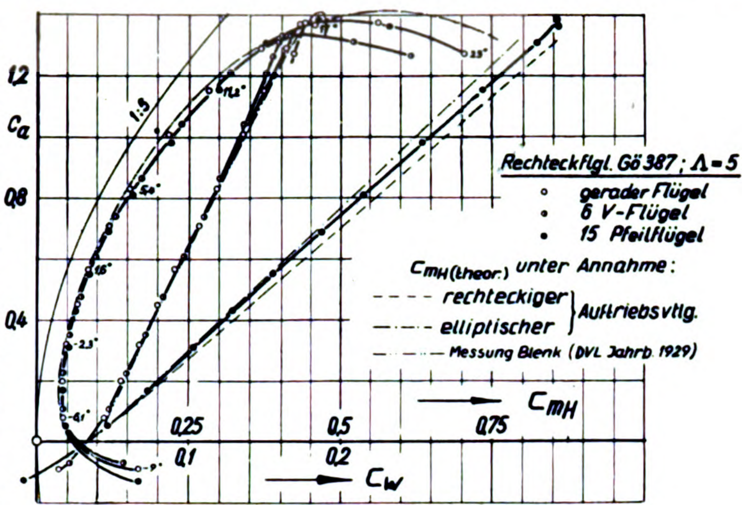


Bild 5. Dreikomponenten-Messung für alle drei Flügel.

$F = 0{,}1125$ m²
$b = 0{,}750$ m $\quad b^2/F = 5$
$t = 0{,}150$ m.

Die Flügelenden sind scharfkantig. Vergleichsweise wurden sie für eine Meßreihe am geraden Rechteckflügel mit runden Endkappen versehen. Die Abrundung der Flügelenden wurde in üblicher Weise so ausgeführt, daß an jeder Stelle längs der Flügeltiefe der Abrundungsradius gleich der halben Profildicke ist. Die Flügel wurden in der üblichen Metall-Gipsbauweise hergestellt.

V. Durchgeführte Messungen.

Mit den drei angegebenen Flügeln, s. Bild 4, wurden folgende Messungen durchgeführt:

Dreikomponentenmessungen
Anstellwinkelbereich $\alpha = -9^0$ bis $+24^0$
Sechskomponentenmessungen
5 Anstellwinkel im Schiebewinkelbereich von jeweils $\tau = -30^0$ bis $+30^0$.

Außerdem wurde der gerade Rechteckflügel zur Ermittlung des Einflusses der Flügelenden mit runden Endkappen versehen und hiermit einige Sechskomponentenmessungen durchgeführt.

VI. Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Dreikomponentenmessungen sind vergleichsweise zusammen dargestellt in Bild 5. Das durch Pfeilstellung stark vergrößerte Kippmoment läßt sich mit guter Annäherung rechnerisch aus dem Kippmoment des geraden Flügels vorausbestimmen, wenn man einfache Auftriebsverteilungen zugrunde legt. Es sind in Bild 5 die Kurven $c_{m\,H\,\mathrm{theor.}}$ für konstante $c_{a\,\mathrm{örtl.}}$-Verteilung und elliptische Auftriebsverteilung eingetragen. Das arithmetische Mittel aus beiden stellt im vorliegenden wie in den meisten anderen Fällen eine sehr gute Annäherung an die Messungen dar.

Die Formeln lauten für Rechteckflügel:

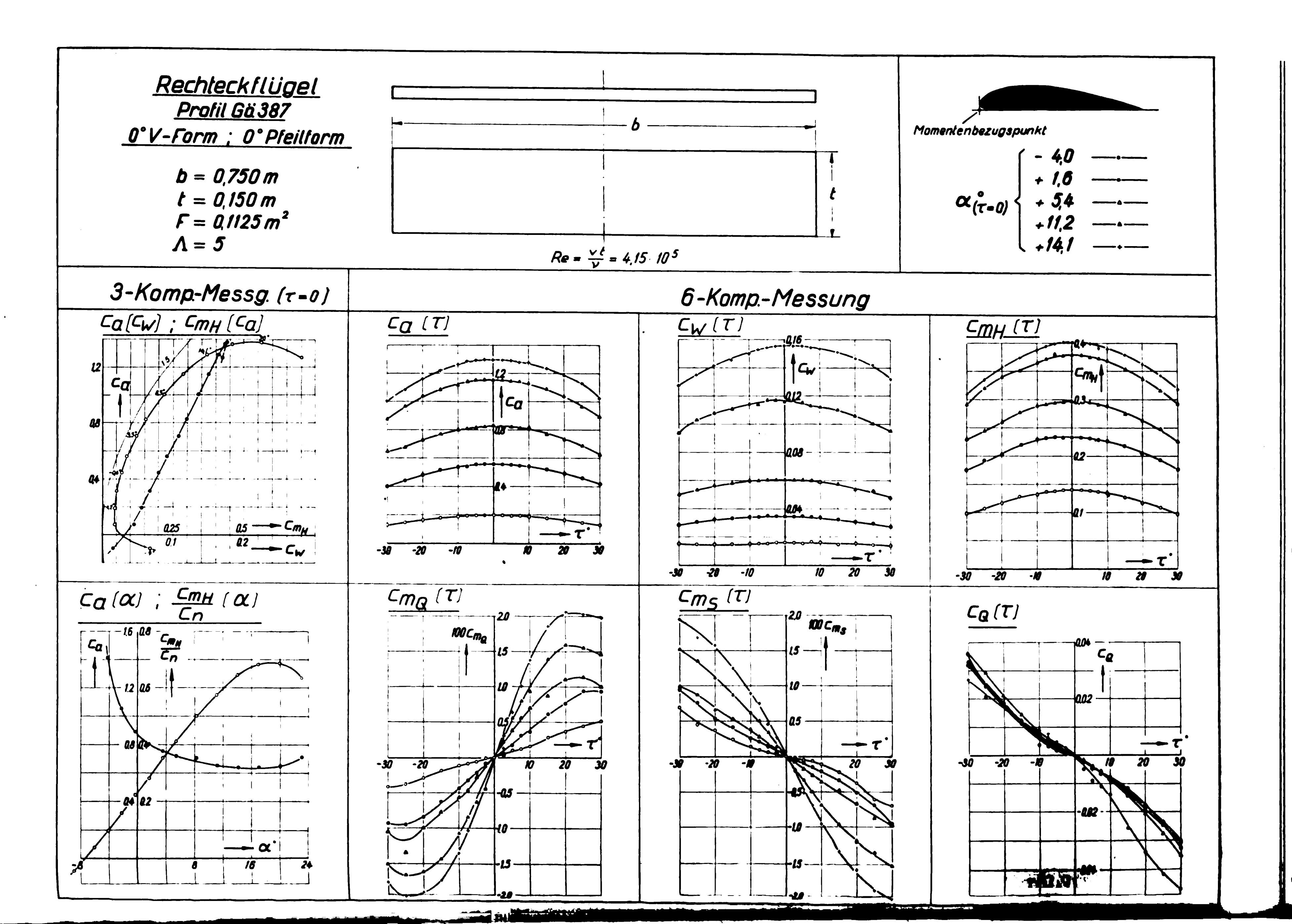
$$c_{m\,\mathrm{ges}} = c_{m_R} + \frac{1}{4}\,\frac{b^2}{F}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\overline{c_a} \quad (\text{konst. } c_{a\,\mathrm{örtl.}}\text{-Verteilung})$$

$$c_{m\,\mathrm{ges}} = c_{m_R} + \frac{2}{3\pi}\,\frac{b^2}{F}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\overline{c_a} \quad (\text{elliptische Auftriebsverteilung}).$$

Dabei bedeutet c_{m_R} den Momentenbeiwert für den geraden Rechteckflügel.

Die Dreikomponentenmessungen sind des weiteren noch getrennt aufgetragen in Bild 6 bis 8. Die Ergebnisse der Sechskomponentenmessungen sind ebenfalls ersichtlich aus Bild 6 bis 8 und für jeden Flügel gesondert dargestellt.

Für alle Flügel nehmen die Komponenten c_a, c_w und $c_{m\,H}$ mit wachsendem Schiebewinkel ab. Das von Betz [4] aufgestellte Gesetz über die Abhängigkeit des Auftriebes vom Schiebewinkel


Rechteckflügel
Profil Gö 387
0° V-Form ; 0° Pfeilform
b = 0,750 m
t = 0,150 m
F = 0,1125 m²
Λ = 5
b
t
Re = v t / ν = 4,15 · 10⁵
Momentenbezugspunkt
α°(τ=0)
- 4,0
+ 1,6
+ 5,4
+ 11,2
+ 14,1
3-Komp.-Messg. (τ = 0)
ca (cw) ; cmH (ca)
6-Komp.-Messung
ca (τ)
cw (τ)
cmH (τ)
ca (α) ; cmH/cn (α)
cmQ (τ)
cms (τ)
cQ (τ)
100 cmQ
100 cms
τ°
α°

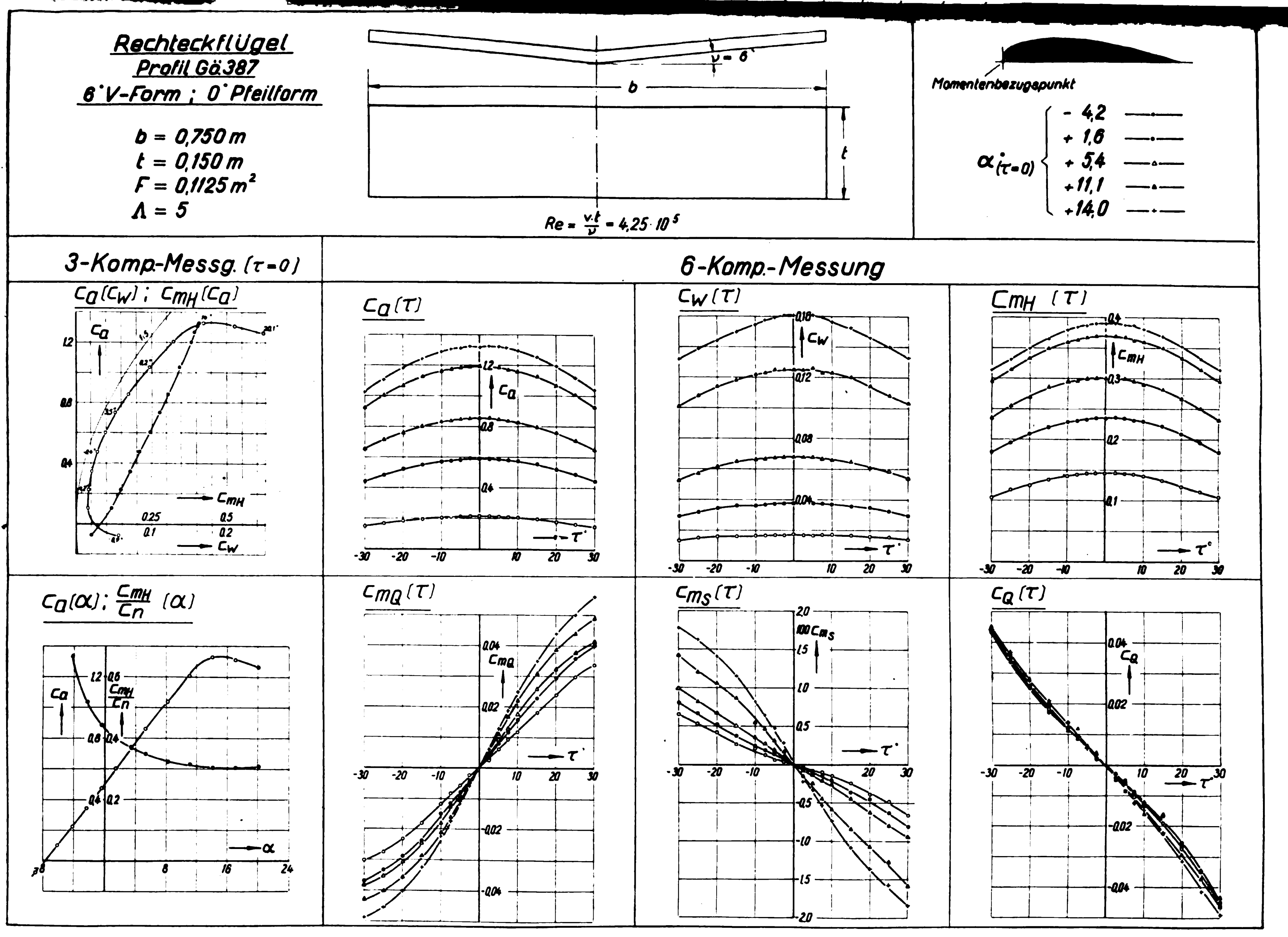


Bild 7. Rechteckflügel 6° V-Form; 0° Pfeilform.

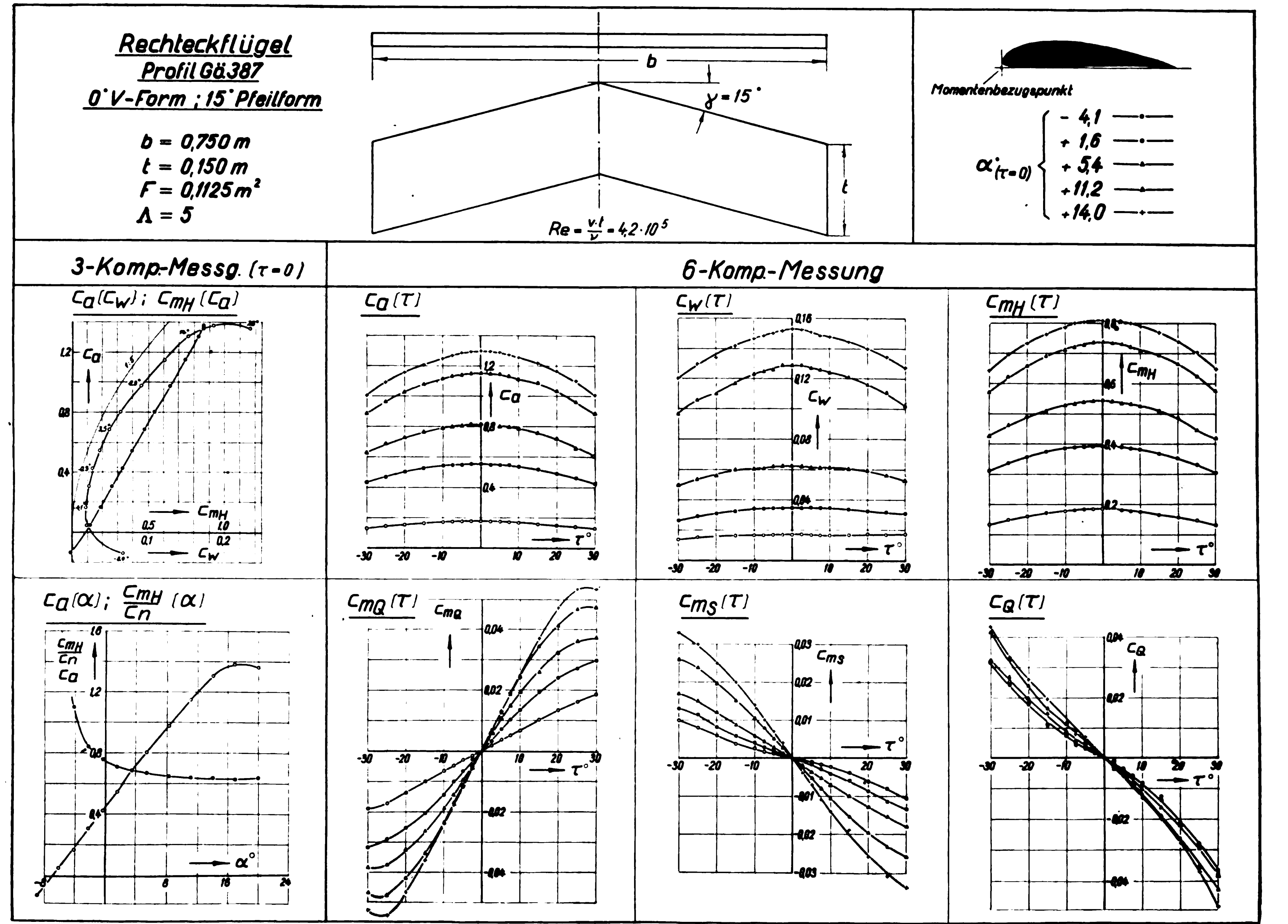


Bild 8. Rechteckflügel 0° V-Form; 15° Pfeilform.

Zahlentafel 1. Auftriebsanstieg $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ und Nullauftriebsrichtung α_0. Rechteckflügel mit Profil Gö 387.

τ (Grad)	Flügel I (Gerader Rechteckflügel) $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$	Flügel I α_0 (Grad)	Flügel II (Rechteckflügel mit 6° V-Form) $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$	Flügel II α_0 (Grad)	Flügel III (Rechteckflügel mit 15° Pfeilform) $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$	Flügel III α_0 (Grad)
— 30	2,85	— 6,7	2,92	— 7,0	2,80	— 6,5
— 25	3,14	— 6,7	3,16	— 7,2	3,10	— 6,7
— 20	3,37	— 6,9	3,35	— 7,3	3,24	— 6,7
— 15	3,48	— 6,9	3,50	— 7,3	3,47	— 6,7
— 10	3,57	— 7,0	3,62	— 7,4	3,57	— 6,8
— 5	3,64	— 7,1	3,66	— 7,4	3,65	— 6,8
0	3,67	— 7,1	3,70	— 7,5	3,64	— 6,8
5	3,64	— 7,1	3,66	— 7,4	3,65	— 6,8
10	3,57	— 7,0	3,62	— 7,4	3,57	— 6,8
15	3,48	— 6,9	3,50	— 7,3	3,47	— 6,7
20	3,37	— 6,9	3,35	— 7,3	3,24	— 6,7
25	3,14	— 6,7	3,16	— 7,2	3,10	— 6,7
30	2,85	— 6,7	2,92	— 7,0	2,80	— 6,5

$$c_a = (c_a)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$$

wurde für alle Flügel nachgeprüft. Es gilt dann auch

$$\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = \left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau.$$

Die Werte $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (s. Zahlentafel 1) wurden entnommen aus Auftragungen c_a (α) für $\tau = 0, 5, 10, \ldots, 30^0$ (s. Bild 9) und sind aus Bild 10 zu ersehen. Die Kurven

$$\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\tau=0} \cdot \cos \tau \text{ und } \left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$$

sind vergleichsweise eingetragen. Die Messungen liegen beim geraden und V-förmigen Flügel zwischen diesen beiden Kurven, beim Pfeilflügel sehr nahe an der $\cos^2$-Kurve. Das für theoretische Rechnungen benötigte $c'_{a\infty}$ ist

$$c'_{a\infty} = 5{,}03.$$

Die ebenfalls in Bild 10 wiedergegebenen Kurven der Nullauftriebsrichtung α_0 über τ (s. Zahlentafel 1) zeigen alle etwa gleiches Verhalten; α_0 nimmt mit zunehmendem Schiebewinkel in geringem Maße zu. Der Wert $(\alpha_0)_{\tau=0}$ hat für den geraden Flügel den ungefähren Wert

$$(\alpha_0)_{\tau=0} = -7^0.$$

Bild 11 zeigt für alle Flügel bei einem Anstellwinkel ($\alpha = 5{,}4^0$) den Verlauf von c_w über τ (c_w parallel zur Längsachse!). Auch hier sind vergleichsweise die Kurven

$$(c_w)_{\tau=0} \cdot \cos \tau$$

und $(c_w)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$

eingetragen, und es zeigt sich wiederum, daß z. T. eine gute Annäherung an die Kurve

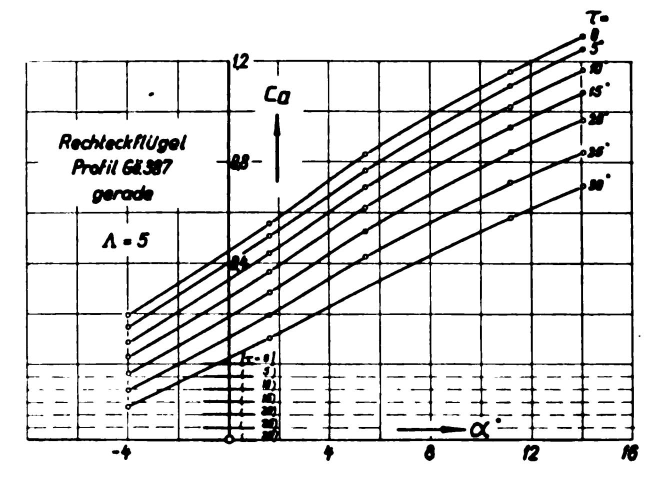
$$c_w = (c_w)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$$

erreicht wird.

Ganz besonders auffällig ist die Übereinstimmung der gemessenen Werte mit dem $\cos^2$-Gesetz für die Abhängigkeit des Kippmomentes $c_{m\,II}$ vom Schiebewinkel, s. Bild 11. Für alle Flügel wird das Gesetz

$$c_{m\,II} = (c_{m\,II})_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$$

sehr gut erfüllt.



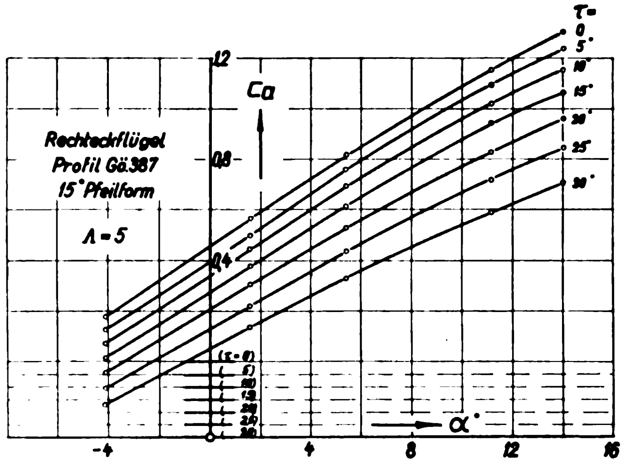


Bild 9. Der Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel c_a (α) bei festem Schiebewinkel τ.

Die Abhängigkeit der Druckpunktlage vom Schiebewinkel bei konstantem Anstellwinkel zeigt für alle Flügel Bild 12a, b, c. Im ganzen Schiebewinkelbereich $\tau = -30^0$ bis $+30^0$ ergibt sich, daß die Druckpunktlage prak-

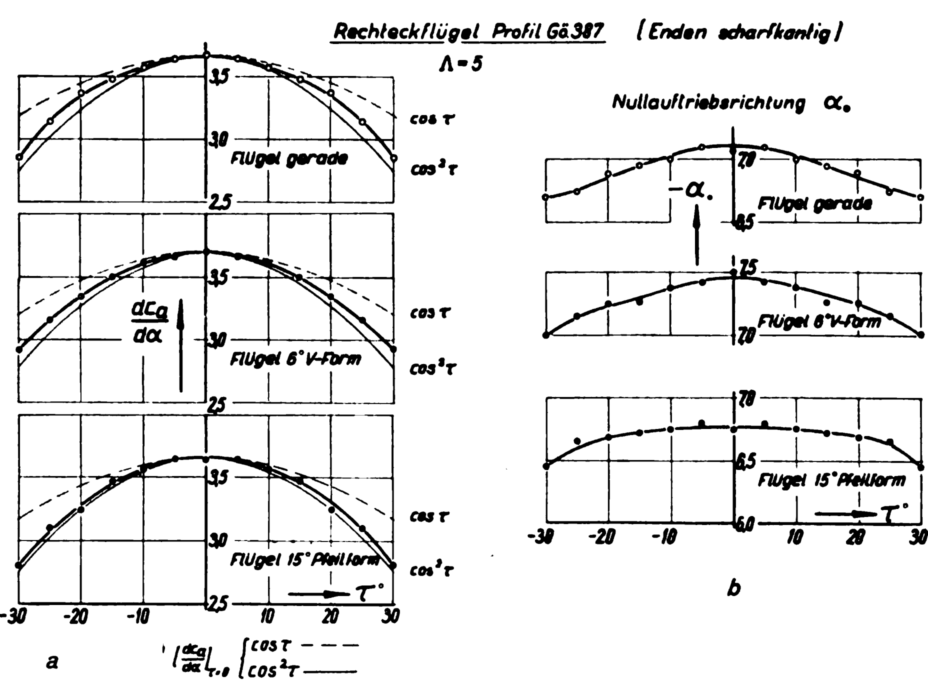


Bild 10. a Der Auftriebsanstieg in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ: $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ (τ) für alle drei Flügel; Vergleich mit $\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$; b Die Nullauftriebsrichtung α_0 in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für alle drei Flügel.

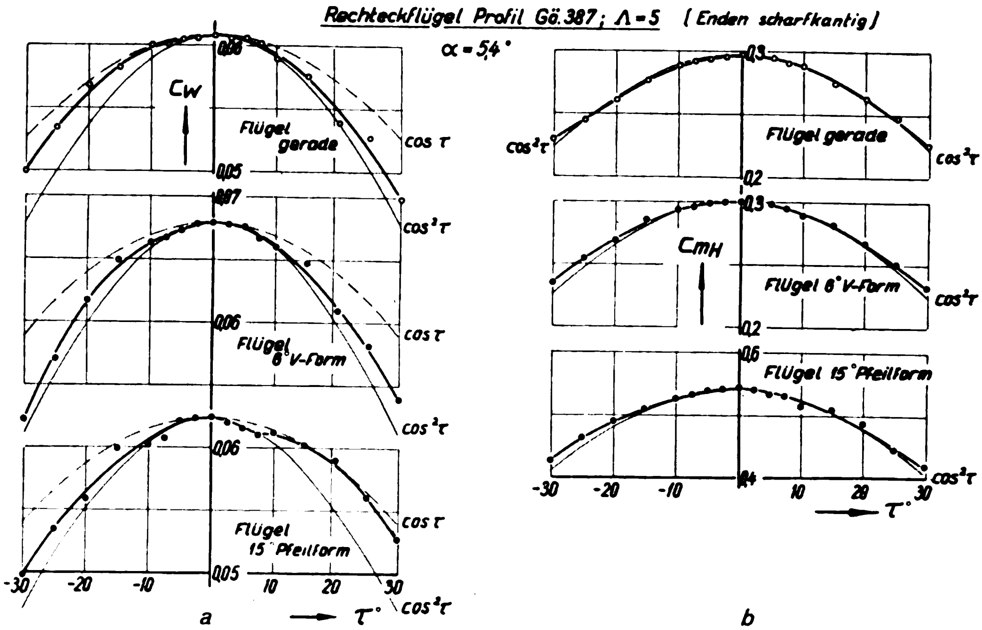


Bild 11. *a* Der Widerstandsbeiwert $c_w(\tau)$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für alle drei Flügel; Vergleich mit $(c_w)_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$. *b* Der Kippmomentenbeiwert $c_{mH}(\tau)$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für alle drei Flügel; Vergleich mit $(c_{mH})_{\tau=0} \cdot \cos^2 \tau$.

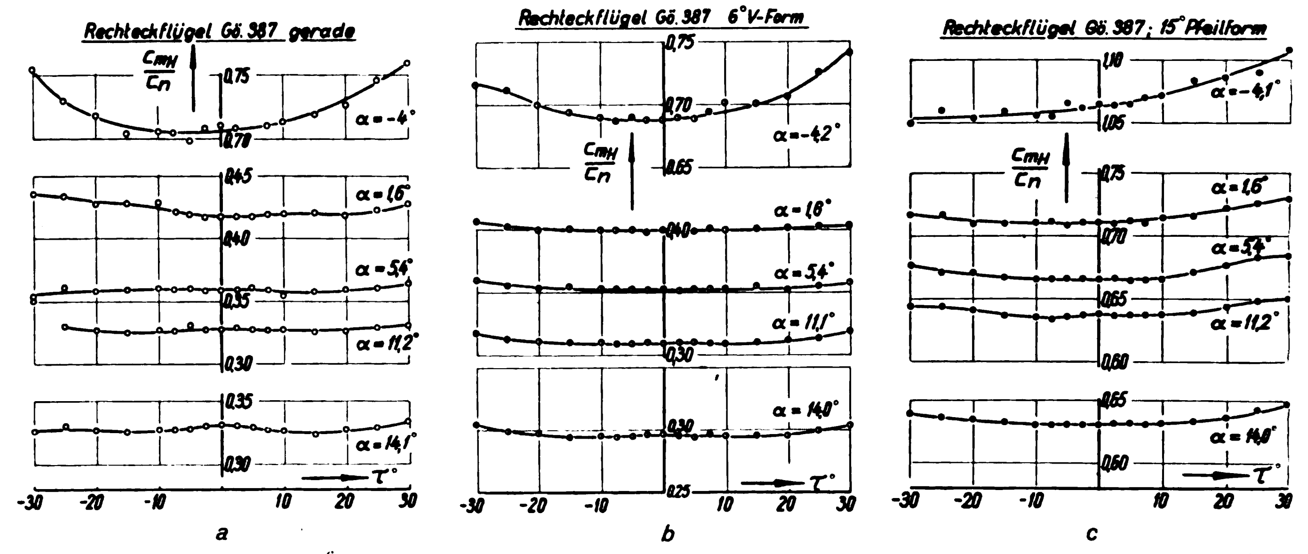


Bild 12. *a* Die Druckpunktlage $\frac{c_{mH}}{c_n}(\tau)$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für festes α (gerader Flügel). *b* Die Druckpunktlage $\frac{c_{mH}}{c_n}(\tau)$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für festes α (V-Flügel). *c* Die Druckpunktlage $\frac{c_{mH}}{c_n}(\tau)$ in Abhängigkeit vom Schiebewinkel τ für festes α (Pfeilflügel).

tisch konstant ist; nur bei $\alpha = -4^0$ wandert der Druckpunkt etwas nach hinten.

Die Stabilitätsbeiwerte von Rollmoment, Giermoment und Querkraft $\frac{\partial c_{mQ}}{\partial \tau}$, $\frac{\partial c_{mS}}{\partial \tau}$ und $\frac{\partial c_Q}{\partial \tau}$ sind in Tafel 2 angegeben. Alle Flügel zeigen sich stabil um die Längsachse $\left(\frac{\partial c_{mQ}}{\partial \tau} > 0\right)$, wobei die Werte für den geraden Flügel etwa halb so groß sind wie für die beiden anderen.

Die Stabilitätsbeiwerte für das Rollmoment $\left(\frac{\partial c_{mQ}}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ sind in Bild 13 über c_a aufgetragen. Eine lineare Abhängigkeit des Rollmomentenanstieges von c_a ist gut zu erkennen. Für den geraden Flügel ist

$$\frac{\partial^2 c_{mQ}}{\partial \tau \, \partial c_a} = 0{,}055.$$

Zum Vergleich ist für den geraden Flügel die theoretische Kurve von Weissinger [5] mit $\varkappa = 1{,}0$ eingetragen. Die Übereinstimmung für den geraden Flügel ist gut. Außerdem ist die Messung von Blenk [1] eingetragen; sie stimmt befriedigend mit unserer Messung überein. Die Abrundung der scharfkantigen Enden des Rechteckflügels hat nur einen sehr geringen Einfluß auf das Rollmoment, wie die eingetragene Kurve zeigt.

Bei V-Form wird $\frac{\partial c_{mQ}}{\partial \tau}$ um einen konstanten von c_a unabhängigen Betrag erhöht. Dieser läßt sich nach Kochanowsky theoretisch berechnen. Im vorliegenden Fall ist theoretisch $\Delta\left(\frac{\partial c_{mQ}}{\partial \tau}\right)_{\nu} = 0{,}072$. Die gemessene Kurve liegt um $\sim 18\,\%$ niedriger als die theoretische.

Die Stabilität um die Hochachse (Richtungsstabilität) ist für den geraden und den V-Flügel etwa gleich; sie ist positiv $\left(\frac{\partial c_{mS}}{\partial \tau} < 0\right)$ d. h. das Gieermoment hat das Bestreben, die vorgehende Flügelhälfte zurückzudrehen. Für den Pfeilflügel liegen die Werte etwas höher.

Die Stabilitätsbeiwerte für das Giermoment $\left(\frac{\partial c_{mS}}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ zeigt Bild 14. Sämtliche Flügel sind richtungsstabil und

Zahlentafel 2. Stabilitätsbeiwerte für Rechteckflügel Gö 387.

Flügel I (gerader Rechteckflügel)				
α^0 (Grad)	$c_{a_{\tau=0}}$	$\frac{\partial c_{mq}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_q}{\partial \tau}$
— 4,0	0,197 (0,201)	0,009 (0)	— 0,0065 (— 0,010)	— 0,0330
+ 1,6	0,559	0,023	— 0,0137	— 0,0360
+ 5,4	0,830 (0,828)	0,038 (0,042)	— 0,0202 (— 0,023)	— 0,0400 (— 0,026)
+ 11,2	1,155 (1,144)	0,065 (0,060)	— 0,0373 (— 0,035)	— 0,0477 (— 0,031)
+ 14,1	1,294 (1,265)	0,078 (0,078)	— 0,0550 (— 0,048)	— 0,0490 (— 0,043)

Die Klammerwerte beziehen sich auf Flügel mit runden Endkappen (s. Bild 4).

Flügel II (Flügel mit 6° V-Form)				
α^0 (Grad)	$c_{a_{\tau=0}}$	$\frac{\partial c_{mq}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_q}{\partial \tau}$
— 4,2	0,214	0,069	— 0,0080	— 0,0640
+ 1,6	0,590	0,089	— 0,0130	— 0,0660
+ 5,4	0,855	0,102	— 0,0182	— 0,0700
+ 11,1	1,195	0,125	— 0,0332	— 0,0815
+ 14,0	1,319	0,138	— 0,0430	— 0,0800

Flügel III (Flügel mit 15° Pfeilform)				
α^0 (Grad)	$c_{a_{\tau=0}}$	$\frac{\partial c_{mq}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$	$\frac{\partial c_q}{\partial \tau}$
— 4,1	0,176	0,038	— 0,0125	— 0,0370
+ 1,6	0,553	0,081	— 0,0220	— 0,0400
+ 5,4	0,816	0,111	— 0,0363	— 0,0440
+ 11,2	1,151	0,135	— 0,0600	— 0,0690
+ 14,0	1,30	0,140	— 0,0770	— 0,0700

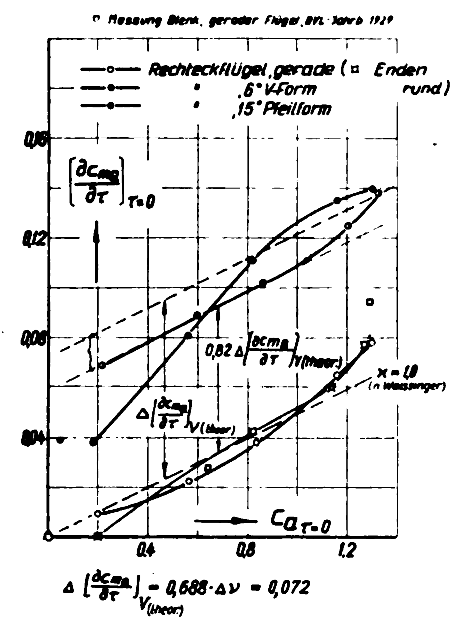


Bild 13. Der Rollmomentenanstieg $\frac{\partial c_{mq}}{\partial \tau}$ in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a für alle drei Flügel.

$\left(-\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}\right)$ wächst mit wachsendem c_a. Nach Weissinger soll $\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$ proportional $(\alpha - \alpha_0)\, c_a$ sein. Unsere Messungen für den geraden Flügel ergeben

$$\frac{\partial^2 c_{ms}}{\partial \tau\, \partial\, [(\alpha - \alpha_0)\, c_a]} = -0{,}082.$$

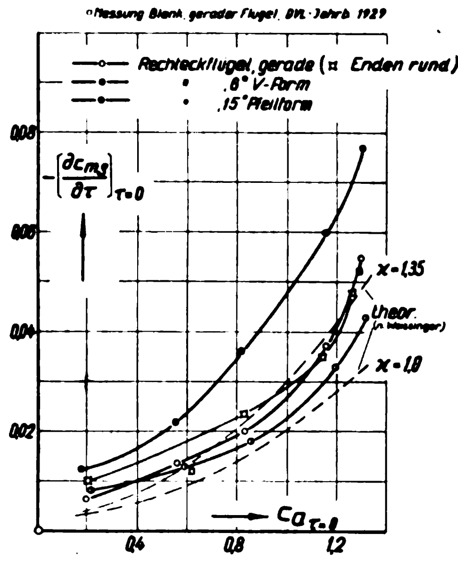


Bild 14. Der Giermomentenanstieg $-\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$ in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a für alle drei Flügel.

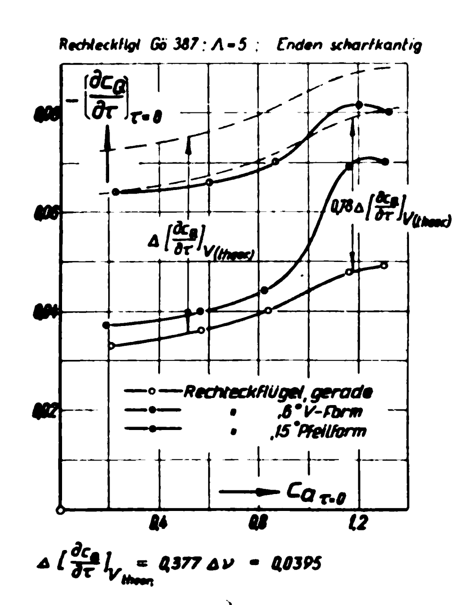


Bild 15. Der Querkraftanstieg $\frac{\partial c_q}{\partial \tau}$ in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert c_a für alle drei Flügel.

Auch in diesem Fall sind die nach Weissinger errechneten Kurven ($\varkappa = 1$) eingetragen. Unter Berücksichtigung der Kleinheit der $\frac{\partial c_{ms}}{\partial \tau}$-Werte ist die Übereinstimmung gut, wobei allerdings die Wahl des Faktors $\varkappa$ eine wesentliche Rolle spielt. Die eingetragene Kurve für den Rechteckflügel mit Abrundung der Enden zeigt nur eine geringe Änderung der Giermomentenwerte. Der Einfluß der V-Form auf die Richtungsstabilität ist nach unseren Messungen außerordentlich klein; das zusätzliche Giermoment durch V-Form wirkt instabilisierend. Durch Pfeilform wird die Richtungsstabilität beträchtlich erhöht.

Die Querkraft-Stabilitätsbeiwerte $\left(\frac{\partial c_q}{\partial \tau}\right)_{\tau=0}$ sind in Bild 15 über c_a aufgetragen. Für den geraden Rechteckflügel gilt die theoretische Formel:

$$\left(\frac{\partial c_q}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = -c_{w_p} \; (c_{w_p} = \text{Beiwert des Profilwiderstandes}).$$

Für unsere Messungen ist $c_{w_P} = 0{,}017$. Die gemessenen Werte von $\frac{\partial c_Q}{\partial \tau}$ liegen also weit oberhalb dieser theoretischen Werte. Dies ist in erster Linie auf die scharf abgeschnittenen Flügelenden zurückzuführen.

Die durch V-Form zusätzlich erzeugte Querkraft zeigt Unabhägigkeit von c_a. Die rechnerische Ermittlung dieser zusätzlichen Querkraft nach Kochanowsky ergibt für $\nu = 6^0$:

$$\left(\frac{\partial c_Q}{\partial \tau}\right)_V = 0{,}377 \cdot \Delta \nu = 0{,}0395.$$

Unsere Meßwerte liegen bei etwa 78% dieses theoretischen Wertes. Die Kurven steigen für alle Flügel mit wachsendem c_a an und erreichen bei $c_{a\,max}$ ebenfalls ihr Maximum.

VII. Zusammenfassung.

An drei Rechteckflügeln (Gö 387) vom Seitenverhältnis $\frac{b^2}{F} = 5$ — einem geraden Rechteckflügel, einem Flügel mit 6^0 V-Form und einem mit 15^0 Pfeilform — wurden Sechskomponentenmessungen im Schiebewinkelbereich von — 30^0 bis + 30^0 bei 5 Anstellwinkeln durchgeführt. Die Ergebnisse sind im vorliegenden Bericht behandelt und in Abbildungen dargestellt. Die für die Messungen benutzte Windkanalwaage wird kurz beschrieben.

Die Proportionalität der c_a-, c_w- und $c_{m\,H}$-Werte mit $\cos^2\tau$ wird ziemlich gut bestätigt, und für die Druckpunktlage bei konstantem Anstellwinkel die Unabhägigkeit vom Schiebewinkel festgestellt.

Der Rollmomentenanstieg $\frac{\partial c_{m\,Q}}{\partial \tau}$ wächst mit dem Anstellwinkel und wird durch V-Form um einen von c_a unabhängigen Betrag vergrößert; das zusätzliche Rollmoment durch Pfeilstellung ist proportional c_a. Der Rollmomentenanstieg bei 6^0 V-Form ist etwa von derselben Größe wie bei 15^0 Pfeilform. Das Giermoment wirkt im Sinne eines Rückdrehens des Flügels bei symmetrischer Anströmung. Durch V-Form wird die Richtungsstabilität etwas verringert; mit der Pfeilform nimmt sie stark zu. Die Messungen von Roll- und Giermoment werden mit der Theorie von Weissinger verglichen. Durch Abrundung der scharfkantigen Flügelenden wird nur ein geringer Einfluß auf die Stabilitätsbeiwerte ausgeübt.

VIII. Schrifttum.

[1] H. Blenk, Göttinger Sechskomponentenmessungen an Flügeln mit V-Form, Pfeilform und Verwindung. DVL-Jahrbuch 1929, S. 183.

[2] M. J. Bamber and R. O. House, Windtunnel investigations of effect of yaw on lateral-stability characteristics. NACA Technical Note No. 703, 1939.

[3] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. IV. Lieferung. 1932.

[4] A. Betz, Applied airfoil theory. Durand, Aerodynamic theory, Bd. II, 1935.

[5] J. Weissinger, Der schiebende Tragflügel bei gesunder Strömung. Erscheint demnächst.

[6] H. Schlichting, Neuere Beiträge der Forschung zur aerodynamischen Flügelgestaltung (Umriß, Verwindung, Rumpfeinfluß). Erscheint demnächst.

Spannungen in Ausschnittversteifungen.

Von K. Marguerre.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Festigkeit.

Es wird an einem für Rechnungen dieser Art typischen Beispiel der Spannungszustand in räumlich gekrümmten Versteifungsringen bestimmt. Für die Höchstbeträge der Spannungsmomente ergeben sich einfache Näherungsformeln.

Gliederung.

1. Einleitung. Der ebene Ring.

Über den genaueren Spannungsverlauf in räumlich gekrümmten Ringen, wie sie als Aussteifungen von Ausschnitten in Schalen aller Art vorkommen, ist nur wenig bekannt. Die vorliegende Untersuchung betrachtet als ein die typischen Verhältnisse erfassendes Beispiel einen Ring, dessen Mittellinie entsteht durch den Schnitt zweier Kreiszylinder von verschieden großem Durchmesser[1]). Drei einfache Lastfälle werden insbesondere durchgerechnet:

1. Belastung durch Längs- und Umfangsspannungen in beiden Zylindern; dabei sollen die Zylinderspannungen untereinander in einem solchen Verhältnis stehen, wie es sich in den durch Innendruck belasteten Zylindern einstellen würde,
2. Belastung durch reinen Längszug im großen Zylinder,
3. Belastung durch reinen Schub (Torsion) im großen Zylinder.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll angenommen werden, daß der Ring, verglichen mit der Schale, sehr kräftig sei, so daß seine Verformungen den Spannungszustand in der Schale rückwirkend nicht merklich beeinflussen. Man erhält auf diese Weise eine obere Schranke für die in einer Schalenkonstruktion wirklich entstehenden Ringbeanspruchungen, denn nach den Lehren der Schalenstatik gruppieren die Schalen bei elastischer Nachgiebigkeit des Ringes die auf ihn abgesetzten Kräfte so um, daß der Ring entlastet wird.

Wir diskutieren zunächst ausführlicher den Rechnungsgang im ersten Lastfall.

Die Lösung ist sofort angebbar in dem Grenzfall $a \gg b$ (s. Bild 1 u. 7), wenn der Ring also »praktisch« eben ist. Dann treten die vom kleinen Zylinder ausgeübten Kräfte zurück neben den Kräften des großen Zylinders: der Kraft $p\,a$ in Richtung der Umfangskreise und der Kraft $\frac{p\,a}{2}$ in Richtung der Erzeugenden. Da ein allseitig gleicher Zug $\frac{p\,a}{2}$ den Ring dehnt, ohne ihn zu verbiegen, kann man die Biegebeanspruchung so rechnen, als ob der Ring in der im Bild 2 dargestellten Weise belastet wäre.

[1]) Der kleinere Zylinder ist in Bild 1 außerhalb des großen dargestellt. Alle Ringformeln gelten aber genau so, wenn er ganz oder zum Teil in den großen Zylinder hineinragt; der kleine Zylinder kann dabei beliebig kurz sein, z. B. auch durch den Ring selbst gebildet werden.

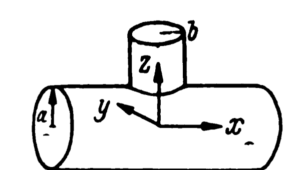


Bild 1. Schnitt zweier Zylinder.

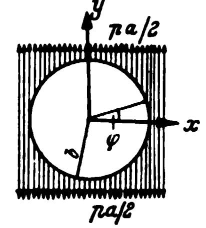


Bild 2. Der erste Lastfall in der Grenze $b/a = \varepsilon \longrightarrow 0$.

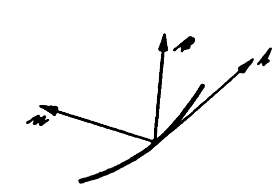


Bild 3. Zur Orientierung der Achsen t, n, f beim ebenen Ring.

(Die Lastfälle 1 und 2 werden hier also bis auf die Vertauschung der Achsen identisch.)

Die Gleichgewichtsbedingungen am Ringelement $ds = b\,d\varphi$ schreiben wir mit Rücksicht auf die später vorzunehmende Übertragung auf das räumliche Problem gleich in vektorieller Form. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{t}$ den in Richtung wachsender Bogenlänge s weisenden Einheitsvektor der Tangente, mit $\mathfrak{n}$ den auf den Kreismittelpunkt zu gerichteten Einheitsvektor der Normalen, mit $\mathfrak{k}$ den auf der Ringebene senkrechten Einheitsvektor (Bild 3). $\mathfrak{N}$ sei die Resultierende, $\mathfrak{M}$ das Moment der an einem Schnitt mit der äußeren Normalen $\mathfrak{t}$ angreifenden Schnittspannungen; an dem Schnittufer für das $\mathfrak{t}$ innere Normale ist, wirken entsprechend die Resultanten $-\mathfrak{N}, -\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ mit s veränderlich sind, unterscheiden sich die Beträge auf »Vorder«- und »Rück«seite eines Stückes von der Länge ds um Differenzen $d\mathfrak{N}$, $d\mathfrak{M}$. Das Kräftegleichgewicht fordert daher nach Bild 4:

$$d\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\,ds = 0,$$

das Momentengleichgewicht (bei Fehlen einer äußeren Momentenbelastung)

$$d\mathfrak{M} + (\mathfrak{t}\,ds) \times \mathfrak{N} = 0,$$

(wobei die Wahl des Momentenbezugspunktes innerhalb der Strecke ds gleichgültig ist, da die von dorther rührenden

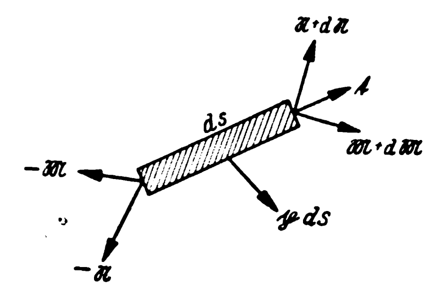


Bild 4. Zum Gleichgewicht des Ringelementes ds.

Unterschiede in der Grenze $ds \to 0$ von höherer Ordnung klein werden). — Die so gewonnenen vektoriellen Gleichgewichtsaussagen für das Stabelement

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{N}}{ds} + \mathfrak{p} = 0, \\ \frac{d\mathfrak{M}}{ds} + \mathfrak{t} \times \mathfrak{N} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (1.1)$$

schreiben sich, wenn man Last, Schnittkraft und Moment in Komponenten nach den Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ zerlegt, in der Form

$$\frac{d}{ds}(N\,\mathfrak{t} + Q\,\mathfrak{n}) + p_t\,\mathfrak{t} + p_n\,\mathfrak{n} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(M\,\mathfrak{k}) + \mathfrak{t} \times (N\,\mathfrak{t} + Q\,\mathfrak{n}) = 0,$$

und sind wegen

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \frac{1}{b}\,\mathfrak{n}, \quad \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -\frac{1}{b}\,\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{t} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{k}, \quad \ldots \quad (1.2)$$

gleichwertig mit skalaren Aussagen

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{b} = -p_t, \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{b} = -p_n, \quad \frac{dM}{ds} + Q = 0, \quad (1.3)$$

die man in unserem ebenen Fall natürlich auch unmittelbar aus Bild 5 hätte ablesen können.

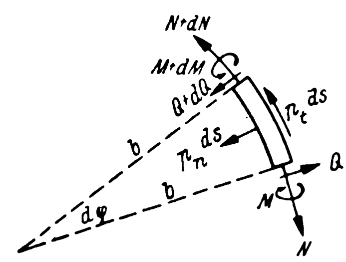


Bild 5. Zum Gleichgewicht des ebenen Ringelementes.

Bei der hier untersuchten Belastung ist nach Bild 6 für die Lastkomponenten p_t, p_n (Dimension: Kraft je Längeneinheit) zu setzen:

$$p_t = \frac{p\,a}{2} \sin\varphi\cos\varphi, \quad -p_n = \frac{p\,a}{2}\sin^2\varphi. \quad \ldots \quad (1.3')$$

Die Integration des Systems (1.3) ist ohne Schwierigkeit: Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich mit $ds = b\,d\varphi$:

$$\left.\begin{aligned} N &= A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{p\,a\,b}{2}\cos^2\varphi, \\ Q &= B\cos\varphi - A\sin\varphi - \frac{p\,a\,b}{2}\cos\varphi\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

Die zwei Integrationskonstanten A und B bestimmen sich aus den Symmetrieforderungen, daß die Querkraft Q an den Stellen $\varphi = 0$, $\pi/2$ verschwinden muß; es ist

$$A = B = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.4')$$

Setzt man (1.4) und (1.4') in die dritte Gleichung (1.3) ein und integriert, so kommt:

$$M = X - \frac{p\,a\,b^2}{4}\cos^2\varphi \quad \ldots \ldots \quad (1.5)$$

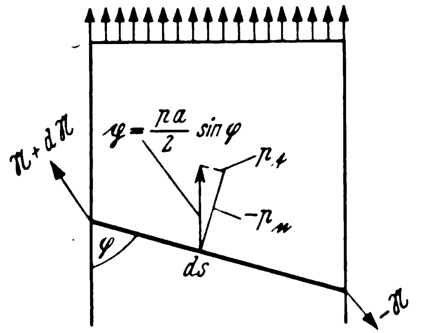


Bild 6. Zerlegung der auf das Ringelement ds wirkenden Hautkraft.

Die Integrationskonstante X bleibt **statisch unbestimmt**; sie muß mit Hilfe einer Formänderungsaussage, z. B. der Castiglianoschen Minimalaussage

$$\frac{\partial}{\partial X}\int \frac{M^2}{2EJ}\,ds = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1.6)$$

berechnet werden. Im Sonderfall EJ = konst folgt aus (1.5) und (1.6)

$$M = -\frac{p\,a\,b^2}{8}\cos 2\varphi \quad \ldots \ldots \quad (1.7)$$

Es ergibt sich also, daß die beiden Extremwerte des Momentes an den Stellen $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ entgegengesetzt gleich sind und den Betrag

$$M_{max} = \frac{p\,a\,b^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.7')$$

haben.

Die Gleichung (1.5) für das Moment läßt sich auch noch auf einem etwas anderen Wege herleiten, der sich beim räumlichen Problem als der sehr viel einfachere erweist, und den wir deshalb noch angeben wollen. Nach Bild 6 lautet die erste Vektorgleichung (1.1), wenn man nicht nach den »natürlichen« ortsveränderlichen Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ zerlegt, sondern nach den, die raumfesten Richtungen x, y, z, kennzeichnenden ortsunabhängigen Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$

$$\frac{d\mathfrak{N}}{b\,d\varphi} + \frac{p\,a}{2}\,\mathfrak{j}\sin\varphi = 0;$$

die Integration dieser Gleichung ist noch einfacher als die der beiden ersten Gleichungen (1.3); sie liefert

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 + \frac{p\,a\,b}{2}\,\mathfrak{j}\cos\varphi = C_1\,\mathfrak{i} + C_2\,\mathfrak{j} + \frac{p\,a\,b}{2}\,\mathfrak{j}\cos\varphi, \quad (1.8)$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} Q &= \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{n} = -C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi - \frac{p\,a\,b}{2}\sin\varphi\cos\varphi, \\ N &= \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{t} = -C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \frac{p\,a\,b}{2}\cos^2\varphi. \end{aligned}\right\} (1.8')$$

Die Integrationskonstanten C_1 u. C_2 verschwinden wegen $Q(0) = Q(\pi/2) = 0$; es ist also

$$\mathfrak{N} = \frac{p\,a\,b}{2}\,\mathfrak{j}\cos\varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1.8'')$$

und damit folgt wegen $\mathfrak{t} \times \mathfrak{j} = -\mathfrak{k}\sin\varphi$ und $\mathfrak{M} \equiv M\,\mathfrak{k}$ aus der zweiten Gleichung (1.1) die Gleichung (1.5):

$$M = \frac{p\,a\,b}{2}\int \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = X - \frac{p\,a\,b^2}{4}\cos^2\varphi \quad (1.9)$$

— Die Berechnung des räumlich gekrümmten Ringes vollzieht sich wie die des ebenen in zwei Schritten: Bestimmung der Schnittresultanten (Kräfte und Momente), soweit dies auf Grund der **statischen** Aussagen (1.1) möglich ist, und Berechnung der Statisch-Unbestimmten auf Grund der **Formänderungsbedingungen**. Und zwar läßt sich die Aufgabe am einfachsten lösen, wenn man für die Integration der Differentialgleichungen (1.1) die Vektoren nach dem ortsunabhängigen System von Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ zerlegt und erst beim zweiten Schnitt den Übergang auf ein an die Raumkurve angeheftetes Achsenkreuz (Tangente $\mathfrak{t}$ und zwei Normalen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$) vollzieht; die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Symmetrie- und Formänderungsbedingungen — und **nur diese** — erfordert die Zerlegung nach den natürlichen Achsen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, weil das Formänderungsgesetz und die Symmetrieaussagen sich nur für solche Komponenten des Kraft- und Momentenvektors einfach formulieren lassen.

2. Geometrie der Raumkurve.

Der erste Schritt zur Lösung des räumlichen Ringproblems ist die Aufstellung der die **Geometrie** der Raumkurve kennzeichnenden Formeln. — Die Raumkurve ist mit den Bezeichnungen von Bild 7 gegeben durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

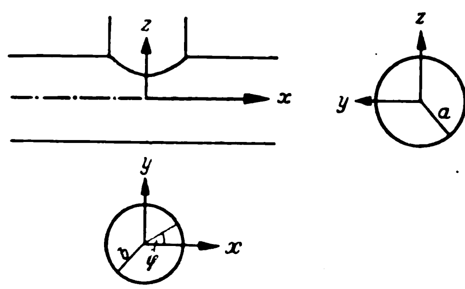


Bild 7. Die drei Projektionen der Raumkurve.

Wählen wir als Ortsparameter den Winkel φ der Projektion in die xy-Ebene, und setzen $b/a = \varepsilon$, so erhalten wir das Gleichungstripel

$$\frac{x}{b} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi, \quad \frac{z}{b} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}. \quad (2.1)$$

Von der Geometrie der durch (2. 1) dargestellten Raumkurve brauchen wir zwei Gruppen von Formeln. 1. Die Ausdrücke für die Bogenlänge und für die drei Einheitsvektoren eines »begleitenden Dreikantes«, 2. die Beziehungen, welche die Lage des Kurvenelementes gegen die Kraftrichtungen zum Ausdruck bringen. — Die Bogenlänge ergibt sich aus

$$ds = \sqrt{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \dot{x} = -b\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \dot{y} = b\cos\varphi, \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \dot{z} = -b\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad . . (2.2)$$

zu

$$ds = b\,d\varphi\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} \quad . . . . (2.3)$$

Führt man den Winkel ψ der Raumkurventangente gegen ihre Projektion ein:

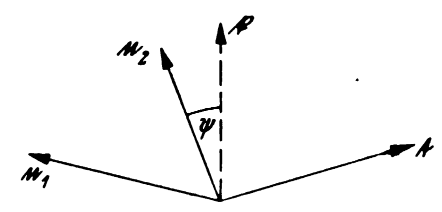


Bild 8. Definition des Winkels ψ.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dz}{b\,d\varphi} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}, \quad . . . (2.4)$$

so gilt

$$\mathfrak{t} = \frac{dx}{ds}\mathfrak{i} + \frac{dy}{ds}\mathfrak{j} + \frac{dz}{ds}\mathfrak{k}$$
$$= (\dot{x}\,\mathfrak{i} + \dot{y}\,\mathfrak{j} + \dot{z}\,\mathfrak{k})\frac{d\varphi}{ds} = (\dot{x}\,\mathfrak{i} + \dot{y}\,\mathfrak{j} + \dot{z}\,\mathfrak{k})\frac{\cos\psi}{b},$$

wobei cos und sin von ψ nach (2. 4) gegeben sind durch

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}, \quad \sin\psi = -\frac{\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}. \quad (2.4')$$

Legen wir die beiden Normalen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ fest durch die an sich willkürliche, mit Rücksicht auf die Einfachheit des Formelapparates zweckmäßige) Verabredung, $\mathfrak{n}_1$ »waagerecht« legen zu wollen ($\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{k} = 0$, $\mathfrak{n}_1 \cdot \mathfrak{t} = 0$, $\mathfrak{n}_1^2 = 1$), so erhält man für das begleitende Dreibein die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t} &= (-\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi)\cos\psi + \mathfrak{k}\sin\psi, \\ \mathfrak{n}_1 &= -(\mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi), \\ \mathfrak{t}\times\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 &= (\mathfrak{i}\sin\varphi - \mathfrak{j}\cos\varphi)\sin\psi + \mathfrak{k}\cos\psi. \end{aligned}\right\} (2.5)^{2)}$$

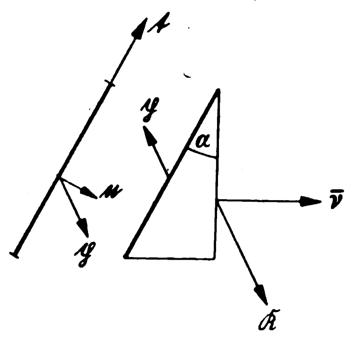


Bild 9. Bestimmung der Linienlast $\mathfrak{p}$ (das Bild liegt in der Tangentialebene des Zylinders).

Die Kräfte, die den Ring beanspruchen, werden von den Zylinderhäuten auf ihn ausgeübt.

Wir betrachten Bild 9, wo ein Ringelement ds dargestellt ist und (etwas verschoben) ein Hautelement, an dessen einer Fläche (mit der Normalen $\bar{\nu}$) eine Schnittkraft $\mathfrak{K}$ angreifen möge. Die auf das Ringelement wirkende Belastung $\mathfrak{p}$ ist wegen des Gleichgewichts im Hautelement gegeben durch

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{K}\cos\alpha = \mathfrak{K}(\mathfrak{n}\cdot\bar{\nu}) \quad . . . . . . (2.6)$$

Dabei ist die Ringnormale $\mathfrak{n}$ dadurch gekennzeichnet, daß sie mit $\bar{\nu}$ und $\mathfrak{t}$ in einer Ebene liegt, also in die Tangentialebene des betr. Zylinders fällt. Wir erhalten sie am einfachsten über die Flächennormale $\mathfrak{n}_I$ bzw. $\mathfrak{n}_{II}$, auf der sie senkrecht stehen muß. — Die äußere Flächennormale eines Kreiszylinders fällt in die Richtung des Radiusvektors. Wegen (2. 1) ist daher

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{n}_I &= \mathfrak{j}\,\varepsilon\sin\varphi + \mathfrak{k}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}, \\ \mathfrak{n}_{II} &= \mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi\ (= -\mathfrak{n}_1). \end{aligned}\right\} \quad . . . (2.7)$$

Mit den aus Bild 10 ersichtlichen Vorzeichenfestsetzungen

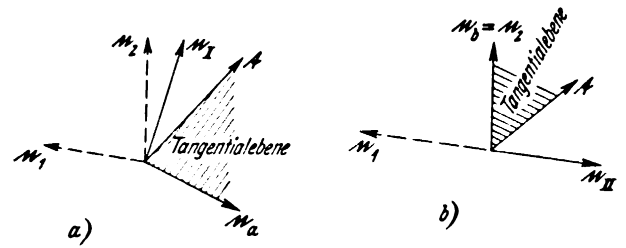


Bild 10. Gegenseitige Lage der verschiedenen Normalen $\mathfrak{n}$.

werden die gesuchten Kurvennormalen

$$\left.\begin{aligned} &\text{bezüglich des großen Zylinders} \\ &\mathfrak{n}_a = \mathfrak{t}\times\mathfrak{n}_I = \mathfrak{i}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}} \\ &\qquad + \mathfrak{j}\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}} - \mathfrak{k}\,\varepsilon\sin^2\varphi\cos\psi, \\ &\text{bezüglich des kleinen Zylinders} \\ &\mathfrak{n}_b\ (= \mathfrak{n}_2) = \mathfrak{n}_{II}\times\mathfrak{t} = \mathfrak{i}\sin\varphi\sin\psi \\ &\qquad - \mathfrak{j}\cos\varphi\sin\psi + \mathfrak{k}\cos\psi. \end{aligned}\right\} \quad . . (2.8)$$

Insbesondere brauchen wir später den Winkel zwischen der Tangente $\mathfrak{t}' = (\mathfrak{j}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} - \mathfrak{k}\,\varepsilon\sin\varphi)$ an einen Umfangskreis des großen Zylinders und der Normalen $\mathfrak{n}_a$; es ist

$$\cos(\mathfrak{t}', \mathfrak{n}_a) = \mathfrak{t}\cdot\mathfrak{n}_a = \sin\varphi\cos\psi. \quad . . . . (2.8')$$

[2]) Es ist unnötig, und im allgemeinen unzweckmäßig, das sog. natürliche Dreibein $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ (Tangente, Hauptnormale, Binormale) zur Beschreibung der Kurve heranzuziehen. Denn eine Bestimmung des natürlichen Dreibeins, das zu den mechanisch allein interessierenden Hauptträgheitsachsen des Querschnitts keinerlei ausgezeichnete Beziehung hat, erfordert die Kenntnis der dritten Ableitungen des Systems (2. 1), während (2. 5) aus den ersten Ableitungen allein sich ergibt. Daß beim natürlichen Dreibein eine der Krümmungskomponenten verschwindet, ist ein Vorteil, der gegen diesen Nachteil nicht ins Gewicht fällt.

3. Die Gleichgewichtsaussagen.

Die Gleichgewichtsaussagen für das Ringelement lauten (wenn wir wieder zunächst von verteilten äußeren Momenten absehen) in vektorieller Form wie im ebenen Fall

$$\frac{d\mathfrak{N}}{ds}+\mathfrak{p}=0,\quad \frac{d\mathfrak{M}}{ds}+\mathfrak{t}\times\mathfrak{N}=0. \quad . \quad . \quad . \quad (3.1)$$

Dabei ist $\mathfrak{p}\,ds$ der am Ringstück angreifende Vektor der äußeren Kraft, wie er sich aus (2. 6) ergibt; der Schnittkraftvektor

$$\mathfrak{N}=N\,\mathfrak{t}+Q_1\,\mathfrak{n}_1+Q_2\,\mathfrak{n}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.1')$$

hat diesmal als Komponenten die Längskraft N und die beiden Querkräfte Q_1 und Q_2; der Schnittmomentenvektor

$$\mathfrak{M}=M_T\,\mathfrak{t}+M_1\,\mathfrak{n}_1+M_2\,\mathfrak{n}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.1'')$$

hat als Komponenten das Torsionsmoment M_T und die beiden Biegemomente M_1 und M_2.

Die Integration der Gleichungen (3. 1) erfolgt in zwei Schritten:

$$1.\quad \mathfrak{N}=\mathfrak{N}(0)-\int_0^s\mathfrak{p}\,ds=\mathfrak{N}(0)-b\int_0^\varphi\mathfrak{p}\,\frac{d\varphi}{\cos\psi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.2)$$

$$2.\quad \mathfrak{M}=\mathfrak{M}(0)-\int_0^s\mathfrak{t}\times\mathfrak{N}\,ds=\mathfrak{M}(0)-b\int_0^\varphi\mathfrak{t}\times\mathfrak{N}\,\frac{d\varphi}{\cos\psi}. \quad (3.3)$$

Die Integrationskonstante $\mathfrak{N}(0)$ läßt sich (wie im ebenen Grenzfall) durch Symmetriebetrachtungen finden, von der zweiten Konstanten $\mathfrak{M}(0)$ bleibt eine Komponente unbestimmt: Die Symmetrie von System und Belastung erfordert, daß an den Punkten $\varphi=0$ und $\varphi=\pi/2$ die drei antimetrischen Größen Q_1, Q_2 und M_T (die Schub-Resultanten) verschwinden müssen; aus $Q_1(0)=0$ und $Q_1(\pi/2)=0$ folgen die $\mathfrak{i}$ und die $\mathfrak{j}$-Komponenten, aus $Q_2(0)=Q_2(\pi/2)=0$ die $\mathfrak{k}$-Komponente von $\mathfrak{N}(0)$; aus $M_T(0)=0$ und $M_T(\pi/2)=0$ ergibt sich $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$-Komponente von $\mathfrak{M}(0)$ — die $\mathfrak{k}$-Komponente von $\mathfrak{M}(0)$ bleibt offen; sie muß aus einer Formänderungsaussage bestimmt werden[3]).

Bezeichnen wir die Intensitäten der in Richtung der Erzeugenden bzw. der Umfangskreise der beiden Zylinder gerichteten Zylinderschnittkräfte der Reihe nach mit

p_1, p_2 für den großen Zylinder,
p_3, p_4 für den kleinen Zylinder,

so wird nach (2. 6), (2. 8) und (2. 8′)

$$\mathfrak{p}=p_1\mathfrak{i}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}+p_2(\mathfrak{j}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}-\varepsilon\,\mathfrak{k}\sin\varphi)\sin\varphi\cos\psi+p_3\,\mathfrak{k}\cos\psi+p_4(\mathfrak{j}\cos\varphi-\mathfrak{i}\sin\varphi)\sin\psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.5)$$

Es ist also

$$\mathfrak{N}_1=-\int p_1\mathfrak{i}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}\,ds=-p_1 b\,\mathfrak{i}\int\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=-p_1 b\,\mathfrak{i}\,\frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi),$$

$$\mathfrak{N}_{21}=-\int p_2\,\mathfrak{j}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\psi\,ds=+\frac{p_2\,\mathfrak{j}\,b}{2}\left[\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}+\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right],$$

$$\mathfrak{N}_{22}=\int p_2\,\mathfrak{k}\,\varepsilon\sin^2\varphi\cos\psi\,ds=p_2\,\mathfrak{k}\,\varepsilon\,b\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right),$$

$$\mathfrak{N}_3=-\int p_3\,\mathfrak{k}\cos\psi\,ds=-p_3\,\mathfrak{k}\,b\,\varphi,$$

$$\mathfrak{N}_{41}=-\int p_4\,\mathfrak{i}\sin\varphi\sin\psi\,ds=+p_4 b\,\mathfrak{i}\int\frac{\varepsilon\sin^2\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=-p_4\,\mathfrak{i}\frac{b}{2\varepsilon}\left[\sin\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi)\right],$$

$$\mathfrak{N}_{42}=\int p_4\,\mathfrak{j}\cos\varphi\sin\psi\,ds=p_4 b\,\mathfrak{j}\,\varepsilon\int\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=p_4\,\mathfrak{j}\frac{b}{2\varepsilon}\left[\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.6)$$

[3]) Da — aus Symmetriegründen — $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ nur die geradzahligen Harmonischen in φ enthalten, folgt $Q_2(\pi/2)=0$ aus $Q_2(0)=0$. Die erwähnten 6 Symmetriebedingungen liefern daher nur 5 unabhängige Aussagen für die Bestimmung der 6 Integrationskonstanten.

Man bemerkt, daß die Lastanteile p_2 und p_3, welche $\mathfrak{N}_{22}$ und $\mathfrak{N}_3$ erzeugen, für sich keine Gleichgewichtsgruppen bilden (was man sich anschaulich leicht klar machen kann), denn die $\mathfrak{N}$ enthalten einen nicht-periodischen Anteil. Er fällt heraus, wenn $p_3=\frac{\varepsilon}{2}p_2$ gesetzt wird. Das ist z. B. der Fall, wenn die 4 Kräfte p_i durch denselben Innendruck p in den beiden Zylindern entstehen:

$$p_1=\frac{p\,a}{2},\quad p_2=p\,a,\quad p_3=\frac{p\,b}{2},\quad p_4=p\,b. \quad . \quad . \quad (3.7)$$

Setzen wir diese Werte in (3. 6) ein und fassen zusammen, so ergibt sich

$$\mathfrak{N}=\frac{p\,a\,b}{2}\left[-\mathfrak{i}\sin\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}+2\,\mathfrak{j}\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}-\varepsilon\,\mathfrak{k}\sin\varphi\cos\varphi\right]. \quad (3.6')$$

Die Kraft $\mathfrak{N}$ ist durch (3. 6′) mit den richtigen Integrationskonstanten dargestellt, denn der $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{k}$-Anteil verschwindet bei $\varphi=0$, der $\mathfrak{j}$-Anteil bei $\varphi=\pi/2$.

Die Momentenbestimmung nach (3. 3) erfordert die Kenntnis der drei Vektoren $\mathfrak{t}\times\mathfrak{i}$, $\mathfrak{t}\times\mathfrak{j}$, $\mathfrak{t}\times\mathfrak{k}$. Man findet nach (2. 5)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{t}\times\mathfrak{i}&=\mathfrak{j}\sin\psi-\mathfrak{k}\cos\varphi\cos\psi,\\ \mathfrak{t}\times\mathfrak{j}&=-\mathfrak{i}\sin\psi-\mathfrak{k}\sin\varphi\cos\psi,\\ \mathfrak{t}\times\mathfrak{k}&=\mathfrak{i}\cos\varphi\cos\psi+\mathfrak{j}\sin\varphi\cos\psi.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3.8)$$

Setzt man das und (3. 6′) in (3. 3) ein, und führt die elementaren Integrationen aus, so kommt mit $\mathfrak{M}(0)=X\mathfrak{k}$

$$\mathfrak{M}=X\,\mathfrak{k}+\frac{p\,a\,b^2}{2}\left(\mathfrak{i}\frac{\varepsilon\cos^3\varphi}{3}-\mathfrak{k}\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{3\,\varepsilon^2}\right). \quad (3.9)$$

Vermöge der Transformationsgleichungen (2. 5) erhalten wir damit für die natürlichen Komponenten M_T, M_1 M_2 des Momentenvektors:

$$\left.\begin{aligned}M_T&=\frac{p\,a\,b^2}{6}\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi+X\sin\psi,\\ M_1&=-\frac{p\,a\,b^2}{6}\,\varepsilon\cos^4\varphi,\\ M_2&=-\frac{p\,a\,b^2}{6}\,\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2+\varepsilon^4\sin^2\varphi\cos^4\varphi}{\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}+X\cos\psi;\end{aligned}\right\} \quad (3.9')$$

wie man sieht, erfüllen diese Ausdrücke die Symmetriebedingungen $M_T(0)=M_T(\pi/2)=0$.

Von Interesse ist der Verlauf der 3 Momente insbesondere in dem praktisch wichtigen Fall $\varepsilon\ll 1$ (kleiner Ausschnitt). Entwickelt man nach Potenzen von ε, so wird:

$$M_T=\frac{p\,a\,b^2}{6}\,\frac{1}{\varepsilon}\sin\varphi\cos\varphi\left[1-\varepsilon^2\left(1+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{2}\right)-\ldots\right]-\varepsilon X\sin\varphi\cos\varphi\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^4\varphi+\ldots\right),$$

$$M_1=-\frac{p\,a\,b^2}{6}\,\varepsilon\cos^4\varphi,$$

$$M_2=\frac{p\,a\,b^2}{6}\left\{-\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-\left(2\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\sin^4\varphi\right)-\ldots\right]\right\}+X\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\ldots\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3.9'')$$

4. Die Berechnung der Statisch-Unbestimmten X. Einfache Formeln für die Momentenhöchstbeträge.

Die Berechnung der Integrationskonstanten X erfordert eine Formänderungsaussage. Benutzen wir sie in Form der Castiglianoschen Minimalaussage für die Formänderungsenergie, so ist es nicht notwendig, in die Geometrie des Verformungszustandes hineinzusteigen[4]). In vektorieller Schreibweise lautet die Castiglianosche Forderung

$$\int\mathfrak{M}\cdot\tilde{\mathfrak{k}}\,ds=\text{Min.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.1)$$

Dabei ist $\tilde{\mathfrak{k}}$ der Vektor der Krümmungsänderung

$$\tilde{\mathfrak{k}}=\vartheta\,\mathfrak{t}+\varkappa_1\,\mathfrak{n}_1+\varkappa_2\,\mathfrak{n}_2,$$

[4]) Zur Geometrie des Verformungszustandes vgl.: K. Marguerre, Bestimmung der Verzerrungsgrößen eines räumlich gekrümmten Stabes mit Hilfe des Prinzips von Castigliano, ZAMM, August 1941.

mit drei Komponenten: der Windungsänderung (Verwindung) ϑ und den Krümmungsänderungen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Als Formänderungsgesetz legen wir das des dünnen, schwachgebogenen Stabes zugrunde, wobei wir gleich den allgemeinen Fall der schiefen Biegung betrachten; unter Beachtung von

$$\sigma_x = E\,(w''\,\bar{z} + v''\,\bar{y}) = E\,(\varkappa_1\,\bar{z} - \varkappa_2\,\bar{y})$$

($\bar{y}$, $\bar{z}$ Abstände von der Schwerpunktfaser des Stabes) und

$$M_1 = \int \sigma_x\,\bar{z}\,d\,F, \quad M_2 = -\int \sigma_x\,\bar{y}\,d\,F$$

lautet es

$$\left.\begin{aligned} M_T &= G\,J_T\,\vartheta, \\ M_1 = G\,J_1\,\varkappa_1 - E\,J_{12}\,\varkappa_2, \quad M_2 &= G\,J_2\,\varkappa_2 - E\,J_{12}\,\varkappa_2. \end{aligned}\right\} \quad (4.\,2)$$

Darin sind J_1, J_2, J_{12} die Trägheits- und Zentrifugalmomente bezogen auf die Achsen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ ($\bar{y}$ und $\bar{z}$), J_T der Torsionswiderstand. Lösen wir (4. 2) nach den Krümmungen auf und setzen in (4. 1) ein, so erhalten wir mit der Abkürzung

$$\Delta = 1 - \frac{J_{12}^2}{J_1\,J_2}$$

die Bestimmungsgleichung für X:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,X}\int \mathfrak{M}\,\mathfrak{f}\,d\,s = 0 &= \int \frac{1}{E\,\Delta}\left(\frac{M_2^{(0)}}{J_2} + \frac{M_1^{(0)}\,J_{12}}{J_1\,J_2}\right)\cos\varphi\,d\,s \\ &+ \int \frac{M_T^{(0)}}{G\,J_T}\sin\varphi\,d\,s + X\left[\int \frac{\cos^2\varphi\,d\,s}{E\,J_2\,\Delta} + \int \frac{\sin^2\varphi\,d\,s}{G\,J_T}\right] \\ &= \int \frac{b}{E\,\Delta}\left(\frac{M_2^{(0)}}{J_2} + \frac{M_1^{(0)}\,J_{12}}{J_1\,J_2}\right)d\,\varphi + \int b\,\frac{M_T^{(0)}}{G\,J_T}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\,\varphi \\ &+ X\left[\int \frac{b\cos\varphi\,d\,\varphi}{E\,J_2\,\Delta} + \int \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{b}{G\,J_T}\,d\,\varphi\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.\,3) \end{aligned}$$

Darin sind $M_2^{(0)}$, $M_1^{(0)} = M_1$, $M_T^{(0)}$ die statisch bestimmten Anteile in (3. 9').

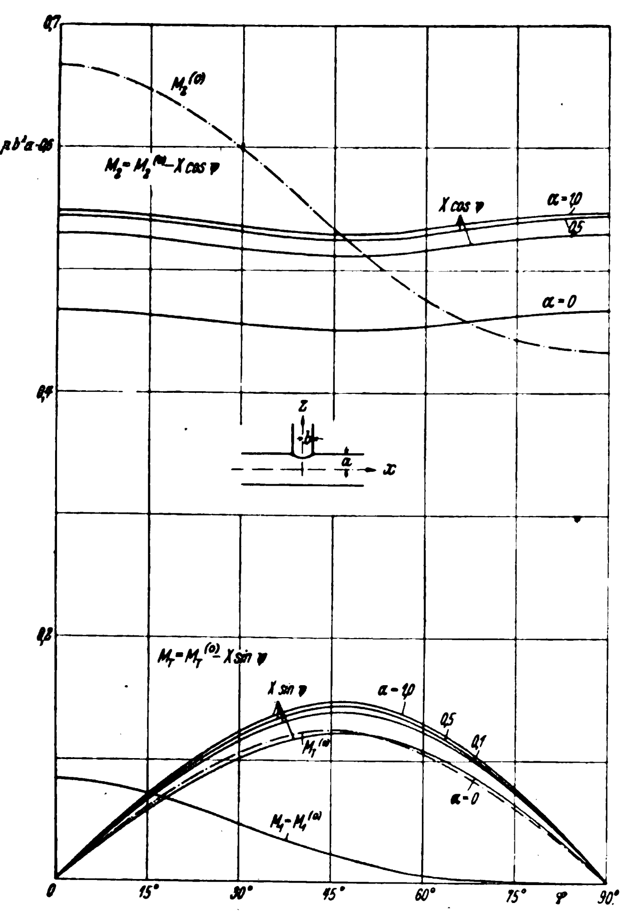


Bild 11. Momentenverlauf über φ. Der statisch unbestimmte Anteil X abhängig von $\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_2}$ $\left(\text{Achsenverhältnis } \varepsilon = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}\right)$. Last: Innendruck p.

Die Auswertung der Gleichung (4. 3) erfordert die Kenntnis des Verlaufs der Größen J mit s bzw. φ. Zunächst bemerkt man, daß $\frac{M_1^{(0)}\,J_{12}}{J_1}$ neben $M_2^{(0)}$ im allgemeinen klein sein wird. Denn $M_1^{(0)}$ ist um drei ε-Potenzen kleiner als $M_2^{(0)}$ und der Faktor J_{12}/J_1 wird in normalen Fällen auch merklich kleiner sein als 1. Für die überschlägliche Berechnung von X kann man daher von dem zweiten Glied der ersten Klammer absehen. Dasselbe gilt von dem Faktor Δ im Nenner, der, auch wenn er von 1 stärker abweicht, das Ergebnis für X nicht wesentlich beeinflußt, da er im Zähler und im Nenner im gleichen Sinne wirkt. Wenn man will, kann man ihn berücksichtigen bei der Bestimmung des noch verbleibenden wesentlichen Parameters

$$\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_2}\;(<1) \text{ bzw.} = \frac{G\,J_T}{E\,J_2\,\Delta}, \quad . \; . \; . \; (4.\,4)$$

der das Verhältnis von Torsions- zu Biegesteifigkeit angibt. Nimmt man für J_2 und J_T von s unabhängige Mittelwerte an, so lautet die vereinfachte X-Gleichung

$$X = \frac{A + B\,\alpha}{C + D\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4.\,5)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} M_T^{(0)}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\,\varphi, \quad B = \int_0^{\pi/2} M_2^{(0)}\,d\,\varphi, \\ C &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,d\,\varphi, \quad D = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\,\varphi. \end{aligned}\right| \quad . \; . \; (4.\,5')$$

Die Integrale $A \ldots D$ müssen für große ε-Werte numerisch ausgewertet werden, für kleine ε kann man sie durch Reihenentwicklung formelmäßig ausintegrieren:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{p\,a\,b^2}{6}\int \sin^2\varphi\cos^2\varphi\left(1 - \varepsilon^2\left(1 - \frac{\sin^4\varphi}{2}\right) - \ldots\right)d\,\varphi \\ &= \frac{p\,a\,b^2}{6\cdot 8}\left(1 - \varepsilon^2\left(1 - \frac{5}{2^5}\right) - \ldots\right), \\ B &= \frac{p\,a\,b^2}{6}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\int\left(1 - \varepsilon^2\left(2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^4\varphi\right) + \ldots\right)d\,\varphi \\ &= \frac{p\,a\,b^2}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \left(1 - \frac{3}{2^4}\right) - \ldots\right), \\ C &= \varepsilon^2\int \sin^2\varphi\cos^2\varphi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\,(\sin^2\varphi + \sin^4\varphi) + \ldots\right)d\,\varphi \\ &= \frac{\varepsilon^2}{8}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\,(1 + 5/4) - \ldots\right), \\ D &= \int (1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \ldots)\,d\,\varphi \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\,(1 - 3/4) - \ldots\right). \end{aligned}\right\} \quad (4.\,5'')$$

In Bild 11 ist das Ergebnis der Berechnung von X für ein bestimmtes Achsenverhältnis ($\varepsilon = 1/2$) aufgetragen; dargestellt sind die drei statisch bestimmten Größen $M_T^{(0)}$, $M_1^{(0)}$, $M_2^{(0)}$ und — für verschiedene α-Werte — die Kurven $X\sin\varphi$ bzw. $X\cos\varphi$, von denen aus die endgültigen Momente M_T und M_2 abgegriffen werden müssen.

Bei $\varepsilon = 1$ entartet der Ring: er besteht dann aus zwei ebenen Teilen (Halbellipsen), die unter einem rechten Winkel zusammenstoßen. Die besondere Belastung (3. 7), die symmetrisch ist zu den beiden Ellipsenebenen, beansprucht dann jede Ringhälfte nur in ihrer Ebene. D. h. es muß der statisch bestimmte Anteil des Torsionsmomentes verschwinden (s. die erste Gleichung (3. 9')) und die statisch bestimmten Anteile der beiden Biegemomente müssen sich zusammensetzen lassen zu einem Biegemoment um die Normale zur Ellipsenebene. In der Tat lautet nach (3. 9) der Momentenvektor bei $\varepsilon = 1$ ($a = b$)

für den ersten und vierten Quadranten

$$\mathfrak{M}^{(0)} = \frac{p\,a\,b^2}{6}\cos^3\varphi\,(\mathfrak{i} - \mathfrak{f}),$$

für den zweiten und dritten Quadranten

$$\mathfrak{M}^{(0)} = \frac{p\,a\,b^2}{6} \cos^3 \varphi\,(\mathfrak{i} + \mathfrak{k}),$$

steht also auf der jeweiligen Ellipsenebene senkrecht. Bei $\alpha = 0$, d. h. verschwindender Torsionssteifigkeit, verschwindet die Statisch-Unbestimmte (4. 5), weil ein Biegemoment bei $\varphi = \pi/2$ von der anderen Hälfte als Torsionsmoment nicht aufgenommen werden kann. ($\mathfrak{M}^{(0)}(\pi/2) = 0$) — bei $\alpha \neq 0$ tritt eine wechselseitige Einspannung auf, die Torsionsmomente und von $\mathfrak{M}^{(0)}$ abweichende Biegemomente hervorruft, d. h. die Ringhälfte aus ihrer Ebene heraus verbiegt. (Das Ergebnis der Durchrechnung für beliebige ε und α, das in Bild 12 dargestellt ist, zeigt, daß $M_1^{(0)}$ und $M_2^{(0)}$ bei $\alpha \neq 0$ in der Tat nicht übereinstimmen.)

Von Interesse sind insbesondere die Höchstbeträge der Momente in Abhängigkeit von α und ε. Für $\varepsilon < 1/2$ können wir sie mit Hilfe der Reihenentwicklungen (4. 5″) in einfacher Weise darstellen. Für X ergibt sich

$$X = \frac{p\,b^2 a}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\alpha\,(1 - 0{,}8125\,\varepsilon^2 + 0{,}2275\,\varepsilon^4) + \frac{\varepsilon^2}{8}(1 - 0{,}8437\,\varepsilon^2) + \ldots}{\alpha\,(1 - 0{,}0625\,\varepsilon^2 - 0{,}0175\,\varepsilon^4) + \frac{\varepsilon^2}{8}(1 - 0{,}4063\,\varepsilon^2) + \ldots} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4.\,6)$$

bei $\alpha \neq 0$ also

$$= \frac{p\,a\,b^2}{6} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} + \varepsilon^2\left(0{,}1981 - \frac{1}{16\,\alpha}\right) + \ldots\right], \quad (4.\,6')$$

bei $\alpha = 0$ (sehr geringer Torsionssteifigkeit des Ringes)

$$= \frac{p\,a\,b^2}{6} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{5}{4} + 0{,}2738\,\varepsilon^2 + \ldots\right] \ldots (4.\,6'')$$

(Man erkennt, daß die statisch Unbestimmte, wie es sein muß, in beiden Fällen das stärkste Glied in den Ausdrücken (3. 9′) für M_T und M_2 vernichtet.) Für die Höchstwerte des Biegemomentes M_2, die an den Symmetriestellen $\varphi = 0, \pi/2 \ldots$ ($\cos \psi = 1$) liegen, kommt insbesondere:

bei $\alpha \neq 0$

$$M_2(\varphi = 0) = \frac{p\,a\,b^2}{6} \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} + \varepsilon^2\left(0{,}1981 - \frac{1}{16\,\alpha}\right) + \ldots\right]$$

$$= -\frac{p\,a\,b^2}{8} \left[1 - \varepsilon^2\left(0{,}264 - \frac{1}{12\,\alpha}\right) + \ldots\right],$$

$$M_2(\varphi = \pi/2) = \frac{p\,a\,b^2}{6} \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{3}{2} - \frac{3\,\varepsilon^2}{8} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots\right]$$

$$= \frac{p\,a\,b^2}{8} \left[1 - \varepsilon^2\left(0{,}236 - \frac{1}{12\,\alpha}\right) + \ldots\right],$$

$$\ldots \ldots (4.\,7)$$

bei $\alpha = 0$

$$\left.\begin{aligned} M_2(\varphi = 0) &= -\frac{p\,a\,b^2}{8} \left[\frac{5}{3} - 0{,}365\,\varepsilon^2 + \ldots\right] \\ M_2(\varphi = \pi/2) &= \frac{p\,a\,b^2}{8} \left[\frac{1}{3} - 0{,}168\,\varepsilon^2 + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4.\,7')$$

Die Gleichungen (4. 7) bestätigen zunächst das »ebene« Resultat ($\varepsilon \to 0$) $|M_{max}| = \frac{p\,a\,b^2}{8}$; sie zeigen ferner, daß M_2 an der Stelle $\varphi = \pi/2$ vermindert wird, an der Stelle $\varphi = 0$ auch, solange $\alpha > \frac{1}{12 \cdot 0{,}264} = 0{,}315$. Für kleinere α-Werte kehrt die zweite Klammer des ersten Ausdruckes ihr Zeichen um: der Maximalbetrag des »auf«-biegenden Momentes (< 0) an der Stelle 0 ist im räumlichen Fall ($\varepsilon \neq 0$) größer als im ebenen ($\varepsilon = 0$). Daß bei kleinen α-Werten $M_{2\,max}$ größer werden muß, kann nicht wundernehmen: der Ring sucht vor allem einer Torsionsbeanspruchung auszuweichen und kann daher der Reduktion des größten Biegemomentes nicht so viel Beachtung schenken. (Biegung und Torsion sind bei dem räumlich gekrümmten Ring miteinander gekoppelt.) In der Grenze $\alpha = 0$ führt dies Bestreben des Ringes sogar zu einer radikalen Abweichung der $M_2(\alpha, \varepsilon)$-Kurve von den übrigen: Die Kurve $M_2(\varepsilon)_{\varphi = 0,\,\alpha = 0}$ geht als einzige bei $\varepsilon = 0$ nicht durch den Punkt $-\frac{1}{8}\,p\,a\,b^2$ sondern durch $-\frac{5}{24}\,p\,a\,b^2$, und fällt als Funktion von ε monoton auf den Wert $-1/6\,p\,a\,b^2$ bei $\varepsilon = 1$. — In Bild 12 ist $M_2(\varepsilon)$ für verschiedene α-Werte aufgetragen. Man sieht, daß sich die $M_2(\varepsilon)$-Kurve für kleine Werte der Torsionssteifigkeit der Grenzkurve $M_2(\alpha = 0)$ ein Stück weit anschmiegen, daß aber der Extremwert $5/24\,p\,a\,b^2$ für endliche Werte von α nicht erreicht wird.

Der Höchstbetrag des Torsionsmomentes liegt (außer für $\alpha = 0$, wo M_T aber durchgängig sehr klein ist) etwa in der Mitte zwischen den Symmetriepunkten $0, \pi/2$. Wir bestimmen daher als Näherung für $M_{T\,max}$ den Betrag $M_T(\pi/4)$. Für kleine Werte von ε kann man sich wieder mit Hilfe der Reihenentwicklung die Rechnung vereinfachen. Man findet:

$$M_T = \frac{p\,a\,b^2}{6}\,\varepsilon \sin \varphi \cos \varphi \left\{\frac{1}{\varepsilon^2} - \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2}\right) - \varepsilon^2(\ldots) - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{3}{4} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots\right)\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^4 \varphi + \frac{3\,\varepsilon^4}{8}\sin^8 \varphi\right)\right\}.$$

$$M_T(\pi/4) = \frac{p\,b^3}{6}\,\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2} + \varepsilon^2\left(\frac{5}{32} - 0{,}1984 + \frac{1}{16\,\alpha}\right) + \ldots\right\}$$

$$= -\frac{p\,b^3}{24}\left[1 - \varepsilon^2\left(\frac{1}{8\,\alpha} - 0{,}842\right)\right] \ldots \ldots (4.\,8)$$

Bei $\alpha = 0$ fällt für $\varphi = \pi/4$ auch noch das nächste Glied in der Reihenentwicklung nach ε fort. Es wird

$$\underset{(\alpha = 0)}{M_T(\pi/4)} = \frac{p\,b^3}{12}\left[\varepsilon^2\left(\frac{11}{128} + \frac{5}{32} - \frac{3}{128} - 0{,}2738\right)\right]$$

$$= -p\,b^3\,\varepsilon^2 \cdot 0{,}0046 \approx 0.$$

Das Ergebnis unserer Diskussion ist, daß bezüglich M_2 die Dimensionierung mit einem kleinen Sicherheitszuschlag nach der einfachen Formel

$$M_{2\,max} = \frac{1}{8}\,p\,a\,b^2 \ldots \ldots \ldots (4.\,9a)$$

erfolgen kann. Für den Höchstwert des anderen Biege-

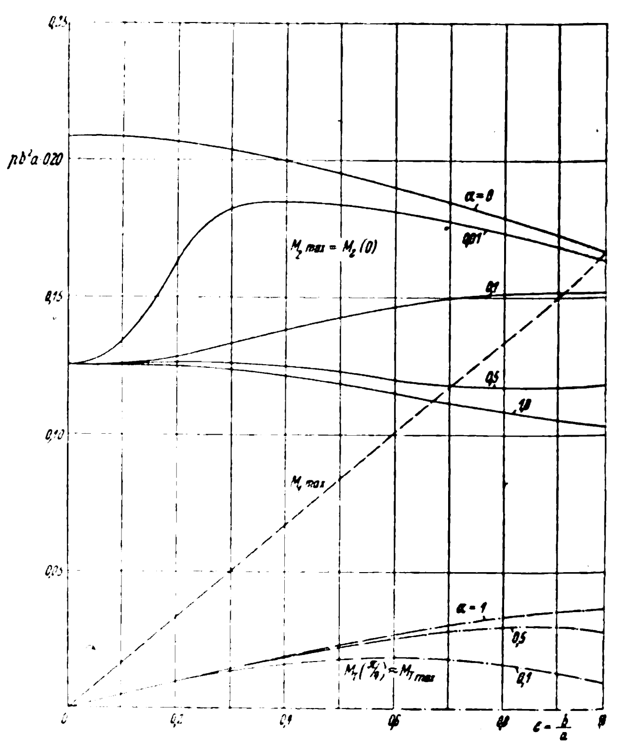


Bild 12. Momentenmaxima über $\varepsilon = \frac{b}{a}$. Parameter $\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_1}$. Last: Innendruck p.

momentes M_1, folgt aus (3. 9'):

$$M_{1\max} = M_1^{(0)} = \frac{\varepsilon}{6}\, p\, a\, b^2 = \frac{p\, b^3}{6} \quad . \; . \; . \quad (4.9\,\mathrm{b})$$

Für $M_{T\max}$ ist eine einfache Näherung, die bis $\varepsilon \doteq 0{,}7$ brauchbar ist und in der Nähe von $\varepsilon = 1$ auf der sicheren Seite bleibt, die Nullpunktstangente in Bild 12:

$$M_{T\max} = \frac{\varepsilon}{24}\, p\, a\, b^2 = \frac{p\, b^3}{24} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4.9\,\mathrm{c})$$

M_1 und M_T sind in unserem besonderen Belastungsfall übrigens unabhängig vom Radius des großen Zylinders.

5. Der Einfluß eines exzentrischen Kraftangriffs.

Der Einfluß der Momente, die infolge exzentrischen Kraftangriffs den Ring unmittelbar beanspruchen, tritt wegen der kleinen Hebelarme zurück neben den durch die Querkraft hervorgerufenen Momenten (3. 9). Immerhin erscheint eine Abschätzung wünschenswert; sie kann mit Hilfe der Gleichung (3. 5) gewonnen werden. Um die Größenordnung der zusätzlichen Momente zu bestimmen, genügt es (zur Vereinfachung der Rechnung) näherungsweise anzunehmen, daß die Kräfte p_1 und p_2 von einem in die $\mathfrak{k}$-Richtung fallenden Hebelarm der Größe h_1, die Kraft p und p_4 an einem in die $\mathfrak{n}_1$-Richtung fallenden Hebelarm h angreifen mögen (Bild 13). Dann entstehen aus der örtlichen Last (3. 5) die folgenden verteilten Momente $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{m} = -p_1 h_1 \mathfrak{j} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}} + p_2 h_1 \mathfrak{i} \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + p_3 h_2(-\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi) + p_4 \mathfrak{k}\sin\varphi, \quad (5.1)$$

die zu Schnittmomenten

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}} = \int \mathfrak{m}\, ds = b\int \mathfrak{m} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5.2)$$

Anlaß geben. Die Integrationen lassen sich wieder elementar ausführen. Man findet

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}} = p_1 b h_1 \mathfrak{j} \frac{1}{\varepsilon} \arcsin(\varepsilon\sin\varphi) + p_2 \frac{b h_1}{2} \mathfrak{i}\left[\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon^2)\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right] + p_3 b h_2\{\mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi\} - p_4 b \mathfrak{k}\frac{h_2}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,. \quad . \; . \; . \; . \quad (5.3)$$

Führen wir darin (3. 7) ein, und fassen zusammen, so kommt

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}} = \frac{p\, a\, b}{2}\left\{\mathfrak{i}\left[h_1\left(\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) + h_2\varepsilon\cos\varphi\right] + \mathfrak{j}\left[h_1\frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi) + \varepsilon h_2\sin\varphi\right] + 2\mathfrak{k} h_2\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\right\}. \quad . \; . \; . \; . \quad (5.4)$$

Da diese Momente gegen (3. 9) im Verhältnis $\frac{h_1}{b}$ bzw. $\frac{h_2}{b}$ klein sind, genügt eine Überschlagung, bei der nur die niedrigsten Potenzen von ε beibehalten werden. Danach wird

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}} \approx \frac{p\, a\, b}{2}\{\mathfrak{i}(2h_1 + \varepsilon h_2)\cos\varphi + \mathfrak{j}(h_1 + \varepsilon h_2) + 2\mathfrak{k} h_2\}.$$

oder

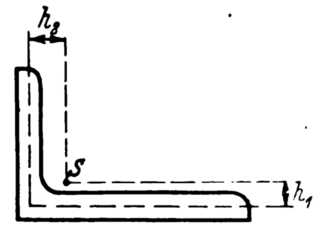


Bild 13. Ringprofil, Momentenhebelarme h_1, h_2.

$$\left.\begin{aligned} M_T(\mathfrak{m}) &= \frac{p\, a\, b}{2}[(-h_1 + 2\varepsilon h_2)\sin\varphi\cos\varphi],\\ M_1(\mathfrak{m}) &= -\frac{p\, a\, b}{2}[h_1\cos^2\varphi + (h_1 + \varepsilon h_2)],\\ M_2(\mathfrak{m}) &= \frac{p\, a\, b}{2}[-\varepsilon h_1\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2h_2].\end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

Da nach Bild 11 bei $a > b$ die Komponente M_2 größer ist als M_1, wird man auch bei der Bemessung des Ringes in der M_2-Richtung das Trägheitsmoment größer machen; es ist daher sinnvoll, anzunehmen, daß $h_1 \approx \varepsilon h_2$ ist (s. Bild 13). Dann können wir weiter vereinfachen:

$$\left.\begin{aligned} M_T(\mathfrak{m}) &= \frac{3\, p\, a\, b}{2}\varepsilon h_2\sin\varphi\cos\varphi,\\ M_1(\mathfrak{m}) &= \frac{p\, a\, b}{2}\varepsilon h_2\cos^2\varphi,\\ M_2(\mathfrak{m}) &= p\, a\, b\, h_2.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5.6)$$

und man erkennt nun ohne Rechnung, daß diese Größen auf die Bestimmung X keinen Einfluß haben können, da M_1 schon früher keine Rolle spielte und M_T und M_2 beide im Verhältnis $\left(\frac{\varepsilon^2 h_2}{b}\right)$ gegen die früheren Werte klein sind. Die maximalen Beträge selbst werden in allen drei Komponenten verändert um Größen, die im Verhältnis h_2/b klein sind —, eine Berücksichtigung der vom exzentrischen Kraftangriff herrührenden Momente lohnt sich also nicht. Es bleibt für die Bemessung des Ringes bei den in Bild 12 dargestellten Extremwerten, zu denen man allenfalls einen kleinen Sicherheitszuschlag fügen mag.

6. Belastung durch reinen Längszug $\sigma_1\,\mathfrak{l}$.

Die Rechnung verläuft der bisherigen ganz analog. In der Längskrafttabelle (3. 6) sind $p_1 = \sigma_1 t$ und $p_2 = p_3 = p_4 = 0$ zu setzen; für das Moment kommt nach (3. 8):

$$\mathfrak{M} = \sigma_1 t\, b^2 \int \frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi)\,[\mathfrak{j}\sin\varphi - \mathfrak{k}\cos\varphi\cos\varphi]\frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \quad (6.1)$$

Die Integrationen lassen sich wieder elementar ausführen und liefern

$$M_T = \sigma_1 t\, b^2\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi)\right)\right] + X\sin\varphi,$$

$$M_1 = \sigma_1 t\, b^2\frac{1}{\varepsilon}\left[\sin^2\varphi - \sin\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi)\right)\right],$$

$$M_2 = -\sigma_1 t\, b^2\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi} + \sin^3\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\arccos(\varepsilon\sin\varphi)\right)\right] + X\cos\varphi, \quad . \; . \; . \; . \quad (6.1')$$

oder, für kleine ε wieder entwickelt:

$$M_T = \sigma_1 t\, b^2\frac{1}{\varepsilon}\left[\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\sin^2\varphi + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^4\varphi + \ldots\right)\right] - \varepsilon X\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^4\varphi + \ldots\right),$$

$$M_1 = \sigma_1 t\, b^2\varepsilon\left[\frac{\sin^4\varphi}{3} + \frac{2\varepsilon^2}{15}\sin^6\varphi + \ldots\right],$$

$$M_2 = -\sigma_1 t\, b^2\frac{1}{\varepsilon^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^4\varphi - \frac{\varepsilon^4}{3}\sin^6\varphi + \frac{3\varepsilon^4}{8}\sin^8\varphi + \ldots\right] + X\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \ldots\right). \quad . \; . \; . \; . \quad (6.1'')$$

Die Maximalmomente errechnen sich daraus nach den früheren Überlegungen. Sie sind in Bild 14 dargestellt; in der Umgebung von $\varepsilon = 0$, d. h. für einen Ring, der vom ebenen nicht allzuweit abweicht, stimmen die Kurven Bild 12 u. 14 vollkommen überein —, es ist ja auch annähernd die gleiche Belastung, nur unter Drehung der Lastrichtung um 90°. Im Bereich $\varepsilon \approx 1$ ist die Beanspruchung des Ringes in den beiden Lastfällen dagegen typisch verschieden: an

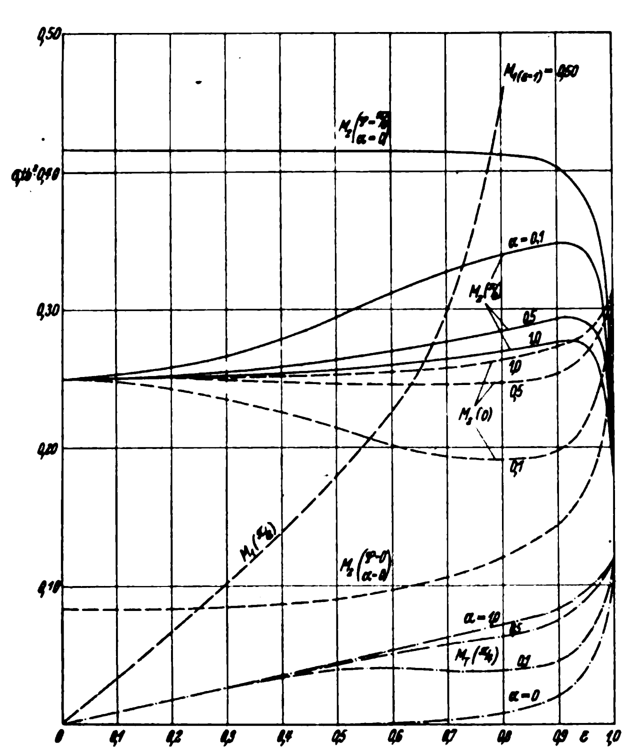


Bild 14. Momentenmaxima über $\varepsilon = \frac{b}{a}$, Parameter $\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_2}$.
Last: Längszug $\sigma_1 t$.
Bei der Vergleichung mit Bild 12 beachte man, daß im Grenzfall $\varepsilon \to 0$ die Lasten $\frac{p\,a}{2}$ und $\sigma_1 t$ einander entsprechen.

der Stelle $\varphi = 0$ verläuft der Ring glatt, bei $\varphi = \pi/2$ hat er dagegen eine scharfe Vorkrümmung, die bei $\varepsilon = 1$ in einen Knick ausartet; daher wird die Lastrichtung (und natürlich die Mitwirkung des kleinen Zylinders im ersten Lastfall) für die Beanspruchungsart hier wesentlich.

Als einfache Näherungsformeln, die diesmal allerdings in der Nähe von $\varepsilon = 1$ versagen, können dienen:

$$\left.\begin{aligned} M_{2\,\max} &= \frac{1}{4}\,\sigma_1\, t\, b^2, \\ M_{1\,\max} &= \frac{\varepsilon}{3}\,\sigma_1\, t\, b^2\left(1 + \frac{2}{5}\,\varepsilon^2\right), \\ M_{T\max} &= \frac{\varepsilon}{12}\,\sigma_1\, t\, b^2. \end{aligned}\right\} \quad (6.\,2)$$

7. Belastung durch reinen Schub τ.

Nur unwesentlich anders als bisher verläuft die Rechnung für den Fall der Schubbelastung des großen Zylinders. Bezeichnen wir die beiden zugeordneten Spannungen mit

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau,$$

so wirkt die erste an einer Fläche x = const. (also mit der Normalen i) und fällt in die Richtung des Vektors

$$(\mathrm{i}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} - \varepsilon\,\mathfrak{k}\sin\varphi);$$

nach (2. 8) beansprucht sie den Ring also mit einer Last je Längeneinheit

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}\,(\mathrm{j}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} - \varepsilon\,\mathfrak{k}\sin\varphi). \quad (7.\,1)$$

Die zweite Spannung wirkt an einer Fläche mit der Normalen $\mathfrak{k}$ und fällt in die Richtung i, beansprucht also nach (2. 8') den Ring durch

$$\mathfrak{p}_2 = \mathrm{i}\sin\varphi\cos\psi. \quad (7.\,2)$$

Die Gesamtbelastung des Ringes ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ und daraus ergibt sich nach (3. 2) die Schnittkraft $\mathfrak{N}$ in der Form

$$\mathfrak{N} = \tau\, t\, b\left(\mathrm{i}\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi - \frac{\mathfrak{k}}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\right) + \mathfrak{N}_0. \quad (7.\,3)$$

Aus Symmetriegründen muß, da der Lastverlauf diesmal antimetrisch ist bezüglich $\varphi = 0, \pi/2$, die Längskraft X an den Stellen 0 und $\pi/2$ verschwinden. Daraus folgt

$$\mathfrak{N}_0 = \frac{1}{b}\,X\,\mathfrak{k}. \quad (7.\,4)$$

Die Größe X bleibt statisch unbestimmt. Aus (3. 8) und (7. 3) folgt

$$\begin{aligned} -\mathfrak{k}\times\mathfrak{N} = \tau\, t\, b\,\frac{1}{\varepsilon}\Bigg[&\mathrm{i}\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}} \\ &+ \mathrm{j}\left(\sin\varphi\cos\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} + \frac{\varepsilon^2\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\cos\psi\right) \\ &+ \mathfrak{k}\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos\psi - \frac{1}{b}\,X\cos\psi\,(\mathrm{i}\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi), \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich nach (3. 3)

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = \tau\, t\, b^2\Bigg[&\mathrm{i}\,\frac{1}{\varepsilon^2}\arcsin(\varepsilon\sin\varphi) - \mathrm{j}\cos\varphi\,\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} \\ &+ \mathfrak{k}\,(\sin\varphi\cos\varphi)\Bigg] - X\,(\mathrm{i}\sin\varphi - \mathrm{j}\cos\varphi) + \mathfrak{M}_0. \quad (7.\,5) \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante $\mathfrak{M}_0$ ist null, weil die beiden Biegemomente $M_1^{(0)}$ und $M_2^{(0)}$, die bezüglich $\varphi = 0, \pi/2$ antimetrisch sein müssen, an diesen Stellen verschwinden. Mit (2. 5) ergibt sich aus (7. 5) nach kurzer Zwischenrechnung für die drei Komponenten des Momentes

$$\left.\begin{aligned} M_T &= -\tau\, t\, b^2\,\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sin\varphi\cos\psi\arcsin(\varepsilon\sin\varphi) + \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^4\varphi}}\right] + X\cos\psi, \\ M_1 &= -\tau\, t\, b^2\,\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\cos\varphi\arcsin(\varepsilon\sin\varphi) - \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\right], \\ M_2 &= \tau\, t\, b^2\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\varphi\sin\psi\arcsin(\varepsilon\sin\varphi) + \sin^3\varphi\cos\varphi\cos\psi\right] - X\sin\psi, \end{aligned}\right\} \quad (7.\,5')$$

oder, für kleine ε wieder entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} M_T^{(0)} &= -\tau\, t\, b^2\,\frac{1}{\varepsilon}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\sin^4\varphi + \varepsilon^4\left(\frac{5}{24}\sin^8\varphi - \frac{2}{15}\sin^6\varphi\right)\right], \\ M_1^{(0)} &= -\tau\, t\, b^2\,\varepsilon\left[\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5}\sin^2\varphi\right]\sin^3\varphi\cos\varphi, \\ M_2^{(0)} &= -\tau\, t\, b^2\,\varepsilon^2\sin^5\varphi\cos\varphi\left[\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{5}\sin^2\varphi + \frac{\varepsilon^2}{3}\sin^4\varphi + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7.\,5'')$$

Es ist bemerkenswert, daß die statisch Unbestimmte (die diesmal kein Moment, sondern eine Querkraft ist), in M_1 wieder nicht vorkommt. Anderseits ist aber $M_1^{(0)}$ diesmal nicht klein gegen $M_2^{(0)}$, so daß bei Durchführung der statisch unbestimmten Rechnung nur für den Fall nichtschiefer Biegung der Einfluß von M_1 wegfällt. Beschränken wir uns auf diesen Sonderfall ($J_{12} = 0$), so bleibt der Rechnungsgang auch bezüglich der Bestimmung von X der gleiche wie in Abschnitt 4, mit dem einzigen Unterschied, daß diesmal der $M_T^{(0)}$-Anteil die niedereren ε-Potenzen enthält, so daß auch der Grenzfall

$$\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_2} \to 0$$

sich ohne Unstetigkeit an den Fall $\alpha \neq 0$ anschließt.

Die Formel zur Bestimmung von X läßt sich wieder schreiben

$$\left.\begin{aligned} &X = \frac{A_1 + B_1\,\alpha}{C_1 + D_1\,\alpha} \\ &\text{mit} \\ &A_1 = \int_0^{\pi/2} M_T^{(0)}\,d\varphi, \quad B_1 = \int_0^{\pi/2} M_2^{(0)}\operatorname{tg}\psi\,d\varphi, \\ &C_1 = \int_0^{\pi/2}\cos\psi\,d\varphi, \quad D_1 = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\,d\varphi; \end{aligned}\right\} \quad (7.\,6)$$

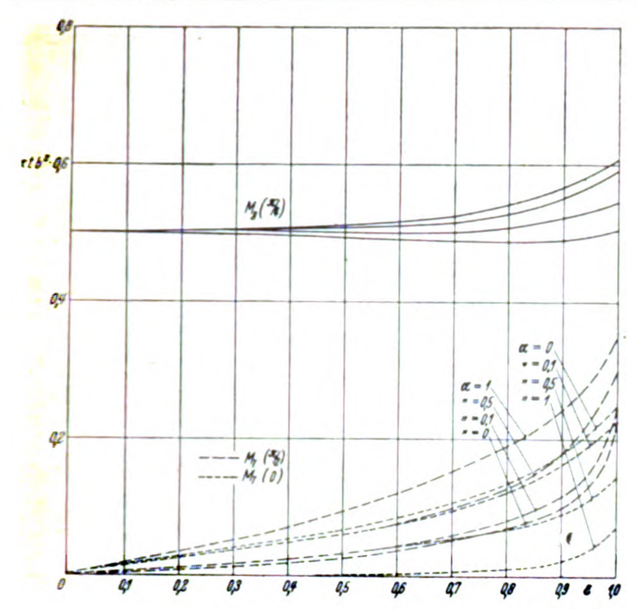


Bild 15. Momentenmaxima über $\varepsilon = \frac{b}{a}$, Parameter $\alpha = \frac{G\,J_T}{E\,J_2}$; Last: Schubkraft $\tau\,t$ im großen Zylinder. $M_2\,(\pi/4) \approx M_{2\,\max}$ steigt mit fallendem α.

für $\varepsilon > 1/2$ muß man die Integrale wieder numerisch auswerten, für kleine ε findet man

$$X = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon^4}{64} + \frac{10\,\alpha\,\varepsilon^4}{384}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{16} - 0{,}0175\,\varepsilon^4 + \frac{\alpha\,\varepsilon^2}{8} + 0{,}4063\,\frac{\alpha\,\varepsilon^4}{8}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1-\alpha}{8}\,\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{100}\,(4{,}09 - 4{,}81\,\alpha + 1{,}56\,\alpha^2) + \dots\right). \quad \dots \quad (7.7)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist in Bild 15 dargestellt. Diesmal fällt $M_{T\max}$ in die Symmetriepunkte $\varphi = 0$, $\pi/2$, $M_{2\,\max}$ in die Nähe des Punktes $\varphi = \pi/4$. Man erkennt, daß $M_{2\max}$ auch bei $\alpha = 0$ nur weniger größer ist als im Grenzfall $\varepsilon \to 0$, während $M_{T\max}$ in der Nähe von $\varepsilon = 1$ stark anwächst. — Das Torsionsmoment hat an den Stellen 0 und $\pi/2$ entgegengesetzte Zeichen. Bei $\varphi = \pi/2$ ist die Abhängigkeit des größten Torsionsmomentes von α die zu erwartende: es steigt mit zunehmender Torsionssteifigkeit. Dieser Verlauf von $M_T(\alpha)$ kommt zustande dadurch, daß der statisch unbestimmte Anteil, der zu der Stelle $\varphi = \pi/2$ dem Betrage nach kleiner ist als der statisch bestimmte, mit wachsendem α fällt. — Bei $\varphi = 0$ drehen sich die Verhältnisse um: da der statisch unbestimmte Anteil hier das Vorzeichen entscheidet, fällt $(M_T)_{\text{extr}}$ mit wachsendem α. Der Verlauf des anderen Biegemomentes M_1 ist in Bild 15 nicht mit dargestellt, weil M_1 nahezu geradlinig verläuft und außerdem in dem durch die M_T-Kurven bedeckten Bereich fallen würde.

Als einfache Näherungsformeln können wir festhalten:

$$\left.\begin{aligned} M_{2\max} &\to \frac{1}{2}\,\tau\,t\,b^2, \\ M_{1\max} &= \frac{\varepsilon}{6}\,\tau\,t\,b^2\,(1 + 0{,}15\,\varepsilon^2), \\ M_{T\max} &= \frac{\varepsilon}{6}\,\tau\,t\,b^2\,(1 + 0{,}3\,\varepsilon^2); \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (7.8)$$

die letzte Formel versagt in der Nähe von $\varepsilon = 1$.

8. Zusammenfassung. Gültigkeitsbereich.

Als ein erster Schritt zur Untersuchung der Spannungsverteilung in räumlich gekrümmten Ringen (wie sie als Aussteifungen in den Schalenkonstruktionen des Flugzeugbaues vorkommen) wird der durch den Schnitt zweier Kreiszylinder gebildete Ring (Bild 1) unter drei verschiedenen Belastungsarten untersucht: Zug in beiden Zylindern (hervorgerufen durch hydrostatischen Druck auf die Zylinderwandungen), Längszug im großen Zylinder und schließlich Schub im großen Zylinder. Die Diskussion dieser drei Belastungsfälle läßt allgemeine Schlüsse zu auf das Verhalten des durch Schalenkräfte beanspruchten Ringes, und erlaubt zahlenmäßige Aussagen für die wichtigsten Belastungsarten (die aus den gerechneten durch Überlagerung gewonnen werden können). Die quantitativen Ergebnisse sind in Bild 12, 14 und 15 dargestellt, und durch die Beziehungen (4. 9), (6. 2) und (7. 8) in einfache Näherungsformeln gepreßt. — Qualitativ läßt sich sagen, daß bei Ringen, die von der Ebene nicht zu weit abweichen, das Moment M_2 um die Hochachse (also dasjenige der drei Momente, das auch bei einem vollkommen ebenen Ring von Null verschieden ist) die maßgebende Beanspruchung bleibt; erst bei einer sehr merklichen räumlichen Krümmung (wenn das Verhältnis b/a der Zylinderradien gegen 1 geht) werden die beiden anderen Komponenten des räumlichen Momentenvektors, das andere Biegemoment M_1 und das Torsionsmoment M_T, spürbar. Da M_2, wie die Bilder zeigen, bei Wahl geeigneter Bezugsgrößen überdies mit $\varepsilon = b/a$ nur wenig veränderlich ist, können Ringe für »kleine« Öffnungen mit sehr guter Näherung als ebene Ringe gerechnet werden.

Der (geschlossene) Ring ist statisch unbestimmt. Einer übermäßigen Beanspruchung infolge einer zu geringen Torsionssteifigkeit weicht er weitgehend aus, indem er auf die Last wesentlich mit Biegemomenten M_2 antwortet — immerhin ist es bei torsionsweichen Ringen zweckmäßig, durch eine Überschlagsrechnung mit Hilfe der angegebenen Faustformeln sich zu vergewissern, ob die Schubspannungen in zulässigen Grenzen bleiben.

Die drei untersuchten Lastverteilungen sind alle drei Stützlinienlasten für die unversteifte Kreiszylinderschale, erzeugen also in der ungestörten Schale einen reinen Membranspannungszustand. Unsere Rechnung setzt voraus, daß dieser Membranspannungszustand durch die elastische Wechselwirkung zwischen der Ausschnittversteifung und der Haut nicht wesentlich gestört werde. Diese Voraussetzung ist erfüllt in dem »Grenz«fall eines sehr steifen Ringes und einer dünnwandigen Schale ohne Spante, (oder mit Spanten, die in großer Entfernung vom Ausschnitt angebracht sind). Denn die spantlose Schale müßte versuchen, mit den vom Ring zurückgegebenen »Störlasten« durch Querkräfte und Biegemomente fertig zu werden; da diese in der dünnen Schale nicht groß werden und außerdem schnell abklingen, kann sich eine »Hilfe« der Schale für den Ring nur äußern in der Entstehung einer schmalen mittragenden Randzone, die dem Ring nichts wesentliches abnimmt.

In dem entgegengesetzten, hier nicht untersuchten, Grenzfall eines nur dehnsteifen, biegeschlaffen Ringes und einer durch nahegelegene steife Spante oder gewölbte Böden allseits geschlossenen Schale — »Eifläche« — ist der Formänderungs- und Spannungszustand ganz anders. Schale und Ring erfahren, wie man aus der Schalenstatik weiß, in der Hauptsache Membrankraft- und Längskraft-Beanspruchungen und werden nur durch die von der Unverträglichkeit der Formänderungen herrührenden Zwängungsspannungen auf Biegung beansprucht. Der Fall hat praktisch geringeres Interesse, weil die Ringe aus konstruktiven Gründen meist so stark gemacht werden müssen, daß sie für die Rechnung nicht als biegeschlaff angesehen werden dürfen.

Die wirkliche Schale liegt zwischen den beiden Grenzfällen. Ist der Ring ausgesprochen biegesteif und die Schale entweder dickwandig, oder als Eifläche ausgebildet, so entsteht eine elastische Wechselwirkung komplizierter Natur, die rechnerisch nicht erfaßt werden kann. Man bleibt hier auf den Versuch angewiesen. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführte Rechnung gibt für solche Versuche die Grundlage, indem sie die zu erwartenden maximalen Biegespannungen durch die Bestimmung ihrer oberen Grenze abzuschätzen gestattet.

Die erregenden Drehkräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung.

Von A. Kimmel.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Der Einfluß der mittelbaren (exzentrischen) Nebenpleuelanlenkung auf die erregenden Drehkräfte bei Stern- und V-Motoren wird rechnerisch untersucht, wobei im Hinblick auf die Entwicklung der Motoren zu größerer Schnelläufigkeit neben den Gasdrehkräften auch die Massendrehkräfte höherer Ordnung mit einbezogen werden. Die Ergebnisse werden an Hand eines durchgerechneten Beispiels erläutert.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bei Motoren mit mittelbar (exzentrisch) angelenkten Nebenpleueln (z. B. Sternmotoren) treten infolge der mittelbaren Anlenkung Ordnungen von kritischen Drehzahlen auf, die auf Grund einer Vorausberechnung der Drehschwingungserregung, bei der die Pleuel näherungsweise als unmittelbar angelenkt angenommen werden, nicht zu erwarten sind.

Der Einfluß der mittelbaren Nebenpleuelanlenkung auf die erregenden Drehkräfte soll daher rechnerisch allgemein untersucht werden, wobei im Hinblick auf die Entwicklung der Motoren zu größerer Schnelläufigkeit besonders auch die Massenkräfte höherer Ordnung mit einbezogen werden sollen. Hierzu wird ein Verfahren verwendet, das zunächst für den Fall der unmittelbaren Pleuelanlenkung (z. B. Hauptzylinder von Sternmotoren) bereits früher ausführlich dargestellt wurde[1]) und das darauf beruht, daß die gesamte Kinematik des Kurbeltriebs durchweg durch Fourier-Reihen dargestellt und daß die erregenden Gas- und Massenkräfte mit Hilfe der Arbeitsgleichung hergeleitet werden.

Die Ergebnisse dieser allgemeinen Rechnungen, die vor allem für Sternmotoren durchgeführt werden, aber sinngemäß auch für V-Motoren usw. gelten, werden sodann an Hand eines durchgerechneten Zahlenbeispiels erläutert. Ferner wird noch die Güte verschiedener Näherungsrechnungen geprüft[2]).

[1]) A. Kimmel, Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 229. Diese Arbeit wird im folgenden kurz »Mitteilung I« genannt.

[2]) Bei den vorliegenden Untersuchungen haben Herr E. Digel und Frl. J. Lutzweiler mitgewirkt.

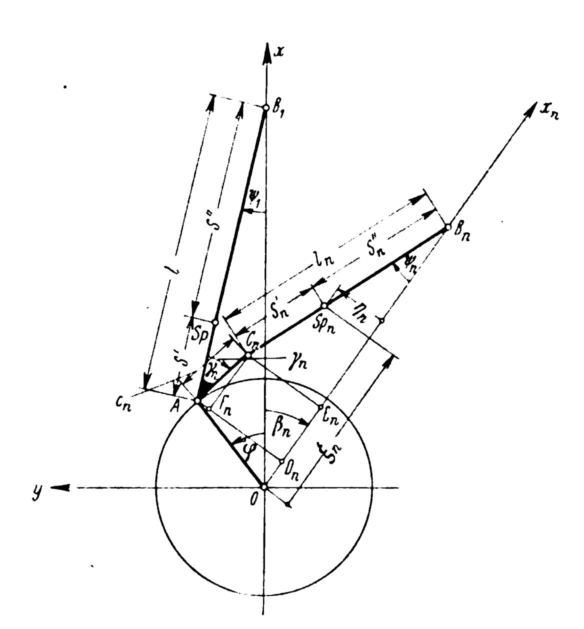


Bild 1. Kurbeltrieb mit mittelbarer Pleuelanlenkung.

II. Die Kinematik des Kurbeltriebs mit mittelbar angelenktem Nebenpleuel.

1. Verwendete Abkürzungen.

Zur besseren Übersicht seien die im folgenden häufig verwendeten dimensionslosen Abkürzungen vorangestellt. Diese sind mit den Bezeichnungen von Bild 1

$$\lambda = \frac{r}{l}, \quad \lambda_n = \frac{r}{l_n}, \quad \varrho_n = \frac{c_n}{l} \quad \dots\dots \quad (1)$$

Die Größen λ, λ_n, ϱ_n sind alle ungefähr von derselben Größenordnung und werden im folgenden als kleine Größen betrachtet.

Ferner sei zur Abkürzung gesetzt

$$\delta_n = \gamma_n - \beta_n \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

sowie

$$\mu_n = \varrho_n \cos \delta_n \quad \text{und} \quad \tau_n{}^3 \doteq \varrho_n \sin \delta_n \quad \dots\dots \quad (3)$$

Da der Winkel δ_n bei ausgeführten Motoren immer ein sehr kleiner Winkel ist, hat die Größe μ_n ungefähr dieselbe Größenordnung wie ϱ_n. Die Größe $\sin \delta_n$ wird bei den folgenden Untersuchungen durchweg als eine von zweiter Ordnung kleine Größe behandelt; die Abkürzung $\tau_n{}^3$ stellt daher eine von dritter Ordnung kleine Größe dar.

Schließlich seien noch die weiteren Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n' &= \frac{s_n'}{l_n}, \quad \sigma_n'' = \frac{s_n''}{l_n} \quad (\sigma_n' + \sigma_n'' = 1) \\ \text{sowie} \quad \sigma_n{}^* &= \frac{k_{P_n}}{l_n} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (4)$$

eingeführt, wo k_{P_n} der Trägheitshalbmesser des Nebenpleuels in bezug auf seinen Schwerpunkt ist.

2. Die Bewegung des Kolbens.

Bedeutet x_n die vom Punkt O aus gemessene Koordinate des Kolbenbolzens B_n des Nebenkurbeltriebs, so gilt[3]) mit den aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnungen, wenn man beachtet, daß

$$\sphericalangle A C_n F_n = \psi_1 + \gamma_n - \beta_n$$

ist,

$$x_n = r \cos(\varphi + \beta_n) + c_n \cos(\psi_1 + \gamma_n - \beta_n) + l_n \cos \psi_n. \quad (5)$$

Hierbei ist insbesondere noch der Zylinderwinkel β_n der feste Winkel zwischen der Achse des betrachteten Nebenzylinders und der des Hauptzylinders. Der Anlenkhalbmesser c_n ist der Abstand der Anlenkachse C_n von der Hubzapfenachse A; die Größe c_n ist ebenso wie der Kurbelhalbmesser r als klein gegenüber der Schubstangenlänge anzusehen. Der Anlenkwinkel γ_n ist der feste Winkel zwischen der Hauptpleuelachse und dem zur Anlenkachse C_n gerichteten Anlenkhalbmesser.

Für das Hauptpleuel gilt die Beziehung

$$\sin \psi_1 = \lambda \sin \varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Außerdem findet man aus Bild 1

$$r \sin(\varphi + \beta_n) = c_n \sin(\psi_1 + \gamma_n - \beta_n) + l_n \sin \psi_n,$$

woraus sofort mit (1)

$$\sin \psi_n = \lambda_n \sin(\varphi + \beta_n) - \frac{c_n}{l_n} \sin(\psi_1 + \gamma_n - \beta_n) \quad (7)$$

folgt.

Aus (5) erhält man mit (1) und (2) nach kurzer Umformung den noch exakten Ausdruck

$$x_n = r \left[\cos \beta_n \cos \varphi - \sin \beta_n \sin \varphi + \frac{\varrho_n}{\lambda} (\cos \delta_n \cos \psi_1 - \sin \delta_n \sin \psi_1) + \frac{1}{\lambda_n} \cos \psi_n \right]. \quad (8)$$

Um diesen Ausdruck in eine Fourier-Reihe umzuformen müssen zunächst die Ausdrücke $\cos \psi_1$ und $\cos \psi_n$ in der Veränderlichen φ ausgedrückt und entwickelt werden. Damit der Rechenaufwand erträglich bleibt, wurden bei den folgenden Untersuchungen jeweils nur so viel Glieder mitgeführt, daß in den Endformeln die Glieder vierter Ordnung in λ, λ_n, ϱ_n usw. noch enthalten sind. Außerdem sind bei den Gleichungen für die Drehkräfte die Glieder vierter Ordnung in λ, λ_n und ϱ_n weggelassen worden, die mit einer Beizahl kleiner als $1/4$ behaftet sind und die bei der späteren Summation über den ganzen Sternmotor nicht doch wieder eine größere Beizahl erhalten. Bei den kinematischen Untersuchungen dagegen sind die Glieder vierter Ordnung durchweg noch genau.

Hierbei sei auf die grundsätzlichen Schwierigkeiten hingewiesen, die dadurch entstehen, daß λ keine kleine Größe im mathematischen Sinn ist, sondern meist einen Wert von der Größenordnung 0,3 besitzt. Dadurch können vor allem bei den Ausdrücken, die nur Glieder höherer Ordnung in λ enthalten, verhältnismäßig große relative Fehler entstehen. Da aber diese Ausdrücke ihrerseits gegenüber den größten vorkommenden klein sind, ist die absolute Genauigkeit durchaus zureichend. Diese Verhältnisse sollen später an dem durchgerechneten Beispiel näher erläutert werden.

Aus (6) folgt mit Benützung der binomischen Reihe

$$\cos \psi_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_1} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \varphi - \ldots .$$

Formt man die Potenzen von $\sin \varphi$ in Winkelfunktionen des Vielfachen von φ um, so wird

$$\cos \psi_1 = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{64} \lambda^4\right) + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{16}\right) \cos 2\varphi - \frac{\lambda^4}{64} \cos 4\varphi - \ldots \quad \ldots (9)$$

[3]) Vgl. P. Rickert, Beitrag zur Theorie des Massenausgleichs von Sternmotoren, Ing.-Arch. Bd. 1 (1929), S. 16. Beim Vergleich mit dieser Arbeit ist zu beachten, daß bei den vorliegenden Untersuchungen im Hinblick auf die inzwischen durchgeführte Normung der Bezeichnungen bei Flugmotoren einige Bezeichnungen und Vorzeichenrichtungen anders gewählt sind.

Mit (9) und (6) folgt aus (7) mit den Abkürzungen (1), (2) und (3)

$$\sin \psi_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda} \tau_n^3 \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \lambda_n \sin \beta_n \cos \varphi - \frac{\lambda \lambda_n}{4} \tau_n^3 \cos 2\varphi + \lambda_n (\cos \beta_n - \mu_n) \sin \varphi \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Aus der Beziehung

$$\cos \psi_n = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_n} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi_n - \frac{1}{8} \sin^4 \psi_n - \ldots$$

ergibt sich, wenn man $\sin^2 \psi_n$ und $\sin^4 \psi_n$ nach (10) berechnet, nach einigen trigonometrischen Umformungen die Fourier-Entwicklung für $\cos \psi_n$:

$$\left.\begin{aligned}
\cos \psi_n = & \left[1 - \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{3}{64} \lambda_n^4 + \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16} \lambda_n^4\right) \mu_n \cos \beta_n - \frac{\lambda_n^2 \mu_n^2}{4}\right] \\
& + \cos \varphi \cdot \left[\frac{\lambda_n^2}{\lambda} \tau_n^3 \sin \beta_n\right] \\
& + \cos 2\varphi \cdot \left[\left(\frac{\lambda_n^2}{4} + \frac{\lambda_n^4}{16}\right) \cos 2\beta_n - \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16} \lambda_n^4\right) \mu_n \cos \beta_n + \frac{\lambda_n^2 \mu_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^4}{16} \mu_n \cos 3\beta_n\right] \\
& + \cos 3\varphi \cdot 0 \\
& + \cos 4\varphi \cdot \left[-\frac{\lambda_n^4}{64} \cos 4\beta_n + \frac{\lambda_n^4}{16} \mu_n \cos 3\beta_n\right] \\
& + \sin \varphi \cdot \left[\frac{\lambda_n^2}{\lambda} \tau_n^3 (\cos \beta_n - \mu_n)\right] \\
& + \sin 2\varphi \cdot \left[\left(-\frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^4}{16}\right) \sin 2\beta_n + \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16} \lambda_n^4\right) \mu_n \sin \beta_n + \frac{\lambda_n^4}{16} \mu_n \sin 3\beta_n\right] \\
& + \sin 3\varphi \cdot 0 \\
& + \sin 4\varphi \cdot \left[\frac{\lambda_n^4}{64} \sin 4\beta_n - \frac{\lambda_n^4}{16} \mu_n \sin 3\beta_n\right].
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Setzt man die Ausdrücke (9) und (11) in (8) ein, so erhält man schließlich die Fourier-Entwicklung für die Koordinate x_n des Kolbenbolzens

$$x_n = r \left[\mathfrak{A}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mathfrak{A}_\nu}{\nu^2} \cos \nu\varphi + \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu^2} \sin \nu\varphi\right)\right] \quad . \quad (12)$$

mit den folgenden Abkürzungen, wobei die großen deutschen Buchstaben durchweg keine Vektoren sondern reine Zahlenwerte darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 &= \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{4} - \frac{3}{64} \lambda_n^3\right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64} \lambda^3\right) \mu_n + \left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{3}{16} \lambda_n^3\right) \mu_n \cos \beta_n - \frac{\lambda_n}{4} \mu_n^2 \\
\mathfrak{A}_1 &= \cos \beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda} \tau_n^3 \sin \beta_n \\
\mathfrak{A}_2 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{4}\right) \cos 2\beta_n + \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4}\right) \mu_n - \left(2\lambda_n + \frac{3}{4} \lambda_n^3\right) \mu_n \cos \beta_n + \lambda_n \mu_n^2 - \frac{\lambda_n^3}{4} \mu_n \cos 3\beta_n \\
\mathfrak{A}_3 &= 0 \\
\mathfrak{A}_4 &= -\frac{\lambda_n^3}{4} \cos 4\beta_n - \frac{\lambda^3}{4} \mu_n + \lambda_n^3 \mu_n \cos 3\beta_n \\
&\vdots \\
\mathfrak{B}_1 &= -\sin \beta_n - \tau_n^3 + \frac{\lambda_n}{\lambda} \tau_n^3 (\cos \beta_n - \mu_n) \\
\mathfrak{B}_2 &= \left(-\lambda_n - \frac{\lambda_n^3}{4}\right) \sin 2\beta_n + \left(2\lambda_n + \frac{3}{4} \lambda_n^3\right) \mu_n \sin \beta_n + \frac{\lambda_n^3}{4} \mu_n \sin 3\beta_n \\
\mathfrak{B}_3 &= 0 \\
\mathfrak{B}_4 &= \frac{\lambda_n^3}{4} \sin 4\beta_n - \lambda_n^3 \mu_n \sin 3\beta_n \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(Die Glieder $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ enthalten nur Größen, die von höherer als vierter Ordnung klein sind.)

Hieraus erhält man durch Ableitung nach der Zeit t die Kolbengeschwindigkeit (mit den üblichen Abkürzungen $\dot{x}_n = \frac{d x_n}{d t}$ und $\ddot{x}_n = \frac{d^2 x_n}{d t^2}$)

$$\dot{x}_n = r\,\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu} \cos \nu \varphi - \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\nu} \sin \nu \varphi \right), \quad . \; . \; . \quad (14)$$

durch nochmalige Ableitung findet man unter Voraussetzung gleichförmiger Drehschnelle ω die Kolbenbeschleunigung

$$\ddot{x}_n = - r\,\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{A}_\nu \cos \nu \varphi + \mathfrak{B}_\nu \sin \nu \varphi) \quad . \; . \quad (15)$$

3. Die Bewegung des Pleuels.

Aus Bild 1 folgt für die Koordinaten des Schwerpunkts S_{r_n} des Nebenpleuels

$$\left.\begin{aligned} \xi_n &= x_n - s_n'' \cos \psi_n \\ \eta_n &= s_n'' \sin \psi_n. \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen der oben in (12), (11) und (10) angegebenen Fourier-Reihen für x_n, $\cos \psi_n$ und $\sin \psi_n$ sofort die Fourier-Entwicklungen für ξ_n und η_n, die jedoch nicht ausführlich angeschrieben seien. Durch Ableitung von ξ_n und η_n nach der Zeit t erhält man rasch die Komponenten $\dot{\xi}_n$ und $\dot{\eta}_n$ der Geschwindigkeit sowie die Komponenten $\ddot{\xi}_n$ und $\ddot{\eta}_n$ der Beschleunigung des Schwerpunkts S_{r_n}.

Zur Berechnung des Neigungswinkels ψ_n des Nebenpleuels gegen die Achse seines Zylinders geht man von (7) aus und erhält unter Verwendung der arc sin-Reihe

$$\psi_n = \mathfrak{C}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\nu^2} \cos \nu \varphi + \frac{\mathfrak{D}_\nu}{\nu^2} \sin \nu \varphi \right) \quad . \; . \; . \quad (17)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C}_0 &= -\frac{\lambda_n}{\lambda} \tau_n^3 \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4}\right) \\
\mathfrak{C}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64} \lambda_n^5 + \frac{\lambda_n^3}{8} \mu_n^2\right) \sin \beta_n \\
&\qquad - \frac{\lambda_n^3}{8} \mu_n \sin 2 \beta_n \\
\mathfrak{C}_2 &= -\frac{\lambda_n}{\lambda} \tau_n^3 (\lambda^2 - \lambda_n^2 \cos 2 \beta_n) \\
\mathfrak{C}_3 &= -\left(\frac{3}{8} \lambda_n^3 + \frac{27}{128} \lambda_n^5\right) \sin 3 \beta_n \\
&\qquad + \frac{9}{8} \lambda_n^3 \mu_n (\sin 2 \beta_n - \mu_n \sin \beta_n) \\
\mathfrak{C}_4 &= 0 \\
\mathfrak{C}_5 &= \frac{15}{128} \lambda_n^5 \sin 5 \beta_n \\
&\;\vdots \\
\mathfrak{D}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64} \lambda_n^5 + \frac{3}{8} \lambda_n^3 \mu_n^2\right) \cos \beta_n \\
&\qquad - \frac{\lambda_n^3}{8} \mu_n \cos 2 \beta_n - \lambda_n \mu_n \left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right) \\
\mathfrak{D}_2 &= -\frac{\lambda_n^3}{\lambda} \tau_n^3 \sin 2 \beta_n \\
\mathfrak{D}_3 &= -\left(\frac{3}{8} \lambda_n^3 + \frac{27}{128} \lambda_n^5\right) \cos 3 \beta_n \\
&\qquad + \frac{9}{8} \lambda_n^3 \mu_n (\cos 2 \beta_n - \mu_n \cos \beta_n) \\
\mathfrak{D}_4 &= 0 \\
\mathfrak{D}_5 &= \frac{15}{128} \lambda_n^5 \cos 5 \beta_n \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Ableitung von ψ_n (17) nach der Zeit t ergibt

$$\dot{\psi}_n = \omega \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\nu} \cos \nu \varphi - \frac{\mathfrak{C}_\nu}{\nu} \sin \nu \varphi \right) \quad . \; . \; . \; . \quad (19)$$

und

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{C}_\nu \cos \nu \varphi + \mathfrak{D}_\nu \sin \nu \varphi) \quad . \; . \; . \quad (20)$$

4. Die Bewegung von Kolben und Pleuel für den Fall der regelmäßigen Anlenkung.

Bei der regelmäßigen Nebenpleuelanlenkung ist der Anlenkwinkel γ_n gleich dem Zylinderwinkel β_n, also nach (2) $\delta_n = 0$. Für diesen Fall gelingt eine sehr übersichtliche Darstellung[4]), die auch das allgemeinste Glied der Reihen enthält und die sich sehr eng an die entsprechenden Entwicklungen für das unmittelbar angelenkte Pleuel anschließt.

Setzt man in (7) $\gamma_n - \beta_n = \delta_n = 0$, so erhält man mit (6) und unter Verwendung der Additionsformeln für die Winkelfunktionen

$$\sin \psi_n = \lambda_n \left[(\cos \beta_n - \varrho_n) \sin \varphi + \sin \beta_n \cos \varphi\right].$$

Dies kann auf die Form

$$\left.\begin{aligned} \sin \psi_n &= \lambda_n^* \cos \alpha_n \cdot \sin \varphi + \lambda_n^* \sin \alpha_n \cdot \cos \varphi \\ &= \lambda_n^* \sin (\varphi + \alpha_n) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

gebracht werden, wenn man die Hilfsgrößen

$$\lambda_n^* = \lambda_n \sqrt{1 + \varrho_n^2 - 2 \varrho_n \cos \beta_n} \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

$$\cos \alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} (\cos \beta_n - \varrho_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23\,a)$$

$$\sin \alpha_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n^*} \sin \beta_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23\,b)$$

einführt.

Damit erhält man aus (5)

$$\begin{aligned} x_n &= r \cos (\varphi + \beta_n) + c_n \cos \psi_1 + l_n \cos \psi_n \\ &= r \left[\cos (\varphi + \beta_n) + \frac{\varrho_n}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\lambda_n} \sqrt{1 - \lambda_n^{*2} \sin^2 (\varphi + \alpha_n)}\right]. \end{aligned}$$

Durch Entwickeln nach dem binomischen Lehrsatz und anschließende Umformung der Potenzen von $\sin \varphi$ bzw. $\sin (\varphi + \alpha_n)$ in Winkelfunktionen des vielfachen Winkels erhält man hieraus entsprechend wie in Mitteilung I die Fourier-Entwicklung für die Koordinate des Kolbenbolzens bei regelmäßiger Anlenkung

$$\begin{aligned} x_n = r &\left[\cos (\varphi + \beta_n) + \varrho_n \left(A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\nu}}{4\nu^2} \cos 2 \nu \varphi\right)\right. \\ &\left. + \frac{\lambda_n^*}{\lambda_n} \left(A_0^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\nu}^*}{4\nu^2} \cos 2 \nu (\varphi + \alpha_n)\right)\right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Die in diesem Ausdruck auftretenden Beiwerte $A_{2\nu}$ stimmen genau mit denen bei unmittelbarer Anlenkung [Mitt. I, (4)] überein; es ist also auch hier

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64} \lambda^3 - \frac{5}{256} \lambda^5 - \ldots . \\ &\text{und allgemein für } \nu = 1, 2, 3, \ldots . \\ A_{2\nu} &= \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^{k-\nu}\, 4\,\nu^2 \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{2k}{k-\nu} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k-1}. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Die Beiwerte $A_{2\nu}^*$ entstehen aus den Beiwerten $A_{2\nu}$, indem man einfach λ durch λ_n^* ersetzt. Da außerdem der Zahlenwert von λ_n^* bei ausgeführten Motoren in denselben Zahlenbereich wie λ fällt, kann die in Mitteilung I für die unmittelbare Pleuelanlenkung angegebene Zahlentafel 1 sowohl für die Größen $A_{2\nu}$ als auch für $A_{2\nu}^*$ verwendet werden.

Durch Ableitung von x_n (24) nach der Zeit t erhält man die Geschwindigkeit des Nebenkolbens bei regelmäßiger Anlenkung

[4]) K. Tanaka, The Inertia Forces and Couples and Their Balancing of the Star Type Engine. Rep. aeron. Res. Inst., Tokyo, Bd. 1, Nr. 10 (1925).

$$\dot{x}_n = -r\,\omega\left[\sin(\varphi+\beta_n)+\varrho_n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}}{2\nu}\sin 2\nu\varphi + \frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}^*}{2\nu}\sin 2\nu(\varphi+\varkappa_n)\right] \quad (26)$$

und die Kolbenbeschleunigung

$$\ddot{x}_n = -r\,\omega^2\left[\cos(\varphi+\beta_n)+\varrho_n\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{2\nu}\cos 2\nu\varphi + \frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{2\nu}^*\cos 2\nu(\varphi+\varkappa_n)\right]. \quad (27)$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts S_{P_n} des Nebenpleuels bei regelmäßiger Anlenkung folgen aus (16) unter Verwendung von (21) ganz entsprechend wie bei der Größe x_n zu

$$\left.\begin{aligned}\xi_n &= r\left[\cos(\varphi+\beta_n)+\varrho_n\left(A_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}}{4\nu^2}\cos 2\nu\varphi\right)\right.\\ &\left.\quad+\sigma_n'\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\left(A_0^*+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}^*}{4\nu^2}\cos 2\nu(\varphi+\varkappa_n)\right)\right]\\ \text{und}\quad \eta_n &= s_n''\lambda_n^*\sin(\varphi+\varkappa_n) = r\,\sigma_n''\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\sin(\varphi+\varkappa_n)\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

mit denselben Abkürzungen wie in (24) sowie den weiteren Abkürzungen σ_n' und σ_n'' (4). Die Größen $\dot{\xi}_n$ und $\dot{\eta}_n$ sowie $\ddot{\xi}_n$ und $\ddot{\eta}_n$ erhält man vollends leicht durch Ableitung der Größen ξ_n und η_n (28) nach der Zeit t; auf ihre ausführliche Wiedergabe sei verzichtet.

Für den Neigungswinkel ψ_n des Nebenpleuels gegen die Achse seines Zylinders erhält man aus (21) durch eine ganz entsprechende Umformung wie in Mitteilung I

$$\psi_n = \lambda_n^*\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{C_{2\nu-1}^*}{(2\nu-1)^2}\sin[(2\nu-1)(\varphi+\varkappa_n)] \quad . \quad (29)$$

Der Beiwert $C_{2\nu-1}^*$ entsteht aus dem entsprechenden Beiwert von Mitteilung I, indem man wieder λ durch λ_n^* ersetzt. Das allgemeine Glied lautet daher auch hier

$$C_{2\nu-1}^* = \sum_{k=\nu-1}^{\infty}(-1)^{k-\nu}\frac{(2k-1)(2\nu-1)^2}{k+\nu}\binom{\frac{1}{2}}{k}\binom{2k}{k-\nu+1}\left(\frac{\lambda_n^*}{2}\right)^{2k} \quad \ldots \quad (30)$$

Die Beiwerte $C_{2\nu-1}^*$ können daher sofort zahlenmäßig für die Eingangswerte λ_n^* aus Zahlentafel 1 von Mitteilung I entnommen werden.

Durch Ableiten nach der Zeit t erhält man aus (29)

$$\dot{\psi}_n = \lambda_n^*\,\omega\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{C_{2\nu-1}^*}{2\nu-1}\cos[(2\nu-1)(\varphi+\varkappa_n)] \quad (31)$$

und

$$\ddot{\psi}_n = -\lambda_n^*\,\omega^2\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{2\nu-1}^*\sin[(2\nu-1)(\varphi+\varkappa_n)]. \quad (32)$$

Die in (24) bis (32) wiedergegebenen Ergebnisse gelten zunächst nur für die regelmäßige Anlenkung mit $\delta_n = 0$, die aus Gründen des Massenausgleichs bei ausgeführten Motoren meist angestrebt wird. Bei den Motoren, bei denen dies nicht zutrifft, ist jedoch δ_n immer ein sehr kleiner Winkel. Auch in diesem Fall liefern die vorstehenden, mit der Voraussetzung $\delta_n = 0$ durchgeführten Rechnungen noch sehr gute Näherungswerte.

Durch diese Darstellung für die regelmäßige Anlenkung werden die Untersuchungen der Kinematik und des Massenausgleichs sowie die Ermittlung der erregenden Gaskräfte vereinfacht. Sie bringt jedoch für die Untersuchungen über die erregenden Massenkräfte, bei denen je zwei Fourier-Reihen etwa von der Form (24) multipliziert werden müssen, keine Vorteile. Im folgenden wird daher bei den Massendrehkräften der Fall der regelmäßigen Anlenkung stets als Sonderfall aus den Formeln für die beliebige Anlenkung hergeleitet.

III. Die Gasdrehkraft.

Die Gasdrehkraft T_{G_n} eines Nebenzylinders mit mittelbarer Pleuelanlenkung wird wie bei der unmittelbaren Anlenkung zweckmäßig mit der Arbeitsgleichung aus der Gaskolbenkraft P_n berechnet. Diese liefert entsprechend wie in Mitteilung I, wenn wieder T_{G_n} in Kurbeldrehrichtung und P_n als Druckkraft auf den Kolben positiv gerechnet wird,

$$T_{G_n} = -P_n\frac{\dot{x}_n}{r\,\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Hieraus folgt mit $\dot{x}_n$ (14)

$$T_{G_n} = -P_n(\varphi)\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu}\cos\nu\varphi - \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\nu}\sin\nu\varphi\right) \quad . \quad (34)$$

mit den Abkürzungen $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ (13).

Da die auf den Kolben wirkende Gaskraft P_n nicht analytisch gegeben ist, hat man zur Berechnung der Gasdrehkraft die Kraft P_n für verschiedene, etwa von 10° zu 10° fortschreitende Kurbelwinkel φ aus dem Indikatordiagramm zu entnehmen und mit dem Summenausdruck in (34) zu multiplizieren. Da die Beiwerte $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ mit wachsendem Fußzeichen sehr rasch kleiner werden, kann die in der Klammer von (34) stehende Reihe je nach der verlangten Genauigkeit abgebrochen werden. Falls ein pV-Diagramm des Hauptzylinders näherungsweise auch für die Nebenzylinder verwendet werden soll, ist auf die richtige Zuordnung des Kurbelwinkels φ und des aus dem Indikatordiagramm zu entnehmenden Drucks zu achten, wobei noch die zufolge der mittelbaren Pleuelanlenkung auftretende Hubänderung und Totpunktsverschiebung zu berücksichtigen ist.

Ganz entsprechend wie in (34) erhält man für die Gasdrehkraft eines Nebenzylinders bei regelmäßiger Anlenkung aus (33) mit $\dot{x}_n$ (26)

$$T_{G_n} = P_n(\varphi)\left[\sin(\varphi+\beta_n)+\varrho_n\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}}{2\nu}\sin 2\nu\varphi + \frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{2\nu}^*}{2\nu}\sin 2\nu(\varphi+\varkappa_n)\right] \quad (34\,a)$$

mit den Abkürzungen $A_{2\nu}$ und $A_{2\nu}^*$ (25), die für jedes gebräuchliche Schubstangenverhältnis sofort zahlenmäßig aus Mitteilung I, Zahlentafel 1 entnommen werden können.

Um sodann die gesamte Gasdrehkraft des Hauptzylinders und sämtlicher Nebenzylinder eines Sternmotors zu erhalten, hat man zunächst für jeden Kurbelwinkel φ die Gasdrehkräfte der einzelnen Zylinder zu ermitteln und diese einzelnen Anteile für jeden Kurbelwinkel zu addieren. Eine anschließende harmonische Analyse des so ermittelten Verlaufs der Gasdrehkraft liefert schließlich die Harmonischen der gesamten Gasdrehkraft des Sternmotors.

Zum Vergleich sei noch die gesamte Gasdrehkraft sämtlicher z-Zylinder eines Sterns unter der Annahme berechnet, daß alle Pleuel unmittelbar am Hubzapfen angreifen. Wie üblich seien die Zylinder gleichmäßig über den Umfang verteilt, außerdem seien sämtliche Pleuel gleich lang. Die Gasdrehkraft eines Zylinders sei nach der in Mitteilung I angegebenen Vorschrift [vgl. Mitt. I, (15)] berechnet zu

$$T_G = T_0 + T_1\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\delta_1\right)+T_2\sin\left(2\frac{\varphi}{2}+\delta_2\right)+\ldots + T_h\sin\left(h\frac{\varphi}{2}+\delta_h\right)+\ldots \quad (35)$$

Die Scheitelwerte der Harmonischen der Gasdrehkräfte der übrigen Zylinder sind genau gleich groß, lediglich die Phasen sind verschieden.

Es läßt sich nun zeigen, daß bei unmittelbarer Pleuelanlenkung die gesamte Gasdrehkraft eines z-Zylinder-Sternmotors von der Form

$$T_G = z\,T_0 + z\,T_z\sin\left(z\frac{\varphi}{2}+\delta_z\right)+z\,T_{2z}\sin\left(2z\frac{\varphi}{2}+\delta_{2z}\right)+\ldots \quad \ldots \quad (36)$$

ist. Es verschwinden also sämtliche Harmonischen mit Ausnahme der »ausgezeichneten Harmonischen«, die in z-facher Größe erscheinen. Bei einem 7-Zylinder-Sternmotor

mit unmittelbarer Anlenkung zum Beispiel bleibt somit nur die 7., 14., 21., ... Harmonische bzw. die 3½te, 7., 10½te, ... Ordnung der Erregenden übrig. Auf die Wiedergabe der Herleitung von (36) sei verzichtet; die Richtigkeit läßt sich leicht mit Hilfe von Vektorsternen bestätigen.

IV. Die Massendrehkraft für einen Nebenzylinder.

1. Die vom Kolben herrührende Massendrehkraft.

Ebenso wie bei der unmittelbaren Anlenkung des Pleuels [Mitt. I, (16)] erhält man hier nach der Arbeitsgleichung für die vom Kolben herrührende Massendrehkraft

$$T_{K_n} = -\frac{\dot{x}_n\,\ddot{x}_n}{r\,\omega}\,m_{K_n}, \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

wo m_{K_n} die Masse des Kolbens bedeutet. Setzt man in (37) die Fourier-Reihe für $\dot{x}_n$ aus (14) sowie für $\ddot{x}_n$ aus (15) ein und multipliziert diese beiden Reihen nach den im Anhang von Mitteilung I angegebenen Formeln, so erhält man schließlich die vom Kolben herrührende Massendrehkraft eines Nebenzylinders bei beliebiger Anlenkung des Pleuels zu

$$T_{K_n} = m_{K_n}\,r\,\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{E}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{F}_\nu \sin\nu\varphi) \quad \ldots \quad (38)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_1 &= \left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} - \frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n)\right]\sin\beta_n \\
&\qquad \left\langle + \frac{\tau_n^3}{4}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\cos\beta_n - \lambda_n\cos 2\beta_n\right)\right\rangle \\
\mathfrak{E}_2 &= -\frac{1}{2}\sin 2\beta_n - \left(1\left\langle + \frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\cos\beta_n \\
&\qquad + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\cos 2\beta_n \\
\mathfrak{E}_3 &= -\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\sin 3\beta_n - \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n)\sin\beta_n \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\lambda_n\mu_n\sin 2\beta_n \\
&\qquad \left\langle + \frac{3}{4}\tau_n^3\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\cos 3\beta_n - \lambda_n\cos 2\beta_n\right)\right\rangle \\
\mathfrak{E}_4 &= -\frac{\lambda_n^2}{4}\sin 4\beta_n + \lambda_n^2\mu_n\sin 3\beta_n \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n(\lambda\langle + 3\lambda_n\mu_n\rangle)\sin 2\beta_n\langle + \lambda\lambda_n\mu_n^2\sin\beta_n\rangle \\
\mathfrak{E}_5 &= \frac{5}{32}\lambda_n^3\sin 5\beta_n\left\langle - \frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\sin 4\beta_n\right\rangle \\
&\;\vdots \\
\mathfrak{F}_1 &= \left[\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16} + \frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n)\right]\cos\beta_n - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n \\
&\quad \left\langle - \frac{\tau_n^3}{4}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\sin\beta_n - \lambda_n\sin 2\beta_n\right) - \frac{3}{16}\lambda_n^3\mu_n\right\rangle \\
\mathfrak{F}_2 &= -\frac{1}{2}\cos 2\beta_n + \left(1\left\langle + \frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\sin\beta_n \\
&\qquad - \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\beta_n \\
\mathfrak{F}_3 &= -\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\cos 3\beta_n - \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n)\cos\beta_n \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\lambda_n\mu_n\cos 2\beta_n\left\langle - \frac{9}{32}\lambda^3\mu_n\cos\beta_n\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3}{4}\tau_n^3\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\sin 3\beta_n - \lambda_n\sin 2\beta_n\right)\right\rangle \\
\mathfrak{F}_4 &= -\frac{\lambda_n^2}{4}\cos 4\beta_n + \lambda_n^2\mu_n\cos 3\beta_n \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n(\lambda\langle + 3\lambda_n\mu_n\rangle)\cos 2\beta_n \\
&\qquad \left\langle + \lambda\lambda_n\mu_n^2\cos\beta_n - \frac{\lambda^2}{4}\mu_n^2\right\rangle \\
\mathfrak{F}_5 &= \frac{5}{32}\lambda_n^3\cos 5\beta_n\left\langle - \frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\cos 4\beta_n\right\rangle \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Bei der zahlenmäßigen Auswertung von (39) ist zu beachten, daß die Ausdrücke $\mathfrak{E}_\nu$ und $\mathfrak{F}_\nu$ ganz ähnlich gebaut sind. Bei weniger großen Anforderungen an die Genauigkeit können die Glieder vierter Ordnung in λ, λ_n usw. weggelassen werden. Zur Erleichterung der Zahlenrechnung sind daher hier und in allen späteren Gleichungen die Glieder vierter Ordnung mit einer geknickten Klammer $\langle\ldots\rangle$ versehen, wobei ausdrücklich darauf hingewiesen sei, daß dieses Zeichen kein Rechenzeichen darstellen soll. Es zeigt sich übrigens, daß die Gleichungen durch die Erweiterung um eine weitere Ordnung in λ beträchtlich umfangreicher werden.

2. Die vom Pleuel herrührende Massendrehkraft.

Für die vom Pleuel herrührende Massendrehkraft erhält man ebenso wie bei der unmittelbaren Anlenkung des Pleuels [Mitt. I, (20)] mit den in Bild 1 eingetragenen Bezeichnungen

$$T_{P_n} = -\frac{m_{P_n}}{r\,\omega}\left(\dot\xi_n\,\ddot\xi_n + \dot\eta_n\,\ddot\eta_n + k_{P_n}^2\,\dot\psi_n\,\ddot\psi_n\right), \quad \ldots \quad (40)$$

wo m_{P_n} die Masse des Pleuels und k_{P_n} seinen Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt bedeutet.

Setzt man in (40) die nach (16) zu ermittelnden Fourier-Reihen für $\dot\xi_n$, $\ddot\xi_n$, $\dot\eta_n$ und $\ddot\eta_n$ sowie die Fourier-Reihen (19) und (20) für $\dot\psi_n$ und $\ddot\psi_n$ ein, so erhält man nach Multiplikation der zusammengehörigen Reihen und geeigneter Zusammenfassung[5]) für die Massendrehkraft des Pleuels unter Berücksichtigung seiner Drehträgheit bei beliebiger Anlenkung

$$T_{P_n} = m_{P_n}\,r\,\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{G}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{H}_\nu \sin\nu\varphi) \quad \ldots \quad (41)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1 &= \left[\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) + \frac{\sigma_n'}{4}\lambda_n\mu_n^2 - \frac{\lambda}{4}\mu_n\right]\sin\beta_n \\
&\quad \left\langle + \left[(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda} - (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\lambda\right]\frac{\tau_n^3}{4}\cos\beta_n - \frac{\sigma_n'}{4}\lambda_n\tau_n^3\cos 2\beta_n\right\rangle \\
\mathfrak{G}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2} - 2\sigma_n')\sin 2\beta_n - (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\mu_n\sin\beta_n \\
&\quad - \left(1\left\langle + \sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\cos\beta_n + \sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\cos 2\beta_n \\
\mathfrak{G}_3 &= -\sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\sin 3\beta_n - \frac{3}{4}(\lambda + \sigma_n'\lambda_n\mu_n)\mu_n\sin\beta_n \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\mu_n\sin 2\beta_n + \left\langle\frac{3}{4}(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\tau_n^3\cos 3\beta_n\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}\sigma_n'\lambda_n\tau_n^3\cos 2\beta_n - \frac{3}{4}(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\lambda\tau_n^3\cos\beta_n\right\rangle
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

[5]) Diese Rechnung vereinfacht sich, wenn man aus (16) zunächst $\dot\xi_n$, $\ddot\xi_n$, $\dot\eta_n$ und $\ddot\eta_n$ ermittelt, ohne die Reihen für x_n, $\cos\psi_n$ und $\sin\psi_n$ sofort explizit einzusetzen. Dabei zeigt sich, daß ein Teil der gesuchten Fourier-Reihe für T_{P_n} von der Berechnung der vom Kolben herrührenden Massendrehkraft übernommen werden kann.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}_4 &= -\frac{\lambda_n^2}{4}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\sin 4\beta_n + (\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\,\lambda_n^2\mu_n\sin 3\beta_n \\
&\quad -\frac{\lambda_n}{2}\mu_n[\lambda\,\sigma_n' \langle +3\lambda_n\mu_n(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\rangle]\sin 2\beta_n \langle +\sigma_n'\lambda\lambda_n\mu_n^2\sin\beta_n\rangle \\
\mathfrak{G}_5 &= \frac{5}{32}\sigma_n'\lambda_n^3\sin 5\beta_n \left\langle -\frac{5}{8}\sigma_n'\lambda_n^3\mu_n\sin 4\beta_n\right\rangle \\
&\;\vdots \\
\mathfrak{H}_1 &= \left[\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}\right)+\frac{\mu_n}{4}(\lambda+\sigma_n'\lambda_n\mu_n)\right]\cos\beta_n - \left(\frac{1}{2}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\mu_n \\
&\quad \left\langle -\left[(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda}+(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\,\lambda\right]\frac{\tau_n^3}{4}\sin\beta_n+\frac{\sigma_n'}{4}\lambda_n\tau_n^3\sin 2\beta_n\right\rangle \\
\mathfrak{H}_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}-2\sigma_n')\cos 2\beta_n-(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\,\mu_n\cos\beta_n+\frac{1}{2}(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\,\mu_n^2 \\
&\quad +\left(1\left\langle+\sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\sin\beta_n-\sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\beta_n \\
\mathfrak{H}_3 &= -\sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n+\frac{9}{32}\lambda_n^3\right)\cos 3\beta_n-\frac{3}{4}(\lambda+\sigma_n'\lambda_n\mu_n)\,\mu_n\cos\beta_n \\
&\quad +\left(\frac{3}{2}\left\langle+\frac{15}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\mu_n\cos 2\beta_n\left\langle-\frac{9}{32}\lambda^3\mu_n\cos\beta_n\right. \\
&\quad \left.-\frac{3}{4}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\tau_n^3\sin 3\beta_n+\frac{3}{4}\sigma_n'\lambda_n\tau_n^3\sin 2\beta_n+\frac{3}{4}(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\,\lambda\,\tau_n^3\sin\beta_n\right\rangle \\
\mathfrak{H}_4 &= -\frac{1}{4}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\,\lambda_n^2\cos 4\beta_n+(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\,\lambda_n^2\mu_n\cos 3\beta_n \\
&\quad -\frac{\lambda_n}{2}\mu_n[\sigma_n'\lambda\langle+3\lambda_n\mu_n(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\rangle]\cos 2\beta_n\left\langle+\sigma_n'\lambda\lambda_n\mu_n^2\cos\beta_n-\frac{\lambda^2}{4}\mu_n^2\right\rangle \\
\mathfrak{H}_5 &= \frac{5}{32}\sigma_n'\lambda_n^3\cos 5\beta_n\left\langle-\frac{5}{8}\sigma_n'\lambda_n^3\mu_n\cos 4\beta_n\right\rangle \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (42)$$

Zum Vergleich mit dem in (41) und (42) gefundenen Ergebnis für die Massendrehkraft eines Nebenpleuels unter Berücksichtigung seiner wirklichen Bewegung sei noch kurz eine Näherungsrechnung angegeben, die die Drehträgheit des Nebenpleuels außer acht läßt. Dabei wird die Masse des Nebenpleuels entsprechend der Lage seines Schwerpunktes in eine Ersatzmasse $\sigma_n'' m_{P_n}$ in der Anlenkachse C_n (Bild 1) und in eine hin- und hergehende Ersatzmasse $\sigma_n' m_{P_n}$ im Kolbenbolzen B_n aufgeteilt. Die in C_n angebrachte Ersatzmasse macht die Drehbewegung ψ des Hauptpleuels mit, und ihr Beitrag zur Massendrehkraft (sowie der entsprechende Beitrag von den übrigen etwa noch am Hauptpleuel angreifenden Nebenpleueln) muß dadurch mit einbezogen werden, daß bei der Berechnung der Massendrehkraft des Hauptpleuels diese in den Anlenkachsen angebrachten Ersatzmassen bei der Masse, der Schwerpunktslage und dem Trägheitsmoment des Hauptpleuels mitberücksichtigt werden, was jedoch einen verhältnismäßig großen Rechenaufwand erfordert. Der Beitrag der in C_n sitzenden Ersatzmasse zur Massendrehkraft wird daher vielfach auch vernachlässigt; diese Ersatzmasse wird dann also wie bei der unmittelbaren Pleuelanlenkung als rein umlaufende Masse betrachtet.

Der im Kolbenbolzen vereinigt gedachte Massenanteil $\sigma_n' m_{P_n}$ des Pleuels liefert einen Beitrag zur Massendrehkraft entsprechend dem des Kolbens nach (38) und (39); es wird also näherungsweise

$$T_{P_n}^{(N)} = \sigma_n' m_{P_n} r\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{E}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{F}_\nu \sin\nu\varphi) \qquad (43)$$

mit den Abkürzungen $\mathfrak{E}_\nu$ und $\mathfrak{F}_\nu$ (39). Auf die Genauigkeit dieser Näherungsrechnung soll bei der Besprechung des durchgerechneten Beispiels eingegangen werden.

V. Die Massendrehkraft sämtlicher Nebenzylinder eines Sternmotors.

Bei der Ermittlung der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder eines Sternmotors ist es nicht zweckmäßig, die Massendrehkraft jedes einzelnen Nebenzylinders zahlenmäßig auszurechnen und dann die gefundenen entsprechenden Fourier-Beiwerte zu addieren. Es ist vielmehr erheblich einfacher, die Gesamtmassendrehkraft sämtlicher Nebenzylinder sofort allgemein zu berechnen und die Massendrehkraft für den Hauptzylinder, für den die Zahlenrechnung leicht mit den in Mitteilung I angegebenen Zahlentafeln durchgeführt werden kann, am Schluß zahlenmäßig durch Addition der zusammengehörigen sin- und cos-Glieder gleichen Arguments miteinzubeziehen.

Für die folgenden Untersuchungen seien die Zylinder eines Sterns, mit dem Hauptzylinder beginnend, mit 1, 2, ... z beziffert, wo z die Gesamtzahl der Zylinder im Stern, also $z-1$ die Zahl der Nebenzylinder allein bedeutet. Der Winkel β sei der durchweg gleiche Winkel zwischen zwei benachbarten Zylinderachsen, so daß also für den n-ten Zylinder der Zylinderwinkel

$$\beta_n = (n-1)\,\beta \quad \text{mit} \quad n = 2, 3, \ldots z \quad \ldots\ldots (44)$$

wird und außerdem die Beziehung

$$\beta_{z+2-n} = -\beta_n \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

gilt. Ferner werde die praktisch immer zutreffende Annahme gemacht, daß die dem Hauptpleuel angehörenden Anlenkachsen C_n (Bild 1) bezüglich der Achse AB_1 des Hauptpleuels symmetrisch liegen. Es gelten somit die weiteren Beziehungen:

$$\varrho_{z+2-n} = \varrho_n \quad \text{und} \quad \delta_{z+2-n} = -\delta_n \quad \ldots\ldots (46)$$

Schließlich sei noch angenommen, daß sämtliche Kolben und Pleuel der Nebenzylinder genau gleich ausgebildet seien.

1. Die von sämtlichen Nebenkolben herrührende Massendrehkraft.

Die Summe der von sämtlichen Nebenkolben eines Sterns herrührenden Massendrehkräfte ergibt sich aus (38) mit (39) zu

$$T_K{}^* = \sum_{n=2}^{z} T_{K_n} = m_{K_n} r\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{E}_\nu{}^* \cos\nu\varphi + \mathfrak{F}_\nu{}^* \sin\nu\varphi), \quad \ldots\ldots (47)$$

wobei

$$\mathfrak{E}_\nu{}^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{E}_\nu{}^{(n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_\nu{}^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{F}_\nu{}^{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

ist, mit den Größen $\mathfrak{E}_\nu^{(n)}$ und $\mathfrak{F}_\nu^{(n)}$ (39)[6].

[6]) In (39) sind die nur hier in (48) sowie später in (53) vorübergehend eingeführten oberen Beizeichen „n" weggelassen.

Man verwendet nun aus der Reihentheorie folgende Formeln[7]), die sofort für die hier üblichen Bezeichnungen angeschrieben seien:

$$\sum_{n=2}^{z} \cos h\,[\varphi + (n-1)\,\beta] = \begin{cases} -\cos h\,\varphi & \text{für } h\,\beta \neq 2\,k\,\pi \\ (z-1)\cos h\,\varphi & \text{für } h\,\beta = 2\,k\,\pi \end{cases} \quad \text{mit } h = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (49)$$

und

$$\sum_{n=2}^{z} \sin h\,[\varphi + (n-1)\,\beta] = \begin{cases} -\sin h\,\varphi & \text{für } h\,\beta \neq 2\,k\,\pi \\ (z-1)\sin h\,\varphi & \text{für } h\,\beta = 2\,k\,\pi \end{cases} \quad \text{mit } h = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (50)$$

Insbesondere gilt für $\varphi = 0$ und $h = 1$, wie man auch mit Hilfe eines einfachen Vektorsterns zeigen kann,

$$\cos\beta + \cos 2\,\beta + \ldots + \cos(z-1)\,\beta = -1 \qquad (49\,a)$$

und

$$\sin\beta + \sin 2\,\beta + \ldots + \sin(z-1)\,\beta = 0 \quad . \quad . \qquad (50\,a)$$

Mit (49) und (50) sowie unter Beachtung von (44) und (46) werden die Beiwerte $\mathfrak{E}_\nu^*$ und $\mathfrak{F}_\nu^*$ (48) für den Fall beliebiger Anlenkung der Nebenpleuel zu

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_1^* = \mathfrak{E}_2^* = \ldots = \mathfrak{E}_5^* = \ldots = 0 \\
&\mathfrak{F}_1^* = -\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{z} \mu_n\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\cos(n-1)\,\beta - \frac{\lambda_n}{2}\sum_{n=2}^{z}\mu_n \\
&\qquad \left\langle -\frac{\lambda_n^2}{4\,\lambda}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin(n-1)\,\beta + \frac{\lambda_n}{4}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2\,(n-1)\,\beta - \frac{3}{16}\,\lambda_n^3\sum_{n=2}^{z}\mu_n\right\rangle \\
&\mathfrak{F}_2^* = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{z}\left(1\left\langle + \frac{\lambda_n}{\lambda}\,\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\sin(n-1)\,\beta - \frac{\lambda_n}{\lambda}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2\,(n-1)\,\beta \\
&\mathfrak{F}_3^* = \frac{3}{4}\,\lambda_n + \frac{9}{32}\,\lambda_n^3 - \frac{3}{4}\sum_{n=2}^{z}\mu_n\,(\lambda + \lambda_n\,\mu_n)\cos(n-1)\,\beta \\
&\qquad + \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\,\lambda_n^2\right\rangle\right)\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 2\,(n-1)\,\beta\left\langle -\frac{9}{32}\,\lambda^3\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos(n-1)\,\beta\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3}{4}\,\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 3\,(n-1)\,\beta + \frac{3}{4}\,\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2\,(n-1)\,\beta\right\rangle \\
&\mathfrak{F}_4^* = \frac{\lambda_n^2}{4} + \lambda_n^2\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 3\,(n-1)\,\beta - \frac{\lambda_n}{2}\sum_{n=2}^{z}\mu_n\,(\lambda\,\langle + 3\,\lambda_n\,\mu_n\rangle)\cos 2\,(n-1)\,\beta \\
&\qquad \left\langle + \lambda\,\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2\cos(n-1)\,\beta - \frac{\lambda^2}{4}\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2\right\rangle \\
&\mathfrak{F}_5^* = -\frac{5}{32}\,\lambda_n^3\left\langle -\frac{5}{8}\,\lambda_n^3\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 4\,(n-1)\,\beta\right\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (51)$$

Hierbei sind wieder die Glieder vierter Ordnung in λ, λ_n usw. zwischen geknickten Klammern eingeschlossen.

Wie die Beziehungen (49) und (50) zusammen mit (39) zeigen, gelten hier sowie in allen späteren Gleichungen, bei denen die Massendrehkräfte über sämtliche Nebenzylinder summiert werden, die Glieder 1. und 2. Ordnung (bezogen auf die Kurbelwellenumdrehung) für Sternmotoren mit Zylinderzahlen $z > 2$, diejenigen 3. Ordnung für $z > 3$, diejenigen 4. Ordnung für $z > 4$ und diejenigen 5. Ordnung für $z > 5$. Da somit durch diese Gleichungen alle praktisch vorkommenden Sternmotorenbauarten genügend genau erfaßt werden, wurde darauf verzichtet, die Glieder auch für kleinere Zylinderzahlen anzuschreiben, was aber mit Hilfe der Gleichungen (39) bzw. (42) sowie (49) und (50) ohne weiteres möglich wäre.

Aus den Ausdrücken (51) folgen sofort die entsprechenden Ausdrücke für den Sonderfall der regelmäßigen Nebenpleuelanlenkung, bei dem alle Anlenkwinkel γ_n und alle Anlenkhalbmesser c_n einander gleich sind; es ist also nach (2) $\delta_n = 0$ sowie nach (1) $\varrho_n = \varrho$ und nach (3) $\mu_n = \mu = \varrho$ zu setzen. Damit wird die Massendrehkraft sämtlicher Nebenkolben bei regelmäßiger Anlenkung unter Beachtung von (49) und (50)

$$\overline{T}_K = m_{K_n}\,r\,\omega^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\overline{\mathfrak{E}}_\nu\cos\nu\,\varphi + \overline{\mathfrak{F}}_\nu\sin\nu\,\varphi) \quad . \ . \qquad (47\,a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathfrak{E}}_1 = \overline{\mathfrak{E}}_2 = \ldots = \overline{\mathfrak{E}}_5 = \ldots = 0 \\
&\overline{\mathfrak{F}}_1 = -\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) - \frac{\varrho}{4}\,(\lambda + \lambda_n\,\varrho) \\
&\qquad - (z-1)\left(\frac{1}{2}\left\langle + \frac{3}{16}\,\lambda_n^2\right\rangle\right)\lambda_n\,\varrho \\
&\overline{\mathfrak{F}}_2 = \frac{1}{2} \\
&\overline{\mathfrak{F}}_3 = \frac{3}{4}\,\lambda_n + \frac{9}{32}\,\lambda_n^3 + \frac{3}{4}\,\varrho\,(\lambda + \lambda_n\,\varrho) \\
&\qquad - \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\,\lambda_n^2\right\rangle\right)\lambda_n\,\varrho\left\langle + \frac{9}{32}\,\lambda^3\,\varrho\right\rangle \\
&\overline{\mathfrak{F}}_4 = \frac{\lambda_n^2}{4}\,(1 - 4\,\varrho) + \frac{\lambda_n}{2}\,\varrho\,(\lambda\,\langle + 3\,\lambda_n\,\varrho\rangle) \\
&\qquad \left\langle -\lambda\,\varrho^2\left(\lambda_n + \frac{z-1}{4}\,\lambda\right)\right\rangle \\
&\overline{\mathfrak{F}}_5 = -\frac{5}{32}\,\lambda_n^3\left\langle + \frac{5}{8}\,\lambda_n^3\,\varrho\right\rangle \\
&\quad \vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (51\,a)$$

Die für die regelmäßige Anlenkung hergeleiteten Ausdrücke (47a) und (51a) und später entsprechend die Ausdrücke (52a) und (54a) liefern auch für alle praktisch vorkommenden Anlenkverhältnisse, bei denen die Anlenkwinkel und die Anlenkhalbmesser etwas voneinander verschieden sind, sehr gute Näherungen für die Massendrehkräfte. Man hat hierzu in (51a) für ϱ den Mittelwert über die Größen ϱ_n einzusetzen.

Aus (47a) und (51a) folgt mit $\varrho = 0$ die Massendrehkraft sämtlicher Nebenkolben eines Sterns (also ohne Hauptkolben) bei unmittelbarer Anlenkung, wobei die Pleuellänge durchweg l sein soll, zu

$$T_K^0 = m_{K_n}\,r\,\omega^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{E}_\nu^{(0)}\cos\nu\,\varphi + \mathfrak{F}_\nu^{(0)}\sin\nu\,\varphi) \quad . \qquad (47\,b)$$

[7]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 368.

mit

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_1^{(0)} = \mathfrak{G}_2^{(0)} = \ldots = \mathfrak{G}_5^{(0)} = \ldots = 0\\
&\mathfrak{H}_1^{(0)} = -\left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16}\right)\\
&\mathfrak{H}_2^{(0)} = \frac{1}{2}\\
&\mathfrak{H}_3^{(0)} = \frac{3}{4}\lambda + \frac{9}{32}\lambda^3\\
&\mathfrak{H}_4^{(0)} = \frac{\lambda^2}{4}\\
&\mathfrak{H}_5^{(0)} = -\frac{5}{32}\lambda^3\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (51\text{b})$$

Die für die Massendrehkraft sämtlicher Nebenkolben eines Sterns bei unmittelbarer Anlenkung ermittelten Ausdrücke (51b) sind dieselben wie die in Mitteilung I (18) für die Massendrehkraft eines Kolbens bei unmittelbarer Pleuelanlenkung gefundenen, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Dies besagt, daß alle Ordnungen der Gesamtmassendrehkraft sämtlicher Kolben eines Sterns (einschließlich Hauptkolben) bei unmittelbarer Anlenkung verschwinden, falls die Abmessungen des Hauptkolbens dieselben sind wie die der Nebenkolben; lediglich die Ordnungen z (z = gesamte Zylinderzahl des Sternmotors) treten — wie eine entsprechende Betrachtung wie bei den Gasdrehkräften zeigt — in z-facher Größe gegenüber dem einzelnen Kurbeltrieb auf. Diese Ordnungen werden aber, wie aus der Bemerkung im Anschluß an (51) hervorgeht, durch die vorliegenden Untersuchungen nicht mehr erfaßt. Entsprechendes ergibt sich später bei der Massendrehkraft der Pleuel.

2. Die von sämtlichen Nebenpleueln herrührende Massendrehkraft.

Ganz entsprechend wie die Massendrehkraft der Kolben ergibt sich die von sämtlichen Nebenpleueln eines Sterns herrührende Massendrehkraft aus (41) und (42) zu

$$T_P^* = \sum_{n=2}^{z} T_{P_n} = m_{P_n} r \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{G}_\nu^* \cos \nu\varphi + \mathfrak{H}_\nu^* \sin \nu\varphi), \quad \ldots (52)$$

wobei

$$\mathfrak{G}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{G}_\nu^{(n)} \text{ und } \mathfrak{H}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{H}_\nu^{(n)} \quad \ldots (53)$$

ist, mit den Größen $\mathfrak{G}_\nu^{(n)}$ und $\mathfrak{H}_\nu^{(n)}$ (42). Man findet schließlich unter Beachtung von (49) und (50)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_1^* = \mathfrak{G}_2^* = \ldots = \mathfrak{G}_5^* = \ldots = 0\\
&\mathfrak{H}_1^* = -\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{z}\mu_n(\lambda + \sigma_n'\lambda_n\mu_n)\cos(n-1)\beta\\
&\quad -\left(\frac{1}{2}\left\langle + \frac{3}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n \left\langle -\frac{1}{4}\left[(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda} + (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\lambda\right] \times\right.\\
&\quad \left.\times \sum_{n=2}^{z}\tau_n^3 \sin(n-1)\beta + \frac{\sigma_n'}{4}\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2(n-1)\beta\right\rangle\\
&\mathfrak{H}_2^* = \frac{1}{2}(2\sigma_n' - \sigma_n'^2 - \sigma_n^{*2}) - (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos(n-1)\beta\\
&\quad + \frac{1}{2}(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2 + \sum_{n=2}^{z}\left(1\left\langle + \sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\tau_n^3\sin(n-1)\beta - \sigma_n'\frac{\lambda_n}{\lambda}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2(n-1)\beta\\
&\mathfrak{H}_3^* = \sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{9}{32}\lambda_n^3\right) - \frac{3}{4}\sum_{n=2}^{z}(\lambda + \sigma_n'\lambda_n\mu_n)\mu_n\cos(n-1)\beta\\
&\quad + \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 2(n-1)\beta\\
&\quad \left\langle -\frac{9}{32}\lambda^3\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos(n-1)\beta - \frac{3}{4}(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 3(n-1)\beta\right.\\
&\quad \left. + \frac{3}{4}\sigma_n'\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin 2(n-1)\beta + \frac{3}{4}(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\lambda\sum_{n=2}^{z}\tau_n^3\sin(n-1)\beta\right\rangle\\
&\mathfrak{H}_4^* = \frac{1}{4}(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\lambda_n^2 + (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\lambda_n^2\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 3(n-1)\beta\\
&\quad - \frac{\sigma_n'}{2}\lambda\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 2(n-1)\beta\left\langle -\frac{3}{2}(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\lambda_n^2\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2\cos 2(n-1)\beta\right.\\
&\quad \left. + \sigma_n'\lambda\lambda_n\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2\cos(n-1)\beta - \frac{\lambda^2}{4}\sum_{n=2}^{z}\mu_n^2\right\rangle\\
&\mathfrak{H}_5^* = -\frac{5}{32}\sigma_n'\lambda_n^3\left\langle -\frac{5}{8}\sigma_n'\lambda_n^3\sum_{n=2}^{z}\mu_n\cos 4(n-1)\beta\right\rangle\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (54)$$

Bei regelmäßiger Nebenpleuelanlenkung wird die von sämtlichen Nebenpleueln herrührende Massendrehkraft nach (52) und (54) mit (49) und (50) zu

$$\overline{T}_P = m_{P_n} r \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\overline{\mathfrak{G}}_\nu \cos \nu\varphi + \overline{\mathfrak{H}}_\nu \sin \nu\varphi) \quad \ldots (52\text{a})$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\mathfrak{G}}_1 = \overline{\mathfrak{G}}_2 = \ldots = \overline{\mathfrak{G}}_5 = \ldots = 0\\
&\overline{\mathfrak{H}}_1 = -\sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) - \frac{\varrho}{4}(\lambda + \sigma_n'\lambda_n\varrho)\\
&\qquad - (z-1)\left(\frac{1}{2}\left\langle + \frac{3}{16}\lambda_n^2\right\rangle\right)\sigma_n'\lambda_n\varrho\\
&\overline{\mathfrak{H}}_2 = \frac{1}{2}(2\sigma_n' - \sigma_n'^2 - \sigma_n^{*2}) + \varrho(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\left(1 + \frac{z-1}{2}\varrho\right)
\end{aligned}\right\} \quad (54\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{H}}_3 &= \sigma_n' \left(\frac{3}{4}\,\lambda_n + \frac{9}{32}\,\lambda_n^3\right) + \frac{3}{4}\,\varrho\,(\lambda + \sigma_n'\,\lambda_n\,\varrho) \\
&\quad - \left(\frac{3}{2}\left\langle + \frac{15}{16}\,\lambda_n^2\right\rangle\right) \sigma_n'\,\lambda_n\,\varrho \left\langle + \frac{9}{32}\,\lambda^3\,\varrho\right\rangle \\
\overline{\mathfrak{H}}_4 &= (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\,\lambda_n^2 \left(\frac{1}{4} - \varrho \left\langle + \frac{3}{2}\,\varrho^2\right\rangle\right) \\
&\quad + \lambda\,\varrho \left(\frac{\sigma_n'}{2}\,\lambda_n \left\langle - \sigma_n'\,\lambda_n\,\varrho - \frac{z-1}{4}\,\lambda\,\varrho\right\rangle\right) \\
\overline{\mathfrak{H}}_5 &= -\frac{5}{32}\,\sigma_n'\,\lambda_n^3\,(1 \langle - 4\,\varrho\rangle) \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (54\,\text{a})$$

Aus (52a) und (54a) folgt mit $\varrho = 0$ die Massendrehkraft sämtlicher Nebenpleuel eines Sterns (also ohne Hauptpleuel) bei unmittelbarer Anlenkung, wenn wieder die Pleuellänge durchweg l sein soll, zu

$$T_P^{(0)} = m_{P_n}\,r\,\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathfrak{G}_\nu^{(0)} \cos \nu\,\varphi + \mathfrak{H}_\nu^{(0)} \sin \nu\,\varphi) \quad (52\,\text{b})$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1^{(0)} &= \mathfrak{G}_2^{(0)} = \ldots = \mathfrak{G}_5^{(0)} = \ldots = 0 \\
\mathfrak{H}_1^{(0)} &= -\sigma_n'\left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16}\right) \\
\mathfrak{H}_2^{(0)} &= \frac{1}{2}\,(2\,\sigma_n' - \sigma_n'^2 - \sigma_n^{*2}) \\
\mathfrak{H}_3^{(0)} &= \sigma_n'\left(\frac{3}{4}\,\lambda + \frac{9}{32}\,\lambda^3\right) \\
\mathfrak{H}_4^{(0)} &= (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\,\frac{\lambda^2}{4} \\
\mathfrak{H}_5^{(0)} &= -\frac{5}{32}\,\sigma_n'\,\lambda^3 \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (54\,\text{b})$$

Nachdem die Massendrehkraft der Kolben und Pleuel sämtlicher Zylinder des Sterns (einschließlich Hauptzylinder) ermittelt ist, erhält man schließlich die Gesamtdrehkraft des Sterns aus der Gasdrehkraft und den Massendrehkraftanteilen von Kolben und Pleuel durch algebraische Addition der Einzelanteile.

VI. Durchrechnung eines Beispiels.

Als Beispiel wurde der Bramo 323-Neunzylinder-Sternmotor gewählt. Dieser Motor besitzt folgende für die vorliegenden Untersuchungen wesentlichen Kenngrößen:

Zylinderbohrung $d = 154$ mm,
Kurbelhalbmesser $r = 80$ mm.

Hauptzylinder:

Pleuellänge $l = 330$ mm,
Schwerpunktsabstände (vgl. Bild 1) $s' = 41{,}3$ mm und $s'' = 288{,}7$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda = r/l = 0{,}2424$,
Gewicht des Hauptpleuels $G_P = 10{,}54$ kg,
Trägheitsmoment des Hauptpleuels bezogen auf den Schwerpunkt $m_P k_P^2 = 1{,}25$ cmkgs²,
Gewicht des vollständigen Kolbens $G_K = 2{,}972$ kg,
Anlenkhalbmesser: $c_2 = c_9 = 69{,}65$ mm,
$c_3 = c_8 = 71{,}26$ mm,
$c_4 = c_7 = 70{,}60$ mm,
$c_5 = c_6 = 68{,}82$ mm.
Die Anlenkwinkel sind über den Umfang gleichmäßig verteilt; es ist also nach (2) $\delta_n = 0$.

Nebenzylinder:

Pleuellänge $l_n = 261{,}5$ mm,
Schwerpunktsabstände $s_n' = 138{,}5$ mm und $s_n'' = 123$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda_n = r/l_n = 0{,}3059$,
Gewicht des Nebenpleuels $G_{P_n} = 1{,}42$ kg,
Trägheitsmoment des Nebenpleuels bezogen auf den Schwerpunkt $m_{P_n} k_{P_n}^2 = 0{,}144$ cmkgs²,
Gewicht des vollständigen Kolbens $G_{K_n} = 2{,}972$ kg.

Die Untersuchungen sind auf eine Drehzahl $n = 2100$ U/min sowie einen mittleren indizierten Druck $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm² bezogen.

Die wichtigsten für dieses Beispiel gefundenen Ergebnisse sind in Bild 2 bis 8 sowie in Zahlentafel 1 bis 5 zusammengestellt.

1. Die Ergebnisse für einen Nebenzylinder.

Bild 2 zeigt für einen Nebenzylinder, und zwar für Zylinder 3 den Verlauf der nach (34) ermittelten Gasdrehkraft sowie der nach (38) und (41) berechneten Massendrehkraft und außerdem noch der daraus durch Überlagerung gefundenen Gesamtdrehkraft. Durch rechnerische harmonische Analyse mit 72 Ordinaten wurden sodann die Harmonischen der Gasdrehkräfte (bezogen auf das Viertaktarbeitsspiel) bestimmt und in Bild 3 dargestellt.

Die Untersuchung der Harmonischen der Massendrehkraft desselben Nebenzylinders bei der Motordrehzahl $n = 2100$ U/min ergibt zunächst die in Zahlentafel 1 zusammengestellten, nach (39) ermittelten dimensionslosen Fourier-Beiwerte $\mathfrak{E}_\nu$, $\mathfrak{F}_\nu$ und die zugehörigen Scheitelwerte $\sqrt{\mathfrak{E}_\nu^2 + \mathfrak{F}_\nu^2}$ für die Massendrehkraft des Kolbens sowie

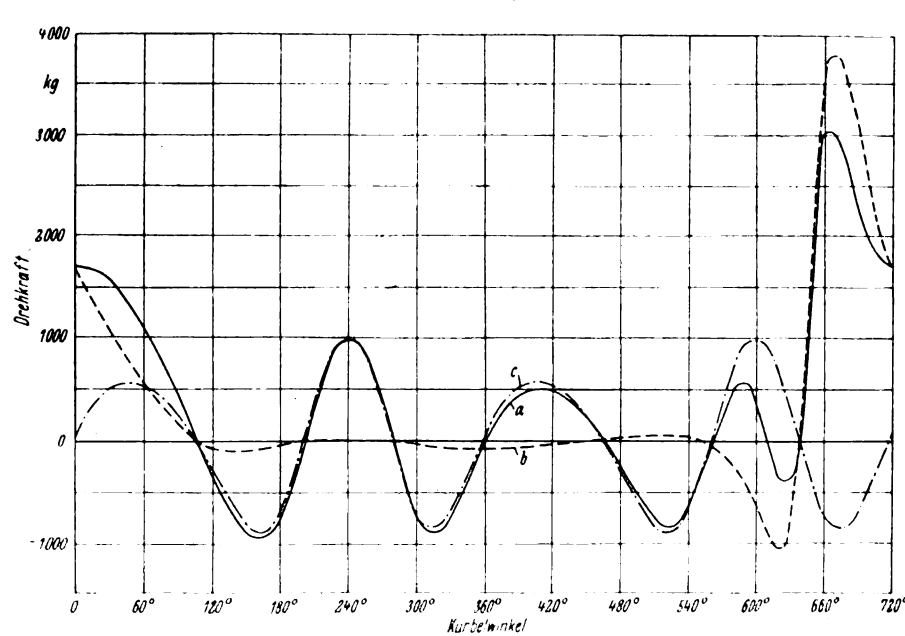


Bild 2. Verlauf der erregenden Drehkraft eines Nebenzylinders (Zylinder 3) abhängig vom Kurbelwinkel.
a Gesamtdrehkraft, b Gasdrehkraft, c Massendrehkraft.

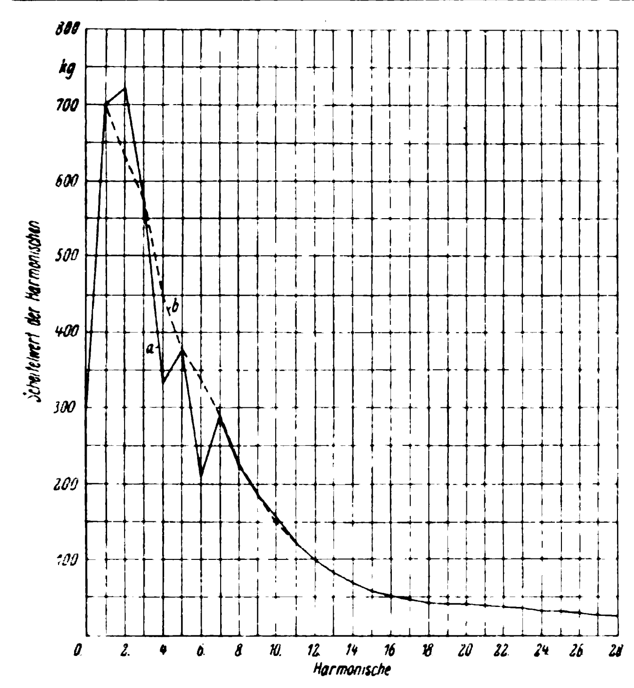


Bild 3. Die Harmonischen der Gas- und Gesamtdrehkraft von Zylinder 3.
a Gesamtdrehkraft,
b Gasdrehkraft.

die nach (42) bestimmten entsprechenden Werte $\mathfrak{G}_\nu$, $\mathfrak{H}_\nu$ und $\sqrt{\mathfrak{G}_\nu^2 + \mathfrak{H}_\nu^2}$ für das Pleuel. Zum Vergleich zeigt Zahlentafel 1 noch die entsprechenden, aus Mitteilung I entnommenen Beiwerte für Kolben und Pleuel des Hauptzylinders. Der Vergleich der Scheitelwerte ergibt, daß man für die Kolben von Haupt- und Nebenzylinder trotz der voneinander abweichenden Bewegungsverhältnisse fast dieselben Werte erhält; beim Pleuel dagegen treten starke Abweichungen auf.

Zahlentafel 1. Vergleich der Fourierbeiwerte der Massendrehkraft eines Nebenzylinders (Zylinder 3) mit denen des Hauptzylinders.

$$T_{Kn} = m_{Kn}\, r\, \omega^2 \sum_\nu (\mathfrak{E}_\nu \cos \nu\varphi + \mathfrak{F}_\nu \sin \nu\varphi);$$

$$T_K = m_K\, r\, \omega^2 \sum_\nu E_\nu \sin \nu\varphi;$$

$$T_{Pn} = m_{Pn}\, r\, \omega^2 \sum_\nu (\mathfrak{G}_\nu \cos \nu\varphi + \mathfrak{H}_\nu \sin \nu\varphi);$$

$$T_P = m_P\, r\, \omega^2 \sum_\nu K_\nu \sin \nu\varphi.$$

Beiwerte von	Kolben		Pleuel	
	Nebenzylinder	Hauptzylinder	Nebenzylinder	Hauptzylinder
$\cos \nu\varphi$	$\mathfrak{E}_\nu$	—	$\mathfrak{G}_\nu$	—
$\cos \varphi$	0,0605	—	0,0261	—
$\cos 2\varphi$	—0,1710	—	—0,1864	—
$\cos 3\varphi$	0,1922	—	0,0838	—
$\cos 4\varphi$	—0,0041	—	—0,0016	—
$\cos 5\varphi$	0,0054	—	0,0028	—
$\sin \nu\varphi$	$\mathfrak{F}_\nu$	E_ν	$\mathfrak{H}_\nu$	K_ν
$\sin \varphi$	—0,0165	0,0615	—0,0077	0,0077
$\sin 2\varphi$	0,4698	—0,5001	0,2924	—0,0639
$\sin 3\varphi$	0,0113	—0,1859	0,0027	—0,0233
$\sin 4\varphi$	—0,0144	—0,0151	—0,0057	—0,0018
$\sin 5\varphi$	0,0005	0,0024	0,0002	0,0003
$\sin (\nu\varphi + \varepsilon_\nu)$	$\sqrt{\mathfrak{E}_\nu^2 + \mathfrak{F}_\nu^2}$	$\lvert E_\nu \rvert$	$\sqrt{\mathfrak{G}_\nu^2 + \mathfrak{H}_\nu^2}$	$\lvert K_\nu \rvert$
$\sin (\varphi + \varepsilon_1)$	0,0627	0,0615	0,0272	0,0077
$\sin (2\varphi + \varepsilon_2)$	0,4999	0,5001	0,3468	0,0639
$\sin (3\varphi + \varepsilon_3)$	0,1925	0,1859	0,0838	0,0233
$\sin (4\varphi + \varepsilon_4)$	0,0150	0,0151	0,0059	0,0018
$\sin (5\varphi + \varepsilon_5)$	0,0054	0,0024	0,0028	0,0003

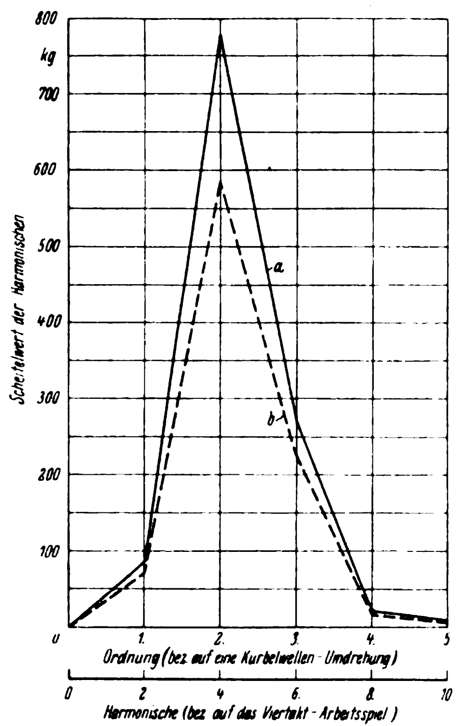


Bild 4. Die Harmonischen der Massendrehkraft von Zylinder 3.
a Kolben + Pleuel,
b Kolben allein.

Die Harmonischen der Massendrehkräfte desselben Zylinders, und zwar für Kolben und Pleuel getrennt, sind außerdem noch in Bild 4 wiedergegeben. Dabei ergibt sich, daß der Kolben den überwiegenden Beitrag zur Massendrehkraft eines Nebenzylinders liefert. Sodann sind in Bild 3 noch die Harmonischen der Massendrehkraft unter Berücksichtigung des Phasenwinkels denen der Gasdrehkraft überlagert worden.

Diese Überlagerung zeigt Zahlentafel 2, die außerdem noch einige Näherungen für die Harmonischen der Massendrehkraft eines Nebenzylinders enthält. Außer den Werten, die nach den vollständigen, unter Berücksichtigung der wirklichen Bewegungsverhältnisse hergeleiteten Gleichungen berechnet sind (in den Zahlentafeln sind diese Ergebnisse der vollständigen Rechnung immer dann gemeint, wenn nichts Besonderes bemerkt ist), enthält diese Zahlentafel noch die Harmonischen der Massendrehkraft $(T_{Kn} + T_{Pn})'$, bei deren Berechnung nur Glieder bis zur dritten Ordnung in λ, λ_n usw. mitgeführt wurden. Diese Näherung ist im allgemeinen sehr gut und dürfte für viele praktische Zwecke genügen. Als weitere Näherung zeigt Zahlentafel 2 noch die Harmonischen der Massendrehkraft $T_{Kn} + T_{Pn}^{(\lambda)}$, bei deren Ermittlung das Pleuel entsprechend (43) durch je eine punktförmige Masse im Kolbenbolzen und in der Anlenkachse ersetzt wurde. Diese Näherung ist bereits weniger gut; wie sich später ergeben wird, werden sich diese Fehler bei der Summation über den ganzen Stern noch wesentlich vergrößern.

2. Die Ergebnisse für den ganzen Sternmotor.

Den Verlauf der Gasdrehkraft sowie der Gesamtdrehkraft für den ganzen Stern abhängig vom Kurbelwinkel zeigt Bild 5. Der Einfluß der Massendrehkraft ist bei dem gewählten Beispiel zufolge der niederen Motordrehzahl noch verhältnismäßig klein. Da die Massendrehkraft jedoch mit dem Quadrat der Drehzahl anwächst, wird der Einfluß bei raschlaufenden Motoren bedeutend größer.

Sodann wurde in Bild 6 die nach (47) mit (51) und (52) mit (54) ermittelte Massendrehkraft sämtlicher Nebenzylinder sowie die nach Mitteilung I, (17) und (22), berechnete Massendrehkraft des Hauptzylinders und schließlich die durch Überlagerung dieser beiden Anteile erhaltene

Zahlentafel 2. Die Harmonischen der Gas- und Massendrehkraft eines Nebenzylinders (Zylinder 3). (Bei der Gasdrehkraft sind nur diejenigen Harmonischen angegeben, bei denen auch Harmonische der Massendrehkraft auftreten.)

Beiwerte von	Gasdrehkraft	Massendrehkraft					Gesamtdrehkraft
		Kolben	Pleuel	Kolben + Pleuel	Kolben + Pleuel (nur Glieder bis λ^3)	Kolben + Pleuel (mit Näherung $T_{P_n}^{(N)}$ (43) für das Pleuel)	
	T_{G_n}	T_{K_n}	T_{P_n}	$T_{K_n} + T_{P_n}$	$(T_{K_n} + T_{P_n})'$	$T_{K_n} + T_{P_n}^{(N)}$	$T_n = T_{G_n} + T_{K_n} + T_{P_n}$
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
$\cos \varphi$	613,40	70,88	14,61	85,49	85,49	88,81	698,89
$\cos 2\varphi$	205,11	−200,39	−104,37	−304,76	−304,76	−251,10	−99,65
$\cos 3\varphi$	−249,71	225,20	46,91	272,11	269,22	282,19	22,40
$\cos 4\varphi$	−207,93	−4,75	−0,92	−5,67	−7,91	−5,95	−213,60
$\cos 5\varphi$	13,63	6,29	1,59	7,88	4,22	7,72	21,51
$\sin \varphi$	−168,73	−19,35	−4,31	−23,66	−23,66	−24,24	−192,39
$\sin 2\varphi$	−397,21	550,55	163,70	714,25	714,25	689,87	317,04
$\sin 3\varphi$	−228,78	13,25	1,53	14,78	23,02	16,60	−214,00
$\sin 4\varphi$	97,67	−16,92	−3,18	−20,10	−28,49	−21,20	77,57
$\sin 5\varphi$	149,12	0,54	0,14	0,68	5,02	0,67	149,80

Zahlentafel 3. Die Harmonischen der Gasdrehkraft für sämtliche Zylinder.

$$T_G = T_0 + \sum_h \left(t_h \cos h \frac{\varphi}{2} + \tau_h \sin h \frac{\varphi}{2}\right) = T_0 + \sum T_h \sin\left(h \frac{\varphi}{2} + \delta_h\right).$$

Harmonische h	cos-Beiwert t_h kg	sin-Beiwert τ_h kg	Scheitelwert $T_h = \sqrt{t_h^2 + \tau_h^2}$ kg	Scheitelwert in % von p_{mi}	Phasenwinkel δ_h
0.	2884,78	—	2884,78	139,52	—
1.	67,36	−54,15	86,42	4,18	309°
2.	−71,25	157,19	172,58	8,35	155°
3.	−137,63	−197,80	240,97	11,65	215°
4.	118,02	127,87	174,01	8,42	43°
5.	−47,78	166,30	173,02	8,37	164°
6.	47,46	−142,96	150,63	7,29	341°
7.	−53,03	103,92	116,66	5,64	153°
8.	−55,86	96,75	111,72	5,40	150°
9.	−939,12	1333,95	1631,39	78,90	145°
10.	4,40	−6,69	8,01	0,39	326°
11.	73,78	−120,89	141,62	6,85	328°
12.	29,47	−17,96	34,52	1,67	301°
13.	−49,34	68,04	84,05	4,07	144°
14.	−23,82	3,60	24,09	1,17	98°
15.	22,65	−21,87	31,48	1,52	314°
16.	−26,75	20,02	33,42	1,62	127°
17.	−22,24	9,24	24,08	1,16	112°
18.	−236,23	48,60	241,16	11,66	101°
19.	9,50	3,24	10,04	0,49	71°
20.	22,20	−20,66	30,32	1,47	313°
21.	10,65	0,30	10,64	0,51	88°
22.	−29,86	2,72	29,99	1,45	95°
23.	−0,54	−13,02	13,02	0,63	182°
24.	17,25	7,10	18,65	0,90	67°
25.	−25,72	−19,82	32,48	1,57	232°
26.	−9,95	−5,23	11,23	0,54	242°
27.	−62,12	−72,65	95,58	4,62	220°
28.	9,07	5,66	10,69	0,52	58°

Gesamtmassendrehkraft des ganzen Sterns je in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel gesondert dargestellt. Der Verlauf der Massendrehkraft sowohl des Hauptzylinders als auch sämtlicher Nebenzylinder entspricht ungefähr zwei sinusförmigen Vollschwingungen je Kurbelwellenumdrehung von nahezu gleicher Schwingweite, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Dadurch wird bei der Addition dieser beiden Anteile der kennzeichnende Verlauf mit zwei Vollschwingungen je Umdrehung im wesentlichen ausgelöscht und es bleibt eine Restkraft übrig, die in ihrem Verlauf eine einzige Vollschwingung je Kurbelwellenumdrehung zeigt.

Aus der Gasdrehkraft für den ganzen Stern wurden durch rechnerische harmonische Analyse die zugehörigen Harmonischen ermittelt und in Bild 7 sowie in Zahlentafel 3 dargestellt.

Die Harmonischen der Massendrehkraft des Hauptzylinders, sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns sind in Zahlentafel 4 zusammengestellt. Die Harmonischen der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder sind außerdem — für Kolben und Pleuel getrennt — in Bild 8 wiedergegeben. Wie schon aus Bild 6 zu schließen ist, ist in Zahlentafel 4 das Glied zweiter Ordnung der Massendrehkraft des Hauptzylinders ungefähr entgegengesetzt gleich dem entsprechenden Wert für sämtliche Nebenzylinder, so daß bei der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder des Sterns nur ein verhältnismäßig kleines Glied zweiter Ordnung übrig bleibt[8]). Dadurch wird bei der Gesamtmassendrehkraft sämtlicher Zylinder das Glied erster Ordnung weitaus am größten.

Diese Harmonischen der Massendrehkraft sind sodann noch in Bild 7 unter Berücksichtigung des Phasenwinkels den Harmonischen der Gasdrehkraft überlagert worden.

[8]) Zufolge der hier zu bildenden Differenz zweier ungefähr gleich großer Glieder können Näherungsrechnungen, die zwar für sämtliche Nebenzylinder verhältnismäßig genau sind, bei der Gesamtmassendrehkraft sämtlicher Zylinder doch zu sehr schlechten Näherungen führen.

Zahlentafel 4. Die Harmonischen der Massendrehkraft sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns.

Beiwerte von	Kolben			Pleuel			Kolben + Pleuel		
	Hauptzylinder	sämtliche Nebenzylinder	sämtliche Zylinder	Hauptzylinder	sämtliche Nebenzylinder	sämtliche Zylinder	Hauptzylinder	sämtliche Nebenzylinder	sämtliche Zylinder
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
$\sin \varphi$	72,07	−425,52	−353,45	31,99	−111,28	−79,29	104,06	−536,80	−432,74
$\sin 2\varphi$	−586,08	585,98	−0,10	−265,61	256,95	−8,66	−851,69	842,93	−8,76
$\sin 3\varphi$	−217,78	205,59	−12,19	−96,66	62,24	−34,42	−314,44	267,83	−46,61
$\sin 4\varphi$	−17,22	12,99	−4,23	−7,46	1,25	−6,21	−24,68	14,24	−10,45
$\sin 5\varphi$	2,61	−0,88	1,73	1,16	−0,23	0,93	3,77	−1,11	2,66

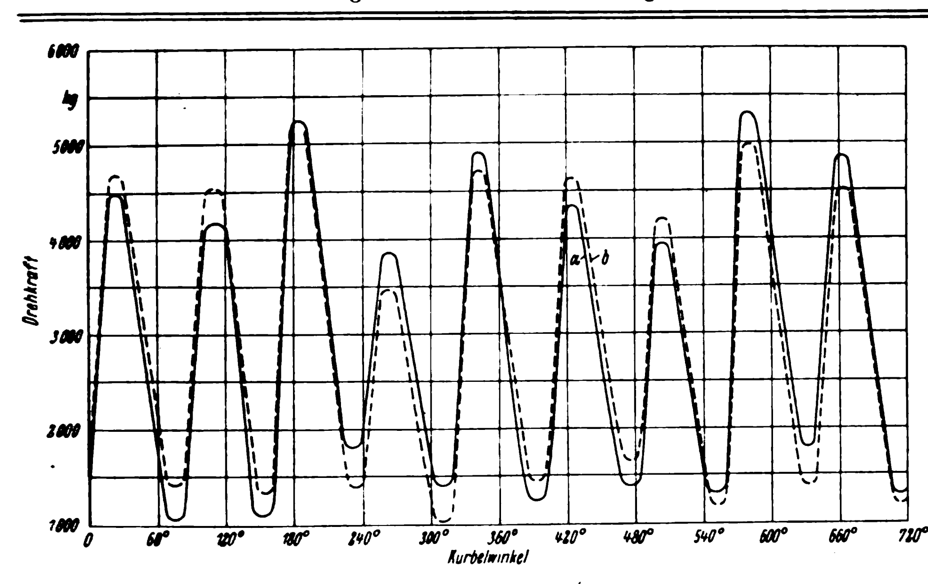


Bild 5. Verlauf der erregenden Drehkraft sämtlicher Zylinder abhängig vom Kurbelwinkel.
a Gesamtdrehkraft,
b Gasdrehkraft.

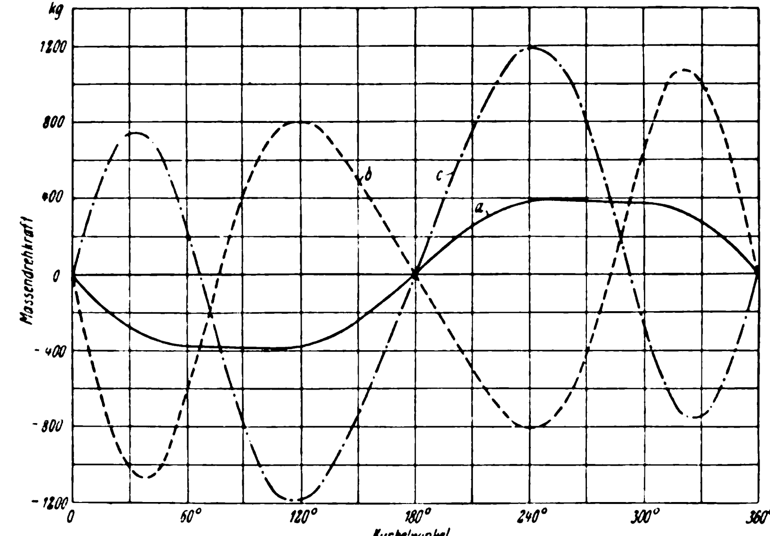
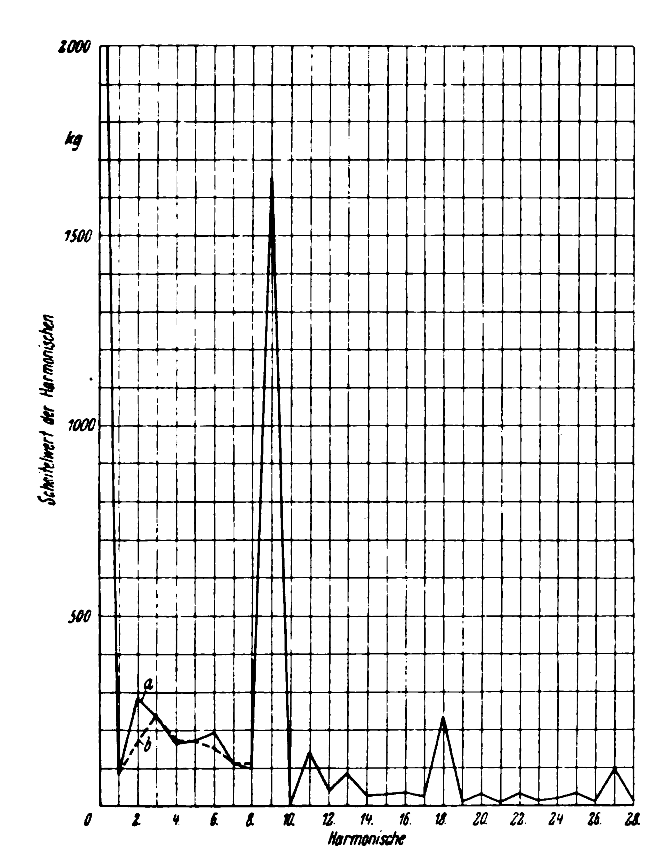


Bild 6 (rechts). Verlauf der Massendrehkraft des Hauptzylinders, sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder abhängig vom Kurbelwinkel.
a Sämtliche Zylinder,
b Hauptzylinder,
c sämtliche Nebenzylinder.

Bild 7 (unten). Die Harmonischen der Gas- und Gesamtdrehkraft sämtlicher Zylinder.
a Gesamtdrehkraft,
b Gasdrehkraft.



Einen **Vergleich der Genauigkeit verschiedener Näherungsrechnungen** für die Harmonischen der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder des Sterns zeigt Zahlentafel 5. Die nach der vollständigen Rechnung (51) und (54) ermittelten Werte sind in Spalte 2 wiedergegeben. Spalte 3 zeigt die nach derselben Rechnung ermittelten Werte, wobei jedoch die in den geknickten Klammern stehenden, von vierter Ordnung kleinen Glieder weggelassen wurden. Die Werte von Spalte 4 sind nach den Formeln (51 a) und (54 a) für die regelmäßige Anlenkung ermittelt worden, wobei für die Größen ϱ_n (1) ein Mittelwert eingesetzt wurde. Spalte 5 enthält die auf gleiche Art wie in Spalte 4 ermittelten Werte, wobei jedoch wieder die Glieder vierter Ordnung weggelassen wurden. Spalte 6 zeigt die Näherungswerte, die man erhält, wenn man das Pleuel durch zwei Ersatzmassen darstellt und die in den Anlenkachsen C_n (Bild 1) angebrachten Ersatzmassen beim Hauptpleuel berücksichtigt. Die in den Spalten 3 bis 6 stehenden Näherungswerte sind durchweg hinreichend genau. Die bei den höheren Harmonischen entstehenden relativen Fehler sind belanglos, da diese Glieder absolut genommen klein sind.

Spalte 7 enthält das Ergebnis der gleichen Näherungsrechnung wie in Spalte 6, wobei jedoch die in den Anlenkachsen C_n angebrachten Ersatzmassen als rein umlaufend betrachtet und daher für die Drehkraft außer acht gelassen wurden. Spalte 8 zeigt die Werte, die man erhält, wenn sämtliche Nebenpleuel als unmittelbar angelenkt angesehen werden und wenn als Schubstangenverhältnis der Wert λ des Hauptzylinders eingesetzt wird. Spalte 9 enthält die auf gleiche Art ermittelten Werte, wobei jedoch das Schub-

Zahlentafel 5. Vergleich der nach verschiedenen Näherungen berechneten Harmonischen der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder des Sterns.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Beiwerte von	Nach den vollständigen Formeln (51) und (54) mit Gliedern bis λ^4 kg	Wie Spalte 2, jedoch nur mit Gliedern bis λ^2 kg	Nach den Formeln (51 a) u. (54 a) für die regelmäßige Anlenkung m. Gliedern bis λ^4 kg	Wie Spalte 4, jedoch nur mit Gliedern bis λ^2 kg	Näherung mit je zwei Ersatzmassen für die Nebenpleuel nach (43) kg	Wie Spalte 6, jedoch ohne Berücksichtigung der Ers.-Massen beim Hauptpleuel kg	Rechnung mit unmittelbarer Anlenkung u. dem Schubstangenverhältnis λ kg	Rechnung mit unmittelbarer Anlenkung u. dem Schubstangenverhältnis λ_n kg
$\sin \varphi$	— 432,74	— 419,32	— 433,17	— 419,73	— 432,56	— 429,13	47,37	— 10,85
$\sin 2\varphi$	— 8,76	— 8,76	— 7,85	— 7,85	— 14,00	— 111,92	— 372,46	— 88,51
$\sin 3\varphi$	— 46,61	— 39,1	— 33,75	— 26,84	— 46,42	— 56,81	— 143,14	34,21
$\sin 4\varphi$	— 10,45	— 6,72	— 13,27	— 8,13	— 9,83	— 8,59	— 11,67	8,31
$\sin 5\varphi$	2,66	— 2,80	2,81	— 2,80	2,54	2,67	— 1,94	— 2,80

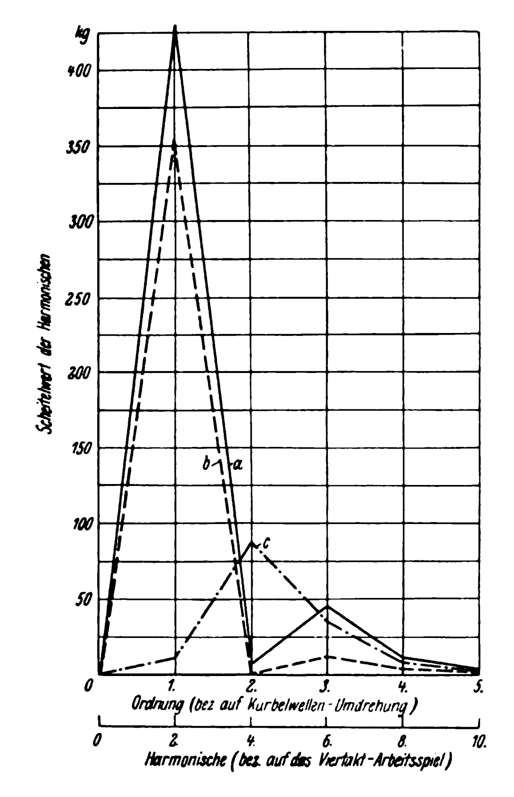


Bild 8. Die Harmonischen der Massendrehkraft sämtlicher Zylinder.
a Kolben + Pleuel,
b Kolben allein,
c Kolben + Pleuel bei unmittelbarer Pleuelanlenkung.

stangenverhältnis λ_n der Nebenzylinder eingesetzt wurde. Wie ein Vergleich mit den nach der vollständigen Rechnung ermittelten Werten von Spalte 2 ergibt, sind die Näherungswerte der Spalten 7 bis 9 nicht brauchbar. Die Werte von Spalte 8 und 9 können überhaupt nicht mehr als Näherung angesprochen werden. Um dies zu verdeutlichen, sind die Werte von Spalte 9 als Beispiel noch in Bild 8 eingetragen.

Zusammenfassend ergibt der Vergleich der verschiedenen Näherungen folgendes: Wenn von der Durchführung der vollständigen Rechnung abgesehen werden soll, sind auch bei beliebiger Pleuelanlenkung zur Ermittlung der Harmonischen der Massendrehkraft die Formeln (51 a) und (54 a) für die regelmäßige Anlenkung zu empfehlen, wobei für die Werte ϱ_n (1) ein Mittelwert einzusetzen ist. Das Mitführen der in den geknickten Klammern stehenden Glieder vierter Ordnung erhöht noch die Genauigkeit und verursacht nur eine unbedeutende Mehrarbeit. Der erforderliche Zeitaufwand ist bei dieser Näherungsrechnung sehr klein und die erreichte Genauigkeit für die praktischen Bedürfnisse durchaus hinreichend, zumal sich bei ausgeführten Sternmotoren die Werte ϱ_n nur um wenige Hundertteile voneinander unterscheiden und außerdem der Winkel δ_n (2) möglichst zu Null oder aber mindestens sehr klein gemacht wird. (Im vorliegenden Zahlenbeispiel ist $\delta_n = 0$).

Da in den angegebenen Endformeln verschiedene zu bildende Ausdrücke mehrmals auftreten, wird man bei praktischen Rechnungen durch Anlegung von geeigneten Rechenblättern eine Verkleinerung des Rechenaufwands erreichen.

VII. Zusammenfassung.

Zur Untersuchung der Erregung der Drehschwingungen bei Flugmotoren mit mittelbarer Pleuelanlenkung (insbesondere Stern- und V-Motoren) wurden Rechnungsunterlagen geschaffen, die im Hinblick auf die Entwicklung der Motoren zu größerer Schnelläufigkeit neben den Gasdrehkräften auch die Massendrehkräfte höherer Ordnung liefern. Außer der vollständigen Rechnung wurden noch mehrere für die praktischen Bedürfnisse ausreichend genaue Näherungsrechnungen angegeben.

Zur Erläuterung der allgemeinen Rechenergebnisse und zur Prüfung der Genauigkeit der angegebenen Näherungsrechnungen wurden für einen Neunzylinder-Sternmotor die zugehörigen Zahlenrechnungen durchgeführt und deren Ergebnisse eingehend erörtert.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 8 SEITE 275 BIS 304 | MÜNCHEN, 20. 8. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 · 20. August 1941 · Lfg. 8

Untersuchung über die Eignung warmfester Werkstoffe für Verbrennungs-Kraftmaschinen.

III. Teil.

Von H. Cornelius und W. Bungardt.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Untersuchungen im Temperaturgebiet von 600 bis 1000° über die Dauerzugfestigkeit, die thermische Ausdehnung, das spezifische Gewicht, den Elastizitätsmodul, die Änderung der Festigkeitseigenschaften beim Glühen und die Zunderbeständigkeit von 22 austenitischen, technisch gebräuchlichen und zu Versuchszwecken hergestellten Werkstoffen.

Gliederung.

I. Einleitung.

In Teil I und II dieser Untersuchungen über die Eignung warmfester Werkstoffe für Verbrennungskraftmaschinen haben F. Bollenrath, H. Cornelius und W. Bungardt[1]) Versuchsergebnisse über die Dauerzugfestigkeit im wesentlichen bei 600 bis 650°, zum Teil auch bei 700°, über die thermische Ausdehnung und das für erhöhte Temperaturen errechnete spezifische Gewicht, über die Festigkeitseigenschaften nach Dauerzugbeanspruchung bei erhöhten Temperaturen und über die Zunderbeständigkeit zahlreicher austenitischer Werkstoffe in Abgasen von Benzin ohne und mit Ethylfluid-

[1]) Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 468/80 sowie S. 505/10; vgl. a. Metallwirtschaft Bd. 17 (1938), S. 755/57.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff Nr.	Hersteller	Bezeichnung*)	Zustand	Zusammensetzung in %**)														
				C	Si	Mn	Cr	Ni	Co	W	Mo	V	Ti	Ta	Nb	B	Cu	Fe
1	DEW	V 444 D	geschmiedet b. 800° geglüht	0,43	3,0	—	19,2	8,8	—	0,9	—	—	—	—	—	—	—	Rest
2	Krupp	WF 100 D	» » »	0,38	1,84	0,52	14,8	12,9	—	2,5	0,23	—	—	—	—	—	—	»
3	DEW	ATS	geschmiedet 1050°/Luft	0,13	0,84	0,72	18,0	9,2	—	0,70	—	—	—	1,75		—	—	»
				(0,14)	(0,30)	(0,70)	(19,3)	(10,3)	—	(0,58)	—	—	—	(1,35)		—	—	
4	DVL	DVL 30	geschmiedet	0,28	1,60	1,61	21,0	14,3	—	3,2	—	—	1,24	—	—	—	—	»
5	DVL/Krupp	DVL 62	geschmiedet	0,22	1,57	1,84	21,1	15,3	—	3,3	—	—	0,88	—	—	—	—	»
6	DVL	DVL 31	geschmiedet	0,17	2,12	1,35	19,3	27,1	—	11,2	—	—	—	—	—	—	—	»
7	DVL/DEW	DVL 4/V 869	geschmiedet 1050°/Luft	0,25	0,89	1,73	19,2	24,9	—	6,6	—	—	—	1,77		—	—	»
8	Böhler	SAS 8	gewalzt 1050°/Luft	0,1			17,6	15,2	—	—	2,2	—	—	1,06		—	1,8	»
9	DVL	DVL 47	geschmiedet	0,46	1,5	0,75	27,7	13,7	4,7	—	—	—	—	—	—	—	—	»
10	DVL	DVL 46	geschmiedet	0,41	1,5	0,67	19,2	14,2	5,2	4,5	—	—	—	—	—	—	—	»
11	DVL	DVL 49	geschmiedet	0,44	0,68	0,56	19,7	14,5	11,1	2,98	—	—	—	—	—	—	—	»
12	DVL	DVL 48	geschmiedet	0,42	3,3	0,72	25,8	12,7	4,95	3,6	—	—	0,28	—	—	—	—	»
13	DVL	DVL 50	geschmiedet	0,44	1,03	0,86	20,0	14,4	6,35	—	—	2,7	—	—	—	—	—	»
14	Krupp	P 193	?	0,45	0,71	0,69	25,4	28,7	—	—	—	—	1,97	—	—	—	—	»
				(0,45)	(0,93)	(0,75)	(27,4)	(30,1)	—	—	—		(1,88)	—	—	—	—	
15	Böhler	B 759	geschmiedet	0,34	1,2	1,0	17,9	10,3	—	—	10,9	—	—	—	—	—	—	»
16	DVL	DVL 51	geschmiedet	0,16	0,88	0,70	16,8	12,3	—	—	—	—	—	—	—	1,03	—	»
17	Böhler	FCM	gewalzt	0,17	1,07	15,9	15,8	1,25	—	—	2,1	—	—	—	—	—	—	»
				(0,15)	(0,3)	(16,5)	(15,0)	(0,9)	—	—	(0)	—	—	—	—	—	—	
18	Ruhrstahl	815	geschmiedet 1100°/Wasser	0,12	0,3	16,0	12,0	—	—	—	—	—	0,3	—	—	—	—	»
19	DVL	DVL 32 (PMWC)	gewalzt	0,03	0,44	0,71	14,6	35,2	24,5	4,7	4,46	—	—	—	—	—	—	»
20	DVL-Heraeus	DVL 42 (PMWC)	gewalzt	0,04	0,40	0,62	14,8	34,2	25,5	4,5	5,2	—	1,08	—	—	—	—	»
21	DVL-Heraeus	DVL 52 (PMWC)	gewalzt	0,04	0,45	0,54	14,6	34,1	25,4	4,75	5,0	—	—	1,35	—	—	—	»
22	DVL-Heraeus	DVL 52 (PMWC)	gewalzt	0,04	0,49	0,53	14,9	34,3	25,1	4,54	4,9	—	—	4,88	—	—	—	»

*) Legierungen auf der Basis der früher[1]) mit DVL 32 bezeichneten Legierungen werden nach einer Vereinbarung zwischen der Heraeus-Vacuumschmelze A.G., Hanau, und der DVL von Heraeus für den Handel hergestellt; die Bezeichnungen wurden gegenüber Teil I und II wie folgt geändert: Die Legierung DVL 32 (22) erhält die Bezeichnung DVL 32 (PMWC), die Legierung DVL 321 i erhält die Bezeichnung DVL 42 (PMWC) und die Legierung DVL 325 a erhält die Bezeichnung DVL 52 (PMWC).

**) Die eingeklammerten Werte geben die abweichende Zusammensetzung der früher untersuchten Werkstoffe an (s. Fußnote 1).

zusatz mitgeteilt. Außerdem wurde auf das für fliehkraftbeanspruchte Bauteile, z. B. Turbinenschaufeln, wichtige Verhältnis von Dauerzugbeanspruchung zu spezifischem Gewicht bei den Betriebstemperaturen eingegangen und die Widerstandsfähigkeit der Werkstoffe gegen häufige Temperaturwechsel behandelt. Diese Untersuchungen wurden inzwischen fortgesetzt und erweitert. Ihre Ergebnisse werden nachfolgend kurz zusammenfassend dargestellt.

II. Versuchswerkstoffe.

Die Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe ist in Zahlentafel 1 angegeben. Die Werkstoffe 1 bis 8 enthalten neben 0,1 bis 0,4% C, 15 bis 21% Cr und 8 bis 27% Ni noch 1 bis 11% W, 0,2 bis 2% Mo, 0,8 bis 1,2% Ti, 1,0 bis 1,8% Ta + Nb und 1,8% Cu. Die Werkstoffe 9 bis 13 sind Chrom-Nickel-Kobalt-Stähle mit rund 0,45% C, 19 bis 28% Cr, 12,5 bis 14,5% Ni, 5 bis 11% Co und Zusätzen von 3 bis 4,5% W, 2,7% V und 0,3% Ti. Von den Legierungen 9 bis 13 ist der als Ventilwerkstoff geeignete Stahl 11 wegen seiner guten Eigenschaften (s. w. u.) hervorzuheben. Die Legierung 14 enthält neben 0,45% C einen hohen Chrom- (25%) und Nickel- (29%) Gehalt und zusätzlich 2% Ti. Der Chrom-Nickel-Stahl 15 zeichnet sich durch einen hohen Molybdängehalt (11%) aus. Der Werkstoff *16* ist ein 17% Cr-, 12% Ni-Stahl mit einem Borzusatz von 1%. Die Werkstoffe 17 und 18 sind 12 bis 16% Cr- und 16% Mn-Stähle mit 2% Mo bzw. 0,3% Ti. Die niedriggekohlten, eisenarmen Legierungen 19 bis 22 enthalten neben 15% Cr, 35% Ni und 25% Co noch 4,5% W und 5% Mo und, außer Werkstoff 19, entweder 1% Ti oder 1 bzw. 5% Ta.

Die Werkstoffe wurden sämtlich im warmgewalzten bzw. geschmiedeten Zustand geprüft. Besondere Vorbehandlungen durch Glühen sind in Zahlentafel 1 angegeben.

Über die Werkstoffe 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 17 und 19 bis 22 ist bereits berichtet worden[1]). Die Untersuchungen über die Dauerzugfestigkeit dieser Legierungen wurden jetzt bei höheren Temperaturen (700 und 800°) ausgeführt. Die Werkstoffe 5, 9 bis 13 und 16 sind neue Versuchslegierungen. Sie wurden im kernlosen Induktionsofen mit saurer Zustellung erschmolzen. Das Schmelzgewicht betrug etwa 8 kg. Die übrigen Werkstoffe wurden von den in Zahlentafel 1 genannten Herstellern geliefert bzw. zur Verfügung gestellt, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt wird.

Alle Versuchswerkstoffe, auch die früher[1]) noch nicht untersuchten, hatten ein Gefüge mit austenitischer Grundmasse und eingelagerten Karbiden.

Zahlentafel 2. Dauerzugfestigkeit.

Werkstoff Nr.	Bezeichnung	$\sigma_{1/300}$ in kg/mm² bei:			
		600°	650°	700°	800°
1	V 444 D	18,0	—	6,0	2,0
2	WF 100 D	20,4	14,4	5,4	2,6
3	ATS	25,5	20,0	8,5	3,2
4	DVL 30	25,0	19,0	10,0	—
5	DVL 62	19,0	—	11,0	4,8
6	DVL 31	20,6	13,5	12,2	—
7	DVL 4/V 869	20,5	—	9,5	—
8	SAS 8	30,5	19,0	—	—
9	DVL 47	23,0	—	7,0	—
10	DVL 46	22,0	—	12,5	6,2
11	DVL 49	24,0	—	10,0	7,0
12	DVL 48	20,0	—	5,5	3,3
13	DVL 50	24,5	—	12,5	5,2
14	P 193	38,0	24,0	15,0	4,0
15	B 759	—	—	14,5	4,2
16	DVL 51	22,5	—	11,6	4,5
17	FCM	20,0	—	4,2	—
18	815	kleiner als 15	—	9,0	5,5
19	DVL 32 (PMWC)	30,0	17,6	—	5,5[1]); 8,8[2]); 12,0[3])
20	DVL 42 (PMWC)	38,0	—	12,2	6,4[1]) 4,0[2])
21	DVL 52 (PMWC)	34,0	—	17,5	6,5[1]) 6,0[2])
22	DVL 52 (PMWC)	43,5	—	—	7,2[1]) 4,8[2])

[1]) weichgeglüht bei 1200°; [2]) Walzzustand; [3]) geschmiedet.

III. Belastungsversuche bei und oberhalb der Dauerstandfestigkeit.

Die Versuche hatten das Ziel, Unterlagen über die Eignung der Versuchswerkstoffe für Bauteile zu beschaffen, die bei hohen Temperaturen einer Fliehkraftbeanspruchung unterworfen sind und bei denen größere Dehnbeträge auftreten dürfen, sofern nur genügend Sicherheit gegen Bruch vorhanden ist. Da für den vorliegenden Verwendungszweck nur eine geringe Lebensdauer anzunehmen war, wurde die Dauerzugbeanspruchung ($\sigma_{1/300}$) bestimmt, die nach 300 h Versuchsdauer zu einer Gesamtdehnung von 1% führt. Wesentlich größere Dehnbeträge, etwa 2 oder 3%, sind für die Festlegung von zulässigen Dauerzugbeanspruchungen ungeeignet, da schon geringe Temperatur- oder Lasterhöhungen eine Bruchgefahr herbeiführen.

Zur Ermittlung der Dauerzugbeanspruchung $\sigma_{1/300}$ wurden Zeit-Dehnungskurven über 300 h unter verschiedenen Belastungen aufgenommen. Die Auswertung der Kriech-

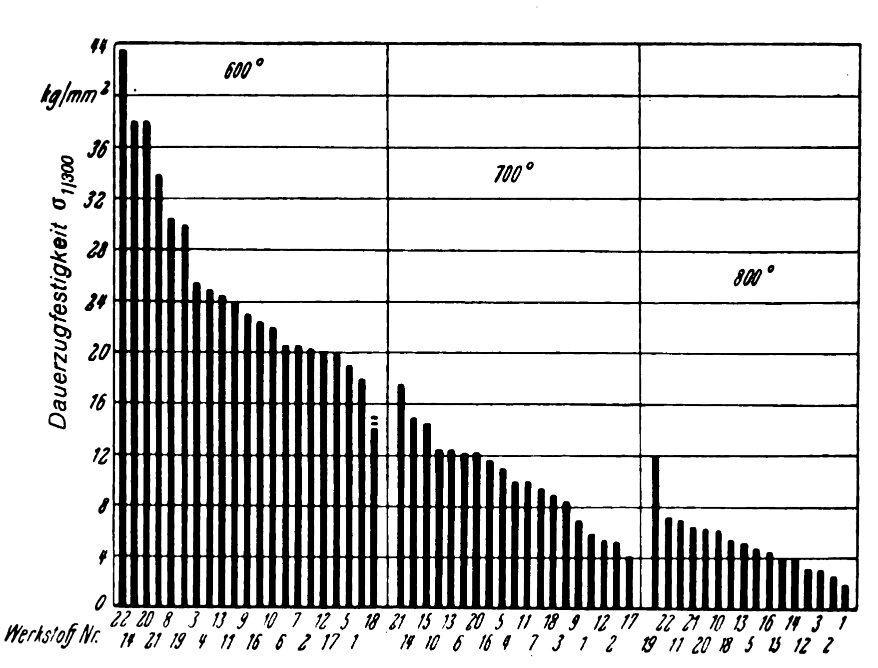


Bild 1. Dauerzugfestigkeit der Werkstoffe bei 600°, 700° und 800°, geordnet nach fallenden Werten für $\sigma_{1/300}$.

kurven enthalten die Zahlentafel 2 und, geordnet nach fallendem $\sigma_{1/300}$ für 600, 700 und 800°, das Bild 1. Die Reihenfolge der Werkstoffe wechselt bei den verschiedenen Temperaturen. Die Ursachen hierfür liegen nicht allein in der Zusammensetzung, auf die früher näher eingegangen wurde[1]), sondern auch in der Vorbehandlung der Werkstoffe. Wegen der hochliegenden Erholungstemperatur kann bei den nach der Warmformgebung nicht mehr bei hohen Temperaturen ausgeglühten Legierungen eine mehr oder weniger große Kaltverfestigung, vom Schmieden oder Walzen herrührend, vorliegen. Das Verhalten der Werkstoffe beim Dauerstandversuch wird hierdurch maßgebend beeinflußt. Die Reihenfolge der Legierungen in Bild 1 kann sich daher durch eine abweichende Vorbehandlung[1]) [2]) in nicht sicher angebbarer Weise ändern. Die Zusammensetzung der Werkstoffe bleibt aber insofern ausschlaggebend, als sie die Lage der Temperatur der beginnenden Erholung und Rekristallisation bestimmt. Den großen Einfluß der Vorbehandlung auf die Dauerstandfestigkeit läßt Zahlentafel 2 für die Werkstoffe 19 bis 22 bei der Versuchstemperatur von 800° erkennen. Ebenfalls große Unterschiede traten bei den früheren Versuchen[1]) bei 600° auf. Eingehende und planmäßige Untersuchungen über den Einfluß der Vorbehandlung auf die Dauerstandfestigkeit austenitischer Stähle werden bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt zur Zeit durchgeführt.

Für die Beanspruchbarkeit warmfester Werkstoffe bei höheren Temperaturen durch Fliehkräfte ist die Berücksichtigung des spezifischen Gewichtes erforderlich. Maßgebend ist das Verhältnis der zulässigen Beanspruchung zum spezifischen Gewicht. Das spezifische Gewicht aller Versuchswerkstoffe bei erhöhten Temperaturen (Zahlentafel 3) wurde aus dem bei Raumtemperatur gemessenen spezifischen Gewicht und den dilatometrisch bestimmten

[2]) Vgl. a. H. Cornelius, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 209/14 sowie Metallwirtschaft Bd. 18 (1939) Heft 19 u. 20.

Zahlentafel 3. Spezifisches Gewicht.

Werkstoff Nr.	Spezifisches Gewicht (γ_t) bei 20°	500°	600°	700°	800°
1	7,950	7,76	7,71	7,67	7,63
2	7,938	7,73	7,69	7,64	7,59
3	7,982	7,78	7,74	7,69	7,64
4	7,875	7,69	7,67	7,61	7,56
5	7,908	7,74	7,68	7,63	7,58
6	8,376	8,20	8,15	8,11	8,07
7	8,318	8,13	8,09	8,03	7,97
8	7,884	7,69	7,64	7,60	7,55
9	8,027	7,85	7,81	7,77	7,73
10	8,055	7,87	7,82	7,78	7,73
11	8,082	7,89	7,85	7,80	7,74
12	7,959	7,78	7,74	7,70	7,65
13	7,825	7,63	7,59	7,55	7,50
14	7,683	7,51	7,47	7,43	7,38
15	7,970	7,79	7,75	7,71	7,65
16	7,770	7,58	7,54	7,50	7,46
17	7,789	7,59	7,54	7,49	7,44
18	7,786	7,58	7,53	7,49	7,44
19	8,590	8,41	8,37	8,33	8,28
20	8,629	8,44	8,40	8,35	8,30
21	8,734	8,54	8,51	8,45	8,40
22	8,875	8,69	8,65	8,61	8,56

Zahlentafel 4. Mittlere lineare Wärme-Ausdehnungsbeiwerte.

Werkstoff Nr.	mittlerer linearer Ausdehnungsbeiwert β (10^{-6} mm/mm·°C) zwischen 20° und 200°	300°	400°	500°	600°	700°	800°
1	15,9	16,6	17,1	17,5	18,0	18,2	18,7
2	18,2	18,2	18,2	18,2	18,1	18,2	18,3
3	15,4	16,6	17,3	17,7	18,2	18,4	18,8
4	15,3	15,9	16,2	16,6	16,9	17,1	17,6
5	15,7	16,6	16,9	17,1	17,6	17,7	18,3
6	14,3	15,0	15,4	15,6	16,0	16,3	16,8
7	14,7	15,5	16,0	16,5	17,4	17,3	18,0
8	16,2	17,0	17,6	17,9	18,4	18,5	19,1
9	13,8	13,8	15,0	15,3	15,8	16,1	16,8
10	15,4	16,2	16,7	16,9	17,4	17,5	18,1
11	15,6	16,4	16,8	17,0	17,4	17,6	18,2
12	15,5	15,5	16,0	16,2	16,7	16,8	17,4
13	16,3	16,7	17,0	17,3	17,7	17,8	18,4
14	13,6	14,6	15,3	15,7	16,3	16,5	17,6
15	14,6	15,2	15,7	16,0	16,5	16,7	17,5
16	15,5	16,2	16,8	17,2	17,6	17,7	18,3
17	16,1	17,1	18,0	18,7	19,3	19,5	20,3
18	16,3	17,3	18,4	19,0	19,6	20,0	20,8
19	13,5	14,0	14,4	14,7	15,3	15,6	16,3
20	14,7	14,7	15,0	15,3	15,9	16,6	16,9
21	14,8	14,8	15,1	15,5	15,9	16,5	16,9
22	13,1	13,8	14,0	14,5	15,0	15,4	16,2

Bild 2. Verhältnis von Dauerzugfestigkeit ($\sigma_{1/300}$) zum spezifischen Gewicht (γ_t) bei 600°, 700° und 800°.

Zahlentafel 5. Verhältnis von Dauerzugfestigkeit zu spez. Gewicht bei 600 bis 800°.

Werkstoff Nr.	Bezeichnung	$\sigma_{1/300} : \gamma_t$ bei:		
		600°	700°	800°
1	V 444 D	2,33	0,79	0,262
2	WF 100 D	2,66	0,71	0,343
3	ATS	3,30	1,10	0,420
4	DVL 30	3,27	1,32	—
5	DVL 62	2,48	1,44	0,637
6	DVL 31	2,53	1,50	—
7	DVL 4/V 869	2,54	1,18	—
8	SAS 8	3,99	—	—
9	DVL 47	2,94	0,90	—
10	DVL 46	2,81	1,61	0,800
11	DVL 49	3,06	1,28	0,908
12	DVL 48	2,58	0,72	0,432
13	DVL 50	3,24	1,66	0,695
14	P 193	5,10	2,05	0,542
15	B 759	—	1,88	0,550
16	DVL 51	3,03	1,55	0,603
17	FCM	2,65	0,56	—
18	815	1,85	1,20	0,740
19	DVL 32 (PMWC)	3,60	—	1,45
20	DVL 42 (PMWC)	4,52	1,46	0,772
21	DVL 52 (PMWC)	4,00	2,06	0,777
22	DVL 52 (PMWC)	5,02	—	0,846

Ausdehnungsbeiwerten (Zahlentafel 4) ermittelt. Das Verhältnis $\varrho_{1/300} : \gamma_t$ ist für die Versuchswerkstoffe in Zahlentafel 5 für 600, 700 und 800° angegeben und in Bild 2 nach fallender Größe geordnet. Verschiebungen in der Reihenfolge gegenüber Bild 1 sind durch Unterschiede im spezifischen Gewicht bedingt.

IV. Einfluß langzeitigen Glühens auf die Festigkeitseigenschaften.

Da sich aus Gefügeuntersuchungen vor und nach langzeitigem Glühen keine sicheren Schlüsse auf die Änderung der Festigkeitseigenschaften ziehen lassen, wurden Zerreißversuche an Proben ($l_0 = 10\,d$, $d = 10$ mm) im Anlieferungszustand und nach langzeitigem Glühen durchgeführt. Zahlentafel 6 ergibt die Ergebnisse wieder. Die beim Glühen eintretenden Änderungen von Elastizitätsgrenze, Streckgrenze und Zugfestigkeit kommen in den Ergebnissen der Dauerstandversuche bereits zum Ausdruck. Es ist daher hauptsächlich die Formänderungsfähigkeit, die in Zahlentafel 6 durch die Bruchdehnung und Einschnürung gekennzeichnet ist, noch besonders zu bewerten. Eine der Verwendbarkeit der Legierungen einschränkende Versprödung liegt vor bei

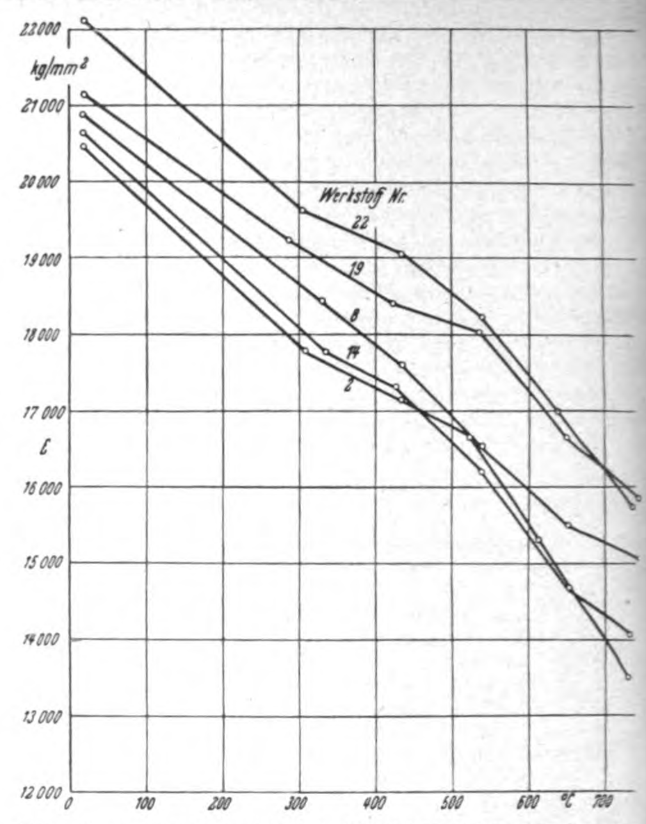


Bild 3. Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls von austenitischen Werkstoffen.

den Legierungen *6*, *12*, *14*, *15* und *17*. Während der Werkstoff *14* bei den früheren Versuchen eine starke Versprödung zeigte[1]), ergab eine jetzt verwendete neue Lieferung eine genügende Zähigkeit auch nach langzeitigem Glühen. Die Ursache für dieses unterschiedliche Verhalten ist nicht klar. Der Werkstoff, der bei 600° ein sehr hohes Verhältnis $\varrho_{1/300} : \gamma_t$ besitzt, wird daher für die praktische Verwendung in seiner Zusammensetzung abgeändert.

V. Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Temperatur.

Für einige der Versuchswerkstoffe wurde die Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Temperatur gemessen, deren Kenntnis für den Konstrukteur von Bedeutung ist. Die Messung wurde bis 730° in der bei Raum-

Zahlentafel 6. Festigkeitseigenschaften im Ausgangszustand und nach 50stündigem Glühen bei 700°. (Eingeklammerte Werte: nach dem Glühen.)

Werkstoff Nr.	Bezeichnung	E-Grenze $\sigma_{0,03}$	Streckgrenze $\sigma_{0,2}$	Zugfestigkeit σ_B	Bruchdehnung δ_{10}	Einschnürung ψ
		kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²	%	%
1	V 444 D	36,3 (31,8)	51,2 (48)	95,7 (92)	31 (31)	44 (45)
2	WF 100 D	24,4 (17)	35,4 (31)	79,0 (76,5)	32,4 (33,3)	52 (46)
3*)	ATS	18,6 (—)	28,8 (26)	65,9 (64,3)	41,6 (36)	68 (64)
5	DVL 62	19,0 (19,2)	27,4 (28,5)	63,8 (64,4)	34,8 (35,2)	55 (55)
6	DVL 31	— (26,4)	— (46,1)	— (81,8)	— (9,5)	— (13)
8	SAS 8	23,7 (21,6)	31,2 (28,1)	63,8 (64,8)	41 (37)	72 (63)
9	DVL 47	23,2 (23,0)	44,8 (45,8)	69,8 (68)	5,3 (10)	6 (8)
10	DVL 46	— (24,5)	— (41)	— (83,4)	— (18,1)	— (31)
11	DVL 49	17,1 (18,2)	39,0 (31)	77,2 (72,5)	31,4 (24,5)	42 (41)
12	DVL 48	24,5 (30,1)	46,8 (54,4)	68,8 (74,3)	2,0 (1,5)	4 (4)
13	DVL 50	42,4 (20,3)	56,7 (33,3)	79,4 (68,6)	16,3 (17,5)	45 (40)
14	P 193	18,8 (18,5)	28,0 (30,9)	70,2 (73)	33,2 (22,6)	48 (35)
15	B 759	38,4 —	54,2 —	83,0 —	9 —	8 —
16	DVL 51	34,0 (21,6)	51,0 (40,0)	78,0 (74,0)	22,2 (14,2)	31 (23)
17	FCM	55,3 (43,0)	72,5 (60,0)	95,4 (90,5)	7,3 (8,0)	3 (20)
18	815	— (16,9)	— (32,8)	— (96,0)	— (38,6)	— (41)
19	DVL 32 (PMWC)	47,2 (40,0)	54,0 (50,0)	94,5 (91,0)	31,0 (29)	49 (40)
20*)	DVL 42 (PMWC)	— (64,5)	— (70,0)	— (98,5)	— (22)	— (27)
21*)	DVL 52 (PMWC)	— (69,0)	— (75,0)	— (100)	— (26)	— (49)
22*)	DVL 52 (PMWC)	— —	— (~95)	— (120)	— (26)	— (39)

*) Nach dem Dauerstandversuch (300 h) bei 650°.

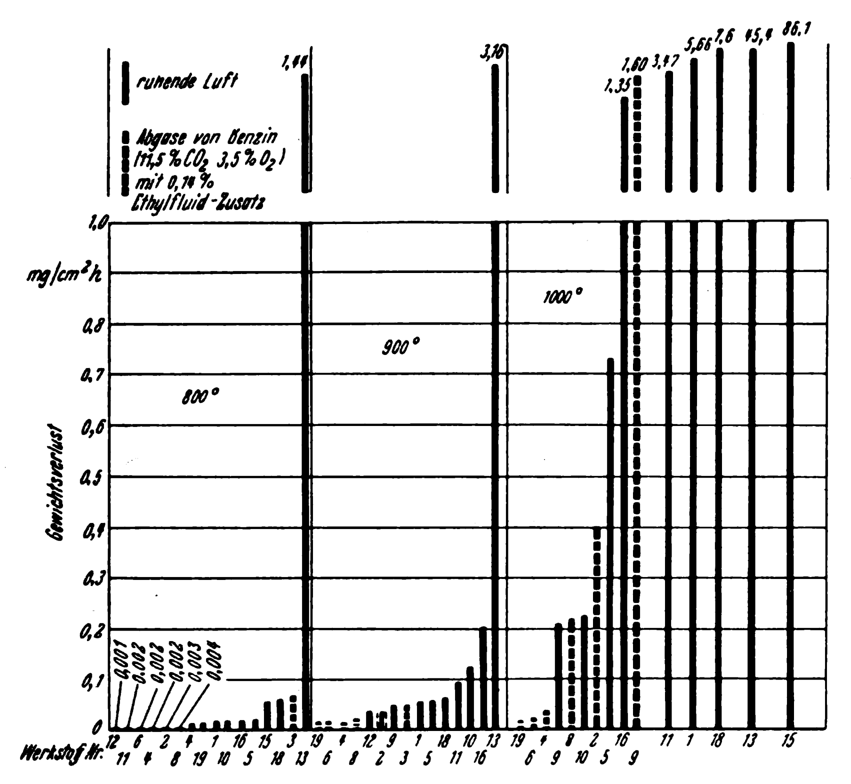


Bild 4. Zunderversuche in ruhender Luft und in Abgasen von Benzin mit Ethylfluid-Zusatz.

temperatur üblichen Weise mit dem Martens-Spiegelgerät ausgeführt. Den Abfall des E-Moduls der Werkstoffe *2*, *8*, *11*, *19* und *22* mit steigender Temperatur zeigt Bild 3.

VI. Temperaturwechselbeständigkeit.

Über die früheren Feststellungen[1]) hinaus wurden keine neuen Ergebnisse erzielt. Während häufige Temperaturwechsel zwischen einer oberen Temperaturgrenze von 650° und Raumtemperatur ohne starke bleibende Formänderung oder Rißbildung von allen untersuchten Werkstoffen ertragen werden, ist bei 900° oberer Temperaturgrenze keiner der Versuchswerkstoffe mehr temperaturwechselbeständig. Es treten vielmehr die früher beschriebenen Risse und Verwerfungen auf.

VII. Verzunderungsversuche.

In Bild 4 sind die Ergebnisse der früher in Abgasen von Benzin mit Ethylfluidzusatz[1]) und der jetzt in ruhender Luft ausgeführten Verzunderungsversuche bei 800 bis 1000°, geordnet nach abnehmender Zunderbeständigkeit, dargestellt. Die Versuchsdauer betrug in beiden Fällen 50 h. Die früheren Versuche haben ergeben, daß ein Ethylfluidzusatz zum Benzin und eine Änderung der Luftüberschußzahl sich bei 800 bis 1000° nur unwesentlich oder nicht auf die Zunderbeständigkeit der Versuchswerkstoffe auswirken. Da sich für den Werkstoff *2* ergab, daß die Zunderbeständigkeit in ruhender Luft und in Abgasen von Benzin mit Ethylfluidzusatz etwa gleich ist, können die früheren und die jetzigen Versuche zum mindesten im Temperaturbereich bis 900° ohne größere Fehler miteinander verglichen werden. Unter dieser Voraussetzung zeigen die Versuche folgendes: Bei Zulassung eines Gewichtsverlustes von 0,1 mg/cm²·h sind bei 800° die Werkstoffe *1* bis *8*, *10*, *11*, *12*, *15*, *16*, *18* und *19* zunderbeständig. Aus dem Verhalten von Werkstoff *13* ist zu schließen, daß höhere Vanadingehalte (2,7%) die Zunderbeständigkeit von Legierungen mit ähnlichen Chrom- und Nickelgehalten wie Werkstoff *13* entscheidend herabsetzen. Übereinstimmende Beobachtungen wurden auch für Legierungen völlig anderer Zusammensetzung gemacht. Die Werkstoffe *9*, *14*, *17*, *20*, *21* und *22* wurden bei 800° nicht untersucht. Bei 900° waren die Werkstoffe *1* bis *6*, *8*, *9*, *11*, *12*, *18* und *19* zunderbeständig; es versagten lediglich die Legierungen *10*, *16* und *13*, wobei der vanadinhaltige Stahl *13* noch größenordnungsmäßig schlechter als die beiden anderen war. Bei 1000° entsprachen nur noch die Werkstoffe *4*, *6* und *19* der für die Zunderbeständigkeit aufgestellten Gewichtsverlust-Forderung. Von diesen Werkstoffen ist die eisenarme Legierung Nr. 19 von technischer Bedeutung. Ihrer Zunderbeständigkeit wird die der technisch ebenfalls verwendeten Werkstoffe *20*, *21* und *22* entsprechen. Bedingt zunderbeständig sind bei etwa 1000° die Legierungen *2*, *5*, *8*, *9* und *10*. Die Werkstoffe *1*, *3*, *11*, *16* und *18*, besonders aber *13* und *15* verzundern bei 1000° stark. Die beiden letzteren enthalten Vanadin bzw. Molybdän in größerer Menge.

Abgeschlossen Mai 1939.

Die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten des Flugzeugs.

Von H. J. Rautenberg.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E.V., Berlin-Adlershof, Institut für Flugmechanik.

Die vollständigen Beziehungen zwischen den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z der Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs und den gegenseitigen Bezugswinkeln der verschiedenen, in der Flugmechanik gebräuchlichen Achsenkreuze werden aufgestellt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Flugzeugs treten in den Momentengleichungen, die zumeist im flugzeugfesten Achsenkreuz geschrieben werden, die Komponenten ω_x, ω_y, ω_z der Flugzeug-Winkelgeschwindigkeit um die flugzeugfesten Achsen x, y, z auf. Die Kenntnis der Zusammensetzung dieser Winkelgeschwindigkeits-Komponenten aus den Anteilen, die von den Drehungen um die einzelnen Achsen des flugzeugfesten, flugwindfesten und erdparallelen Achsenkreuzes herrühren, ist bei der Behandlung flugmechanischer Aufgaben stets von großem Wert. Häufig ist es erst durch die Kenntnis dieser Zusammenhänge möglich, bei vereinfachenden Annahmen eine Anschauung über Größe und Anwendungsbereich der getroffenen Vernachlässigungen zu gewinnen.

Als absolut ruhendes Bezugssystem für die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten kann ein mit der Erde fest verbundenes Achsenkreuz zugrunde gelegt werden, da die Winkelgeschwindigkeit der Erde (Größenordnung $10^{-5}\,s^{-1}$) gegenüber den in der Flugmechanik auftretenden Winkelgeschwindigkeiten ohne Bedenken vernachlässigt werden kann.

Als flugmechanische Achsenkreuze werden das flugzeugfeste Achsenkreuz x, y, z, das flugwindfeste Achsenkreuz x_a, y_a, z_a und das erdparallele Achsenkreuz x_g, y_g, z_g benutzt. Diese drei Achsenkreuze sowie die zur gegenseitigen Ausrichtung dienenden acht Bezugswinkel sind im Normblatt DIN L 100 (Bezeichnungen in der Flugmechanik) eingehend erklärt.

Außerdem wird eine Darstellung der Winkelgeschwindigkeits-Komponenten in einem zu erklärenden »experimentellen Achsenkreuz« gegeben, da sich dieses Achsenkreuz bei der Anwendung der aerodynamischen Unterlagen auf flugmechanische Rechnungen als sehr nützlich erwiesen hat.

II. Die Drehachsen der Bezugswinkel zwischen den flugmechanischen Achsenkreuzen.

Da das erdparallele Achsenkreuz für die in der Flugmechanik auftretenden Winkelgeschwindigkeiten als absolut ruhendes Bezugssystem vorausgesetzt wird, auf das die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Flugzeugs in Richtung der flugzeugfesten Achsen x, y, z zu beziehen sind, läßt sich die Darstellung der Komponenten ω_x, ω_y, ω_z durch die acht Bezugswinkel φ, ϑ, ψ, α, β, γ, μ, χ und deren Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\chi}$ auf zweierlei Weise vornehmen.

Einerseits ist das flugzeugfeste Achsenkreuz x, y, z gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g durch die Winkel φ, ϑ, ψ ausgerichtet[1]). Daher lassen sich die Komponenten ω_x, ω_y, ω_z ohne weiteres durch diese drei Winkel und deren zeitliche Ableitungen $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ ausdrücken. Andererseits ist das flugzeugfeste Achsenkreuz y, x, z gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a durch die Winkel α und β und das flugwindfeste Achsenkreuz seinerseits durch die Winkel γ, μ, χ gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz ausgerichtet. Es lassen sich daher die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z auch durch die Winkel α, β, γ, μ, χ und deren zeitliche Ableitungen (Winkelgeschwindigkeiten) $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\chi}$ ausdrücken.

Das flugzeugfeste Achsenkreuz, das flugwindfeste Achsenkreuz und das erdparallele Achsenkreuz sowie die acht Bezugswinkel zwischen diesen flugmechanischen Achsenkreuzen sind im Normblatt DIN L 100 (Bezeichnungen in der Flugmechanik) erklärt. Im folgenden sollen außerdem die Drehachsen der einzelnen Winkel erklärt werden, da durch sie die Veranschaulichung der Zusammensetzung der Komponenten ω_x, ω_y, ω_z aus den Anteilen der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ wesentlich erleichtert wird. Unter »Drehachse« eines Winkels ist diejenige Achse zu verstehen, um welche die Drehung erfolgt, die durch den betreffenden Winkel gemessen wird. Ein Winkel ist positiv, wenn die Drehung um die Drehachse des betreffenden Winkels in Richtung der positiven Drehachse gesehen im Uhrzeigersinn erfolgt.

Folgende Drehachsen gehören zu den acht flugmechanischen Bezugswinkeln:

α Anstellwinkel. Drehachse des Winkels ist die flugzeugfeste Achse y.

β Schiebewinkel. Drehachse des Winkels ist die flugwindfeste Achse z_a.

φ Flugzeug-Querneigungswinkel. Drehachse des Winkels ist die flugzeugfeste Achse x.

ϑ Flugzeug-Längsneigungswinkel. Drehachse des Winkels ist eine zur Achse x rechtwinklige horizontale Achse, deren positiver Richtungssinn in Richtung der positiven Achse x gesehen, nach rechts gerichtet ist.

ψ Flugzeug-Azimutwinkel. Drehachse des Winkels ist die Erdvertikale z_g.

μ Flugwind-Querneigungswinkel. Drehachse des Winkels ist die Flugwindachse x_a.

[1]) Die Bezeichnungen φ, ϑ, ψ für die drei Bezugswinkel, die das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz ausrichten, weichen von den Bezeichnungen der drei Euler'schen Winkel ab, durch die in der allgemeinen Mechanik ein körperfestes Achsenkreuz gegenüber einem raumfesten Achsenkreuz ausgerichtet wird.

Der Winkel φ der Flugmechanik entspricht dem Winkel ψ der allgemeinen Mechanik, der Winkel ψ der Flugmechanik entspricht dem Winkel φ der allgemeinen Mechanik, und der Winkel ϑ der Flugmechanik ist der Komplementwinkel des in der allgemeinen Mechanik benutzten Winkels ϑ.

γ Flugwind-Längsneigungswinkel. Drehachse des Winkels ist eine zu x_a rechtwinklige horizontale Achse, deren positiver Richtungssinn in Richtung der positiven Achse x_a (also entgegen der Anströmung) gesehen nach rechts gerichtet ist.

χ Flugwind-Azimutwinkel. Drehachse des Winkels ist die Erdvertikale z_g.

Die Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$, $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ stimmen nach Richtung und Richtungssinn mit den Drehachsen der entsprechenden Winkel überein. Da nun die Drehachsen der Winkel zum größten Teil mit Achsen der drei flugmechanischen Achsenkreuze übereinstimmen, lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$, $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$ im allgemeinen mit Hilfe der im Beiblatt des Normblattes DIN L 100 angegebenen Umrechnungstafeln in einfacher Weise in die Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z umrechnen.

III. Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z und den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel φ, ϑ, ψ. (Flugzeugfestes Achsenkreuz — Erdparalleles Achsenkreuz.)

Die Aufstellung der Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten des Flugzeugs ω_x, ω_y, ω_z in Richtung der drei flugzeugfesten Achsen x, y, z und den zeitlichen Ableitungen der drei Bezugswinkel φ, ϑ, ψ, die das flugzeugfeste Achsenkreuz x, y, z gegenüber dem erdparallelen Achsenkreuz x_g, y_g, z_g ausrichten, läßt sich ohne Schwierigkeiten anschaulich vornehmen. Die Anteile, aus denen sich die Komponenten ω_x, ω_y, ω_z zusammensetzen, sind $\dot\varphi$, $\dot\vartheta$, $\dot\psi$.

Der Winkel φ hat als Drehachse die flugzeugfeste Achse x. Infolgedessen ist der Anteil, den $\dot\varphi$ zu ω_x liefert, $\dot\varphi$ selbst. Zu ω_y und ω_z liefert $\dot\varphi$ keine Anteile, weil die Drehachse des Winkels φ (Achse x) rechtwinklig zu den Achsen y und z liegt.

Der Winkel ψ hat als Drehachse die Erdvertikale z_g. Aus der dem Beiblatt des Normblattes DIN L 100 entnommenen Tafel 1 ergibt sich, daß $\cos(z_g\, x) = -\sin\vartheta$, $\cos(z_g\, y) = +\cos\vartheta\sin\varphi$ und $\cos(z_g z) = +\cos\vartheta\cos\varphi$ ist.

Daher liefert $\dot\psi$ zu ω_x den Anteil $-\dot\psi\sin\vartheta$, zu ω_y den Anteil $+\dot\psi\cos\vartheta\sin\varphi$ und zu ω_z den Anteil $+\dot\psi\cos\vartheta\cos\varphi$.

Die Drehachse von ϑ fällt mit keiner Achse eines der drei betrachteten flugmechanischen Achsenkreuze zusammen. Die Anteile, die $\dot\vartheta$ zu ω_x, ω_y, ω_z liefert, lassen sich daher nicht aus den Umrechnungstafeln entnehmen. Die Anteile ergeben sich jedoch in einfacher Weise aus folgender Überlegung: Die Drehachse des Winkels ϑ und damit der Vektor $\dot\vartheta$ liegt rechtwinklig zur Achse x in der Horizontalebene. $\dot\vartheta$ liefert daher zu ω_x keinen Anteil. Ist der Winkel $\varphi = 0$, so fällt die Drehachse von ϑ und damit der Vektor $\dot\vartheta$ mit der flugzeugfesten Achse y zusammen. Ist $\varphi \neq 0$, so ist die Achse y um den Winkel φ gegen die Drehachse von ϑ und damit gegen $\dot\vartheta$ gedreht. Daher liefert $\dot\vartheta$ zu ω_y den Anteil $+\dot\vartheta\cos\varphi$ und zu ω_z den Anteil $-\dot\vartheta\sin\varphi$.

Die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z lassen sich also in folgender Form darstellen:

$$\omega_x = \dot\varphi - \dot\psi\sin\vartheta \quad (1)$$

$$\omega_y = \dot\vartheta\cos\varphi + \dot\psi\cos\vartheta\sin\varphi \quad (2)$$

$$\omega_z = \dot\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi \quad (3)$$

IV. Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z sowie ω_{x_a}, ω_{y_a}, ω_{z_a} und den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel α, β, γ, μ, χ.

Da das flugzeugfeste Achsenkreuz gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz durch den Anstellwinkel α und den Schiebewinkel β ausgerichtet wird, und das flugwindfeste Achsenkreuz x_a, y_a, z_a durch die drei Bezugswinkel γ, μ, χ mit dem erdparallelen Achsenkreuz verbunden ist, lassen sich die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Flugzeugs längs der Achsen x, y, z durch die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ ausdrücken.

Die vollständigen Ausdrücke für ω_x, ω_y, ω_z, die für ganz allgemeine Bewegung gelten, setzen sich dann aus der Summe aller Einzelanteile, die von $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ zu ω_x, ω_y, ω_z geliefert werden, zusammen. Es ist also:

$$\omega_x = \omega_{x_{\dot\alpha}} + \omega_{x_{\dot\beta}} + \omega_{x_{\dot\mu}} + \omega_{x_{\dot\gamma}} + \omega_{x_{\dot\chi}} \quad (4)$$

$$\omega_y = \omega_{y_{\dot\alpha}} + \omega_{y_{\dot\beta}} + \omega_{y_{\dot\mu}} + \omega_{y_{\dot\gamma}} + \omega_{y_{\dot\chi}} \quad (5)$$

$$\omega_z = \omega_{z_{\dot\alpha}} + \omega_{z_{\dot\beta}} + \omega_{z_{\dot\mu}} + \omega_{z_{\dot\gamma}} + \omega_{z_{\dot\chi}} \quad (6)$$

Dabei bedeutet beispielsweise $\omega_{x_{\dot\alpha}}$ den Anteil, den $\dot\alpha$ zur Winkelgeschwindigkeits-Komponente ω_x liefert.

Die Richtung der fünf Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ ist durch die Richtung der Drehachse des entsprechenden Winkels gegeben. Außer der Drehachse des

Tafel 1.

⇄		Erdparalleles Achsenkreuz		
		x_g	y_g	z_g
Flugzeugfestes Achsenkreuz	x	$+\cos\vartheta\cdot\cos\psi$	$+\cos\vartheta\cdot\sin\psi$	$-\sin\vartheta$
	y	$+\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\sin\varphi$ $-\sin\psi\cdot\cos\varphi$	$+\sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\sin\varphi$ $+\cos\psi\cdot\cos\varphi$	$+\cos\vartheta\cdot\sin\varphi$
	z	$+\sin\vartheta\cdot\cos\psi\cdot\cos\varphi$ $+\sin\psi\cdot\sin\varphi$	$+\sin\vartheta\cdot\sin\psi\cdot\cos\varphi$ $-\cos\psi\cdot\sin\varphi$	$+\cos\vartheta\cdot\cos\varphi$

Tafel 2.

⇄		Flugwindfestes Achsenkreuz		
		x_a	y_a	z_a
Flugzeugfestes Achsenkreuz	x	$+\cos\alpha\cdot\cos\beta$	$\cos\alpha\cdot\sin\beta$	$-\sin\alpha$
	y	$-\sin\beta$	$+\cos\beta$	0
	z	$+\sin\alpha\cdot\cos\beta$	$+\sin\alpha\cdot\sin\beta$	$+\cos\alpha$

Tafel 3.

		Erdparalleles Achsenkreuz		
		x_g	y_g	z_g
Flugwind-festes Achsen-kreuz	x_a	$+\cos\gamma\cdot\cos\chi$	$+\cos\gamma\cdot\sin\chi$	$-\sin\gamma$
	y_a	$+\sin\gamma\cdot\cos\chi\cdot\sin\mu$ $-\sin\chi\cdot\cos\mu$	$+\sin\gamma\cdot\sin\chi\cdot\sin\mu$ $+\cos\chi\cdot\cos\mu$	$+\cos\gamma\cdot\sin\mu$
	z_a	$+\sin\gamma\cdot\cos\chi\cdot\cos\mu$ $+\sin\chi\cdot\sin\mu$	$+\sin\gamma\cdot\sin\chi\cdot\cos\mu$ $-\cos\chi\cdot\sin\mu$	$+\cos\gamma\cdot\cos\mu$

Winkels γ sind die Drehachsen dieser Winkel mit Achsen des flugzeugfesten, flugwindfesten und erdparallelen Achsenkreuzes in Übereinstimmung. Daher lassen sich die Anteile, die $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ zu den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z liefern, aus den Umrechnungstafeln 2 und 3, die dem Beiblatt des Normblattes DIN L 100 entnommen sind, erhalten.

Da die Drehachse des Winkels α die flugzeugfeste Achse y ist, ist der Anteil $\omega_{y_{\dot\alpha}}$, der von $\dot\alpha$ zu ω_y geliefert wird, $\dot\alpha$ selbst. Zu ω_x und ω_z liefert $\dot\alpha$ keine Anteile, da die Achsen x und z rechtwinklig zur Drehachse von α und damit rechtwinklig zum Vektor $\dot\alpha$ liegen. Es ist also:

$$\omega_{x_{\dot\alpha}} = 0 \quad (7)$$

$$\omega_{y_{\dot\alpha}} = \dot\alpha \quad (8)$$

$$\omega_{z_{\dot\alpha}} = 0 \quad (9)$$

Der Winkel β hat als Drehachse die Auftriebsachse z_a. Aus Tafel 2 ergibt sich daher, daß $\dot\beta$ zu ω_x, ω_y, ω_z folgende Anteile liefert:

$$\omega_{x_{\dot\beta}} = -\dot\beta\sin\alpha \quad (10)$$

$$\omega_{y_{\dot\beta}} = 0 \quad (11)$$

$$\omega_{z_{\dot\beta}} = +\dot\beta\cos\alpha \quad (12)$$

Drehachse des Flugwind-Querneigungswinkels μ ist die Flugwindachse x_a. Die Anteile, die $\dot\mu$ zu ω_x, ω_y, ω_z liefert, sind entsprechend der Tafel 3 folgende:

$$\omega_{x_{\dot\mu}} = +\dot\mu\cos\alpha\cos\beta \quad (13)$$

$$\omega_{y_{\dot\mu}} = -\dot\mu\sin\beta \quad (14)$$

$$\omega_{z_{\dot\mu}} = +\dot\mu\sin\alpha\cos\beta \quad (15)$$

Der Flugwind-Azimutwinkel χ hat als Drehachse die Erdvertikale z_g. Eine direkte Transformation von $\dot\chi$ auf die Achsen x, y, z ist nach Tafel 1 nur über die Winkel φ, ϑ, ψ möglich. Um die Anteile von $\dot\chi$ zu den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z mit Hilfe der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \chi$ zu erhalten, muß eine zweifache Transformation durchgeführt werden. Zunächst werden die Anteile $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ der Winkelgeschwindigkeit $\dot\chi$ in Richtung der Achsen x_a, y_a, z_a berechnet. Dann werden die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ auf die Achsen x, y, z transformiert, wodurch die Anteile erhalten werden, die $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ zu ω_x, ω_y, ω_z liefern.

Aus Tafel 3 ergeben sich für $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ folgende Ausdrücke:

$$\dot\chi_{x_a} = -\dot\chi\sin\gamma \quad (16)$$

$$\dot\chi_{y_a} = +\dot\chi\cos\gamma\sin\mu \quad (17)$$

$$\dot\chi_{z_a} = +\dot\chi\cos\gamma\cos\mu \quad (18)$$

Die Anteile, die $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ in Richtung der Achsen x, y, z zu ω_x, ω_y, ω_z liefern, werden aus Tafel 2 entnommen. Man erhält für die Anteile, die $\dot\chi$ über $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ zu ω_x, ω_y, ω_z liefert, und die mit $\omega_{x_{\dot\chi}}$, $\omega_{y_{\dot\chi}}$, $\omega_{z_{\dot\chi}}$ bezeichnet werden sollen, folgende Ausdrücke:

$$\omega_{x_{\dot\chi}} = +\dot\chi_{x_a}\cos\alpha\cos\beta + \dot\chi_{y_a}\cos\alpha\sin\beta - \dot\chi_{z_a}\sin\alpha \quad (19)$$

$$\omega_{y_{\dot\chi}} = -\dot\chi_{x_a}\sin\beta + \dot\chi_{y_a}\cos\beta \quad (20)$$

$$\omega_{z_{\dot\chi}} = +\dot\chi_{x_a}\sin\alpha\cos\beta + \dot\chi_{y_a}\sin\alpha\sin\beta + \dot\chi_{z_a}\cos\alpha \quad (21)$$

Oder nach Einsetzen der Beziehungen zwischen $\dot\chi_{x_a}$, $\dot\chi_{y_a}$, $\dot\chi_{z_a}$ und $\dot\chi$ entsprechend (16) bis (18):

$$\omega_{x_{\dot\chi}} = -\dot\chi\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta + \dot\chi\cos\gamma\sin\mu\cos\alpha\sin\beta - \dot\chi\cos\gamma\cos\mu\sin\alpha \quad (22)$$

$$\omega_{y_{\dot\chi}} = +\dot\chi\sin\gamma\sin\beta + \dot\chi\cos\gamma\sin\mu\cos\beta \quad (23)$$

$$\omega_{z_{\dot\chi}} = -\dot\chi\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \dot\chi\cos\gamma\sin\mu\sin\alpha\sin\beta + \dot\chi\cos\gamma\cos\mu\cos\alpha \quad (24)$$

Die Drehachse des Winkels γ fällt ebenso wie die Drehachse des Winkels ϑ mit keiner Achse eines der drei betrachteten flugmechanischen Achsenkreuze zusammen; sie liegt rechtwinklig zur Achse x_a in einer Horizontalebene, ist also gegenüber der Achse y_a um den Winkel μ geneigt, da die Drehachse dieses Winkels die Achse x_a ist. In Richtung der Achsen y_a und z_a liefert daher $\dot\gamma$ folgende Anteile $\dot\gamma_{y_a}$ und $\dot\gamma_{z_a}$:

$$\dot\gamma_{y_a} = +\dot\gamma\cos\mu \quad (25)$$

$$\dot\gamma_{z_a} = -\dot\gamma\sin\mu \quad (26)$$

In Richtung der Achse x_a liefert $\dot\gamma$ keinen Anteil. Es ist also

$$\dot\gamma_{x_a} = 0 \quad (27)$$

Die Anteile, die $\dot\gamma_{y_a}$ und $\dot\gamma_{z_a}$ in Richtung der Achsen x, y, z zu ω_x, ω_y, ω_z liefern, sind aus Tafel 1 zu entnehmen.

Danach beträgt der Anteil $\omega_{x_{\dot\gamma}}$, den $\dot\gamma$ über $\dot\gamma_{y_a}$ und $\dot\gamma_{z_a}$ zu ω_x liefert:

$$\omega_{x_{\dot\gamma}} = \dot\gamma\cos\mu\cos\alpha\sin\beta + \dot\gamma\sin\mu\sin\alpha \quad (28)$$

Weiterhin ist

$$\omega_{z_{\dot\gamma}} = \dot\gamma\cos\mu\sin\alpha\sin\beta - \dot\gamma\sin\mu\cos\alpha \quad (29)$$

und

$$\omega_{y_{\dot\gamma}} = \dot\gamma\cos\mu\cos\beta \quad (30)$$

Werden jetzt die Einzelanteile, die $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ gemäß den Gl. (7) bis (30) zu ω_x, ω_y, ω_z liefern, in die Gl. (4) bis (6) eingesetzt, so lassen sich die vollständigen Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z in Abhängigkeit von $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$, $\dot\mu$, $\dot\chi$ in folgender Form darstellen:

$$\omega_x = -\dot\chi(\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma\sin\mu\cos\alpha\sin\beta + \cos\gamma\cos\mu\sin\alpha) + \dot\gamma(\cos\mu\cos\alpha\sin\beta + \sin\mu\sin\alpha) + \dot\mu\cos\alpha\cos\beta - \dot\beta\sin\alpha \quad (31)$$

$$\omega_y = \dot\alpha - \dot\mu\sin\beta + \dot\chi(\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\sin\mu\cos\beta) + \dot\gamma\cos\mu\cos\beta \quad (32)$$

$$\omega_z = +\dot\chi(\cos\gamma\cos\mu\cos\alpha + \cos\gamma\sin\mu\sin\alpha\sin\beta - \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta) + \dot\gamma(\cos\mu\sin\alpha\sin\beta - \sin\mu\cos\alpha) + \dot\mu\sin\alpha\cos\beta + \dot\beta\cos\alpha \quad (33)$$

Es soll jetzt noch untersucht werden, in welcher Weise sich die vollständigen Ausdrücke der Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z vereinfachen, wenn ein sog. »stationärer Flugzustand« zugrunde gelegt wird. Das Vor-

Vorhandensein eines stationären Flugzustandes ist durch die Erfüllung einer aerodynamischen und einer flugmechanischen Bedingung gekennzeichnet. Die aerodynamische Bedingung verlangt, daß der Anblasezustand ungeändert bleibt. Es ist daher für einen stationären Flugzustand

$$\dot{\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$\dot{\beta} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Die flugmechanische Bedingung ist gleichbedeutend mit dem Vorhandensein einer stationären Bahn. In diesem Falle sind auch die Gleichungen

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

$$\dot{\mu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

erfüllt.

Somit nehmen also die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z im Falle eines stationären Flugzustandes folgende Form an:

$$\omega_{x_{st}} = -\dot{\chi}\,(\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma\sin\mu\cos\alpha\sin\beta + \cos\gamma\cos\mu\sin\alpha) \quad \ldots \quad (38)$$

$$\omega_{y_{st}} = +\dot{\chi}\,(\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\sin\mu\cos\beta) \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

$$\omega_{z_{st}} = +\dot{\chi}\,(\cos\gamma\cos\mu\cos\alpha + \cos\gamma\sin\mu\sin\alpha\sin\beta - \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta) \quad \ldots \quad (40)$$

Die Komponenten ω_{x_a}, ω_{y_a}, ω_{z_a} der Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs in Richtung der flugwindfesten Achsen x_a, y_a, z_a werden mit Hilfe der Tafel 2 aus den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z in folgender Weise erhalten:

$$\omega_{x_a} = \omega_x\cos\alpha\cos\beta - \omega_y\sin\beta + \omega_z\sin\alpha\cos\beta \quad (41)$$

$$\omega_{y_a} = \omega_x\cos\alpha\sin\beta + \omega_y\cos\beta + \omega_z\sin\alpha\sin\beta \quad (42)$$

$$\omega_{z_a} = -\omega_x\sin\alpha + \omega_z\cos\alpha \quad \ldots \quad (43)$$

In diese Gleichungen werden die Komponenten ω_x, ω_y, ω_z in Abhängigkeit von den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel α, β, γ, μ, χ aus den Gl. (31) bis (33) eingesetzt. Die vollständigen Ausdrücke der Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_{x_a}, ω_{y_a}, ω_{z_a} lassen sich dann in folgender Form darstellen:

$$\omega_{x_a} = \dot{\mu} - \dot{\alpha}\sin\beta - \dot{\chi}\sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

$$\omega_{y_a} = \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma}\cos\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu \quad \ldots \quad (45)$$

$$\omega_{z_a} = \dot{\beta} - \dot{\gamma}\sin\mu + \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

Für den stationären Flugzustand nehmen die Gl. (44) bis (46) folgende Form an:

$$[\omega_{x_a}]_{st} = -\dot{\chi}\sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

$$[\omega_{y_a}]_{st} = +\dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

$$[\omega_{z_a}]_{st} = +\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

V. Die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_{x_e}, ω_{y_e}, ω_{z_e} des Flugzeugs im experimentellen Achsenkreuz x_e, y_e, z_e.

Bei der Darstellung und Benutzung aerodynamischer Unterlagen erweist sich die Einführung eines Achsenkreuzes x_e, y_e, z_e als vorteilhaft, das folgendermaßen erklärt wird: Die Achse y_e ist mit der flugzeugfesten Achse y in Übereinstimmung. Das ebene Achsenkreuz x_e, z_e liegt also in der Symmetrieebene zx des Flugzeugs. Die Achse x_e ist die Schnittgerade zwischen der tangentialen Strömungsebene $x_a\,y_a$ und der Flugzeugsymmetrieebene zx. Die Achse z_e liegt rechtwinklig zu x_e und y_e in der Flugzeugsymmetrieebene. Sie ist in Übereinstimmung mit der Auftriebsachse z_a. Die Achse x_e entsteht daher aus der flugzeugfesten Achse x dadurch, daß man sich die Achse x um den in der Flugzeugsymmetrieebene gemessenen Anstellwinkel α (Drehachse von α ist y) in der Symmetrieebene zurückgedreht denkt. x_e entsteht andererseits aus der Achse x_a, indem man sich die Achse x_a um den in der Ebene $x_a\,y_a$ gemessenen Schiebewinkel β (Drehachse von β ist z_a) in die Flugzeugsymmetrieebene gedreht denkt. Das experimentelle Achsenkreuz stellt also gleichsam eine Brücke zwischen dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und dem flugwindfesten Achsenkreuz

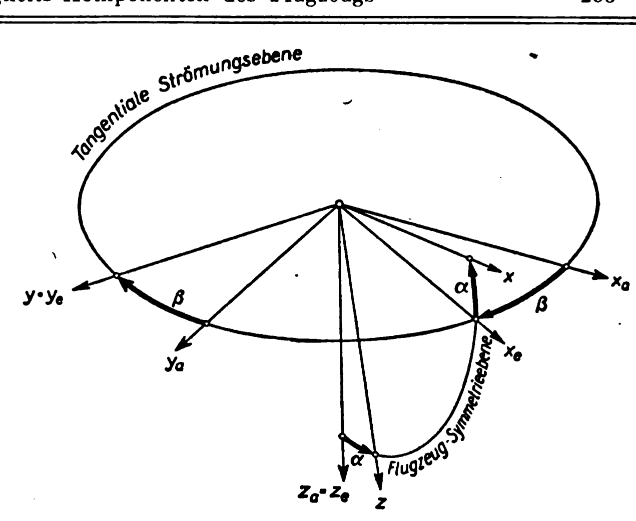


Bild 1. Ausrichtung des experimentellen Achsenkreuzes x_e, y_e, z_e gegenüber dem flugzeugfesten Achsenkreuz x, y, z und gegenüber dem flugwindfesten Achsenkreuz x_a, y_a, z_a.

x_a, y_a, z_a dar. Die gegenseitige Ausrichtung des flugzeugfesten, des flugwindfesten und des experimentellen Achsenkreuzes zeigt Bild 1.

Zu Umrechnungen zwischen dem experimentellen Achsenkreuz x_e, y_e, z_e einerseits und dem flugzeugfesten und flugwindfesten Achsenkreuz andererseits dienen die Tafeln 4 und 5.

Tafel 4.

Flugzeugfestes Achsenkreuz	Experimentelles Achsenkreuz		
	x_e	y_e	z_e
x	$\cos\alpha$	0	$-\sin\alpha$
y	0	1	0
z	$\sin\alpha$	0	$\cos\alpha$

Tafel 5.

Experimentelles Achsenkreuz	Flugwindfestes Achsenkreuz		
	x_a	y_a	z_a
x_e	$\cos\beta$	$\sin\beta$	0
y_e	$-\sin\beta$	$\cos\beta$	0
z_e	0	0	1

Die in der beschriebenen Weise erklärten Achsen x_e, y_e, z_e sind mit den in den meisten deutschen horizontalen Windkanälen gebräuchlichen Momentenbezugsachsen in Übereinstimmung. Aus diesem Grunde wird das Achsenkreuz x_e, y_e, z_e als »experimentelles Achsenkreuz« bezeichnet.

Die Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_{x_e}, ω_{y_e}, ω_{z_e} des Flugzeugs lassen sich mit Hilfe der Tafeln 4 und 5 aus den Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z in einfacher Weise umrechnen. Man erhält die Komponenten ω_{x_e}, ω_{y_e}, ω_{z_e} in Abhängigkeit von $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\chi}$ aus den vollständigen Ausdrücken ω_x, ω_y, ω_z (Gl. (31), (32), (33)) auch in der Weise, daß in diesen Ausdrücken entsprechend der Erklärung der Achsen x_e und z_e der Anstellwinkel α gleich Null gesetzt wird.

Es ergeben sich zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_{x_e}, ω_{y_e}, ω_{z_e} und den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel α, β, γ, μ, χ folgende Beziehungen:

$$\omega_{x_e} = \dot{\mu}\cos\beta - \dot{\chi}\,(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\mu\sin\beta) + \dot{\gamma}\cos\mu\sin\beta$$

$$\omega_{y_e} = \dot{\alpha} - \dot{\mu}\sin\beta + \dot{\chi}\,(\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\sin\mu\cos\beta) + \dot{\gamma}\cos\mu\cos\beta$$

$$\omega_{z_e} = \dot{\beta} + \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu - \dot{\gamma}\sin\mu.$$



Für den stationären Flugzustand folgt daraus:

$$(\omega_{x_e})_{st} = -\dot{\chi}\,(\sin\gamma\cos\beta - \cos\gamma\sin\mu\sin\beta)$$
$$(\omega_{y_e})_{st} = +\dot{\chi}\,(\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\sin\mu\cos\beta)$$
$$(\omega_{z_e})_{st} = +\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu.$$

VI. Zusammenfassung.

Die Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Flugzeuges in Richtung der flugzeugfesten Achsen x, y, z und den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel α, β, γ, μ, χ, φ, ϑ, ψ, die das flugzeugfeste, das flugwindfeste und das erdparallele Achsenkreuz gegeneinander ausrichten, werden hergeleitet. Außer den bei völlig allgemeiner Bewegung geltenden vollständigen Ausdrücken für ω_x, ω_y, ω_z werden auch die bei Vorliegen eines stationären Flugzustandes gültigen Ausdrücken $\omega_{x_{st}}$ $\omega_{y_{st}}$, $\omega_{z_{st}}$ angegeben. Zum Schluß erfolgt die Aufstellung der Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeits-Komponenten ω_{x_e}, ω_{y_e}, ω_{z_e} des Flugzeugs im experimentellen Achsenkreuz x_e, y_e, z_e und den zeitlichen Ableitungen der Bezugswinkel α, β, γ, μ, χ, durch die das flugwindfeste Achsenkreuz gegenüber dem flugzeugfesten und dem erdparallelen Achsenkreuz ausgerichtet wird.

VII. Schrifttumsverzeichnis.

[1] H. J. Rautenberg, Die gegenseitige Kopplung der flugmechanischen Achsenkreuze. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 4.

[2] Bezeichnungen in der Flugmechanik. Normblatt DIN L 100. Beuth-Vertrieb, Berlin SW.

Der Fliehkrafteinfluß auf die höheren Biege-Eigenfrequenzen von Luftschrauben bei verschiedenen Anstellwinkeln.

Berichtigung.

Herr Dr.-Ing. Riekert vom Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart machte mich darauf aufmerksam, daß in meiner Arbeit in dieser Schriftenreihe Bd. 18 (1941) Lfg. 1 S. 24 die Differentialgleichung für das in der Umlaufebene schwingende Seil nicht ganz in Ordnung ist. Die richtige Differentialgleichung unterscheidet sich von der des senkrecht zur Umlaufebene schwingenden Seils nur dadurch, daß die Rückstellkraft jetzt um den Betrag vermindert ist, der sich aus der auf das betrachtete Teilchen $\mu_{(x)}$ wirkenden Fliehkraft als Komponente errechnet, nämlich

$$\mu_{(x)}\,(b+x)\,\omega^2\,dx\cdot\frac{y}{b+x}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\partial S_{(x)}}{\partial x}\,dx\cdot\frac{y}{b+x}.$$

Dfgl. (1) müßte also lauten:

$$\mu_{(x)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[S_{(x)}\frac{\partial y}{\partial x}\right] - \frac{\partial S_{(x)}}{\partial x}\cdot\frac{y}{b+x}.$$

Damit werden alle weiteren Differentialgleichungen wesentlich einfacher, z. B. statt (3) folgt

$$S_{(z)}\,y''_{(z)} + S'_{(z)}\,y'_{(z)} + (\lambda_s^2 + \omega^2)\,\mu_{(z)}\,y_{(z)} = 0$$

und statt (7)

$$y''_{(z)}\left\{(n+2)\,p\,z - (n+1)\,z^2\right\} + y'_{(z)}\,(n+2)\,(n+1)\,(p-z)$$
$$+\,y_{(z)}\,(n+2)\,(n+1)\,(C_\alpha + \sin^2\alpha) = 0.$$

Das in der Arbeit als unbedeutend vernachlässigte Glied

$$[(n+2)\,p\,z - (n+1)\,z^2]\sin^2\alpha$$

tritt somit überhaupt nicht auf, wodurch die sich als gute Näherung ergebende Hauptbeziehung (9) exakt gültig wird.

J. Meyer.

Einfluß von Betriebspausen auf die Zeitfestigkeit von Stählen mit Ferrit.

Von Heinrich Cornelius.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Bei Biegewechselversuchen mit glatten und gekerbten Probestäben aus unlegiertem, niedrig- und hochlegiertem Stahl mit verschiedenen Gehalten an Ferrit wird der Einfluß von Versuchsunterbrechungen durch Lagern der unbelasteten Proben bei Raumtemperatur auf die Zeitfestigkeit untersucht.

Für die Herstellung der Verbindung zwischen den Ergebnissen von Belastungsstatistiken — beispielsweise für Flugzeuge[1]) — und der Werkstofforschung ist unter anderem auch die Kenntnis zeitweiliger Entlastungen auf die bis zum Bruch ertragenen Lastwechselzahlen schwingend beanspruchter, metallischer Bauteile von Bedeutung. Als Beitrag zu dieser Frage untersuchten früher F. Bollenrath und H. Cornelius[2]) den Einfluß von Betriebspausen auf die Zeit- und Dauerfestigkeit (Zugschwellbeanspruchung) glatter Stäbe aus nach Zusammensetzung, Gitteraufbau, Gefüge und Festigkeitseigenschaften sehr verschiedenen Werkstoffen. Außer bei Weicheisen wurde kein Einfluß der Belastungspausen auf die Wöhlerkurven festgestellt. Das Weicheisen, das als einziger der Versuchswerkstoffe »freien Ferrit«[3]) enthielt, bzw. fast ausschließlich daraus bestand, erfuhr jedoch durch zeitweilige Entlastungen eine erhebliche Erhöhung der Lebensdauer. Bei diesem Werkstoff liegt die Zugschwellfestigkeit glatter Stäbe dicht bei der Zugfestigkeit; der Spannungsbereich der Wöhlerkurve ist also sehr schmal. Kleine Änderungen der Spannungsgrenzen können große Änderungen der Bruchlastwechselzahlen verursachen. Trotz der hierdurch bedingten Unsicherheit der Versuchsergebnisse könnte die günstige Wirkung von Belastungspausen bei Weicheisen der Wirklichkeit entsprechen, da auch K. Daeves, E. Gerold und E. H. Schulz[4]) bei umlaufender Biegung mit glatten Stäben aus normalgeglühten und kaltgezogenen unlegierten Stählen mit »freiem Ferrit« eine Erhöhung der Zeitfestigkeit durch Ruhepausen beobachteten. Die bis zum Bruch ertragenen Lastwechselzahlen nahmen zu, wenn die Lastwechselzahlen zwischen den Pausen kleiner und die Ruhepausen länger wurden und ferner, wenn in den Ruhepausen eine Lagerung bei erhöhten Temperaturen erfolgte. — Die im folgenden beschriebenen Versuche behandeln den Einfluß von Stählen mit »freiem Ferrit« unter Berücksichtigung folgender Größen:

1. Stahlzusammensetzung,
2. Wechselnder Anteil des »freien Ferrits« im Gefüge bei gleicher Stahlzusammensetzung,
3. Prüfstabform (glatt und gekerbt).

Versuchsstähle.

Die Zusammensetzung und Warmbehandlung, sowie die im Zerreißversuch ermittelten Festigkeitswerte der Versuchsstähle sind in den Zahlentafeln 1 und 2 wiedergegeben.

Zahlentafel 2. Festigkeitswerte der Versuchsstähle.

Stahl Nr.	Streckgrenze	Zugfestigkeit	Dehnung ($l = 10\,d$)
	kg/mm²		%
1 a	28,1	46,0	28,8
1 b	39,1	62,7	13,0
2 a	31,1	54,3	26,0
2 b	34,3	56,4	23,5
2 c	88,2	107	7,8
3	36,1	83,0	38,5
4	27,5	70,6	40,1

Zahlentafel 1. Zusammensetzung und Warmbehandlung der Versuchsstähle.

Stahl Nr.	Warmbehandlung	Zusammensetzung in % C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Mo	Ta + Nb
1 a	880°/½ h, Luftabkühlung*)									
1 b	810°/½ h, Wasserabschreckung*) 350°/1 h, Luftabkühlung	0,18	0,32	0,71	0,021	0,036	—	—	—	—
2 a	880°/1 h, Ofenabkühlung**)									
2 b	880°/1 h, Ofenabkühlung bis 600°, dann rasche Abkühlung**)	0,23	0,25	0,46	0,017	0,008	1,05	—	0,19	—
2 c	750°/½ h, Ölabschreckung 350°/1 h, Luftabkühlung**)									
3	abgeschreckt***)	0,14	0,73	8,86	n. b.	n. b.	18,3	0,64	—	—
4	abgeschreckt***)	0,10	0,47	0,41	n. b.	n. b.	17,7	8,86	—	0,94

*) Stangen mit 20 mm Durchmesser. **) Stangen mit 15 mm Durchmesser. ***) Stangen mit 18 mm Durchmesser.

[1]) W. Kaul, Jahrb. 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, Bd. I, S. 274/88, sowie Ergänzungsband S. 307/13. München und Berlin 1938. H. Freise, Ebenda, S. 289/303.

[2]) Z. VDI Bd. 84 (1940) S. 295/99.

[3]) Unter »freiem Ferrit«[4]) wird der mikroskopisch als selbständiger Gefügebestandteil ohne weiteres erkennbare Ferrit im Gegensatz zu dem z. B. im Perlit oder im Vergütungsgefüge vorliegenden Ferrit verstanden.

[4]) Stahl und Eisen Bd. 60 (1940) S. 100/03.

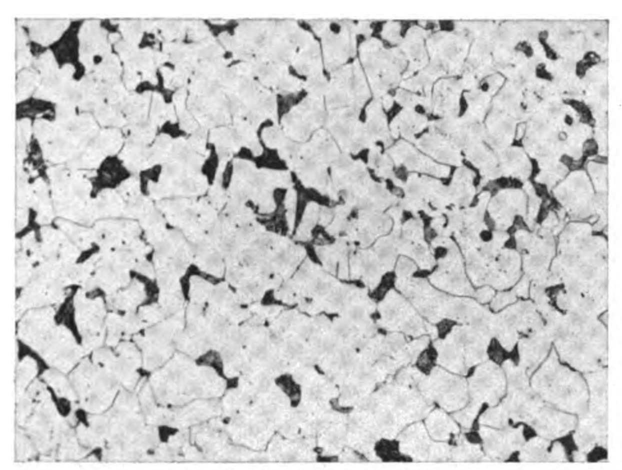


Bild 1. Gefüge von Stahl 1 a
(geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. = 200 fach).

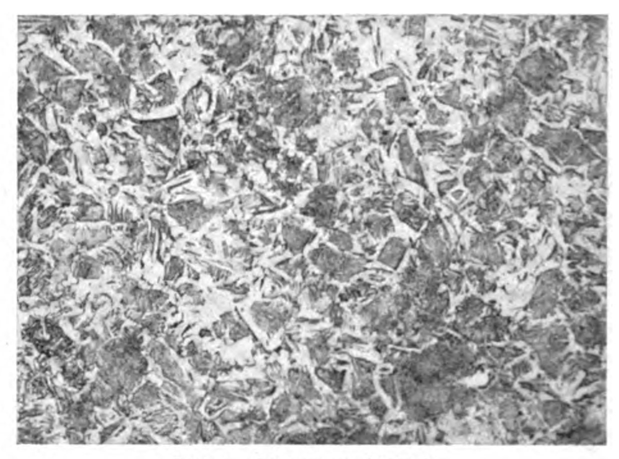


Bild 2. Gefüge von Stahl 1 b
(geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. = 200 fach).

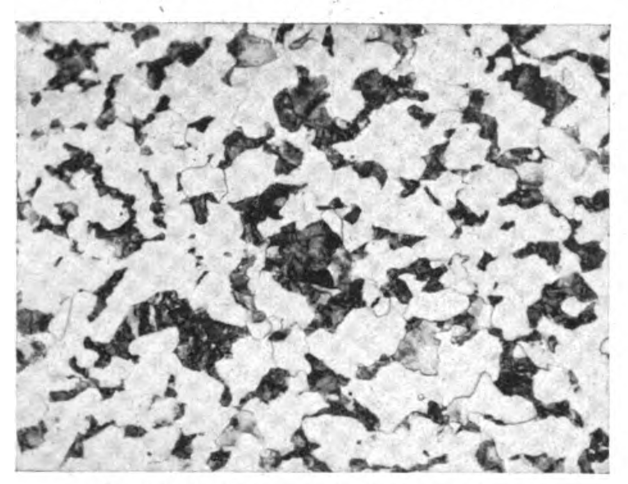


Bild 3. Gefüge von Stahl 2 a und 2 b
(geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. = 200 fach).

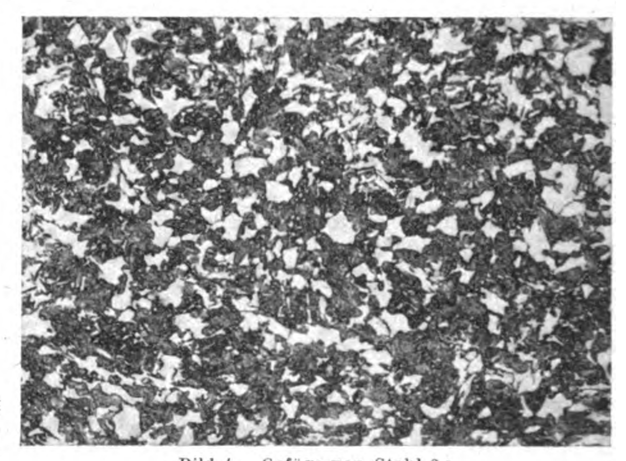


Bild 4. Gefüge von Stahl 2 c
(geätzt mit alkoh. Salpetersäure. Vergr. = 200 fach).

Das Gefüge des unlegierten Stahles 1 besteht im Zustand *a* nach Bild 1 aus Ferrit und wenig Perlit, im Zustand *b* nach Bild 2 vorwiegend aus Vergütungsgefüge und viel weniger Ferrit als im Zustand *a*. Der Chrom-Molybdän-Vergütungsstahl 2 hat im Zustand *a* und *b* ein übereinstimmendes, in Bild 3 wiedergegebenes Gefüge mit mehr Ferrit als Perlit. Im Zustand *c* besteht der Stahl nach Bild 4 aus Vergütungsgefüge und wesentlich weniger Ferrit als im Zustand *a* oder *b*. Die hochlegierten Stähle 3 und 4 haben ein Gefüge aus Austenit und Ferrit. Der Anteil des letzteren beträgt bei dem Chrom-Mangan-Nickelstahl 3 etwa 40 %, bei dem Chrom-Nickel-Tantal-Niobstahl 4 etwa 10 bis 20 %. Bild 5 gibt das Gefüge von Stahl 3 wieder. Die Kristallite mit deutlich erkennbaren Korngrenzen sind ferritisch, die Grundmasse ist austenitisch.

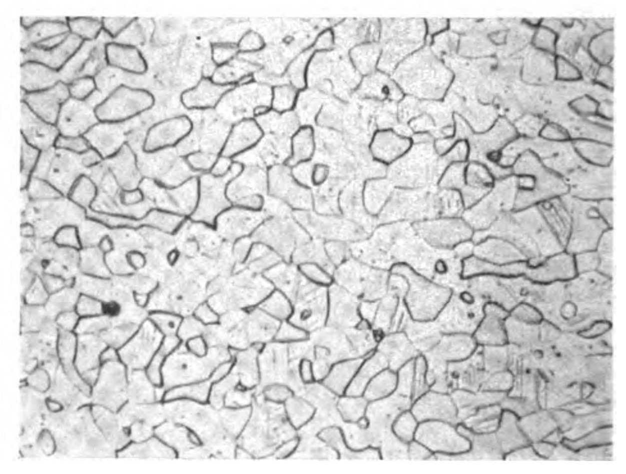


Bild 5. Gefüge von Stahl 3
(geätzt mit Königswasser mit Zusatz von Sparbeize. Vergr. = 500 fach).

Versuchsausführung.

Die Dauerversuche wurden mit umlaufender Biegung durchgeführt. Zunächst wurde der Zeitfestigkeitsast der Wöhlerkurve für jeden Werkstoffzustand durch Versuche ohne Unterbrechungen festgelegt und anschließend die Versuche mit Belastungspausen durchgeführt. Im letzteren Falle wurde nach jeweils einem Fünftel der ohne Belastungspausen bis zum Bruch ertragenen Lastwechselzahl eine Pause von 24 h eingelegt. Während der Pausen lagerten die völlig entlasteten Stäbe bei Raumtemperatur. Stäbe, die nach der fünften Pause, also nach Erreichen der sich ohne Pausen ergebenden Bruchlastwechselzahl, noch nicht gebrochen waren, wurden ohne weitere Pausen bis zum Bruch beansprucht. Die ohne und mit Belastungspausen untersuchten Stäbe entstammten für einen bestimmten Werkstoffzustand jeweils der gleichen Stange und wurden auf der gleichen Maschine (Umlaufbiegemaschine Schenk, Bauart »Simplex«) geprüft. Die Stäbe wurden mit Öl von 20 ± 1° gekühlt. — Die glatten Probestäbe hatten in der Meßstrecke einen Durchmesser von 6 mm. Die gekerbten Stäbe hatten den gleichen Durchmesser im Kerbgrund. Als Kerbform wurde für die Stähle 1 und 2 ein Rundkerb mit 0,75 mm Tiefe und 0,75 mm Abrundungsradius, für die Stähle 3 und 4 ein Spitzkerb mit 0,75 mm Tiefe, 0,1 mm Abrundungsradius und 60° Öffnungswinkel gewählt. Die Prüfstäbe waren auch im Kerbgrund sorgfältig poliert nach voraufgegangenem Feinschleifen in Umfangsrichtung.

Versuchsergebnisse.

Die mit dem unlegierten Stahl 1 bei einer Umdrehungszahl des Stabes von 5000/min gewonnenen Versuchsergeb-

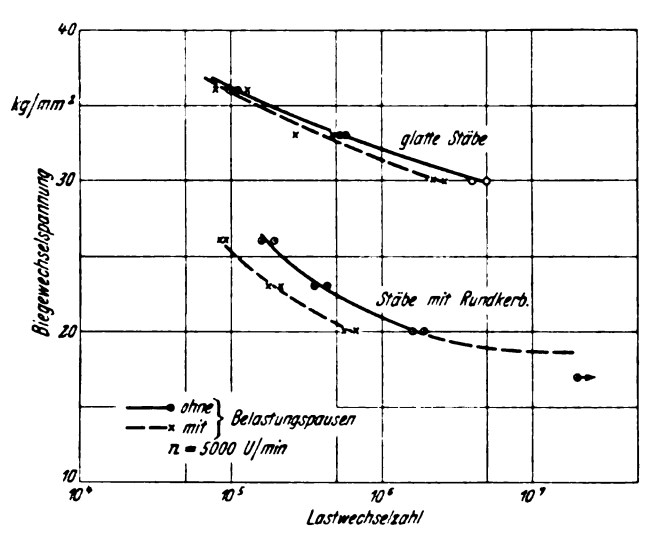


Bild 6. Zeitfestigkeit von Stahl 1a.

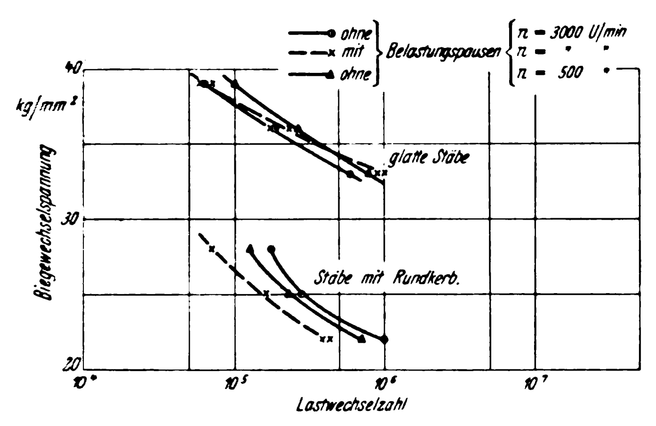


Bild 8. Zeitfestigkeit von Stahl 2a.

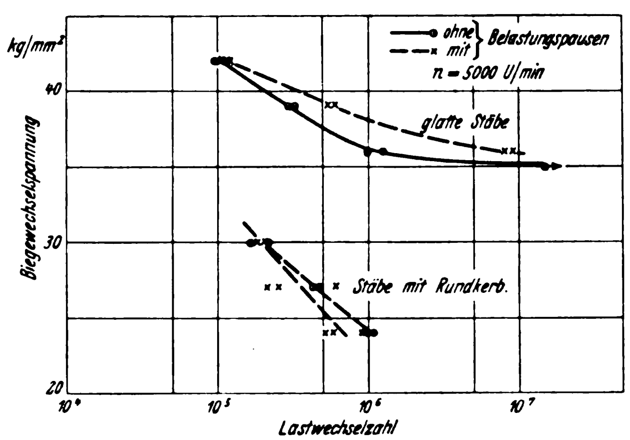


Bild 7. Zeitfestigkeit von Stahl 1b.

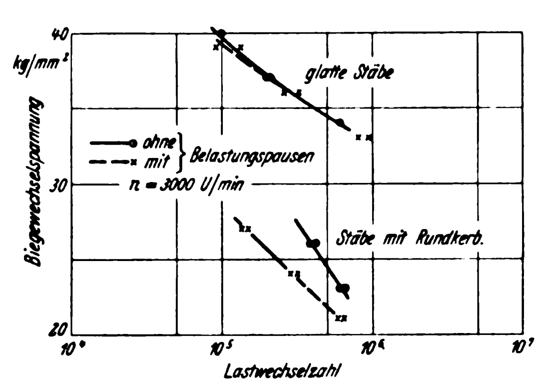


Bild 9. Zeitfestigkeit von Stahl 2b.

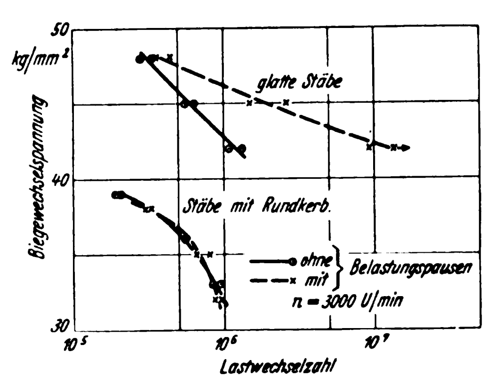


Bild 10. Zeitfestigkeit von Stahl 2c.

nisse enthalten die Bilder 6 und 7. Im Zustand *a* (vorwiegend Ferrit, wenig Perlit) führen die Versuche mit Belastungspausen bei den glatten Stäben zu einer nur wenig, bei den gekerbten Stäben dagegen beträchtlich verminderten Bruchlastwechselzahl. Im Zustand *b* (vorwiegend Vergütungsgefüge, weniger Ferrit) dagegen haben die glatten Stäbe mit Belastungspausen eine größere, die gekerbten Stäbe eine im Mittel kleinere Lebensdauer als bei den nicht unterbrochenen Versuchen. Der Einfluß der Pausen nimmt mit zunehmender Annäherung an die Dauerfestigkeit zu. Dabei ist bemerkenswert, daß die glatten Proben noch nach 8 bis $9 \cdot 10^6$ Lastwechseln zu Bruch gehen. — Die Bilder 8 bis 10 geben die mit dem Chrom-Molybdän-Vergütungsstahl 2 bei einer Umdrehungszahl von 3000/min, in einem Falle außerdem von 500/min erhaltenen Versuchsergebnisse wieder. Im Zustand *a* (mehr Ferrit als Perlit) ergibt sich mit Belastungspausen bei den glatten Stäben kurz oberhalb der Dauerfestigkeit eine größere, bei den gekerbten Stäben eine im ganzen untersuchten Spannungsbereich nahezu gleichmäßig kleinere Lebensdauer als ohne Pausen. Im gleichen Sinne wie die Belastungspausen wirkt eine verminderte Stabumdrehungszahl (= Lastwechselfrequenz). Im Zustand *b* (mehr Ferrit als Perlit) macht sich bei den glatten Stäben kein Einfluß, bei den gekerbten Stäben dagegen wieder ein ausgeprägt ungünstiger Einfluß der Belastungspausen bemerkbar. Dagegen hat der Stahl 2 im Zustand *c* (Vergütungsgefüge, wenig Ferrit) bei Versuchen mit Belastungspausen besonders im unteren Bereich des untersuchten Zeitfestigkeitsgebietes an glatten Stäben eine größere, an gekerbten Stäben in dem ganzen, durch die Versuche erfaßten Festigkeitsbereich eine gegenüber Versuchen ohne Pausen unveränderte Bruchlastwechselzahl. Mit ferritfreiem Vergütungsgefüge erfuhr die ganze Wöhlerkurve des gleichen Stahles an glatten Stäben bei Zugschwellbeanspruchung keine Änderung durch Einschalten von Ruhepausen[2]). — Die austenitisch-ferritischen Stähle 3 und 4 (40 bzw. 10 bis 20 % Ferrit) zeigen ein gleichartiges Verhalten. Bei den mit 2000 U/min durchgeführten Versuchen führten eingelegte Ruhepausen nach den Bildern 11 und 12 für glatte Stäbe zu erheblich verlängerter, für gekerbte Stäbe zu wesentlich verminderter Bruchlastwechselzahl. Bei den gekerbten Proben aus Stahl 3 nimmt dieser Einfluß mit steigender Biegewechselspannung ab. Die Wöhlerkurve glatter Stäbe aus einem ferritfreien, austenitischen Stahl wurde bei Zugschwellbeanspruchung durch Betriebspausen nicht verändert[2]).

Zahlentafel 3 enthält eine übersichtliche Zusammenstellung der Versuchsergebnisse, die dahingehend vereinfacht ist, daß nur der mittlere Einfluß der Belastungspausen im jeweils untersuchten Zeitfestigkeitsbereich bewertet wurde. Es ist daher noch einmal darauf hinzuweisen, daß dieser Einfluß bei den Versuchen in vielen Fällen mit dem Abstand der jeweiligen Biegewechselspannung von der Dauerfestigkeit quantitativ veränderlich gefunden wurde. Man entnimmt der Zahlentafel 3, daß die Lebensdauer glatter Stäbe aus den ferrithaltigen Versuchsstählen durch

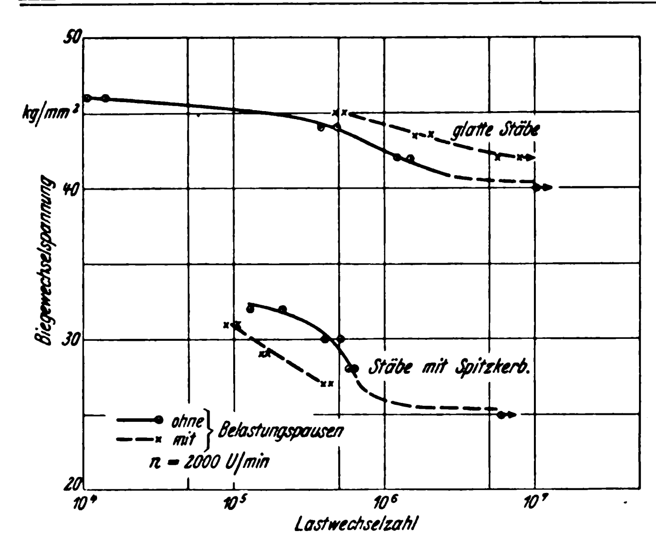


Bild 11. Zeitfestigkeit von Stahl 3.

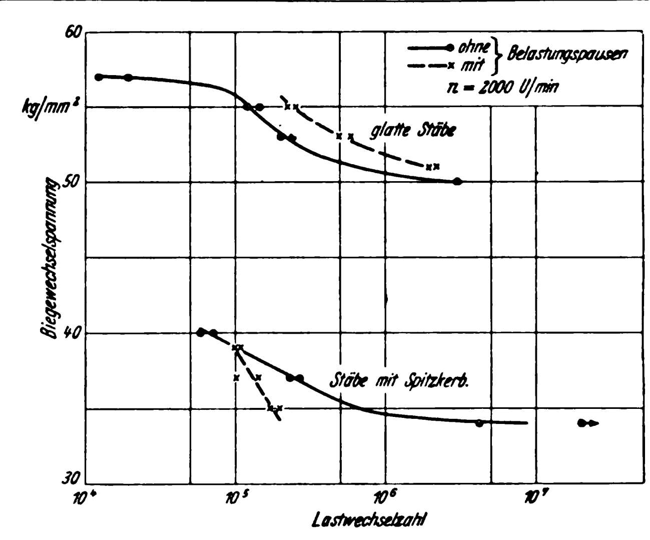


Bild 12. Zeitfestigkeit von Stahl 4.

Zahlentafel 8. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse.

Stahl Nr.	Belastungspausen wirken auf die Lebensdauer	
	glatter Stäbe	gekerbter Stäbe
1a	etwas vermindernd	stark vermindernd
1b	erhöhend	etwas vermindernd
2a	etwas erhöhend	stark vermindernd
2b	nicht	stark vermindernd
2c	stark erhöhend	nicht
3	stark erhöhend	stark vermindernd
4	stark erhöhend	vermindernd

Ruhepausen in fünf Fällen erhöht, in einem Falle nicht verändert und in einem weiteren Falle etwas vermindert wurde. Damit werden die nur an glatten Stäben durchgeführten früheren Versuche[4])[2]) im wesentlichen bestätigt und dahin erweitert, daß der Einfluß von »freiem Ferrit« weitestgehend unabhängig von der Stahlzusammensetzung ist. Innerhalb der untersuchten Grenzen scheint die anteilmäßige Menge des Ferrits am Gefüge des Stahles nicht das Maß der Verlängerung der Lebensdauer durch Belastungspausen zu bestimmen. Die mit glatten Proben aus den Versuchsstählen erhaltenen Ergebnisse zeigen vielmehr, daß aus Vergütungsgefüge mit verhältnismäßig wenig Ferrit oder aus Austenit mit 10 bis 40 % Ferrit bestehende Stähle die Verlängerung der Lebensdauer durch Ruhepausen deutlicher erkennen lassen, als vorwiegend aus Ferrit und außerdem aus Perlit aufgebaute Stähle. Es scheint demnach so zu sein, daß nicht allein die Anwesenheit oder die Menge von »freiem Ferrit«, sondern auch die neben ihm vorhandenen Gefügearten den Einfluß von Belastungspausen auf die Lebensdauer glatter Stahlstäbe mitbestimmen.

Die Feststellung, daß die Ruhepausen bei gekerbten Stäben die entgegengesetzte Wirkung wie bei glatten Stäben haben, ist überraschend und zunächst schwer verständlich. Nach Zahlentafel 3 haben die Betriebspausen in sechs Fällen eine vorwiegend erheblich verkürzte Lebensdauer der gekerbten Stäbe bewirkt, während in einem Falle kein eindeutiger Einfluß vorlag. Die Herabsetzung der Lebensdauer der gekerbten Stäbe aus den Versuchsstählen mit »freiem Ferrit« tritt unabhängig von der Stahlzusammensetzung ein und ist bei den höheren Ferritgehalten anscheinend etwas ausgeprägter. Dabei ist zu beachten, daß bei den verschiedenen Ferritgehalten der Stähle 1 und 2 auch die neben dem Ferrit vorliegenden Gefügebestandteile verschieden sind. Es handelt sich um Perlit bei hohen und Vergütungsgefüge bei niedrigen Ferritgehalten.

Bei Beginn der Versuche bestand die Vermutung, daß Alterungsvorgänge den Einfluß von Belastungspausen auf die Zeitfestigkeit ferrithaltiger Stähle bedingten. Daher wurde bei der Warmbehandlung der Stähle 1 und 2 außer auf die Erzielung verschiedener Ferritgehalte auch auf die Einstellung unterschiedlicher Alterungsneigung des Ferrits Wert gelegt. Es gelingt jedoch nicht, die Versuchsergebnisse durch Alterungsvorgänge widerspruchslos zu deuten. Besondere Schwierigkeiten bereitet in dieser Hinsicht der entgegengesetze Einfluß von Ruhepausen auf die Zeitfestigkeit glatter und gekerbter Stäbe. Da außerdem über die Rolle von Betriebspausen bei Dauerversuchen erst wenig Erfahrungen vorliegen, erscheint ein Versuch zur Deutung der Versuchsergebnisse auch verfrüht. Eine Beschränkung auf die vorstehende Mitteilung der Versuchsergebnisse wird daher für richtig gehalten.

Zusammenfassung.

Bei Biegewechselversuchen mit glatten und gekerbten Probestäben aus unlegiertem, niedrig- und hochlegiertem Stahl mit verschiedenen Gehalten an »freiem Ferrit« ergeben Versuchsunterbrechungen durch Lagern der unbelasteten Proben bei Raumtemperatur zwar bevorzugt eine Erhöhung der Zeitfestigkeit glatter Stäbe aber eine Verminderung der Zeitfestigkeit gekerbter Stäbe. Eine widerspruchsfreie Deutung dieser Versuchsergebnisse kann nicht gegeben werden.

Der Einfluß aerodynamischer Eigenschaften auf Schallfeld und Strahlungsleistung einer Luftschraube.

Von Wilhelm Ernsthausen.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Elektrophysik.

In der Arbeit wird der Einfluß von Umfangsgeschwindigkeit, Flügelform und Anstellung auf die Geräuscherzeugung einer umlaufenden Luftschraube rechnerisch und experimentell behandelt.

Gliederung.

A. Einleitung.

Die Untersuchungen, welche über das Luftschraubengeräusch und seine Entstehung bisher durchgeführt wurden[1]) haben gezeigt, daß das um den Schraubenflügel ausgebildete statische Feld verantwortlich für die Größe und Verteilung des Schalldruckes ist. Von hier ausgehend behandelt die vorliegende Arbeit den quantitativen Einfluß von Luftschraubenabmessungen, Drehzahl, Profilform und Auftriebsbeiwert auf das Schallfeld[2]).

Die früher dargelegten Ansätze, welche die Beziehungen für den Übergang von mechanischer in akustische Energie liefern, werden der neuen Problemstellung durch eine erweiterte Fassung angepaßt. Ihre Entwicklung ergibt Schalldruck und Schalleistung im absoluten Maß und damit den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad der Luftschraube für ihre Kenngrößen in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.

Die theoretischen Ergebnisse werden für einen Bereich numerisch ausgewertet, welcher vor allem die Größen- und Betriebsverhältnisse üblicher Schraubenmuster berücksichtigt.

An Modellschrauben verschiedener Dicke und Auftriebsbeiwerte werden Messungen über Form und absolute Größe des Schallfeldes und ein Vergleich mit der Rechnung durchgeführt.

B. Theorie.

Wir beschränken uns bei der Behandlung unserer Aufgabe auf Schrauben von symmetrischer Profilform, welche frei im ungestörten Medium umlaufen.

Die in der Akustik übliche Linearisierung der Lösungen der Wellengleichung behalten wir einer einfachen mathematischen Durchführung zuliebe bei. Dieses Vorgehen führt bis zu dem die Nähe der Schallgeschwindigkeit kennzeichnenden Auftreten von Verdichtungsstößen zu keiner nennenswerten Einschränkung, da die für die akustische Strahlung verantwortliche Erregung der Schraubenkreisfläche (in Richtung ihrer Normalen) Druckänderungen von der Größenordnung nur einiger Tausendstel Atmosphären verursacht und nichtlineare Eigenschaften der Luft erst bei Drücken nachgewiesen werden können, welche um mindestens zwei Zehnerpotenzen höher liegen.

Der umlaufende Schraubenflügel erregt periodisch alle Punkte der von ihm beschriebenen Kreisfläche mit fortschreitender Phase, so daß jeder dieser Punkte als Quelle einer sekundären Wechselströmung, also als Elementarstrahler, angesehen werden kann. Die mit dem periodisch verschwindenden Feld des Profils in engem Zusammenhang stehende Ergiebigkeit dieser Strahler bestimmt in Verbindung mit ihren Strahlungseigenschaften das Schallfeld, welches sich somit durch Summation über die strahlende Fläche unter Berücksichtigung der zeitlichen und räumlichen Phasen im Aufpunkt berechnen läßt.

Das bewegte Profil erteilt dem angrenzenden Medium in jedem Flächenelement eine durch sein Strömungsfeld gegebene Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit denken wir uns in eine flächennormale und in eine tangentiale Komponente zerlegt. Wir trennen das akustische von dem aerodynamischen Problem, indem wir uns bei den folgenden Betrachtungen vorstellen, daß die tangentiale Komponente durch den periodischen Umlauf der Erregungsphase erzeugt wird.

1. Die Profilform.

Die Form des Profils, welche offenbar maßgebend für den zeitlichen Verlauf von Druck und Geschwindigkeit in einem Raumpunkt ist, beziehen wir in die Beschreibung der akustischen Vorgänge dadurch ein, daß wir den je Umlauf auf die Luft wirkenden Druckstoß durch sein Fourierspektrum darstellen.

Dieses läßt sich unmittelbar aus der Profilform ableiten[3]). Bild 1 zeigt den mit Hilfe eines Druckempfängers in der Nähe des vorbeilaufenden Schraubenflügels registrierten Druckverlauf.

Um in der Rechnung von vornherein mit harmonisch zerlegten Teilschwingungen operieren zu können, muß der Fourierfaktor so bestimmt werden, daß er möglichst allgemein für profilähnliche Querschnittsverhältnisse gilt. Daher ersetzen wir in Bild 2 den angedeuteten wirklichen Verlauf durch die eingezeichnete Rechteckkurve, welche räumlich-zeitlich in fester Beziehung zu den Profildimensionen steht. Die damit gegebene Abweichung vom wirklichen Vorgang kann sich erst bei höheren Harmonischen auswirken.

Den Fourierfaktor für z in gleichem Winkelabstand umlaufende Flügel berechnet man zu

[1]) Schrifttumzusammenstellung, Ak. Z., Bd. 4 (1939), Nr. 1, S. 20ff.

[2]) Dazu wird bemerkt, daß sich das Luftschraubengeräusch aus zwei Anteilen zusammensetzt: Dem vom Profilfeld erzeugten Drehklang, welcher aus einer Reihe diskreter Teiltöne besteht und dem Drehgeräusch, einem von der Wirbelablösung am Schraubenflügel herrührenden Frequenzkontinuum. Unsere Untersuchungen erstrecken sich nur auf den Drehklang, da er in einem gewissen Abstand von der Luftschraube stets vorherrscht.

[3]) Ernsthausen, Ak. Z., Bd. 3 (1938), Nr. 3, S. 41. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), Lfg. 12, S. 433. Obata und Mitarbeiter, Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo (1933), S. 99 und 132.



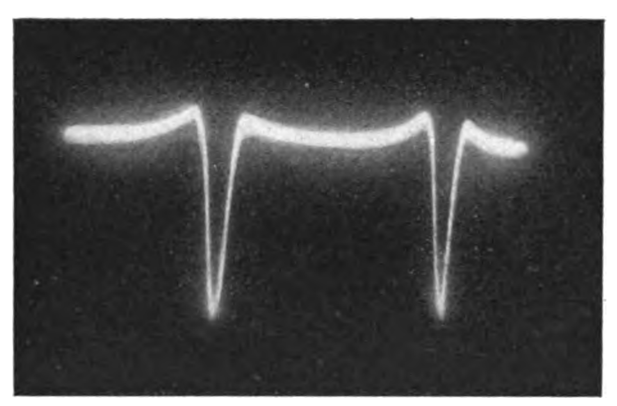


Bild 1. Druckverlauf in der Nähe des Schraubenflügels.

$$k'_m = \frac{z}{\pi} \int_{\pi/z - b/2r}^{\pi/z + b/2r} \cos \nu x \, dx = \frac{2z}{\nu \pi} \sin \frac{\nu b}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(b = Blattiefe, r = zugehöriger Schraubenradius). Er wächst mit z, da nach Bild 2 der Bogen b/r relativ zur Periode $2\pi/z$ größer wird. Die Gl. (1) gilt bis zur Erreichung des Symmetrietypus: $b/r = \pi/z$.

Da der Druck das Produkt von Geschwindigkeit und Luftwiderstand ist, geht aus dem Druckspektrum das Spektrum der wirklichen medialen Bewegung durch Division mit der Ordnung der Harmonischen ν hervor. Wir erhalten so, weil der Winkel $b/2r$ gewöhnlich sehr klein ist, für den Fourierfaktor der periodischen Luftbewegung am Schraubenblatt

$$k_m \approx \frac{z\,b}{\nu \pi r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

welcher sowohl für die normale als auch für die tangentiale Komponente gilt.

Die Blattiefe b ändert sich mit r nur wenig. Wir führen sie in unsere Betrachtung mit dem konstanten Wert b' bei $R/2$ ein. Außerdem ersetzen wir die Funktion $k_m(r)$ durch ihren Mittelwert, mit welchem die Schraubenkreisfläche belegt zu denken ist:

$$\bar{k}_m = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{z\,b'}{\nu \pi r} r\,dr = \frac{2\,z\,b'}{\nu \pi R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem Fourierfaktor des Flügelquerschnittes, der sich auf einem Kreis mit dem Radius $R/2$ fortbewegt.

Die in Bild 20 dargestellten Analysen befinden sich bei tiefen Ordnungen und niedrigen Geschwindigkeiten angenähert in Übereinstimmung mit Gl. (1), wo sie nur wenig mit der Ordnungszahl variieren.

2. Das Profil ohne Anstellung.

Die Wirkung eines rotierenden nichtangestellten Profils kann wegen der in jedem Punkt der Drehungsebene periodisch und in jeder Richtung nahezu gleichphasig erfolgenden Verdrängung der äquivalenten Mediummasse durch einen Kugelstrahler nullter Ordnung ersetzt werden. Beschränken wir uns, wie bereits erwähnt, auf die akustisch allein bedeutsamen normalen Komponenten $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, so ist die Schnelle durch

$$U_m = \frac{1}{2} j\,m\,\omega\,\bar{d}\,\bar{k}_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben. Wenn unter $\bar{d}$ der über die Schraubenkreisfläche verteilte Mittelwert verstanden wird, ist $\bar{d}\,\bar{k}_m$ eine durch die periodische Blattfolge verursachte Teilschwingung der Luftbewegung längs der Profilberandung. Unter der plausiblen Annahme, daß die Profildicke linear bis auf Null bei $r = R$ abnimmt $\left\{d(r) = 2\,d'\left(1 - \frac{r}{R}\right)\right\}$ und daß d' ihren Wert bei $R/2$ bedeutet, erhält man die mittlere Strahleramplitude der ganzen Fläche

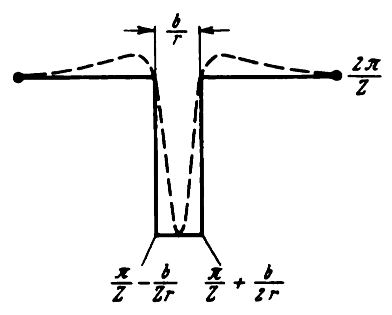


Bild 2. Rechteckförmige Näherung des wirklichen Druckverlaufs.

$$\bar{d} = \frac{4}{R^2} \int_0^R d'\left(1 - \frac{r}{R}\right) r\,dr = \frac{2}{3} d' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

welche damit auch gleich der Dicke bei $2/3\,R$ ist.

Hiermit und durch Integration über alle Elemente bei Berücksichtigung der Phasen im Abstand R_∞ bestimmen wir das Flächenpotential[4]) zu

$$\psi_0 = j \frac{F_s}{4\,R_\infty} m\,v_u\,\bar{k}_m\,\delta\,\chi_{0,m}(\varphi)\,e^{j\vartheta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn gesetzt wird

$$\delta = \frac{\bar{d}}{R}; \quad F_s = \pi R^2; \quad v_u = \omega R; \quad \vartheta = m\,\omega\left(t - \frac{R_x}{c}\right).$$

Die Richtcharakteristik $\chi_{0,m}(\varphi)$ wird in Polarkoordinaten durch eine zweiblättrige Kurve beschrieben, deren beide Hauptmaxima in der Rotationsebene liegen.

Mit den bereits an anderer Stelle[4]) abgeleiteten und dargestellten Integralen

$$\Phi_{p,m}(\xi) = \int_0^\xi x^p J_m(x)\,dx;$$

$$\xi = m \frac{v_u}{c} \cos\varphi; \quad x = m \frac{\omega r}{c} \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ergibt sich für

$$\chi_{0,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi \xi^2} \Phi_{1,m}(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

3. Der Einfluß der Anstellung.

Unter der Anstellung der Schraubenblätter versteht man den für die aerodynamische Leistung verantwortlichen Winkel zwischen der Achse des Profils und seiner Anströmrichtung. Er verursacht in jedem Element der Drehfläche eine periodisch wirkende Kraft, welche ein polarisiertes Feld gleich einer Doppelquelle oder einem Kugelstrahler erster Ordnung erregt[5]).

Den Scheitelwert dieser Kraft bestimmen wir mit Hilfe der Zirkulation des Blattelementes, welche durch den Stoßdruck — die Potentialdifferenz Φ der Ober- und Unterseite des Profils — gegeben ist.

Bei z Flügeln ergibt sich die gesamte Zirkulation:

$$z\,\Gamma = \Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dieser Ausdruck stellt den Spitzenwert des bei jedem Umlauf im gleichen Raumpunkt auftretenden Stoßes dar, so daß wir, da wir hier eine ähnliche spektrale Verteilung wie in Gl. (3) vorfinden, für die Amplitude jeder Partialschwingung

$$\Gamma = \frac{z}{m} \Gamma \bar{k}_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

schreiben müssen. Denn der unveränderlich vorausgesetzte Impuls der ganzen Schraube bei der Berechnung der einzelnen Fourierkomponenten zwingt zur Reduktion des Drehwinkels auf den m-ten Teil. Physikalisch bedeutet dies eine Abnahme der Größe des periodischen Stoßdruckes mit steigender Blattzahl oder Teiltonordnung auf den zeitlich konstanten Betrag der Auftriebskraft durch die gegenseitige Beeinflussung der benachbarten Zirkulationsströmungen.

[4]) Ernsthausen, Ak. Z., Bd. 3 (1938), Nr. 8, S. 380.
[5]) Lamb, Hydrodynamic, 1931, Paragraph 291.



Mit den Gl. (7) und (8) erhält man durch Ableitung nach der Zeit $\left\{P = -\varrho \frac{d\Phi}{dt}\right\}$, gültig für kleine Anstellwinkel, die Amplitude des vom Blattelement in axialer Richtung auf das Medium ausgeübten Druckes:

$$P_m = -j\,\omega\,\varrho\,z\,\bar{k}_m\,\Gamma \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

und damit die auf das Flächenelement wirkende Kraft

$$dA = -j\,\omega\,\varrho\,z\,\bar{k}_m\,\Gamma\,r\,dr\,d\alpha \quad \ldots\ldots (10)$$

Für die Zirkulation führt man die bekannte Beziehung

$$\Gamma = \frac{\bar{c}_a}{2}\,b'\,\omega\,r \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

ein, wo $\bar{c}_a$ der mittlere Schraubenauftriebsbeiwert ist, welcher bei dreieckförmiger Verteilung etwa $^2/_3$ des am Flügelende auftretenden Maximalwertes beträgt (vgl. Bild 14).

Das Potential des äquivalenten Kugelstrahlers erster Ordnung ist dann

$$\psi_1' = j\,\frac{dA}{4\pi\varrho\omega}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{j\vartheta}}{R_\infty} \quad \ldots\ldots (12)$$

Die Entwicklung dieses Ansatzes für die strahlende Fläche kann indessen nur durchgeführt werden, wenn $\bar{c}_a$ als unabhängig von der Machschen Zahl eingeführt wird, da einfach darstellbare Funktionen, welche für den unter- und überkritischen Bereich stetig ineinander übergehen, nicht bekannt sind. Auch von der Berücksichtigung der Prandtlschen Regel wird abgesehen, obgleich sich ihre Gültigkeit bis zum Einsatz des ersten Verdichtungsstoßes erwiesen hat[6]), da der durch sie beschriebene Einfluß auf die akustischen Erscheinungen nur gering zu sein scheint.

Die im zweiten Teil der Arbeit aufgeführten Meßergebnisse zeigen, daß bei Machschen Zahlen größer als 1 die Wirkung der Anstellung verschwindet, was auch im Einklang mit der Beobachtung der aerodynamischen Wirkungen steht.

Das Potential der ganzen Fläche ergibt sich, wie in Gl. (4)

$$\psi_1 = j\,\frac{F_s}{4\,c\,R_\infty}\,z\,\omega\,v_u\,\bar{k}_m\,b'\,\bar{c}_a\,\chi_{1.m}(\varphi)\,e^{j\vartheta} \quad \ldots (13)$$

worin entsprechend den Gl. (5) und (6)

$$\chi_{1.m}(\varphi) = \sin\varphi\,\frac{1}{\pi\,\xi^3}\,\Phi_{2.m}(\xi) \quad \ldots\ldots (14)$$

ist. Dieser Ausdruck stellt im Polardiagramm eine vierblättrige Kurve dar, welche sowohl in der Schraubenebene als auch in der Achse den Wert Null hat.

Das Ergebnis dieses Abschnittes unterscheidet sich von dem in einer früheren Arbeit[7]) mitgeteilten dadurch, daß zwischen der »induzierten« Kraft und dem Elementarpotential als Folge des dynamischen Ansatzes für die Vorgänge in einem Flächenelement, eine Phasenverschiebung von 90° erscheint. Die in der zitierten Arbeit angeführte Schlußfolgerung für die Schallfeldverteilung der Luftschraube beruht auf nunmehr als unzulässig erkannten, aus dem statischen Verhalten des Profils abgeleiteten Vorstellungen.

4. Das angestellte Profil.

Die akustische Wirkung einer rotierenden Luftschraube läßt sich nun mit Hilfe der in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführten Überlegungen beschreiben, wenn man die Komponenten sinngemäß superponiert, welche von den Profildimensionen und von der Anstellung und daher entsprechend von Elementarstrahlern nullter und erster Ordnung herrühren. Wir schreiben für die resultierende Richtcharakteristik

$$\chi_m^H(\varphi) = \chi_{0.m}(\varphi) + H\,\chi_{1.m}(\varphi) \quad \ldots\ldots (15)$$

und für den Parameter

$$H = \frac{v_u}{c\,m}\,\frac{\bar{c}_a}{\tau}\,z, \quad \tau = \frac{\bar{d}}{b'} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

so daß wir für das gesamte Potential

$$\psi_m = j\,\frac{F_s}{4\,R_\infty}\,m\,v_u\,\bar{k}_m\,\delta\,\chi_m^H(\varphi)\,e^{j\vartheta} \quad \ldots\ldots (17)$$

erhalten. Die Ausdrücke mit dem Zeiger H sind durch einen bestimmten Wert des Parameters der Gl. (16) gekennzeichnet.

Durch zeitliche und örtliche Differentiation leiten sich daraus der Schalldruck

$$p_{m_{\text{eff}}} = \frac{\pi\,\varrho}{4\sqrt{2}}\,\frac{R}{R_\infty}\,m^2\,v_u^2\,k_m^2\,\delta\,\chi_m^H(\varphi) \quad \ldots (18\text{a})$$

$$p_{m_{\text{eff}}} \approx \frac{7{,}8\cdot 10^5}{R_\infty}\,\bar{k}_m\,\bar{d}\,\varkappa^2\,\chi_m^H(\varphi)\,\mu b \quad \ldots (18\text{b})$$

[$\varkappa$ siehe Gl. (21a)] und die gleichphasige Komponente der Schnelle

$$u_{m_{\text{eff}}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\cdot c}\,\frac{R}{R_\infty}\,m^2\,v_u^2\,\bar{k}_m\,\delta\,\chi_H^m(\varphi) \quad \ldots (19)$$

ab.

Die mit der Geschwindigkeit v in axialer Richtung translatorisch bewegte Schraube strahlt ihre Energie mit der relativen Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c' = c\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c}\cos\varphi} \quad \ldots\ldots (20)$$

ab, wodurch die Richtcharakteristik in die Bewegungsrichtung vorgeneigt erscheint.

5. Die Strahlungsleistung.

Das Produkt aus Schalldruck und Schnelle ergibt die Schallintensität, welche, über eine die Schraube konzentrisch einhüllende Kugelfläche integriert, die Schalleistung darstellt. Führt man die Operation durch, so erhält man

$$N_m = \frac{\pi^2\,\varrho\,c^3}{16}\,F_s\,\bar{k}_m^2\,\delta^2\,\varkappa^4\,S_m^H(x) \quad \ldots (21\text{a})$$

Darin wurde $\varkappa = m\,\frac{v_u}{c}$, und unter der Voraussetzung, daß die Rotationssymmetrieachse in Richtung $\pi/_2 \ldots -\pi/_2$ verläuft,

$$S_m^H(\varkappa) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_m^{H^2}(\varphi)\,\cos\varphi\,d\varphi \quad \ldots\ldots (22)$$

gesetzt.

Wenn die mittlere Blattdicke in cm eingeführt wird, ist die Schalleistung in Watt

$$N_m \approx 9{,}4\cdot 10^3\,\bar{k}_m^2\,\bar{d}\,\varkappa^{21}\,S_m^H(x) \quad \ldots\ldots (21\text{b})$$

Mit Gl. (21a) bestimmen wir auch den Strahlungswiderstand pro Flächeneinheit

$$r_s = \frac{\pi^2}{8}\,\varrho\,c\,\varkappa^2\,S_m^H(x) \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Da man für die aerodynamische Luftschraubenleistung

$$N_L = k_l^H\,\frac{\varrho}{2}\,\pi\,\omega^3\,R^5 \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

schreiben kann, wo k_l^H die Leistungszahl bedeutet, erhalten wir für den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad

$$\eta_m = k_\eta\,m^3\,\varkappa\,S_m^H(x) \quad \ldots\ldots (25\text{a})$$

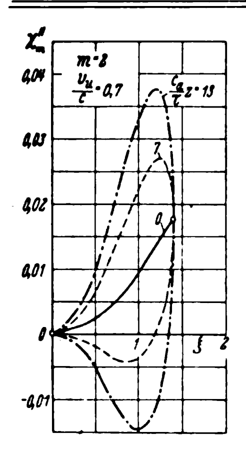
worin die Konstante

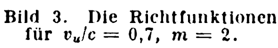
$$k_\eta = \frac{\pi^2\,\bar{k}_m^2\,\delta^2}{8\,k_l^H} \quad \ldots\ldots\ldots (25\text{b})$$

ist, und k_l^H für bestimmte Werte des Parameters H, Gl. (16), gilt.

In den vorausgehenden Überlegungen wurden statt der Funktionen $k_m(r)$, $d(r)$ und $c_a(r)$ konstante mittlere Werte für die Schraubenfläche eingesetzt, um die Rechnung zu vereinfachen und um Lösungen von allgemeiner Bedeutung zu erhalten. Eine überschlägliche Betrachtung zeigt, daß sich selbst bei der Durchführung der Integration unter Einführung dieser Funktionen die Integrale $\Phi_{p,m}(\xi)$ wegen der damit verbundenen höheren bzw. tieferen Potenzen in r bei niedrigen Ordnungen m nur um geringe Beträge unterscheiden.

[6]) Diesen Hinweis verdanke ich A. W. Quick.
[7]) Ernsthausen und Willms, Ak. Z. Bd. 4 (1939), Nr. 1.




Bild 3. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0,7$, $m = 2$.

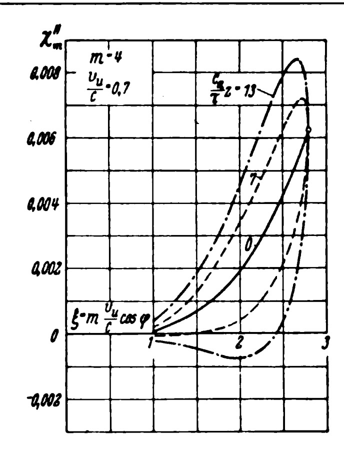


Bild 4. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0,7$, $m = 4$.

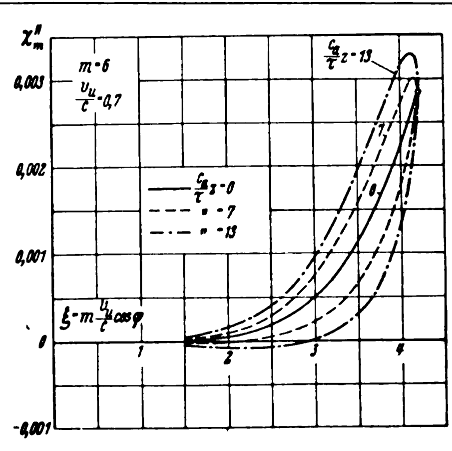


Bild 5. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0,7$, $m = 6$.

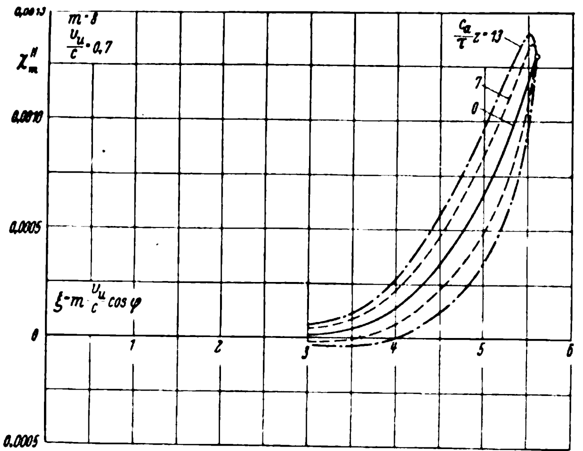


Bild 6. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0,7$, $m = 8$.

6. Ergebnisse der numerischen Auswertung.

Mit Hilfe der bereits berechneten Integrale $\Phi_{1,m}(\xi)$ und $\Phi_{2,m}(\xi)$ (Gl. (5)), wurden die Richtfunktionen $\chi''_m(\varphi)$ der Gl. (15), welche die Form des Schallfeldes beschreiben und die für die Schalleistung charakteristische Strahlungsfunktion $\varkappa^4 S''_m(x)$ nach Gl. (22) ermittelt.

In Bild 3 bis 6 sind die Richtfunktionen in Abhängigkeit von $\xi = m \frac{v_u}{c} \cos \varphi$ für die Umfangsgeschwindigkeit $v_u/c = 0,7$ und für drei Werte des Auftriebsparameters $\frac{\bar{c}_a}{\tau} z = 0, 7, 13$ dargestellt.

Aus den Kurven entnehmen wir, daß mit steigender Ordnung m, also zunehmender Obertonordnung oder Blattzahl, der Einfluß der Anstellung bei gleichzeitigem Ansteigen der Richtschärfe verschwindet. Ein Anwachsen der Auftriebsbeiwerte verschiebt das Hauptmaximum der Richtcharakteristik mehr und mehr hinter die Schraubenebene und spaltet schließlich die Polarkurve völlig auf.

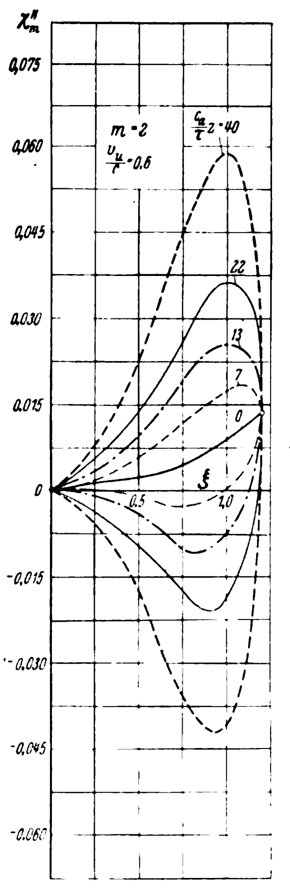


Bild 7. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 0,6$.

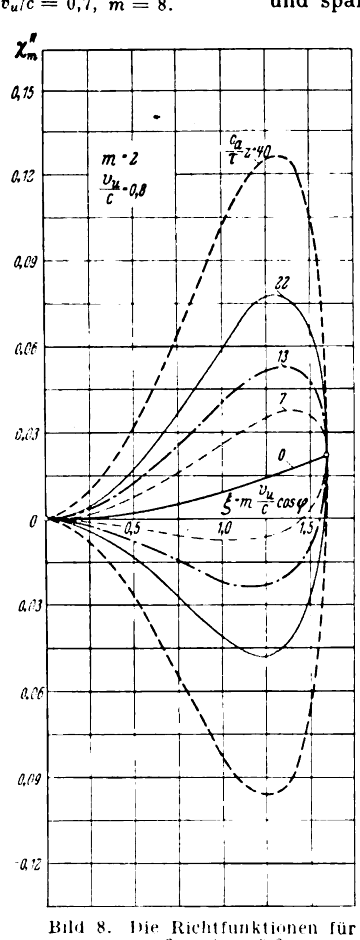


Bild 8. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 0,8$.

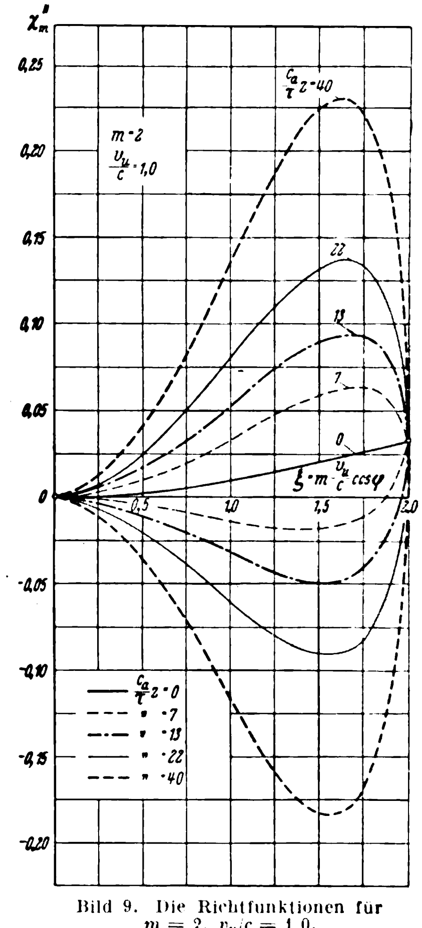


Bild 9. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 1,0$.



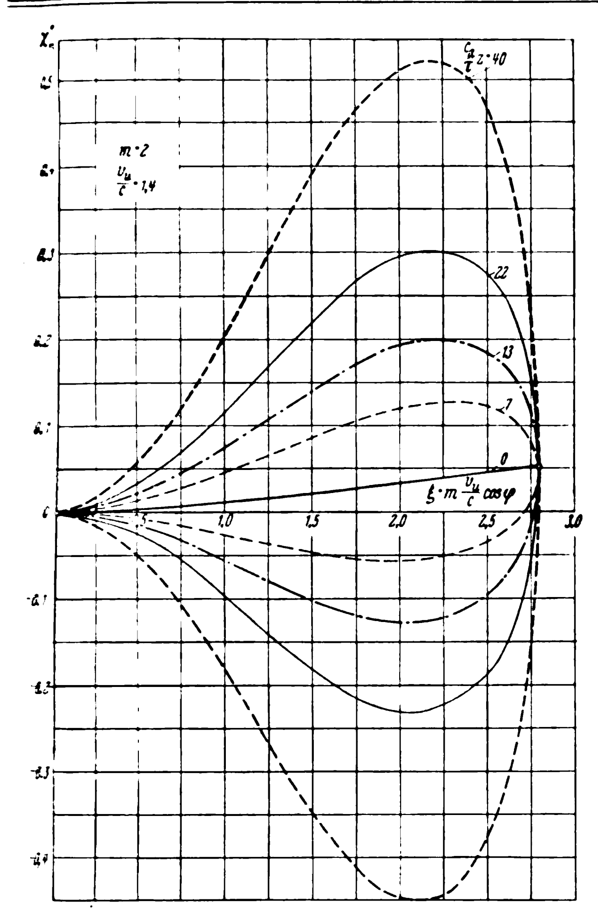


Bild 10. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 1{,}4$.

Die Richtfunktionen, Bild 7 bis 10, wurden für $m = 2$ und für die Werte der Umfangsgeschwindigkeit $v_u/c = 0$, 6, 0,8, 1,0, 1,4 und des Auftriebsparameters $\frac{\overline{c}_a}{\tau} z = 0$, 7, 13, 22, 40 berechnet.

Diese Darstellung zeigt uns eine starke Zunahme des Strahlungspotentials und, wenn man die Ordinatenmaßstäbe vergleicht, auch der Richtschärfe mit steigender Umfangsgeschwindigkeit und c_a-Werten. Aus den Richtfunktionen bestimmen sich nach Gl. (22) die Strahlungsfunktionen. Sie lassen sich wegen der Rotationssymmetrie des Schallfeldes durch die auf die Abszisse bezogenen statischen Momente der von den $\chi_m''(\xi)$-Kurven umschriebenen Flächen darstellen.

Bild 11 enthält die Funktionen $\varkappa^4\ S_m''(x)$ für $\frac{\overline{c}_a}{\tau} z = 0{,}7$, 13; $m = 2$, 4, 6, 8; $0{,}6 \leq v_u/c \leq 1{,}4$.

Die dünnen Querlinien verbinden Werte gleicher Umfangsgeschwindigkeit und geben daher den Verlauf der Strahlungsspektren an, welchen man entnimmt, daß hochtourige Schrauben ihre Energie vorwiegend in den höheren Teiltönen und Langsamläufer in den Grundtönen abstrahlen.

Dies hat seinen physikalischen Grund darin, daß der Strahlungswiderstand bei großen Umfangsgeschwindigkeiten stärker ansteigt als das Teiltonspektrum eines Elementarstrahlers abnimmt.

Da der Energieinhalt der Vorgänge endlich sein muß, nimmt bei großen Umfangsgeschwindigkeiten die Amplitude der hohen Teiltöne schließlich ab, wofür der spektrale Charakter des erregenden Potentialstoßes und der Grenzwert des Strahlungswiderstandes verantwortlich ist.

Der Einfluß der Blattzahl und der Teiltonordnung auf den durch den Auftrieb bewirkten Anteil der Strahlungsleistung läßt sich an Hand von Bild 11 beurteilen.

Die Darstellung gewährt auch einen Einblick in den theoretischen Aufbau des ganzen Strahlers. Da mit jeder Ordnungszahl eine eigene Strahlungsfunktion verknüpft ist, kann man die Luftschraube als einen Strahler von allgemeinstem Typus ansprechen, dessen Potential durch eine Funktionenreihe von steigender Gliederzahl m darstellbar ist. Sie unterscheidet sich jedoch von den bekannten Strahlergebilden, welche in jeder Ordnung vom ganzen Spektrum des aufgeprägten Vorganges erregt werden können dadurch, daß jede Ordnung nur die zu ihr gehörige Teilschwingung abstrahlen kann. Der mit der Drehzahl umlaufende Schwingungszustand ist daher durch die Zahl $2\,m$ seiner radialen Knotenlinien gekennzeichnet.

Es wird darauf hingewiesen, daß die höchsten Werte der Strahlungsfunktion für das angestellte Profil auf die in Gl. (12) eingeführte Unabhängigkeit des Auftriebsbeiwertes von der Machschen Zahl zurückzuführen ist. In Wirklichkeit verschwindet bei großen Machschen Zahlen (> 1) die Zirkulation, so daß die Kurven für den angestellten Flügel in die des nichtangestellten übergehen.

7. Formelzeichen.

A	Luftkraft nach Gl. (10),
F_s	Schraubenfläche (πR^2),
H	Parameter der Anstellung nach Gl. (16),
J_m	Besselsche Funktionen,
N_L	Mechanische Luftschraubenleistung,
N_m	Strahlungsleistung
P	Axialdruck nach Gl. (9),
R	Schraubenradius,
R_∞	Aufpunktsabstand vom Schraubenmittelpunkt,
S_{II}	Schraubenschub nach Gl. (26),
$\varkappa^4 S_m''$	Strahlungsfunktion,
U_m	mittlere Normalgeschwindigkeit der Schraubenfläche,
Γ	Zirkulation,
Φ	Geschwindigkeitspotential,
$\Phi_{p,m}$	Integrale nach Gl. (5),
b	Blattbreite,
c_a	Auftriebsbeiwert,
c	Schallgeschwindigkeit,
d	Blattdicke,
$f(t)$	Zeitfunktion,
j	$\sqrt{-1}$,
k_{II}	Konstante nach Gl. (25a),
k_l''	Leistungszahl nach Gl. (24),
k_m	Fourierkoeffizient,
k_s	Schubzahl nach Gl. (26),
m	Ordnung der Richt- und Strahlungsfunktionen,
n	Normale,
p	ganzz. positiver Exponent nach Gl. (5),
p_m	Schalldruck,
r	Radiale Koordinate,
r_s	Strahlungswiderstand,
t	Zeit,
u_m	Schnelle,
v	Translatorische Schraubengeschwindigkeit,
v_u	Schraubenumfangsgeschwindigkeit (ωR),
x	Unabhängige Variable nach Gl. (1) und (5),
z	Blattzahl,
α	Drehwinkel,
δ	$= d/R$,
η_m	mechanisch-akustischer Wirkungsgrad,
ϑ	Zeitfaktor nach Gl. (4),
$\varkappa$	Argument der Strahlungsfunktion,
ν	Ordnungszahl der Harmonischen,
ξ	Argument von $\Phi_{p,m}$ nach Gl. (5),
ϱ	Luftdichte,
τ	$= d/b$,
φ	Winkel zwischen Aufpunktsgeraden und Schraubenebene,
χ_m''	Richtfunktion,
ψ	Strahlerpotential,
ω	Winkelgeschwindigkeit der Luftschraube, Kreisfrequenz der ersten Harmonischen des Elementarstrahlers,
β	geometrischer Anstellwinkel.

Bild 11. Die Strahlungsfunktionen.

C. Versuche.

1. Die untersuchten Schrauben.

Zum Vergleich mit der Theorie wurden an 10 Modellluftschrauben mit symmetrischen NACA-Profilen und drei verschiedenen Dickenverhältnissen (Bild 12) Schallfeld- und Strahlungsleistung für v_u/c = 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,2, 1,3 bestimmt.

Die Schrauben — wir wollen der Einheitlichkeit halber auch von »Schrauben« sprechen, wenn der Anstellwinkel Null ist — wurden, da sie nur für Standmessungen vorgesehen waren, ohne Steigung, jedoch mit konstantem Anstellwinkel und in durchweg gleicher Form und Größe (Durchmesser 30 cm) ausgeführt.

Die Flügelform (Bild 13) ergibt sich aus der geforderten konstanten Querschnittsbelastung.

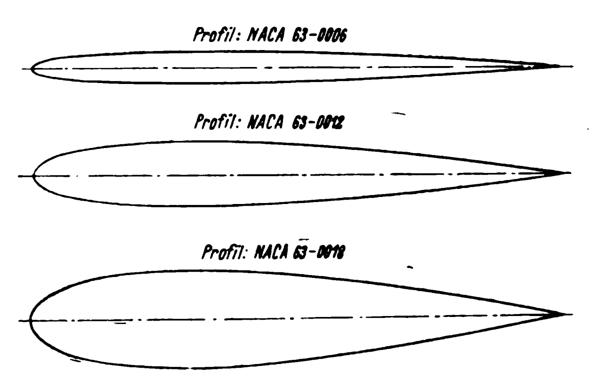


Bild 12. Die für die Modellschrauben verwendeten Profile.

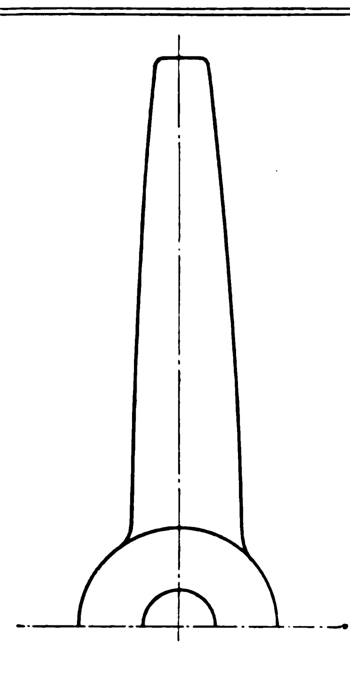


Bild 13. Die Flügelform der Modellschrauben.

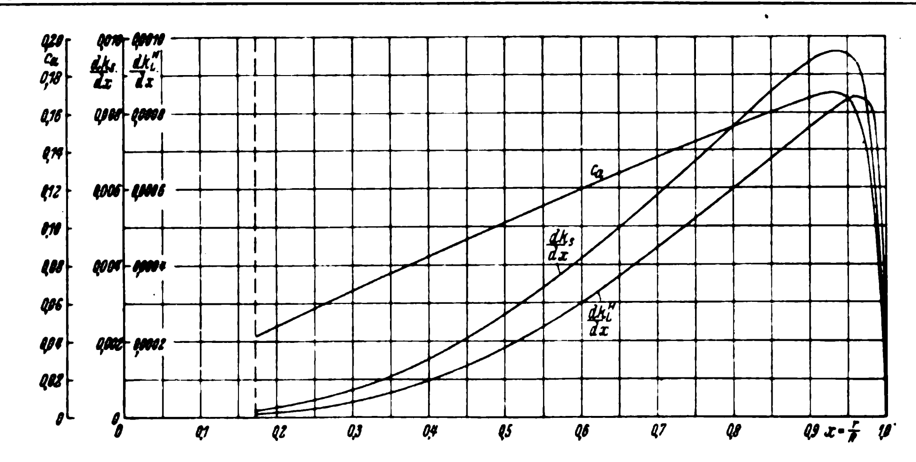


Bild 14. Die Schub- und Leistungsverteilung über dem Radius.

Als Material wurde die Leichtmetallegierung Bondur 17/11 VN mit einer Zerreißfestigkeit von etwa 50 kg/mm² verwendet.

Folgende Schrauben wurden untersucht:

	Nr.	Profil NACA	geom. Anstellwinkel β
2 Flügel	1	63—0006	0°
	2	—0012	0°
	3	—0018	0°
	4	—0012	2°
	5	—0006	4°
	6	—0012	4°
	7	—0018	4°
	8	—0012	8°
	9	—0012	12°
4 Flügel	10	—0012	4°

Für die Schraube Nr. 6 wurde die radiale Schub- und Leistungsverteilung berechnet, wobei die im NACA-Report Nr. 460 mitgeteilten Messungen des Auftriebsbeiwertes bei kleinen Machschen Zahlen zugrunde gelegt wurden[8]). Es ergaben sich die Leistungszahl

$$k_l^H = \frac{N_L}{\varrho/2\, v_u^3 F_s} = 2{,}81 \cdot 10^4 \quad . \quad (24\text{a})$$

und die Schubzahl

$$k_s^H = \frac{S_H}{\varrho/2\, v_u^2 F_s} = 3{,}57 \cdot 10^{-3} \quad . \quad (26)$$

In Bild 14 sind die Funktionen $c_a(x)$, $\frac{d\,k_s^H}{d\,l}(x)$ und $\frac{d\,k_l^H}{d\,l}(x)$ für $x = r/R$ dargestellt.

Mit Hilfe der Leistungszahlen ermitteln wir den akustisch-mechanischen Wirkungsgrad dieser Schraube nach Gl. (25a) und (25b):

$$\eta_m \approx 0{,}555\, \nu\, \varkappa\, S_m^H(x).$$

In Bild 15 ist η_m für die ersten vier Harmonischen in Abhängigkeit von v_u/c aufgetragen. Danach werden bei $v_u/c = 1{,}0$ einige Promille und bei $v_u/c = 1{,}2$ einige Prozent der mechanischen Luftschraubenleistung in Schall umgesetzt. In Wirklichkeit sind die Schalleistungen bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten, wie die Messungen zeigen, noch größer.

Die Schrauben Nr. 1, 2 und 3 (ohne Anstellung) neigen durchweg zu Biege- und Torsionsschwingungen, welche durch den Antrieb für Werte von $v_u/c > 0{,}8$ an erregt werden können. Infolge der mit der Drehzahl zunehmenden Steifigkeit ziehen sich die Schwingungsgebiete über den ganzen Drehzahlbereich hin. Die an diesen drei Schrauben erhaltenen Ergebnisse sind daher nicht verbindlich. Als Ersatz können die Schrauben Nr. 4 und 7 angesehen werden, da sich bei einer Dicke von 12% ein Anstellwinkel von 2° und bei einer Dicke von 18% ein solcher von 4° durch die akustische Messung kaum erfassen läßt. Schrauben mit

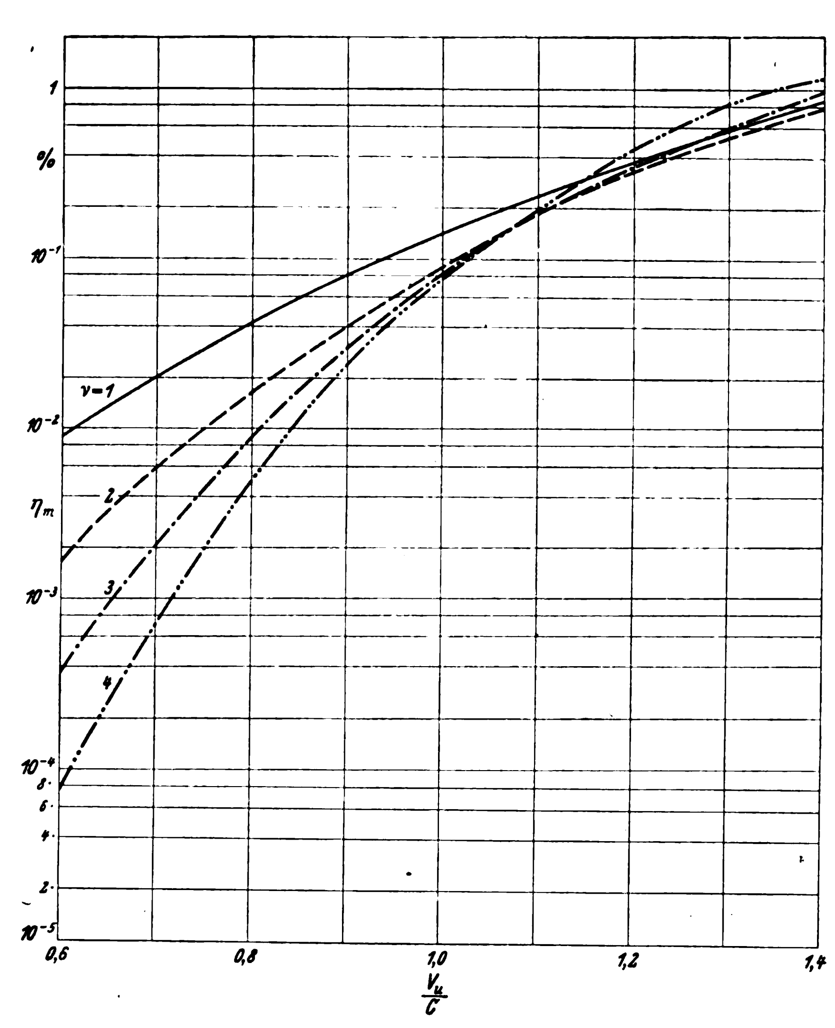


Bild 15. Der berechnete akustisch-mechanische Wirkungsgrad der Schraube Nr. 6.

[8]) Hierfür bin ich H. Seyffert zu Dank verpflichtet.

guter Wirkung der Anstellung können daher mit diesen, ohne nachweisbaren Zirkulationseffekt umlaufenden, Schrauben verglichen werden.

2. Meßverfahren.

Die zu untersuchende Schraube befindet sich mit ihrem Antriebsmotor[9]) in einem schallgedämpften Raum. Die gesamte Anordnung kann von außen mit einem Handrad meßbar um den Schraubenmittelpunkt gedreht werden. Über die Drehorgane ist ein Polarkurvenschreibgerät derart mit der Schraube gekuppelt, daß jedem Schraubenwinkel, bezogen auf den Mikrophonort, die gleiche Winkelstellung des Schreibgerätes zugeordnet ist.

Der dem Schalldruck proportionale Mikrofonstrom wird über eine Suchtonanalysiervorrichtung dem Lichtzeigerinstrument zugeleitet, so daß die Auslenkung des Lichtpunktes auf dem Zeichenschirm der Größe des am Suchtongenerator eingestellten Teiltones entspricht. Dreht man bei feststehendem Mikrophon mit Hilfe des Handrades die Schraube um ihren Mittelpunkt, so beschreibt der Lichtpunkt des im Polarkurvenschreiber mitgedrehten Lichtzeigerinstrumentes die Teiltonrichtcharakteristik, welche photographisch registriert oder einfacher, auf Polarkoordinatenpapier mitgezeichnet werden kann.

Mit einer der Meßanordnung angepaßten Eichdruckkammer wird das Mikrophon über Suchtonanalyse und Verstärker für eine Frequenz absolut in μb/cm Lichtzeigerausschlag geeicht. Da der relative Frequenzgang des Mikrophons bis 10000 Hz nur unwesentlich schwankt, wird die Beziehung zwischen diesem Eichwert und dem jeweiligen Meßwert durch ein veränderliches in Neper geeichtes Dämpfungsglied hergestellt. Der Fehler der Schallfeldmessung liegt unter 5%.

Der Motor wird durch Fernsteuerung von einem Schaltpult aus über seine in der elektrischen Zentrale befindlichen Hintermaschinen[10]) angelassen und geregelt.

Die Schraubendrehzahl muß sehr genau bestimmt werden. Dies geschieht mit einem durch die Motorwelle betätigten Frequenzgeber in Verbindung mit dem AEG Frequenzmesser.

Der Felddruckverlauf in der Nähe des Schraubenflügels wurde mit einem kleinen kugelförmigen Kondensatormikrophon (Membrandurchmesser 6 mm) untersucht (Bild 16).

Das Bild 17 zeigt das Schema der Meßanordnung, Bild 18 den Meßraum mit Schaltpult, Polarkurvenschreiber, Handrad, Beobachtungsfenster und Eichdruckkammer, und Bild 19 den Absorptionsraum mit Schraube und Mikrophon.

Beim Aufbau der Meßanordnung mußten noch einige Schwierigkeiten beseitigt werden, die z. T. aus der Eigenart des zu analysierenden Frequenzgemisches folgten. Das unvermeidliche Durchschlagen des Suchtones ruft hinter dem am Modulatorausgang liegenden Bandpaß eine die Anzeige fälschende Spannung hervor, die nur durch steile Filterflanken und große Sperrdämpfung vermieden werden kann.

Da bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten die Teiltonenergie mit zunehmender Ordnung ansteigt, muß zur Anzeige der tiefen Komponenten die Verstärkung u. U. soweit erhöht werden, daß durch die hohen Teilfrequenzen der Modulator übersteuert und damit das Ergebnis unbrauchbar werden kann. Eine Beseitigung ist durch eine hinter dem Mikrophonverstärker erfolgende grobe Vorsiebung mit Hilfe eines veränderlichen Bandfilters (Oktavsieb) möglich.

Für das der Auswahl der Summenfrequenzen dienende elektrische Filter wurde bei einer mittleren Durchlaßfrequenz von 11000 Hz eine Bandbreite von 200 Hz vorgesehen, da bei schmaleren Filtern die von den Drehzahlschwankungen des Antriebes herrührenden Frequenzänderungen der höchsten Teiltöne während der Aufnahme einer Richtkurve keinen ruhigen Lichtzeigerausschlag zuließen.

[9]) Wassergekühlter Induktionsmotor, 30000 U/min, 32 PS, Bauart AVA-Göttingen.
[10]) Leonardsatz und 500 Perioden-Generator.



Bild 16. Die Messung des Felddruckverlaufes.

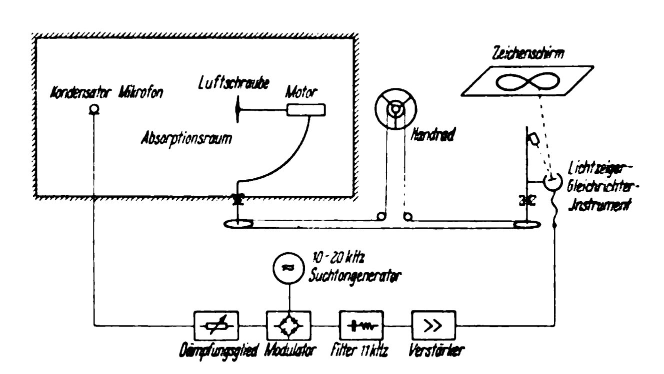


Bild 17. Das Schema der Meßanordnung.

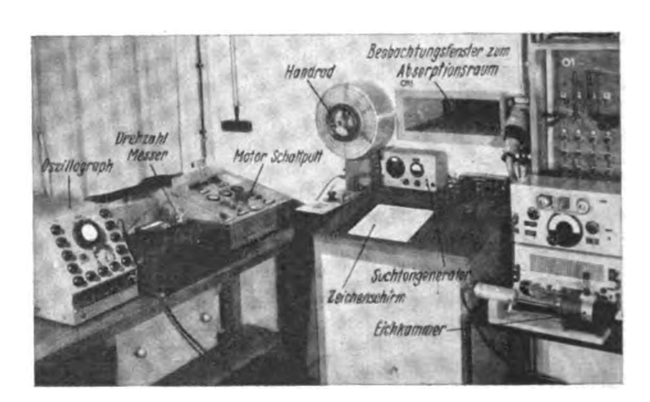


Bild 18. Der Meßraum.

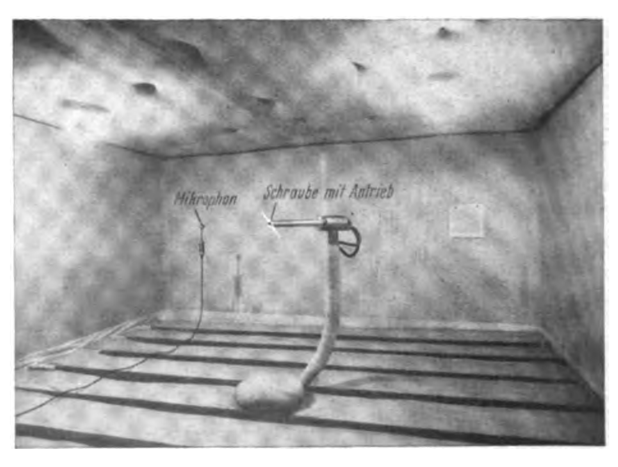


Bild 19. Der Absorptionsraum mit Luftschraube und Mikrophon.



3. Die Meßergebnisse, Vergleich mit der Theorie.

Um den Einfluß der Strahlungseigenschaften beurteilen zu können, wurden an der Schraube Nr. 4 der Felddruck abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit analysiert (vgl. Bild 1). Die Messung läßt sich nicht einwandfrei durchführen, da in allzu großer Blattnähe sowohl die Feldstörung durch das Mikrophon selbst als auch die bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten auftretenden steilen Druckfronten eine Überbewertung der hohen Komponenten bewirken. Der umgekehrte Fehler tritt ein bei zu großen Abständen wegen der Verbreiterung des Druckstoßes auf. Als günstigster Abstand im Hinblick auf die Abmessungen des Flügels und des Mikrophonkörpers wurde 2,5 cm bei 0,8 R gewählt. Die Darstellung der Ergebnisse für v_u/c-Werte von 0,4 bis 0,9 in Bild 20 zeigt eine befriedigende Übereinstimmung mit Gl. (2a), nach welcher für die ersten Ordnungen etwa gleich große Amplituden zu erwarten sind.

Die aufgenommenen Polarkurven stellen in Verbindung mit der Druckeichung die Schallfeldverteilung rings um die Schraube dar. Die Schraubenebene liegt bei 0°. Bild 21a enthält die gemessenen und Bild 21b die nach Gl. (18b) berechneten Richtkurven für eine Schraube ohne Anstellung. Die beigefügten Schalldruckeichwerte geben die absoluten Unterschiede an. Mit steigender Teiltonordnung nimmt die Richtschärfe zu.

In der gleichen Weise zeigen Bild 22a und 22b die gemessenen und berechneten Kurven einer angestellten Schraube. Durch die axiale Wirkung der Zirkulation entsteht eine Aufspaltung der Polarkurve des Grundtones, welche mit zunehmender Ordnung wegen der gegenseitigen Beeinträchtigung der Zirkulationsteilströmungen verschwindet[11]). Die gemessene Kurve zieht nicht ganz wie die theoretische auf Null ein, was der wirklichen, in die Rechnung nicht eingegangenen, radialen c_a-Verteilung zuzuschreiben ist. Das gegen die Flugrichtung zurückgeneigte Hauptmaximum stellt sich bei hohen Obertönen immer mehr in die Schraubenebene.

[11]) Vgl. Gl. (8).

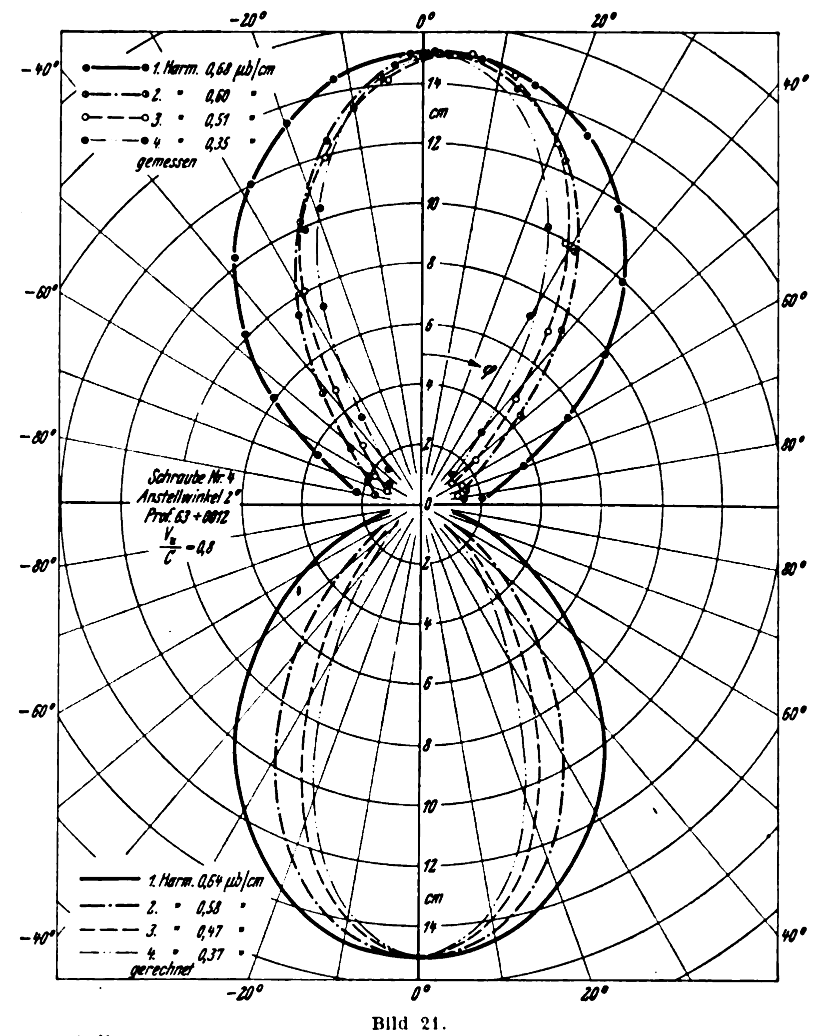


Bild 21.
a) die gemessene,
b) die berechnete Schalldruckverteilung der Schraube Nr. 4 für v_u/c = 0,8.

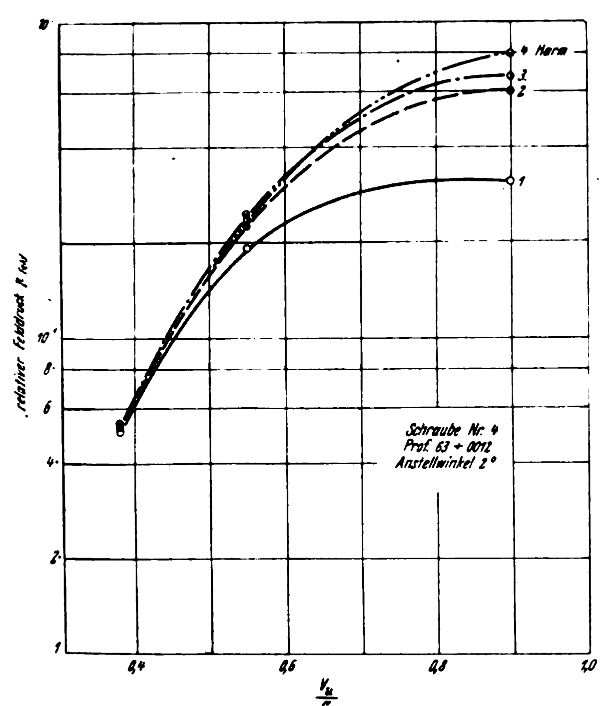


Bild 20. Felddruckanalysen der Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.

Die Umfangsgeschwindigkeit bewirkt eine Verformung der Polarkurve. Vergleicht man die gemessene Grundtonverteilung für v_u/c-Werte von 0,6 bis 1,2 (Bild 23), so bemerkt man ein Maximum der Zirkulation bei $v_u/c = 0{,}9$. Diese verschwindet, wenn die Umfangsgeschwindigkeit den Wert der Schallgeschwindigkeit erreicht hat. Bei noch höheren Geschwindigkeiten verbreitert sich die Richtkurve durch Interferenz, was einem starken Anwachsen der Strahlungsleistung gleichkommt.

Der in Bild 24a für die Schraube Nr. 4 durchgeführte Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Schalldrücken im Hauptmaximum der Polarkurve zeigt den Gültigkeitsbereich der Theorie, welche von etwa $v_u/c = 0{,}9$ ab wegen der nichtberücksichtigten Kompressibilität zu kleine Werte ergibt.

Setzt man den als Funktion von v_u/c gemessenen Schalldruck ins Verhältnis zu dem bei den gleichen Betriebszuständen bestimmten Felddruck, indem man willkürlich an der Stelle $v_u/c = 0{,}9$ beide Größen einander gleich setzt, so erhält man ein anschauliches Bild vom Einfluß der Strahlungseigenschaften auf den Verlauf der lokalen Erregung der Luft (Bild 24b).

Aus den Richtkurven ermitteln wir die Schalleistung durch Bildung des Integrals

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_m^2(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_m^2(\varphi) \, d(\sin\varphi).$$

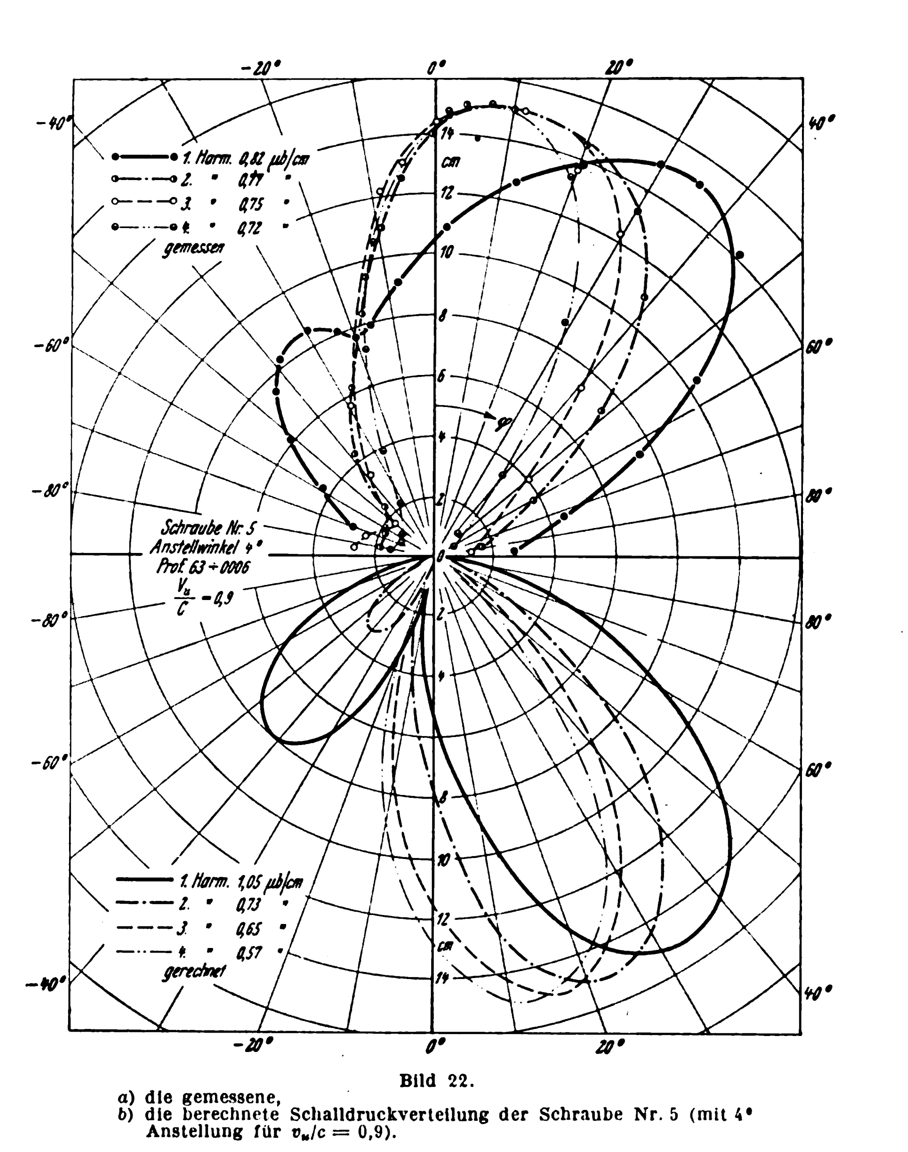


Bild 22.
a) die gemessene,
b) die berechnete Schalldruckverteilung der Schraube Nr. 5 (mit 4° Anstellung für $v_u/c = 0,9$).

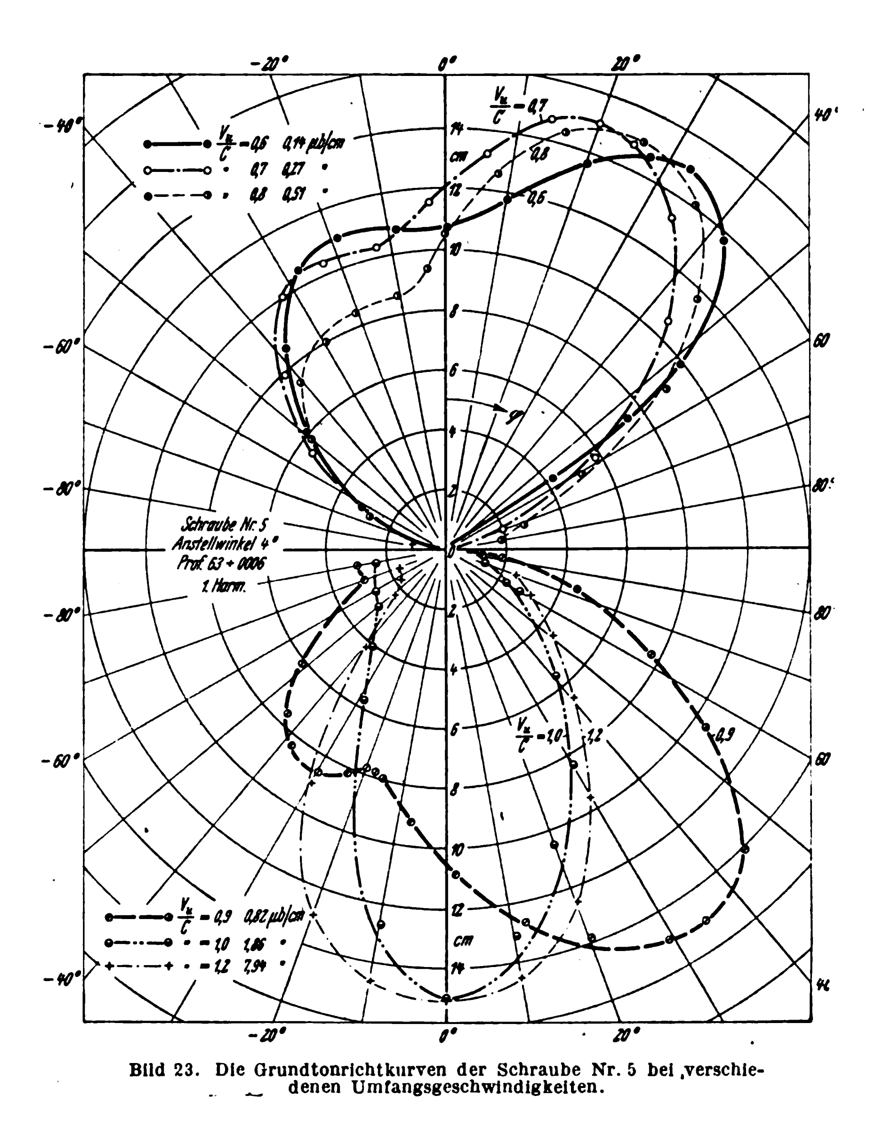


Bild 23. Die Grundtonrichtkurven der Schraube Nr. 5 bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten.

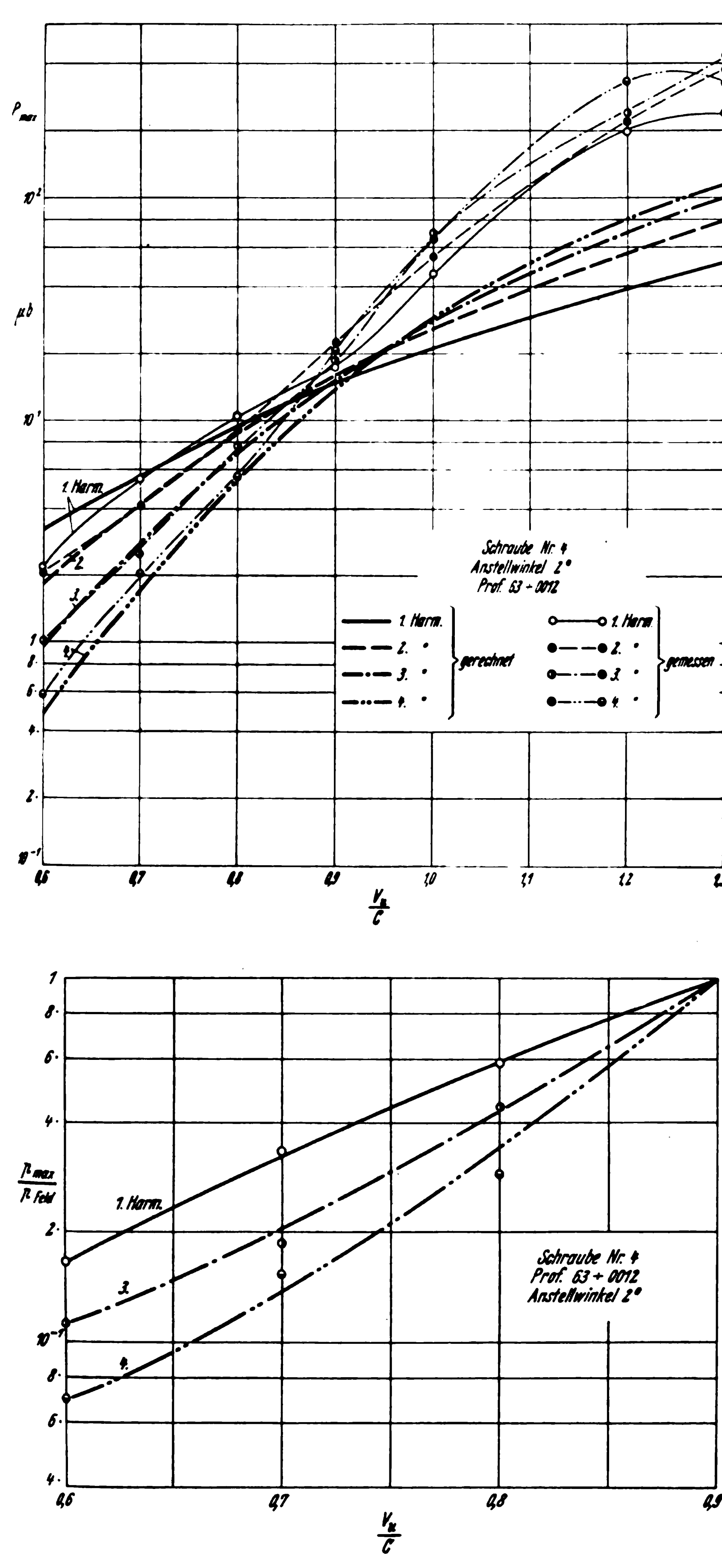


Bild 24.

a) Die gemessenen und berechneten maximalen Schalldrücke der Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.
b) Das Verhältnis von Schall- und Felddruck für die Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.

Zweckmäßig überträgt man die gemessenen Polarkurven auf Sinuspapier und bestimmt deren Fläche mit einem Quadratplanimeter[12]).

Nach Gl. (21b) und Bild 11 lassen sich nun die Leistungsfunktionen bei bekannten Werten des Fourierfaktors und der Blattdicke berechnen. Sie wurden gemeinsam mit den gemessenen Werten (Watt) in Bild 25 und 26 aufgetragen. Sowohl die Ergebnisse an der nichtangestellten als auch die an der normal angestellten Schraube stimmen mit der Theorie bis etwa zur Machschen Zahl 0,9 überein. Die Abweichungen im Grund- und ersten Oberton bei $v_u/c = 0,6$ können nicht erklärt werden, sie sind jedoch reell, da sie mehrfach gemessen wurden. Es ergibt sich, daß das Spektrum der angestellten Schraube nach dem Grundton zu stärker ansteigt.

In Bild 27 ist die rechnerisch bestimmte Schalleistung der ersten und vierten Harmonischen sowie die Summe der Leistungen der ersten vier Harmonischen in Watt, abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit, dargestellt. Die Meßwerte sind als Punkte eingetragen. Die vierte Harmonische nimmt wegen des steileren Ganges ihres Strahlungswiderstandes stärker als der Grundton zu.

Einen ähnlichen Verlauf finden wir in Bild 28, wo für konstante Winkel von 4° die Leistungswerte dreier Schrauben aufgetragen sind, deren Dicken sich wie 1:2:3 verhalten. Der Einfluß der Anstellung verursacht das Ausbiegen der Grundtonkurven nach höheren Werten, welche von $v_u/c = 0,9$ ab wieder in einen glatten Verlauf übergehen. In den Kurven für die vierten Harmonischen bleibt der durch die Anstellung bewirkte Leistungszuwachs klein. Die gemessene Leistung nimmt mit dem Quadrat der Blattdicke zu (vgl. Gl. (21b)). Die Grundtonkurven zeigen das gleiche Verhalten erst bei Umfangsgeschwindigkeiten, für welche die Zirkulation Null wird, da die verschiedenen Dicken bei gleichem Anstellwinkel einen ungleichen Leistungszuwachs ergeben.

Eine bessere Beurteilung des Blattdickeneinflusses ermöglichen die Summenkurven der ersten 8 Harmonischen im Bild 29. Hier gleichen sich die partiellen Störungen aus. Auch die weniger zuverlässigen Ergebnisse für den Anstellwinkel Null bestätigen den vorausgesagten quadratischen Zusammenhang zwischen Profildicke und Strahlungsleistung.

Die schon mehrfach hervorgetretene Wirkung der Anstellung ist zusammenhängend in den Darstellungen der Leistungskurven für vier Schrauben gleicher Dicke und mit verschieden großem Anstellwinkel zu erkennen, und zwar in Bild 30a für die erste und vierte Harmonische und in Bild 30b

[12]) Firma A. Ott, Kempten.

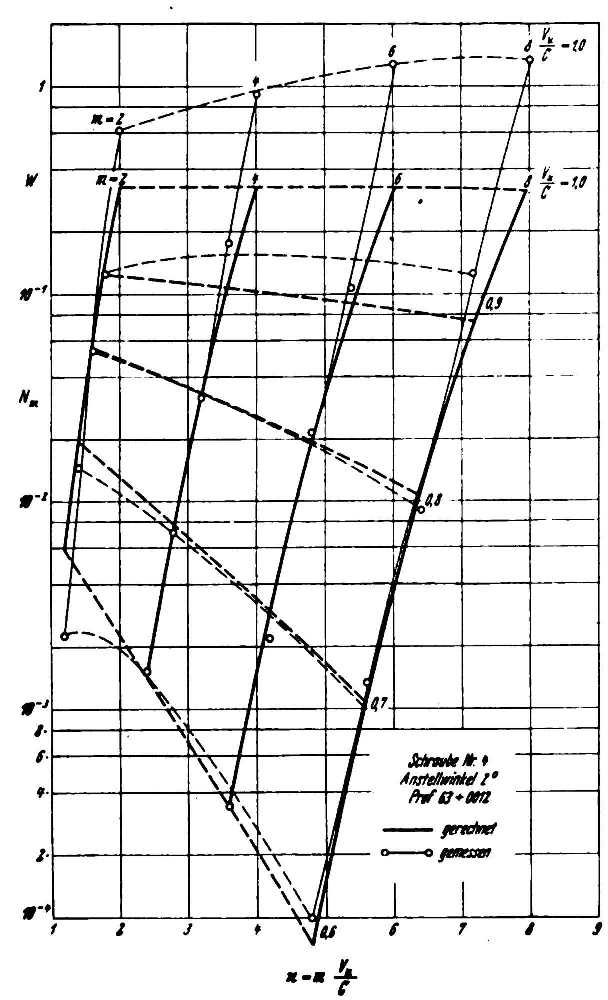


Bild 25. Gemessene und berechnete Schalleistung der Schraube Nr. 4.

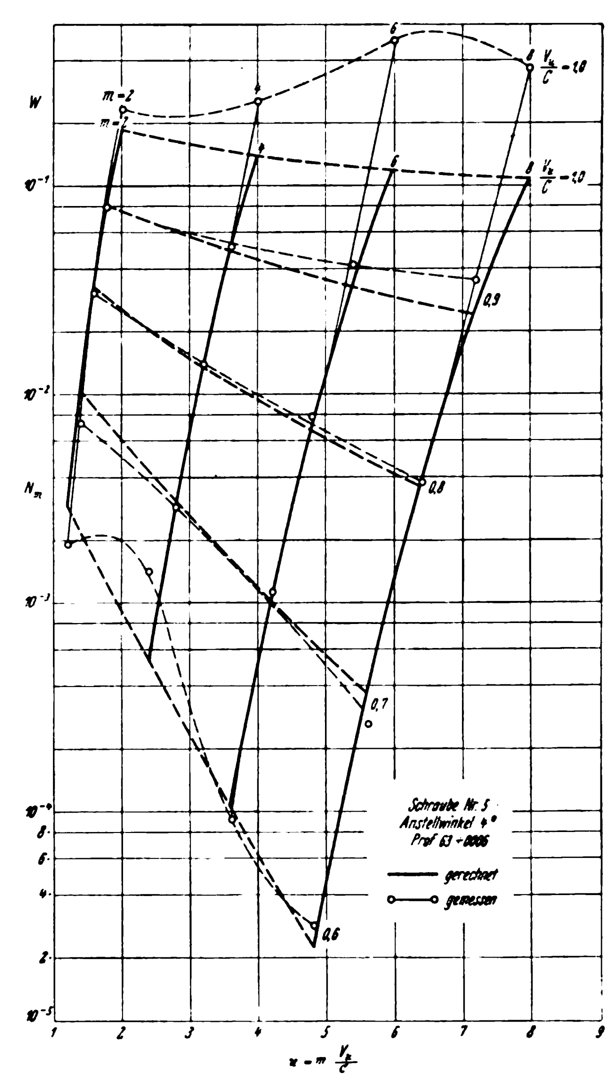


Bild 26. Berechnete und gemessene Schalleistung der Schraube Nr. 5.

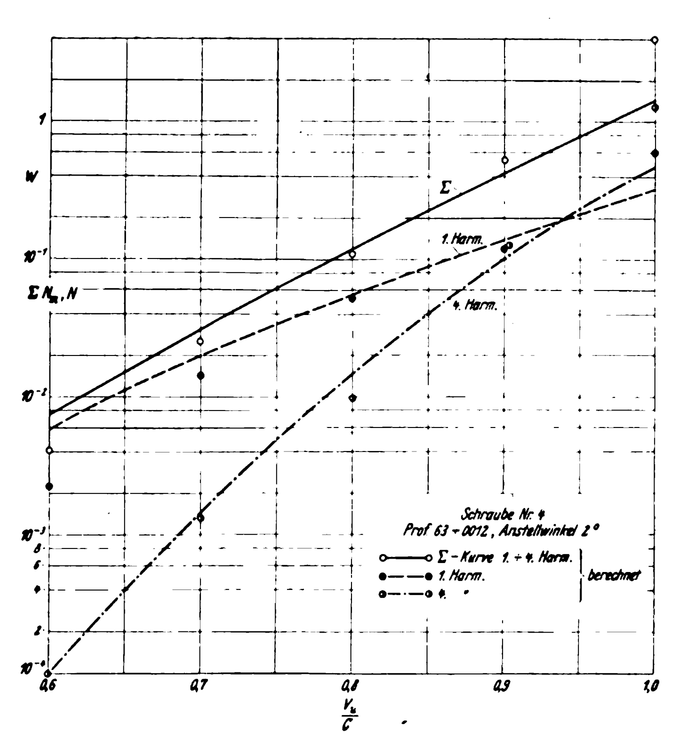


Bild 27. Die Schalleistung der Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit für die erste Harmonische, vierte Harmonische und für die Summe der ersten vier Harmonischen. Punkte bedeuten Meßwerte.

für die Summe der ersten bis achten Harmonischen. Während die Grundtonkurven für $\beta = 2$, 4 und 8° nach dem Verschwinden des Zirkulationseinflusses fast in eine einzige Kurve übergehen, ergibt die 12°-Schraube unverhältnismäßig hohe Werte. Dies ist — und das beweisen auch die Summenkurven in Bild 30b, in welchen die Wirkung der Anstellung kaum mehr erscheinen kann — durch das Abreißen der Strömung bei hohen Geschwindigkeiten zu erklären, was dem Verhalten eines dickeren Profils entspricht.

Vergleicht man noch einmal Bild 27 und 30b, so kann man feststellen, daß die Schalleistung des Grundtones etwa mit der 7,5., die der vierten Harmonischen mit der 14. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit ansteigt. Die Summe der Schalleistung der ersten vier Harmonischen wächst mit der 10. Potenz. Mittelt man über die Leistungskurven aller Anstellwinkel, so findet man für die Leistungssumme der ersten 8 Harmonischen die 14. Potenz. Der Schalldruck geht mit den halben Exponenten. Über den Wert $v_u/c = 1$ hinaus fallen die Kurven etwas ab.

Trägt man für die Schrauben gleicher Dicke das Verhältnis der Schalleistungen mit und ohne Anstellung auf, wie in Bild 31 geschehen, so ergeben sich Kurven ähnlich den aus der Aerodynamik bekannten Auftriebsfunktionen.

In Bild 32 ist ein Vergleich einer 2- und einer 4-Blattschraube durchgeführt. Unterhalb von $v_u/c = 0{,}8$ ist die gesamte von der 4-Blattschraube abgegebene Schalleistung kleiner als die der 2-Blattschraube. Da beide Schrauben gleichen Anstellwinkel besitzen, so ist, auf gleiche aerodynamischer Leistung bezogen, der Unterschied noch wesentlich größer.

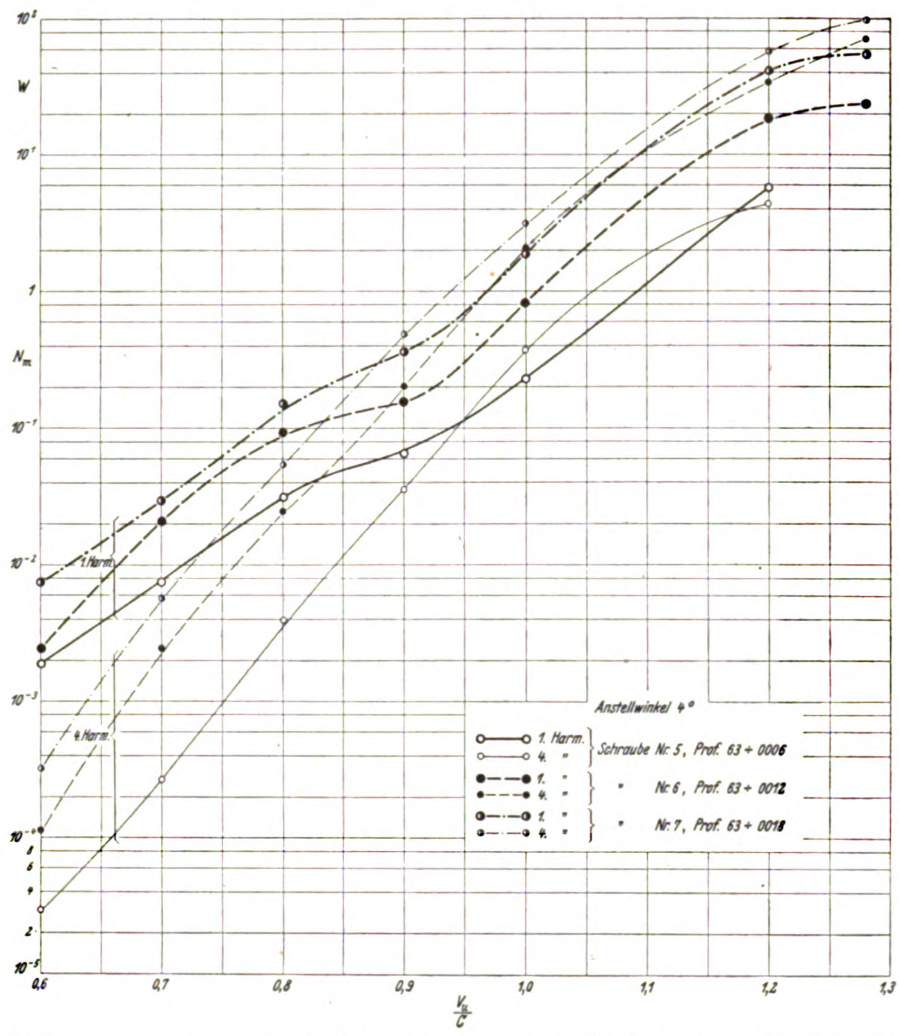


Bild 28. Die Schalleistung der ersten und vierten Harmonischen bei drei verschiedenen Blattdicken (Schraube Nr. 5, 6 und 7).

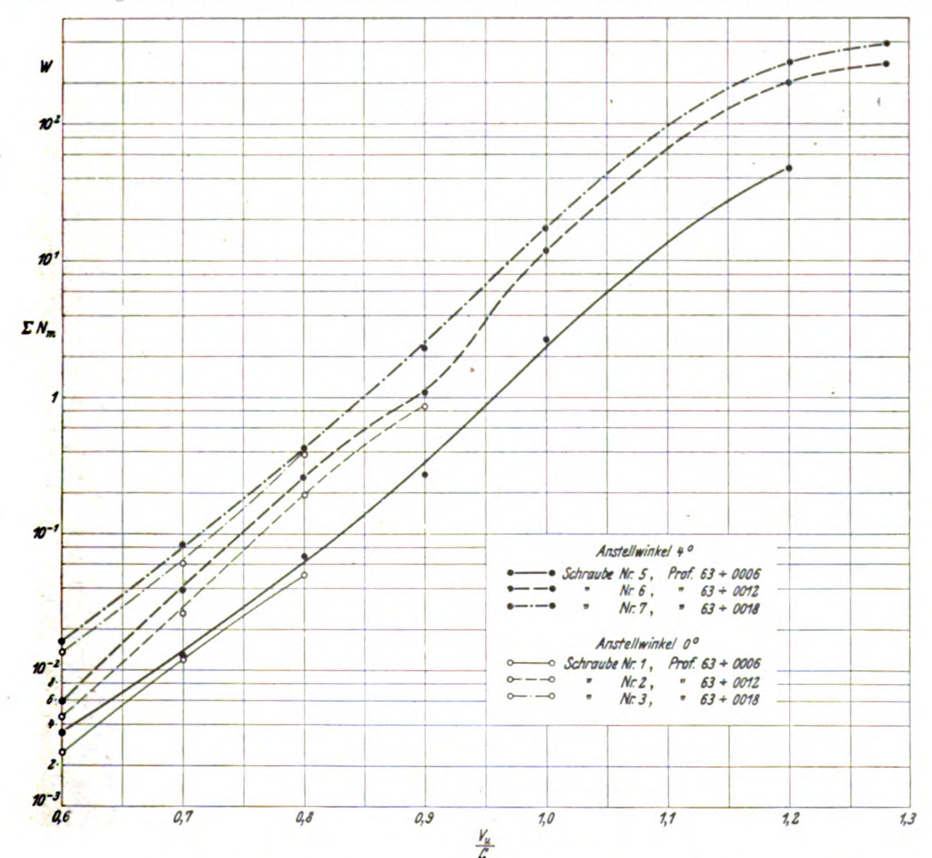


Bild 29. Die Summenschalleistung der ersten 8 Harmonischen bei drei verschiedenen Dicken.

Bild 30.

a) Die Schalleistung der ersten und vierten Harmonischen für 4 verschiedene Anstellwinkel.

b) Die Summenschalleistung der ersten 8 Harmonischen für 4 verschiedene Anstellwinkel.



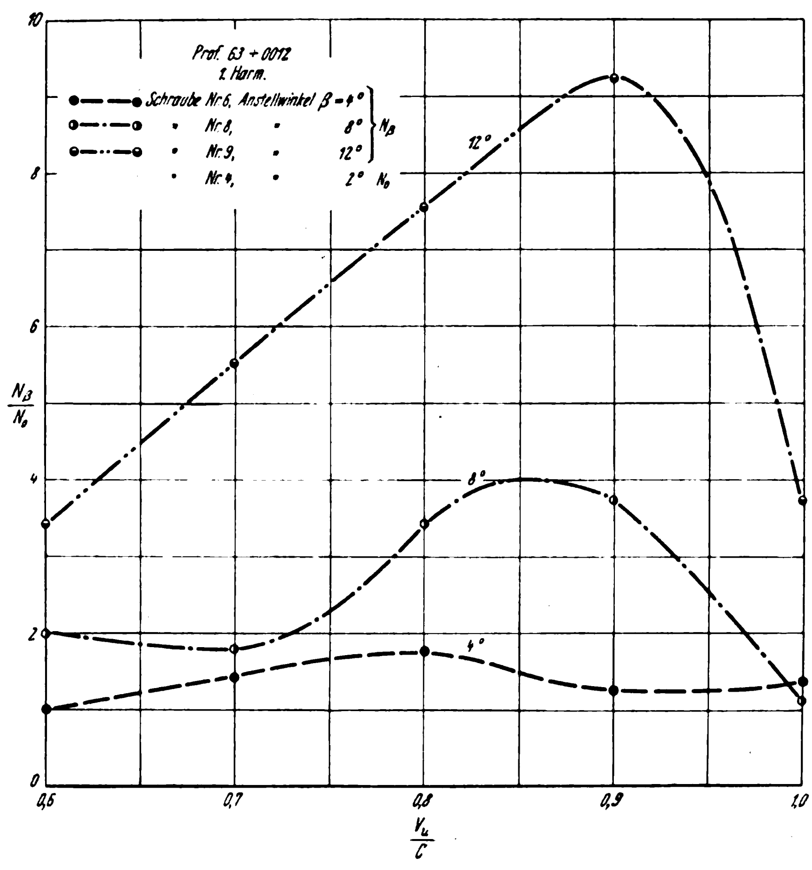


Bild 31. Das Verhältnis der Schalleistungen mit und ohne Anstellung für 3 Anstellwinkel in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.

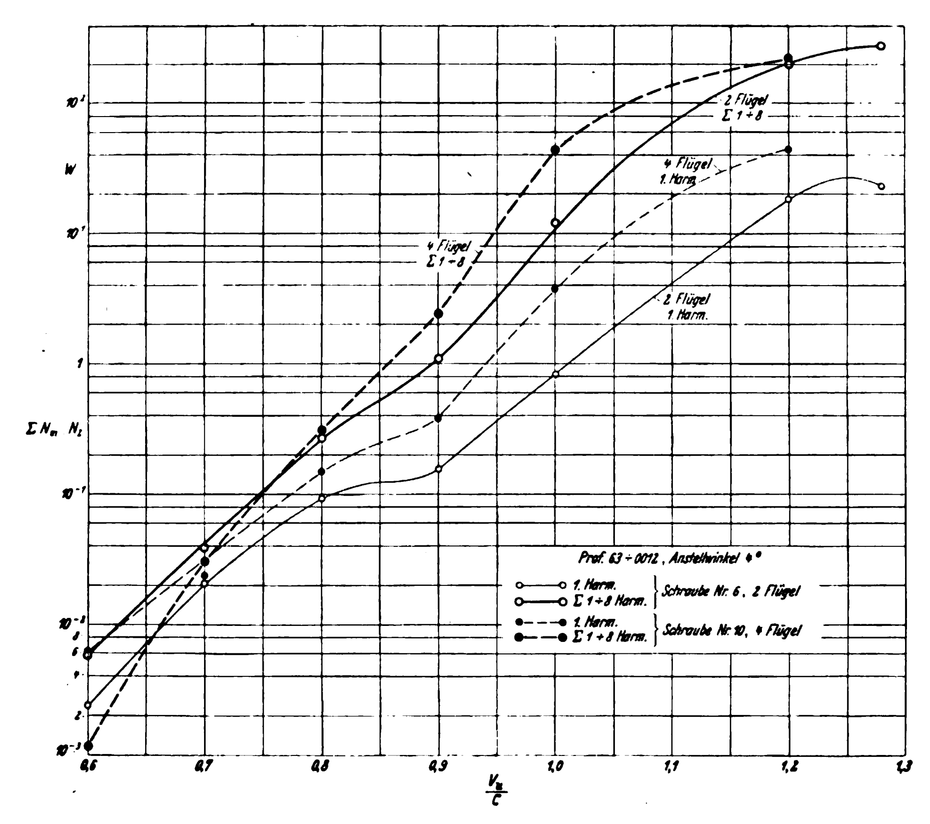


Bild 32. Vergleich der Schalleistungen einer 2-Blatt- und einer 4-Blattschraube.

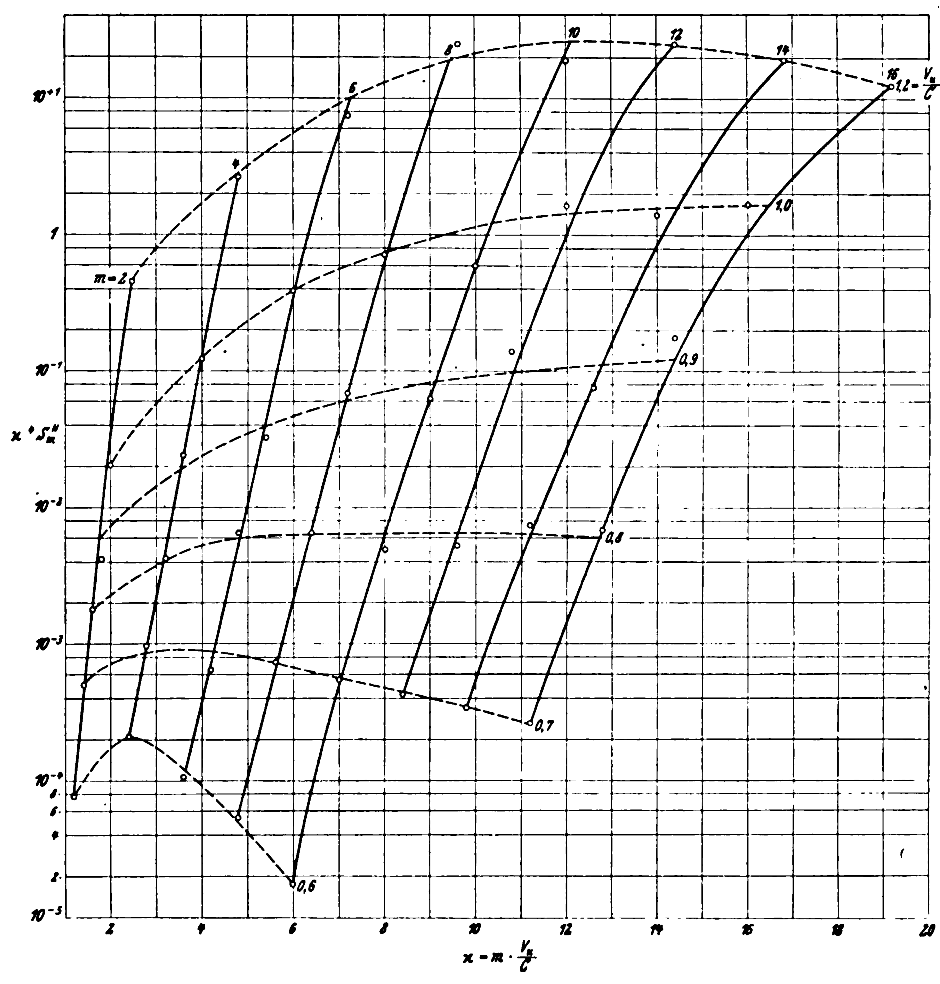


Bild 33. Die aus den Messungen an der Schraube Nr. 4 bestimmten Strahlungsfunktionen.

Bild 33 enthält die aus den Messungen an der Schraube Nr. 4 mit Hilfe der Gl. (21b) gewonnenen Strahlungsfunktionen $\varkappa^4\, S_m^4\,(x)$ für die ersten 8 Harmonischen und bis zu einer die Schallgeschwindigkeit um 20% übertreffenden Umfangsgeschwindigkeit.

Meinen Mitarbeitern W. von Wittern, E. Treschau und J. Teumer bin ich zu Dank für ihre Hilfe beim Aufbau der Meßeinrichtungen und bei der Durchführung der Messungen verpflichtet.

D. Zusammenfassung.

Im ersten Teil der Arbeit werden die grundlegenden Ansätze erörtert, mit deren Hilfe es möglich ist, das Schallfeld und die Strahlungsleistung einer angestellten, im ungestörten Medium umlaufenden Luftschraube in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit, Profildicke und -tiefe und vom Auftriebsbeiwert zu berechnen. Die sich dabei ergebenden, für die Strahlung charakteristischen Funktionen werden aus den Richtfunktionen gewonnen. Sie wurden für Umfangsgeschwindigkeiten zwischen dem 0,6- und 1,4fachen der Schallgeschwindigkeit und für drei verschiedene Auftriebsparameter bestimmt.

Die räumliche Schallfeldverteilung wurde an Modellschrauben mit symmetrischen NACA-Profilen, mit Dickenverhältnissen von 6, 12, 18% und Anstellwinkeln von 0, 2, 4, 8, 12° für jeweils acht Harmonische und Umfangsgeschwindigkeiten von 200 bis 400 m/s gemessen. Bis zu einer Umfangsgeschwindigkeit vom 0,9fachen der Schallgeschwindigkeit stimmt die Theorie mit der Messung auch quantitativ überein. Darüber hinaus steigen die Meßwerte stärker an, da der Einfluß der Kompressibilität in die Rechnung nicht eingeführt wurde.

Die Untersuchungen hatten folgendes Ergebnis:

1. Der Schalldruck nimmt proportional der Blattdicke, die Schalleistung mit ihrem Quadrat zu.

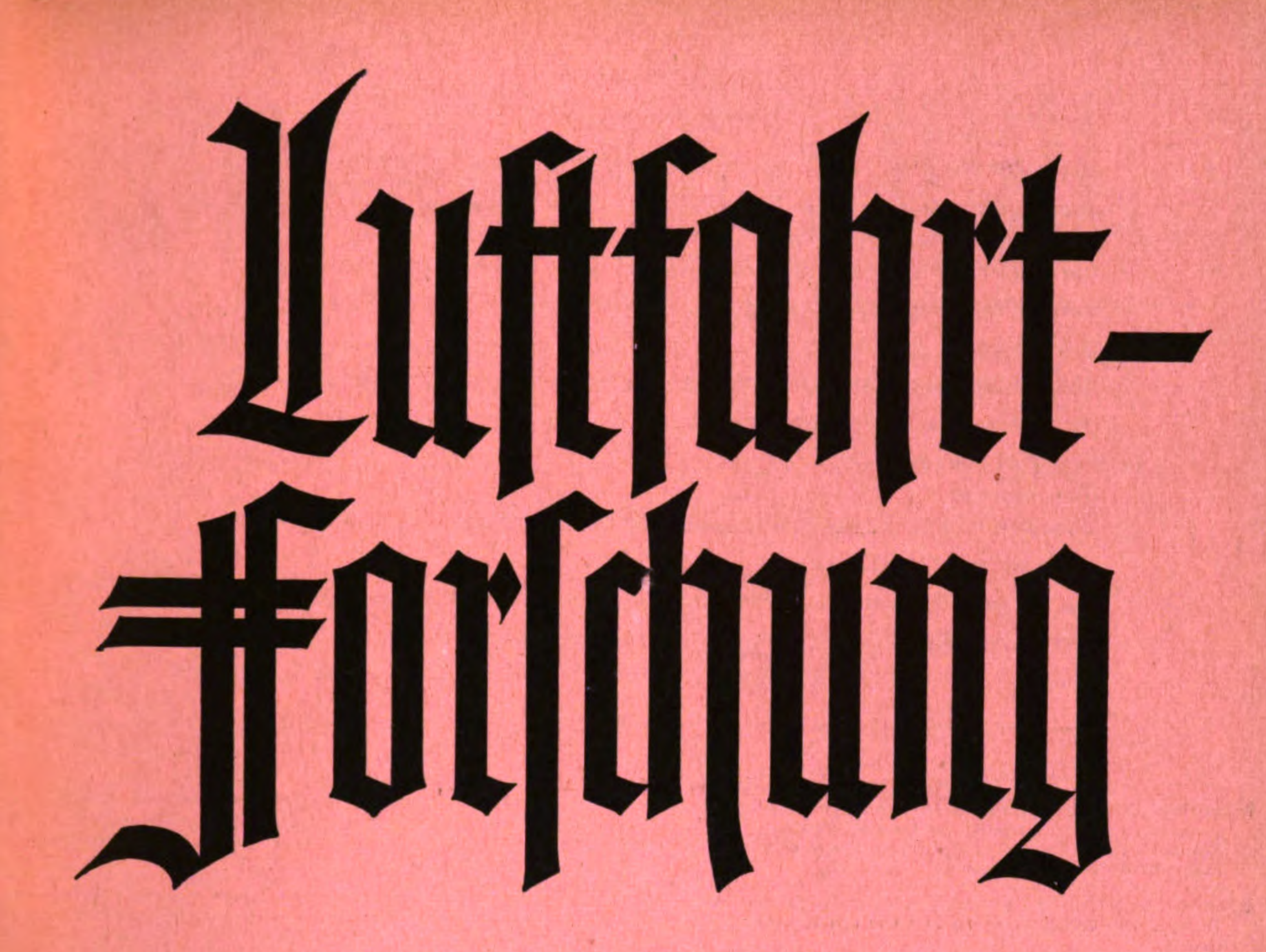
2. Die Anstellung bewirkt eine Aufspaltung der Richtkurven in ein kleines, in Flugrichtung gesehen, vor der Schraubenebene befindliches und in ein großes, hinter der Schraubenebene liegendes Maximum.

3. Der Einfluß der Anstellung verschwindet bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit mit zunehmender Ordnung der Harmonischen. Vom 0,9fachen der Schallgeschwindigkeit ab gehen die Richtkurven und damit auch die Leistungskurven in diejenigen der Anstellung Null über.

4. Die höheren Harmonischen steigen mit der Umfangsgeschwindigkeit stärker an als die tieferen, überwiegen vorübergehend und fallen bei hohen Ordnungen endlich wieder ab.

5. Die Schalleistung des Grundtones steigt etwa mit der 7,5. Potenz, die der vierten Harmonischen mit der 14. Potenz, die Leistungssumme der ersten vier Harmonischen mit der 10. Potenz und die der ersten 8 Harmonischen (gemittelt für verschiedene Anstellwinkel) mit der 14. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit.





Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 9 SEITE 305 BIS 340 | MÜNCHEN, 20. 9. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Vierteljahresbezugspreis RM. 6.— einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Vierteljahresbezugspreis RM. 4.50 einschließlich 12 Pf. Zeitungsgebühr und 2 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt vierteljährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Vierteljahr zu Vierteljahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalendervierteljahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften (oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 | 20. September 1941 | Lfg. 9

Untersuchung über die Eignung warmfester Werkstoffe für Verbrennungskraftmaschinen.

IV. Teil.

Von H. Cornelius und W. Bungardt.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Einfluß von Eisen und Mangan in eisenarmen Nickel-Kobalt-Chrom-Legierungen mit Zusätzen von Molybdän, Wolfram und Titan vor allem auf die Dauerstandfestigkeit bei 600, 700 und 800°. Dauerstandfestigkeit einiger Stähle, darunter sparstoffarme, bei den gleichen Temperaturen. — Festigkeitseigenschaften vor und nach Glühen bei 700°, Wärmeausdehnung und spezifisches Gewicht bei Temperaturen bis 800°, sowie Zunderbeständigkeit der Versuchswerkstoffe. — Anwendbarkeit des DVM-Verfahrens zur Ermittlung der Dauerstandfestigkeit der Versuchswerkstoffe bei 600 bis 800°. — Zusammenfassung.

Gliederung.

Die DVL hat bereits mehrfach über Untersuchungen warmfester Werkstoffe auf ihre Eignung für Schaufeln von Abgasturbinen berichtet[1]). Man kann als wesentliches Ergebnis dieser Versuche festhalten, daß bei Zugrundelegung von Schaufeltemperaturen über 550° und hoher mechanischer Beanspruchung der Schaufeln für diese austenitische Werkstoffe mit hohen Gehalten an Nickel, Chrom, Kobalt, Wolfram, Molybdän, Titan, Tantal und Niob in Betracht kommen. Kennzeichnet man die Werkstoffe einmal durch die Höhe der ruhenden Zugbeanspruchung, die bei 600° in 300 h zu einer Gesamtdehnung von 1% ($\sigma_{1/300}$) führt, wobei die günstigste Vorbehandlung der Werkstoffe vorausgesetzt sei, so ergibt sich folgendes: Eisenarme Kobalt-Nickel-Chrom-Wolfram-Molybdän-Legierungen mit Zusätzen von Titan oder Tantal erreichen ein $\sigma_{1/300}$ von über 45 kg/mm². Es handelt sich um die unter den Bezeichnungen DVL 42 (PMWC) mit Titan und DVL 52 (PMWC) mit Tantal bekannten Werkstoffe. Für einen verhältnismäßig hochgekohlten Chrom-Nickel-Titan-Stahl mit der Bezeichnung P 193 ergab sich ein $\sigma_{1/300}$ von etwas unter 40 kg/mm². Jedoch neigt dieser Stahl zur Versprödung bei längerem Verweilen auf Temperaturen beispielsweise von 600 bis 800°. Mit Stählen, die Legierungselemente Nickel, Wolfram oder Molybdän, Tantal, Niob und Kupfer in Mengen von etwa 30% aufweisen, erreicht man $\sigma_{1/300}$-Werte, ebenfalls für 600°, von 25 bis 30 kg/mm². Die wichtigsten Vertreter dieser Stahlgruppe sind ATS und SAS 8. Mit den gebräuchlichen Chrom-Nickel-Wolfram-Ventilkegelstählen ähnlicher Legierungshöhe kommt man in dem für Ventilkegel gebräuchlichen Lieferzustand auf ein $\sigma_{1/300}$ von 17 bis 20 kg/mm². Etwa an diese Werte kommen auch die besten von uns bisher untersuchten Stähle heran, in denen Nickel größtenteils durch Mangan ersetzt ist. Es sei ein Mangan-Chrom-Molybdän-Nickel-Stahl erwähnt, der mit FCM bezeichnet wird und außer Mangan nur etwa 20% dieser Legierungselemente enthält.

I. Versuchswerkstoffe.

Die im folgenden zu behandelnden Untersuchungen hatten vor allem das Ziel den Einfluß des Zusatzes beispielsweise von Eisen und Mangan zu den erwähnten eisenarmen Nickel-Kobalt-Chrom-Legierungen mit Zusätzen von Molybdän, Wolfram und Titan zu prüfen. Außerdem wurden einige Stähle mit in die Versuche einbezogen. Die Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe enthält Zahlentafel 1. Die Werkstoffe 1 und 2, eisenarme Nickel-Kobalt-Chrom-Legierungen mit Zusätzen von Wolfram, Molybdän und Titan, unterscheiden sich lediglich in ihrem Titangehalt. Die Legierungen 3 bis 7 dagegen sind titanfrei und weichen hinsichtlich der Zusammensetzung noch in folgenden weiteren Punkten von den Werkstoffen 1 und 2 ab: In den Legierungen 3 bis 5 ist Nickel teilweise durch Eisen, in der Legierung 6 durch Eisen und Mangan ersetzt. Die Legierung 5 hat außerdem einen wenig, die Legierung 6 einen erheblich erniedrigten Chromgehalt. In der Legierung 7, die wieder etwa den Nickelgehalt der Werkstoffe 1 und 2 aufweist, ist Kobalt, in geringerem Maße auch Chrom teilweise, Molybdän aber vollständig durch Eisen ersetzt worden. In der Legierung 8 schließlich ist Eisen an die Stelle von Wolfram und Molybdän, sowie teilweise an die Stelle von Kobalt und Nickel getreten. Der Werkstoff ist mit Titan legiert. — Der wesentliche, gemeinsame Unterschied zwischen den Werkstoffen 1 bis 8 und 9 bis 12 ist das Fehlen von Kobalt in den letzteren. Der Werkstoff 9 ist ein nickelreicher Chrom-Nickel-Titan-Stahl mit einem — im Vergleich mit seinem Vorgänger in der Entwicklung (P 193) — niedrigen Kohlenstoff- und Chromgehalt. Bei dem Chrom-Nickel-Molybdän-Niob-Stahl 10 liegt ein absichtlich erhöhter Stickstoffgehalt vor[2]). Die Werkstoffe 11 und 12 sind ein Chrom-Mangan-Silizium-Nickel-Stahl mit Titanzusatz und ein durch seinen besonders kleinen Chromgehalt auffallender Mangan-Nickel-Chrom-Stahl besonders hervorzuheben. Da die Vorbehand-

[1]) F. Bollenrath, H. Cornelius u. W. Bungardt, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), Lfg. 9, S. 468/80, I. Teil; ebenda, Lfg. 10/11, S. 505/10, II. Teil; s. a. Metallwirtschaft 17 (1938), S. 755/57; Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), Lfg. 8, S. 275, III. Teil.

[2]) Vgl. hierzu: W. Tofaute u. H. Schottky, Techn. Mitt. Krupp, Forschungsberichte Bd. 3 (1940), H. 8, S. 103/10.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe.

Nr.	Werkstoff[1]) Bezeichnung	Herstell.	C	Si	Mn	Ni	Co	Cr	W	Mo	Nb	Ti	N	Vorbehandlung
			%											
1	DVL 42 (PMWC) Ti	Heräus	0,04	0,37	0,61	35,2	24,8	14,9	5,18	4,84	—	1,83	n. b.	[3])
2	DVL 42 (PMWC) Ti	Heräus	0,05	0,34	0,61	35,1	25,0	14,9	4,96	4,96	—	2,50	n. b.	[3])
3	DVL 75	DVL	0,09	0,84	0,87	24,7	24,6	14,9	5,22	4,8	—	—	n. b.	[4])
4	DVL 76	DVL	0,10	0,85	0,83	14,9	25,1	14,5	5,00	4,7	—	—	n. b.	[5])
5	DVL 7666	DVL	0,11	1,43	0,38	15,5	25,0	11,9	5,08	5,2	—	—	n. b.	[6])
6	DVL 77	DVL	0,10	1,20	5,85	12,0	26,1	6,45	6,3	5,4	—	—	n. b.	[6])
7	DVL 79	DVL	0,07	0,68	0,84	32,9	16,3	11,4	4,92	—	—	—	n. b.	[6])
8	DVL 81	DVL	0,10	1,21	1,47	24,0	18,0	14 6	—	—	—	1,86	n. b.	[6])
9	Tinidur	Krupp	0,12	0,79	0,81	30,8	—	13,9	—	—	—	1,53	0,019	unbekannt
10	B 766	Böhler	0,10	0,42	0,57	14,5	—	18,0	—	2,26	1,22	—	0,082	[7])
11	Thermax 9 AM	DEW	0,11	3,1	13,4	2,34	—	8,9	—	—	—	0,78	n. b.	unbekannt Zustand: weich
12	DM 18	[2])	0,31	0,81	17,5	1,52	—	1,16	—	Spur	—	—	n. b.	unbekannt Zustand: weich

[1]) Rest in allen Fällen vorwiegend Eisen. [2]) Geprüft für die Brandenburgischen Motorenwerke, Berlin-Spandau. [3]) Unter der Temperatur der beginnenden Erholung fertiggewalzt. [4]) Nach dem Schmieden bei 900° geglüht. [5]) Bei 1100° fertiggeschmiedet. [6]) Auf 25 mm Dmr. bei 1150°, von 25 auf 18 mm Dmr. bei 900° geschmiedet. [7]) Von 1100° in Wasser abgeschreckt.

Zahlentafel 2. Festigkeitswerte der Versuchswerkstoffe bei Raumtemperatur im Ausgangszustand (s. Zahlentafel 1) und nach 50stündigem Glühen bei 700°.

Werkstoff Nr.	Zustand		Streckgrenze $\sigma_{0,2}$ kg/mm²		Zugfestigkeit σ_B kg/mm²		Bruchdehnung δ_{10} %		Einschnürung ψ %	
1	A[1])	(B)[2])	49,4	(73,5)	92,6	(115)	43	(26)	63	(46)
2	A	(B)	53,0	(85,4)	95,0	(128)	47	(23)	59	(34)
3	A	(B)[3])	36,4	(35,6)	94,6	(78,3)	22	(37)	53	(39)
4	A	(B)	37,1	(46,8)	77,4	(81,4)	25	(32)	55	(35)
5	A	(B)	47,0	(56,8)	83,6	(95,8)	24	(20)	30	(21)
6	A	(B)	45,5	(44,0)	83,0	(83,0)	18	(25)	40	(33)
7	A	(B)	55,5	(27,2)	74,1	(67,0)	21	(21)	62	(63)
8	A	(B)	60,5	(38,0)	82,5	(75,4)	26	(53)	63	(33)
9	A	(B)	56,2	(59,0)	91,8	(86,7)	24	(18)	36	(30)
10	A	(B)	40,1	(53,0)	67,5	(81,7)	40	(28)	62	(49)
11	A	(B)	33,4	(28,9)	85,4	(88,3)	39	(32)	63	(43)
12	A	(B)	26,4	(24,0)	83,0	(84,2)	51	(45)	53	(51)

[1]) A = Ausgangszustand. [2]) (B) = 50 h bei 700° geglüht. [3]) 300 h bei 700° geglüht.

lung austenitischer Werkstoffe für ihr Kriechverhalten bei verschiedenen Temperaturen mit ausschlaggebend sein kann[8]), sei auf die Unterschiede in der Vorbehandlung der Versuchswerkstoffe im Zusammenhang mit den in Zahlentafel 2 wiedergegebenen Ergebnissen von Zerreißversuchen, soweit sie sich auf den Ausgangszustand A der Werkstoffe beziehen, noch besonders hingewiesen. Die Werkstoffe 1 und 2 wurden nach dem Warmwalzen unterhalb der Temperatur der beginnenden Erholung fertiggewalzt. Sie haben eine durch Kaltverfestigung etwas verschieden stark erhöhte Streckgrenze und Zugfestigkeit. Die Legierung 3 wurde nach dem Schmieden bei 900° geglüht, die Legierung 4 bei 1100° fertiggeschmiedet. Aus der Höhe der Streckgrenze ist zu schließen, daß diese Vorbehandlungen nur kleine Reste einer Verfestigung hinterließen. Die bis 25 mm Dmr. bei 1150°, von 25 auf den Enddurchmesser von 18 mm bei 900° geschmiedeten Werkstoffe 5 bis 8 haben eine durch Kaltverfestigung erhöhte Streckgrenze und Festigkeit. Die Vorbehandlung des Stahles 9 ist unbekannt. Nach den Festigkeitswerten kann er durch Kaltverformung oder bzw. und durch Aushärtung verfestigt sein. Die Stähle 10 bis 12 liegen im weichen Zustand vor. Besonders der Stahl 12 hat eine niedrige Streckgrenze. Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Vorbehandlung bei den Werkstoffen 1, 2 und 5 bis 8 eine Kaltverfestigung, bei dem Stahl 9 eine Verfestigung unbekannter Natur hervorgerufen hat, während die Werkstoffe 3, 4 und 10 bis 12 im weichen bzw. nur unbedeutend kaltverfestigten Zustand erhalten wurden.

[8]) H. Cornelius, Metallwirtschaft Bd. 18 (1939), S. 399/403 und S. 419/21.

Zahlentafel 2 enthält neben den Festigkeitswerten der Versuchswerkstoffe im Ausgangszustand A auch die nach 50stündigem Glühen bei 700° (B). Diese Glühbehandlung ruft bei den Legierungen 1 und 2 eine starke Erhöhung der Streckgrenze und Zugfestigkeit hervor. Dabei behalten die Dehnung und Einschnürung noch beträchtliche Werte. Die Glühung hat bei den Legierungen 3, 7 und 8 eine Verminderung der Streckgrenze und Zugfestigkeit, eine Erhöhung der Dehnung und Herabsetzung der Einschnürung bewirkt. Die Zugfestigkeitseigenschaften des Werkstoffs 6 wurden durch das Glühen kaum beeinflußt. Gleiches gilt auch für die Stähle 9, 11 und 12, während der Stahl 10 eine Erhöhung der Streckgrenze und Zugfestigkeit und eine entsprechende Beeinträchtigung der Formänderungsfähigkeit erfährt. Keiner der Versuchswerkstoffe ist durch das Glühen bei 700° weitgehend versprödet. Die festgestellten Einflüsse der Glühbehandlung auf die Festigkeitseigenschaften sind, soweit sie mit einer Streckgrenzen- und Festigkeitszunahme verbunden sind, wahrscheinlich auf Aushärtungsvorgänge zurückzuführen, soweit sie zur Abnahme der Zugfestigkeit und Streckgrenze führten, durch eine Erholung von den Folgen der Kaltverformung bedingt.

Auf die Durchführung der Versuche braucht hier nicht eingegangen zu werden, da sie in den früheren Teilberichten[1]) schon eingehend behandelt worden ist.

II. Versuchsergebnisse.

Die aus den Dauerstandversuchen mit 300 h Dauer (die 48stündige Anheizzeit nicht eingerechnet) abgeleiteten Ergebnisse sind in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Für die



Zahlentafel 8. Ergebnisse der Dauerstandversuche.

Werkstoff Nr.	Dauerstandfestigkeit: $10 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 25. bis 35. Bel.-Stunde, σ_{D1} in kg/mm², 600°	700°	800°	$5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100. bis 300. Bel.-Stunde, σ_{D2} in kg/mm², 600°	700°	800°	1 % Gesamtdehnung in 300 h, $\sigma_{1/300}$ in kg/mm², 600°	700°	800°	Kriechgeschwindigkeit unter σ_{D1} kg/mm² in der 100. bis 300. Bel.-Stunde, 10^{-4} %/h, 600°	700°	800°
1	39,0	7,8	4,0	37,5	10,6	—	~ 47,0	17,0	6,0	6,0	0,8	—
2	> 45 < 50[1])	13,2	4,6	> 45 < 50[1])	12,0	3,0	~ 48,0	19,6	5,3	4,2—8,0	6,6	12,0
3	18,6	8,8	—	17,4	8,0	—	22,0	12,5	—	8,0	7,5	—
4	22,4	8,0	6,1	20,5	7,5	5,5	26,5	12,0	7,5	7,0	6,0	10,0
5	18,3	6,6	4,0	19,2	6,8	3,7	23,8	12,3	4,8	1,0	4,4	8,0
6	8,0	4,5	2,0	11,2	~ 4,0	1,7	17,0	6,0	~ 2,5	—	—	—
7	20,0	8,6	4,4	20,0	7,5	4,2	~ 22,0	~ 9,0	~ 4,4	5,0	—	8,5
8	29,3	8,0	2,6	29,0	7,5	2,4	32,8	11,0	3,3	5,6	5,6	5,7
9	43,3	19,2	3,9	41,0	15,5	2,8	43.7	18,7	3,8	17,4	80,0	41,0
10	18,6	11,8	6,4	21,5[2])	11,7	5.9	22,0	14,3	6,8	1,8	5,3	22,0
11	8,6	2,15	—	8,0	1,9	—	10,5	3,1	—	10,0	9,0	—
12[3])	—	—	—	—	—	—	10,2	—	—	—	—	—

[1]) Bei 50 kg/mm² ist die $\sigma_{0,2}$-Grenze überschritten, und es treten große Anfangsdehnungen und Gesamtdehnungen bis 2 % auf. [2]) Große Anfangsdehnung und Gesamtdehnung in 300 h (etwa 0,8 %). [3]) $\sigma_{1/300}$ bei 400 und 500°: 13,0 kg/mm².

Werkstoffe 1 bis 11 finden sich hier für Temperaturen von 600, 700 und 800° die folgenden Angaben:

1. σ_{D1}: Nach dem DVM-Prüfverfahren A 117/118 (DIN-Vornorm) ermittelte Dauerstandfestigkeit.

2. σ_{D2}: Dauerstandbeanspruchung, die in der 100. bis 300. Belastungsstunde eine Kriechgeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ %/h herbeiführt. Bei gleichbleibender Kriechgeschwindigkeit ergibt sich eine Kriechdehnung von 1% in 2000 h. Die üblichere Dauerstandfestigkeit, die bei einer Kriechgeschwindigkeit von $1 \cdot 10^{-4}$ %/h eine Kriechdehnung von 1% in 10000 h ergibt, wurde nicht bestimmt, da hierzu die Versuchsdauer von 300 h für zu kurz gehalten wurde.

3. $\sigma_{1/300}$: Dauerstandbeanspruchung, die in 300 h zu einer Gesamtdehnung von 1% führt, und Berechnungen von Bauteilen zugrunde gelegt werden kann, deren Lebensdauer zu nicht wesentlich mehr als 300 h angenommen wird. Die Kenntnis von $\sigma_{1/300}$ ist für Bauteile für Flugtriebwerke von Bedeutung, bei denen eine Lebensdauer von etwa 300 h als ausreichend angesehen wird.

4. Unter der Belastung von σ_{D1} in der 100. bis 300. Belastungsstunde vorliegende Kriechgeschwindigkeit. Sie liefert Anhaltspunkte dafür, ob das DVM-Prüfverfahren Werte ergibt, die den aus Langzeitversuchen für eine $1 \cdot 10^{-4}$ %/h betragende Kriechgeschwindigkeit ermittelten Dauerstandfestigkeiten entsprechen oder nahe kommen.

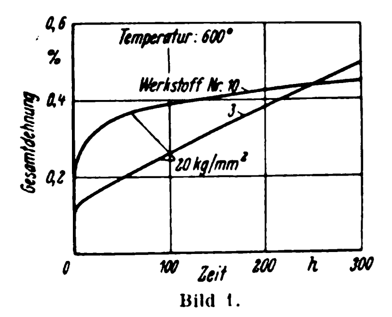


Bild 1.

Für den Stahl 12 konnte wegen der Eigenart der Kriechkurven nur $\sigma_{1/300}$ bestimmt werden. Dabei beschränkte man sich auf Temperaturen bis 600°, da der Stahl schon bei dieser Temperatur merklich und bei 700° stark verzunderte, was auf Grund seiner Zusammensetzung auch zu erwarten war.

Eine für mehrere Werkstoffe und Temperaturen gültige Beziehung zwischen den Werten für σ_{D1}, σ_{D2} und $\sigma_{1/300}$ liegt nicht vor. Der Grund hierfür ist darin zu erblicken, daß die Form der Zeit-Dehnungskurven je nach Werkstoffart, Vorbehandlung, Beanspruchungstemperatur und Größe der Beanspruchung verschieden sein kann. In den Bildern 1 bis 4 sind einige derartige Kurven von einigen der Versuchswerkstoffe wiedergegeben. Bild 1 zeigt den verschiedenen Charakter der unter 20 kg/mm² Zugspannung bei 600° mit den Werkstoffen 3 und 10 erhaltenen Zeit-Dehnungskurven. Man ist geneigt, den abweichenden Kurvenverlauf dieser

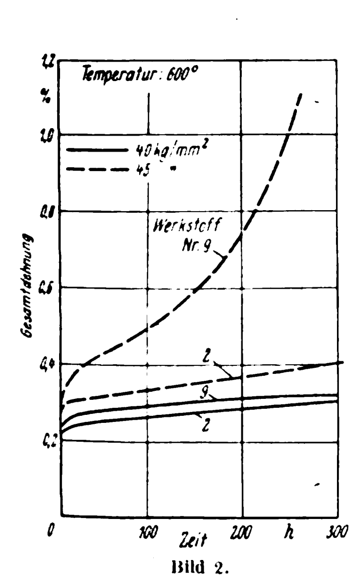


Bild 2.

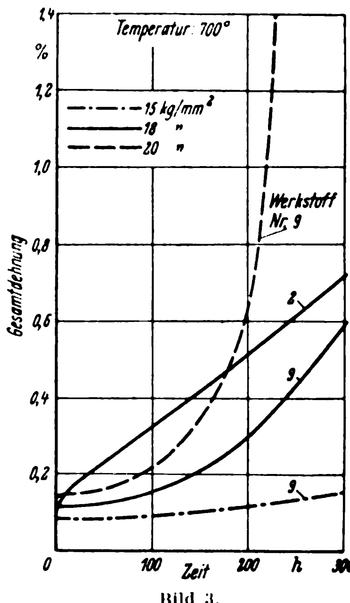


Bild 3.

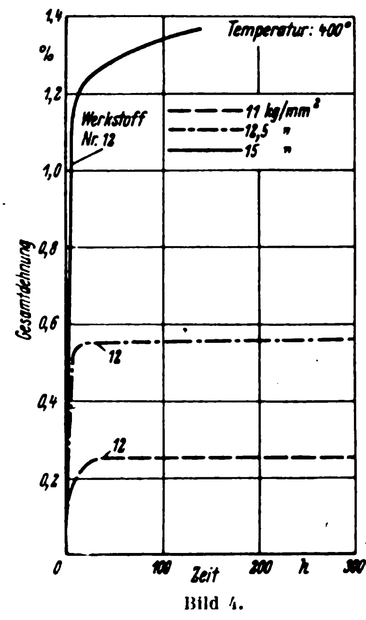


Bild 4.

Bild 1 bis 4. Zeit-Dehnungskurven einiger Versuchswerkstoffe.

Werkstoffe auf verschiedene Verfestigungsfähigkeit bei kleinen plastischen Verformungen zurückzuführen, bei denen eine Erholung erst weit über 600° zu erwarten ist. Nach Bild 2 ergeben die Werkstoffe 2 und 9 unter 40 kg/mm² Zugspannung bei 600° die gleiche Art von Zeit-Dehnungskurven, die die Legierung 2 auch unter 45 kg/mm² Zugspannung bei der gleichen Temperatur beibehält, während der Stahl 9 unter diesen Bedingungen eine nach 80 h stark ansteigende Kriechgeschwindigkeit aufweist. Der gleiche Unterschied wie bei 600° besteht auch bei 700° zwischen den Zeit-Dehnungskurven der Werkstoffe 2 und 9, wie man aus Bild 3 entnimmt. Unter 18 und 20 kg/mm² Zugspannung kriecht der Stahl 9 bei kleiner Gesamtdehnung bis etwa zur 40. Belastungsstunde so wenig, daß man ein vollständiges Abklingen des Kriechens bei längerer Belastungszeit erwartet. Statt dessen tritt von der 40. Belastungsstunde ab eine rasche Zunahme der Kriechgeschwindigkeit ein, die mit Bezug auf den Ausgangszustand des Stahles nicht durch Überlastung, sondern durch Vorgänge im Werkstoff zu erklären ist, die wie eine Ausscheidung oder Zusammenballung von Ausscheidungen[4]) oder eine Erholung von den Folgen der Kaltbearbeitung eine durch den Platzwechsel der Atome bedingte, erhöhte Plastizität (Platzwechselplastizität) hervorrufen. Die Bestimmung der Dauerstandfestigkeit des Stahles 9 nach dem DVM-Verfahren und erst recht nach einem neuerdings vorgeschlagenen, mit noch kürzeren Belastungszeiten arbeitenden Verfahren[5]) muß nach dem Gesagten zu Fehlergebnissen führen. Andererseits ist auch die Bestimmung von $\sigma_{1/300}$ wegen des nach oben gekrümmten Verlaufs der Zeit-Dehnungskurven unsicher, so daß für diesen Stahl nur die Ergebnisse von Langzeitversuchen eine praktische Bedeutung haben. — In Bild 4 sind Zeit-Dehnungskurven für den Stahl 12 wiedergegeben, die bei 400° mit Zugspannungen von 11,0, 12,5 und 15 kg/mm² erhalten wurden. Bei 11,0 kg/mm² kommt das Kriechen nach 40 Stunden vollkommen zum Stillstand, während unter 12,5 kg/mm² nach 20 h noch eine kleine Kriechgeschwindigkeit vorliegt. Auch unter 15,0 kg/mm² klingt die Kriechgeschwindigkeit mit zunehmender Belastungszeit noch ab. In allen Fällen ist die Kriechgeschwindigkeit in den ersten Belastungsstunden und damit auch die bleibende Dehnung sehr hoch. Die Kriechkurven sind charakteristisch für einen Werkstoff, der eine hohe Verfestigungsfähigkeit bei kleinen plastischen Verformungen besitzt, und dessen Beanspruchstemperatur unter der Temperatur der beginnenden Erholung liegt. Ähnliche Kurven ergaben sich für die Legierung 2 mit Zugspannungen von 50 kg/mm² bei 600° und auch für den Stahl 10 bei Beanspruchungen über 20 kg/mm² bei der gleichen Temperatur. Die Bestimmung der Dauerstandfestigkeit aus der Kriechdehnung ist für diese Fälle ungeeignet. Besser geeignet für die Festlegung der Beanspruchungsgrenze ist ein Prüfverfahren, das auf der Ermittlung der zulässigen gesamten (z. B. $\sigma_{1/300}$) oder bleibenden Dehnung beruht. Der Verlauf der Kriechkurven des Stahles 12 bei 400 und 500° weist darauf hin, daß das Dauerstandverhalten unterhalb des Temperaturgebietes der Erholung durch kleine Kaltbearbeitungsbeträge erheblich verbessert werden könnte. Aus dem Vergleich von Bild 4 mit den Bildern 1 bis 3 ersieht man außerdem einige der Schwierigkeiten, die der mathematischen Behandlung von Zeit-Dehnungskurven entgegenstehen.

Die Kriechgeschwindigkeiten, die unter der nach dem DVM-Verfahren für die Werkstoffe 1 bis 11 ermittelten Dauerstandfestigkeit in der 100. bis 300. Belastungsstunde auftreten, sind nach Zahlentafel 3 vorwiegend so hoch, daß auch in längeren Belastungszeiten nicht mit einem Abklingen auf etwa $1 \cdot 10^{-4}$ %/h gerechnet werden kann. Selbst σ_{D_2} liegt im allgemeinen, besonders bei 700 und 800°, tiefer als σ_{D_1}, da die Kriechgeschwindigkeiten bei der Beanspruchung σ_{D_1} in der 100. bis 300. Belastungsstunde vorwiegend über $5 \cdot 10^{-4}$ %/h, bei Stahl 9 sogar größenordnungsmäßig darüber liegen. Die Bestimmung der zu einer Dehnung von 1% in 10000 h führenden Dauerstandfestigkeit ist für die Versuchswerkstoffe bei Temperaturen von 600 bis 800° mit dem DVM-Kurzverfahren also nicht möglich. Diese Methode ergibt vielmehr zu hohe Werte. A. Krisch[6]) kam in Übereinstimmung hiermit zu dem Schluß, daß das DVM-Verfahren bei Stahl für Temperaturen von 600 bis 800° nicht anwendbar ist. Gleiches gilt nach A. Krisch und S. Eckhardt[5]) auch für neuerdings vorgeschlagene Verfahren mit noch kürzerer Versuchsdauer. Für den genannten Temperaturbereich sind daher Langzeitversuche zunächst unentbehrlich, wobei der günstigste Fall der ist, daß die Versuchsdauer der Lebensdauer des Bauteiles gleich ist, für das der zu prüfende Werkstoff bestimmt ist.

Nach Zahlentafel 3 und Bild 5, in dem $\sigma_{1/300}$ als hier vorwiegend interessierender Dauerstandfestigkeitswert in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen ist, haben die Legierungen 1 und 2 bei 600 und 700° die höchsten $\sigma_{1/300}$-Werte. In kleinem Abstand folgt der Stahl 9, für den aber die Angabe von $\sigma_{1/300}$ im Hinblick auf den Charakter der Kriechkurven unsicher ist. Die durch Austausch von Sparstoffen der Legierung 2 durch Eisen und Mangan erhaltenen Werkstoffe 3 bis 8 haben bei 600 und 700° erheblich kleinere $\sigma_{1/300}$-Werte als die Legierung 2. Man kann dies jedoch nicht allein der Zusammensetzung zuschreiben, sondern muß berücksichtigen, daß schon geringe Unterschiede in der Vorbehandlung austenitischer Werkstoffe für ihr Dauerstandverhalten mit ausschlaggebend sind[3]).

[4]) P. Grün, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 8 (1934/35), S. 205/11.

[5]) H. Esser u. S. Eckhardt, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 13 (1939/40), S. 209/22 (Werkstoffaussch. 484); S. 533/38 (Werkstoffaussch. 503); sowie A. Krisch u. S. Eckhardt, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 14 (1940/41), S. 451/53 (Werkstoffaussch. 536).

[6]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 14 (1940/41), S. 325/33 (Werkstoffaussch. 528); A. Pomp u. A. Krisch, Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 22 (1940), S. 137/48.

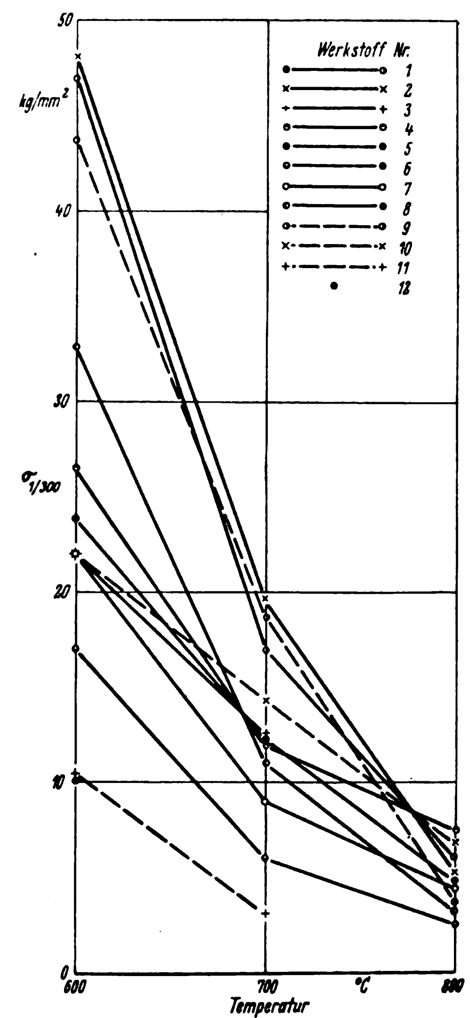


Bild 5. Dauerstandfestigkeit ($\sigma_{1/300}$: γt) der Versuchswerkstoffe bei 600 bis 800°.

Für Legierungen von der Art der Werkstoffe 1 bis 9 muß der weiche Zustand für Temperaturen bis mindestens 600° als ungünstig angesehen werden. Man muß daher erwarten, daß die im weichen Zustand geprüften Werkstoffe 3 und 4 im geeignet kaltverfestigten Zustand bei 600° höhere als die festgestellten $\sigma_{1/300}$-Werte haben werden. Die folgenden Bemerkungen über den Einfluß der Legierungsgehalte sind nur mit Bezug auf die gewählte Vorbehandlung der Versuchswerkstoffe zu werten: Von den Werkstoffen 1 bis 8 kommt die Nickel-Chrom-Kobalt-Titan-Legierung 8 den Legierungen 1 und 2 in ihrem Dauerstandverhalten bei 600° am nächsten. Der Austausch (bezogen auf die Legierung 1) von 11% Ni, 7% Co und 10% W + Mo durch Eisen hat eine Verminderung von $\sigma_{1/300}$ um etwa 30% ergeben. Die Legierung 6, in der Nickel großenteils durch Eisen und Mangan und Titan ganz, Chrom zur Hälfte durch Eisen ersetzt wurde, hat sehr niedrige $\sigma_{1/300}$-Werte für 600 und 700°. Als maßgebend hierfür wird in erster Linie der niedrige Chromgehalt angesehen. Eine große Bedeutung kommt ferner in den Legierungen von der Art der Versuchswerkstoffe 1 bis 8 dem Titangehalt zu. Die Legierungen 3 bis 7 sind den Werkstoffen 1 und 2 viel stärker, im Falle der Legierung 6 hinsichtlich $\sigma_{1/300}$ bei 600° um mehr als 60%, unterlegen, als die titanhaltige, dabei wolfram- und molybdänfreie Legierung 8. Wenn auch die aus den Legierungen 1 und 2 entstandenen Legierungen 3 bis 8 bei 600 und 700° zum Teil ein recht günstiges Dauerstandverhalten zeigen, so lassen die Versuche doch erkennen, daß eine größere Änderung der Zusammensetzung der Legierungen 1 und 2 eine bedeutende Beeinträchtigung ihrer hohen Dauerstandfestigkeit bei 600° und 700° bewirkt. Die Ursache dürfte zum Teil in der Herabsetzung der Temperatur der beginnenden Erholung der Festigkeitseigenschaften liegen. — Von den Stählen 9 bis 12 hat der Chrom-Nickel-Titan-Stahl 9 die weitaus höchsten Dauerstandfestigkeitswerte bei 600 und 700°. Sehr niedrige, für thermisch und mechanisch hochbeanspruchte Bauteile nicht mehr in Betracht kommende Dauerstandfestigkeiten haben die Stähle 11 und 12. Bei diesen sind bei 600° auch keine Verbesserungen durch Kaltverfestigung zu erwarten, da ihr Erholungstemperaturgebiet tief liegt. Ein gutes Dauerstandverhalten hat der Chrom-Nickel-Molybdän-Niob-Stickstoff-Stahl 10 bei 700°.

Während im allgemeinen der kaltverfestigte Zustand austenitischer Werkstoffe für die niedrigeren Temperaturen Vorteile hinsichtlich des Dauerstandverhaltens bietet, kann für höhere Temperaturen der weiche oder nur schwach kaltverformte Zustand — letzterer soweit er nicht mehr mit dem Eintreten der Erholung der Festigkeitseigenschaften verknüpft ist — zweckmäßiger sein. Das beste Dauerstandverhalten bei 800° zeigen demgemäß die im weichen Zustand geprüften Werkstoffe 4 (mit gegenüber den kaltverfestigten Legierungen 1 und 2 stark verminderten Nickelgehalt und ohne Titanzusatz) und 10, die $\sigma_{1/300}$-Werte von 7,5 bzw. 6,8 kg/mm² erreichen. Beide Werkstoffe gehören bei 600° nicht zu den warmfestesten Versuchswerkstoffen. Überhaupt lassen die Versuche erkennen, daß eine bestimmte Vorbehandlung im allgemeinen nicht gleichzeitig die besten Dauerstandwerte eines austenitischen Werkstoffes bei hoher und tiefer Temperatur ergeben kann. Bei früheren Versuchen mit Werkstoffen von der Art der Legierungen 1 und 2 gelang es bei 800° $\sigma_{1/300}$-Werte bis zu 12,0 kg/mm² durch geeignete, von der vorliegenden abweichende Vorbehandlung zu erreichen.

Für vorwiegend durch die Fliehkraft beanspruchte Bauteile ist die Kenntnis des Verhältnisses $\sigma_{1/300}:\gamma_t$ wichtig. Das spezifische Gewicht bei den in Betracht kommenden Betriebstemperaturen (γ_t) wurde aus den bei 20° gemessenen spezifischen Gewichten mit Hilfe der bis 800° bestimmten thermischen Ausdehnungsbeiwerte der Versuchswerkstoffe errechnet. Die mittleren thermischen Ausdehnungsbeiwerte der Versuchswerkstoffe enthält die Zahlentafel 4, die spezifischen Gewichte die Zahlentafel 5. In Bild 6 sind die Verhältniszahlen $\sigma_{1/300}:\gamma_t$ für 600, 700 und 800° geordnet nach fallenden Werten für alle Versuchswerkstoffe wiedergegeben. Von links nach rechts nimmt in dem Bilde also die auf Grund von $\sigma_{1/300}:\gamma_t$ beurteilte Eignung der Werkstoffe für durch Fliehkraft hochbeanspruchte Bauteile ab. Ein Eingehen auf Einzelheiten der in den Zahlentafeln 4 und 5, sowie in Bild 6 niedergelegten Ergebnisse erübrigt sich. Durchweg haben die Legierungen 1 bis 8 ein höheres spezifisches Gewicht und eine kleinere thermische Ausdehnung als die Stähle 9 bis 12, was in den Verhältniszahlen in Bild 6 zum Ausdruck kommt.

Die Verzunderungsversuche wurden mit einer ununterbrochenen Glühdauer von 50 h bei 800, 900 und 1000° in ruhender Luft ausgeführt (bezüglich der Verzunderung austenitischer Werkstoffe in strömenden Verbrennungsgasen von Benzin mit Ethylfluidzusatz wird auf Fußnote 1, II. und III. Teil, verwiesen). Bei den Legierungen 1 bis 5 und 7 und 8 ergab der Ersatz von Legierungselementen durch Eisen keine eindeutige Änderung der Zunderbeständigkeit.

Zahlentafel 4. Mittlere Wärmeausdehnungsbeiwerte ($\beta \cdot 10^{-6}$) der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff Nr.	Wärmeausdehnungsbeiwerte zwischen 20° und:						
	200°	300°	400°	500°	600°	700°	800°
1	13,2	13,9	14,4	14,9	15,4	16,0	16,9
2	13,2	13,8	14,2	14,6	15,1	15,6	16,6
3	14,6	15,0	15,3	15,5	15,8	16,2	16,7
4	15,2	15,9	16,4	16,5	16,5	16,9	17,3
5	13,3	14,0	14,6	15,0	15,2	15,6	16,2
6	14,9	15,6	16,1	16,5	16,7	17,0	17,5
7	12,7	13,4	13,9	14,5	14,9	15,3	15,9
8	15,1	15,7	16,3	16,6	16,9	17,3	18,1
9	15,8	16,5	16,9	17,2	17,5	17,9	18,6
10	17,0	17,4	17,7	18,0	18,2	18,4	18,9
11	17,2	18,0	18,8	19,3	19,6	19,9	20,5
12	17,9	18,9	19,9	20,6	21,1	21,5	22,2

Zahlentafel 5. Spezifisches Gewicht der Versuchswerkstoffe.

Werkstoff Nr.	Spezifisches Gewicht bei:				
	20°	500°	600°	700°	800°
1	8,60	8,42	8,37	8,33	8,27
2	8,54	8,38	8,32	8,28	8,22
3	8,52	8,33	8,29	8,24	8,20
4	8,45	8,25	8,17	8,17	8,13
5	8,57	8,39	8,35	8,30	8,19
6	8,55	8,35	8,30	8,26	8,21
7	8,52	8,34	8,30	8,26	8,20
8	8,07	7,88	7,84	7,79	7,74
9	7,95	7,76	7,72	7,67	7,62
10	7,84	7,65	7,60	7,56	7,51
11	7,59	7,38	7,34	7,29	7,24
12	7,86	7,63	7,58	7,53	7,47

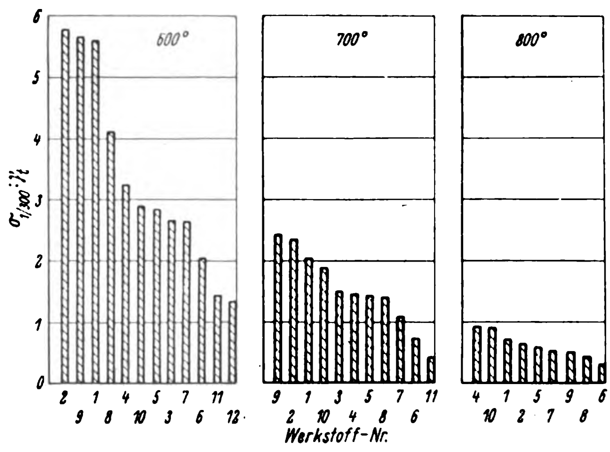


Bild 6. Verhältniszahlen ($\sigma_{1/300}:\gamma_t$) der Versuchswerkstoffe für 600, 700 und 800°.

Der Ersatz eines großen Teils des Chromgehaltes durch Eisen, vielleicht auch die starke Verminderung des Nickelgehaltes und sein teilweiser Ersatz durch Mangan haben dagegen erwartungsgemäß die Zunderbeständigkeit der Legierung 6 stark beeinträchtigt. Zahlentafel 6 enthält die Ergebnisse der Verzunderungsversuche. Bei 800° wurden für die u. a. mehr als 11% Cr enthaltenden Legierungen 1 bis 5 und 7 bis 10 Gewichtsverluste ermittelt, die unter 0,01 mg/cm² · h und damit im Fehlerbereich der Gewichtsverlustbestimmung liegen. Diese Stähle haben auch bei 900° noch eine hohe Zunderbeständigkeit und verzundern selbst bei 1000° erst mäßig. Der Stahl 11 mit 9% Cr und 3% Si ist bei 800° noch zunderbeständig. Die Legierung 6 mit 6,5% Cr verzundert bei 800°, wo sie nicht mehr als ganz ausreichend zunderbeständig anzusehen ist, in dem gleichen Maße wie die übrigen Werkstoffe mit mehr als 11% Cr bei 1000°. Der Stahl 12 mit nur 1,2% Cr hat bei 800° schon so hohe Zunderverluste wie der Stahl 11 mit 9% Cr und 3% Si bei 1000°. — Vorstehend ist die Zunderbetändigkeit vorwiegend im Zusammenhang mit dem Chromgehalt der Versuchswerkstoffe betrachtet worden. Ein Einfluß weiterer Legierungselemente liegt zwar auch vor, läßt sich aber bei der komplexen Zusammensetzung der Versuchswerkstoffe nicht sicher ermitteln.

III. Zusammenfassung.

Die Änderung der Zusammensetzung von eisenarmen Nickel-Kobalt-Chrom-Legierungen mit Zusätzen von Wolfram, Molybdän und Titan führte in allen Fällen zu einer Verminderung der sehr hohen Dauerstandfestigkeitswerte besonders bei 600 und auch bei 700°. Bei diesen Temperaturen hatte ein Chrom-Nickel-Titan-Stahl, bei 700° auch ein Chrom-Nickel-Molybdän-Niob-Stickstoff-Stahl ein gutes Dauerstandverhalten. Stähle mit sehr geringen Legierungszusätzen hatten schon bei 600° so niedrige Dauerstandfestigkeitswerte, daß sie für mechanisch und thermisch hochbeanspruchte Bauteile nicht in Betracht zu ziehen sind. Bei 800° erwiesen sich eine aus den Nickel-Kobalt-Chrom-Legierungen durch Verminderung der Legierungszusätze entstandene Kobalt-Nickel-Chrom-Wolfram-Molybdän-Legierung und der oben schon erwähnte Stahl mit erhöhtem Stickstoffgehalt als die hinsichtlich der Dauerstandfestigkeit besten der Versuchswerkstoffe. Die Versuchsergebnisse zeigen erneut den wichtigen Einfluß der Vorbehandlung auf das Dauerstandverhalten austenitischer Werkstoffe. Im allgemeinen kann die beispielsweise für 600° günstigste Vorbehandlung nicht auch die zweckmäßigste für 800° sein. — Das Verhältnis der Dauerstandfestigkeit zum spezifischen Gewicht ($\sigma_{1/300}:\gamma_t$) bei den für thermisch und durch Fliehkraft hochbeanspruchte Bauteile in Betracht kommenden Temperaturen, sowie die mittleren thermischen Ausdehnungsbeiwerte und die spezifischen Gewichte werden angegeben. — Die Zunderbeständigkeit der austenitischen Versuchswerkstoffe war in allen Fällen, in denen der Chromgehalt über 11% betrug, noch bei 900 und selbst bei 1000° beträchtlich. Die chromarmen Legierungen hatten naturgemäß eine kleine Zunderbeständigkeit, scheiden aber für hochbeanspruchte Bauteile schon wegen ihrer kleinen Dauerstandfestigkeit aus.

Die Versuche zeigen, daß das DVM-Prüfverfahren A 117/118 (DIN-Vornorm) bei 600 bis 800° für die Versuchswerkstoffe keine Dauerstandwerte liefert, die mit der aus Langzeitversuchen zu erhaltenden 1%-Grenze (1% Kriechdehnung in 10000 h) übereinstimmen. Eine für verschiedene Werkstoffe und Prüftemperaturen geltende Beziehung zwischen den in dem vorliegenden Bericht ermittelten, verschieden definierten Dauerstandwerten besteht nicht, da die Form der Zeit-Dehnungskurven je nach Werkstoffart, Werkstoffvorbehandlung, Beanspruchungstemperatur und Höhe der Beanspruchung sehr verschieden sein kann.

Zahlentafel 6. Ergebnisse der Verzunderungsversuche.

Werkstoff Nr.	Gewichtsverlust in mg/cm² · h bei:		
	800°	900°	1000°
1	0,003	0,028	0,060
2	0,004	0,024	0,050
3	0,003	0,019	0,040
4	0,007	0,014	0,041
5	0,004	0,012	0,033
6	0,06	0,158	0,556
7	0,008	—	0,070
8	0,009	0,031	0,075
9	0,005	0,024	0,056
10	0,004	0,018	0,015(?)
11	0,016	—	2,12
12	1,9	9,45	16,6

Einfluß von Betriebspausen auf die Zeitfestigkeit von Stählen mit Ferrit.

Berichtigung.

In meiner, in Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941) Lfg. 8 S. 285 bis 288 erschienenen Arbeit bezieht sich Bild 11 nicht auf Stahl 3, sondern auf Stahl 4; Bild 12 nicht auf Stahl 4, sondern auf Stahl 3. In der Beschreibung der Bilder 11 und 12 ist statt Stahl 3 zu lesen Stahl 4. In der Zahlentafel 3 sind die Stahlnummern 3 und 4 zu vertauschen.

H. Cornelius.

Die kompressible Potentialströmung um eine Schar von nichtangestellten symmetrischen Zylindern im Kanal.

Von W. Hantzsche und H. Wendt.

Bericht aus dem Institut für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Für die Kanalkorrekturen kompressibler Strömungen sind diejenigen Profile im Kanal von Interesse, für die sich wenigstens die zweite Näherung der Janzen-Rayleighschen Methode in geschlossener Form angeben läßt. Einen solchen integrablen Fall bilden gewisse ellipsenähnliche symmetrische Zylinder, die in der Mitte eines Kanals mit festen Wänden liegen, und deren Maximalgeschwindigkeit inkompressibel die doppelte Anströmgeschwindigkeit ist. Bei der numerischen Durchführung wird die Maximalgeschwindigkeit am Profil und der Kanalwand sowie der Eintritt der Schallgeschwindigkeit ausgerechnet. In einem Beispiel wird noch die Geschwindigkeitsverteilung längs der Kontur und im ganzen engsten Querschnitt für verschiedene Machsche Zahlen angegeben.

Gliederung.

Das Verfahren von Janzen[1]) und Lord Rayleigh[2]) zur schrittweisen Berechnung einer kompressiblen Potentialströmung im Unterschallgebiet aus der inkompressiblen Strömung ist in der ursprünglichen Form nur für die Strömung um das Kreisprofil und die Kugel im Luftmeer praktisch benutzt worden. Poggi[3]) hat die Lösung des Randwertproblems für ebene Strömungen bei Janzen-Rayleigh so gefaßt, daß das Verfahren auch auf einfache andere Profile angewandt werden kann. Bei der rechnerischen Durchführung beschränkt man sich dabei meistens auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung bzw. Druckverteilung am Profil. Für die Berechnung des zweiten Schrittes (Entwicklung des Potentials bis zum quadratischen Glied der Machschen Zahl) haben Imai und Aihari[4]) durch Einführung der bereits von Busemann[5]) bei der Behandlung der inkompressiblen Strömung verwandten komplexen Variablen z und $\bar{z}$ an Stelle von x und y eine Methode angegeben, die es gestattet, auch für kompliziertere Fälle das Potential im ganzen Felde zu gewinnen. Als Anwendung haben Imai und Aihari die Strömung um eine angestellte Ellipse im freien Luftmeer durchgerechnet. Gegenüber der von Kaplan[6]) nach Poggi ausgeführten Rechnung für die nichtangestellte Ellipse, die Reihen benötigt, kann die Lösung in geschlossener Form angegeben werden.

Für Strömungen im Kanal liegt bisher nur die zweite Näherung um eine nahezu kreisförmige Kontur von E. Lamla[7]) vor. Er verwendet die Methode von Janzen-Rayleigh, wobei er die durch Überlagerung einer Parallelströmung mit einem Dipol und seinen Spiegelbildern an den Kanalwänden erzeugte inkompressible Strömung als erste Näherung nimmt.

Wir berechnen in dieser Arbeit den zweiten Schritt für die inkompressible Strömung um eine Schar ellipsenähnlicher Zylinder im Kanal. Die Profilkurven sind dadurch ausgezeichnet, daß sie bei der konformen Abbildung des von zwei Parallelen begrenzten Streifens auf eine längs einer Halbgeraden aufgeschnittene Ebene in Kreise übergehen. In inkompressibler Strömung haben die Zylinder bei jedem Dickenverhältnis $\left(\frac{\text{Dicke}}{\text{Tiefe}}\right)$ die doppelte Anströmgeschwindigkeit als Maximalgeschwindigkeit. Die Integration der Differentialgleichung wird nach Imai und Aihari vorgenommen.

1. Die Differentialgleichung der Strömung.

Das Potential $\Phi(x, y)$ einer stationären rotationsfreien kompressiblen zweidimensionalen Strömung genügt der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Phi_{xx}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)-2\,\Phi_{xy}\frac{u\,v}{a^2}+\Phi_{yy}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=0 \quad . \; . \; (1)$$

wobei $u = \Phi_x$, $v = \Phi_y$ die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x- bzw. y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y sind und a die Schallgeschwindigkeit bedeutet. Diese ist eine Funktion von u, v; ist a_∞ die Schallgeschwindigkeit und U die Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen, so gilt:

$$a^2 = a^2_\infty - \frac{\varkappa-1}{2}\,(u^2+v^2-U^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Gl. (1) kann in der Form

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=\frac{1}{a^2}\,[\Phi_{xx}\Phi_x^2+2\,\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+\Phi_{yy}\Phi_y^2] \quad . \; . \; (3)$$

geschrieben werden. Denkt man sich das Potential nach der Machschen Zahl $M=\frac{U}{a_\infty}$ entwickelt:

$$\Phi=\Phi_0+\Phi_1 M^2+\ldots,$$

so gewinnt man aus (3) Differentialgleichungen der Form:

$$\Delta\Phi_0=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\Delta\Phi_1=\frac{1}{U^2}\left\{(\Phi_0)_{xx}(\Phi_0)_x^2+2\,(\Phi_0)_x(\Phi_0)_y(\Phi_0)_{xy}+(\Phi_0)_{yy}(\Phi_0)_y^2\right\} \quad . \; . \; . \; (5)$$

. . . .

Φ_0 ist das Potential bei inkompressibler Strömung; die Ermittlung von Φ_1 stellt den zweiten Schritt des Janzen-Rayleighschen Näherungsverfahrens dar.

[1]) O. Janzen, Beitrag zu einer Theorie der stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten. Phys. Z. Bd. 14 (1913), S. 639—643.

[2]) Lord Rayleigh, On the flow of compressible fluid past an obstacle. Phil. Mag. (6) Bd. 32 (1916), S. 1—6.

[3]) L. Poggi, Campo di velocità in una corrente piana di fluido compressibile. L'Aerotecnica Bd. 12 (1932), 1579; Bd. 14 (1934), 532.

[4]) I. Imai and Aihari, On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder. Rep. of. Aeron. Research Inst. Tokio Bd. 15 (1940). S. 185.

[5]) A. Busemann in A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. IV. Dynamik (1933), S. 383.

[6]) C. Kaplan, Two-Dimensional Subsonic Compressible Flow past Elliptic Cylinders. NACA T. R. Nr. 624 (1938).

[7]) E. Lamla, Die symmetrische Potentialströmung eines kompressiblen Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet. Luftfahrtforschung Bd. 17 (1940), S. 329—331, Bd. 18 (1941), S. 37.

Φ_0 ist als Potential einer inkompressiblen Strömung Realteil einer analytischen Funktion von $z = x + i\,y$: $\Phi_0 = \Re e\, f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}$, wenn $\overline{f(z)}$ der konjugiert komplexe Wert von $f(z)$ ist.

Mit den Beziehungen:

$$(\Phi_0)_x = \Re e \frac{df}{dz} = \frac{1}{2}\left[\frac{df}{dz} + \overline{\frac{df}{dz}}\right]$$

$$(\Phi_0)_y = -\Im m \frac{df}{dz} = \frac{1}{2i}\left[-\frac{df}{dz} + \overline{\frac{df}{dz}}\right]$$

$$(\Phi_0)_{xx} = \Re e \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2 f}{dz^2} + \overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\right]$$

$$(\Phi_0)_{xy} = -\Im m \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{2i}\left[-\frac{d^2 f}{dz^2} + \overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\right]$$

$$(\Phi_0)_{yy} = -\Re e \frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{d^2 f}{dz^2} + \overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\right]$$

kann man die rechte Seite von (5) in die Gestalt:

$$\frac{1}{2U^2}\left\{\frac{d^2 f}{dz^2}\cdot\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)^2} + \overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\}$$

bringen. Die Gleichung für Φ_1 bekommt dann also die Form:

$$\Delta\,\Phi_1 = \frac{1}{U^2}\,\Re e\left\{\overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Durch Einführung der komplexen Variablen $z = x + i\,y$ und $\bar z = x - i\,y$ an Stelle von x und y kann man diese mit $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar z}$ und $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\right)$ umformen in:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z\,\partial \bar z} = \frac{1}{4\,U^2}\,\Re e\left\{\overline{\frac{d^2 f}{dz^2}}\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\}$$

deren Integral man angeben kann:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\,U^2}\,\Re e\left\{\overline{\frac{df}{dz}}\int\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz + F(z) + G(\bar z)\right\} \quad \ldots (7)$$

Die analytischen Funktionen $F(z)$ und $G(\bar z)$ sind willkürlich und werden erst durch die Randbedingungen festgelegt.

Die formale Verwendung von z und $\bar z$ als unabhängige Variable bedarf noch der Rechtfertigung.

Der konjugiert komplexe Wert $\overline{f(z)}$ der analytischen Funktion $f(z)$ von z ist keine analytische Funktion von z mehr; dagegen ist $\overline{f(z)}$ offenbar analytisch in $\bar z$. Wir schreiben, um dies auszudrücken:

$$\overline{f(z)} = \bar f(\bar z) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Wegen $\overline{dz} = d\bar z$ gilt dann offenbar für die Ableitungen von $\bar f$ nach $\bar z$

$$\overline{\frac{df(z)}{dz}} = \frac{d\bar f(\bar z)}{d\bar z};\quad \overline{\frac{d^2 f(z)}{dz}} = \frac{d^2 \bar f(\bar z)}{d\bar z} \quad \ldots (9)$$

Damit kann man Gl. (6) schreiben:

$$\Delta\,\Phi_1 = \frac{1}{2\,U^2}\left[\frac{d^2 \bar f(\bar z)}{d\bar z^2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 + \frac{d^2 f}{dz^2}\left(\frac{d\bar f(\bar z)}{d\bar z}\right)^2\right] \quad \ldots (10)$$

Läßt man jetzt vorübergehend die unabhängigen Variablen x und y jede für sich komplexe Werte $x_1 + i x_2$ und $y_1 + i y_2$ annehmen, so werden offenbar $f(z)$, $\bar f(\bar z)$ und Φ analytische Funktionen der beiden komplexen Variablen x und y. An Stelle von x und y führen wir nun als unabhängige Veränderliche:

$$z_1 = x + i\,y$$
$$\text{und } z_2 = x - i\,y$$

ein. Dann geht (10) über in:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1\,\partial z_2} = \frac{1}{8\,U^2}\left[\frac{d^2 \bar f(z_2)}{dz_2^2}\left(\frac{df(z_1)}{dz_1}\right)^2 + \frac{d^2 f(z_1)}{dz_1^2}\left(\frac{d\bar f(z_2)}{dz_2}\right)^2\right].$$

Für Φ_1 ergibt sich also:

$$\Phi_1 = \frac{1}{8\,U^2}\left[\frac{d\bar f(z_2)}{dz_2}\cdot\int\left(\frac{df(z_1)}{dz_1}\right)^2 dz_1 + \frac{df(z_1)}{dz_1}\cdot\int\left(\frac{d\bar f(z_2)}{dz_2}\right)^2 dz_2 + 2\,F(z_1) + 2\,G(z_2)\right] \quad \ldots (11)$$

$F(z_1)$ und $G(z_2)$ bedeuten hier analytische Funktionen von z_1 bzw. z_2. Beschränkt man sich wieder auf reelle x und y, dann wird $z_1 = z$ und $z_2 = \bar z$. Nimmt man weiter, um eine reelle Lösung von (6) zu erhalten, noch den Realteil von (11), so bekommt man schließlich mit Rücksicht auf (8) und (9) den Ausdruck (7):

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\,U^2}\,\Re e\left\{\overline{\frac{df(z)}{dz}}\cdot\int\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz + F(z) + G(\bar z)\right\}.$$

Bezieht man das Potential auf die komplexen Koordinaten ζ und $\bar\zeta$ einer durch die konforme Abbildung $\zeta = \zeta(z)$ mit der xy-Ebene verknüpften ζ-Ebene, so hat Φ_1 die Gestalt

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\,U^2}\,\Re e\left\{\overline{\frac{df}{d\zeta}}\cdot\overline{\frac{d\zeta}{dz}}\int\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\cdot\frac{d\zeta}{dz}\cdot d\zeta + F_1(\zeta) + G_1(\bar\zeta)\right\} \quad \ldots (12)$$

Eine konforme Abbildung wird oft angewendet werden, um die Randbedingung, daß die Ableitung von Φ_1 normal zur Profilkontur verschwinden soll, leichter erfüllen zu können.

Ganz analog wie wir hier nach Imai und Aihari bei der Differentialgleichung des Potentials vorgegangen sind, kann man die Differentialgleichung für das zweite Glied der Stromfunktion bei der Entwicklung nach der Machschen Zahl umformen.

Die Stromfunktion $\Psi(x,y)$ einer ebenen stationären rotationsfreien kompressiblen Strömung genügt der Differentialgleichung

$$\Psi_{xx}\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) - 2\,\Psi_{xy}\frac{u\,v}{a^2} + \Psi_{yy}\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0 \qquad (13)$$

wobei die Komponenten der Stromdichte

$$u\,\varrho = \varrho_\infty\,\Psi_y \text{ und } v\,\varrho = -\varrho_\infty\,\Psi_x$$

sind.

Mit $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 M^2 + \ldots$ (Ψ_0 Stromfunktion der inkompressiblen Strömung) erhält man aus (13) für Ψ_1 die Differentialgleichung:

$$\Delta\,\Psi_1 = (\Psi_0)_{xx}\frac{(\Psi_0)_y^2}{U^2} - 2\,(\Psi_0)_{xy}\frac{(\Psi_0)_x\,(\Psi_0)_y}{U^2} + (\Psi_0)_{yy}\frac{(\Psi_0)_x^2}{U^2}.$$

Die Einführung von $z = x + iy$ und $\bar z = x - iy$ gibt, wenn $\Psi_0 = \Im m\, f(z)$ ist, dann

$$(\Psi_1)_{z\bar z} = -\frac{1}{4\,U^2}\,\Im m\left\{\frac{d^2 \bar f(\bar z)}{d\bar z^2}\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^2\right\}$$

oder

$$\Psi_1 = -\frac{1}{4\,U^2}\,\Im m\left\{\overline{\frac{df(z)}{dz}}\int\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^2 dz + F_2(z) + G_2(\bar z)\right\} \quad (14)$$

Ein Vergleich von (7) und (14) zeigt, daß die bei Φ_1 und Ψ_1 hinter dem Zeichen $\Re e$ bzw. $\Im m$ auftretenden komplexen Funktionen sich nur in den durch die Randbedingungen hinzutretenden Gliedern unterscheiden.

2. Die inkompressible Strömung im Kanal.

Wir betrachten ein zunächst beliebiges nichtangestelltes symmetrisches Profil, das in der Mitte eines Kanales mit festen Wänden liegt. Die durch Spiegelung an den Kanalwänden erhaltene Strömung der ganzen Ebene beziehen wir auf ein rechtwinkliges kartesisches x, y-Koordinatensystem, dessen x-Achse in der Kanalmitte liegt. Die Kanalhöhe können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich $2\,\pi$ wählen. Bezeichnen wir die komplexe Koordinate der xy-Ebene wieder mit $z = x + iy$, so ist das komplexe Potential der Strömung eine analytische Funktion $f(z)$, die sich im Unendlichen wie Uz verhält (U Anströmgeschwindigkeit) und sonst nur Singularitäten im Inneren der Profile hat. $f(z)$ ist eine einfach periodische Funktion mit der Periode $2\,\pi\,i$. Bilden wir die z-Ebene vermöge der konformen Abbildung $\zeta' = e^z$ auf die komplexe $\zeta' = \xi' + i\eta'$-Ebene ab, so bedeckt jeder Streifen parallel der x-Achse von der Breite $2\,\pi$ die ganze Ebene. Betrachten wir insbesondere den Streifen $-\pi \leq y \leq \pi$, so gehen die Kanalwände $y = -\pi$ und $y = \pi$ über in die doppelt durchlaufene negative ξ'-Achse. Die Symmetrielinie des Kanales geht in die positive ξ'-Achse über, das symmetrische Profil in ein zur ξ'-Achse symmetrisch gelegenes. Der unendlichferne Punkt der z-Ebene bildet sich in den Nullpunkt und unendlichfernen Punkt der ζ'-Ebene ab. Aus dem Verhalten von

$f(z)$ für $z = \infty$ folgt, daß $f(\zeta')$ sich in der Umgebung von $\zeta' = 0$ und $\zeta' = \infty$ wie $U \ln \zeta'$ verhält. Neben diesen beiden Punkten hat die Funktion $f(\zeta')$ außerhalb des Profiles keine singulären Stellen. $f(\zeta')$ ist somit das Potential der von einer Quelle mit der Ergiebigkeit $2\pi U$ im Nullpunkt erzeugten Strömung in der ζ'-Ebene. Das Profil und die ξ'-Achse sind Stromlinien.

Wir beschränken uns nun auf die Schar von Profilkonturen im Kanal, die bei der Abbildung $\zeta' = e^z$ Kreise werden. Dann läßt sich das komplexe Potential $f(\zeta')$ leicht durch Spiegelung am Kreis angeben[8]):

$$f(\zeta') = U \ln \frac{\zeta'(\zeta' - b + c)}{\zeta' - b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

wenn b die Mittelpunktsabszisse des Kreises mit dem Radius a ist und $c = \frac{a^2}{b}$ gesetzt wird.

Die Schar der Profilkurven im Kanal wird durch Bild 1a dargestellt.

Diese Profilkurven sind außer um die Mittellinie des Kanales auch noch zu einer Senkrechten dazu symmetrisch, wie man aus Bild 1b leicht nach dem Sehnen-Tangentensatz erkennt. Der höchste Punkt einer Profilkurve ist in der ζ'-Ebene durch den Berührungspunkt der vom Koordinatenursprung an den Kreis gelegten Tangente gegeben. Offenbar erhält man für Werte von a und b mit konstantem Verhältnis $\frac{a}{b}$ bis auf eine Parallelverschiebung längs der Kanalachse dieselbe Profilkurve. Läßt man also den Mittelpunktsabstand b fest und den Radius a von Null bis b variieren, so ergibt sich die ganze Schar; die in Bild 1a gezeichnete Lage geht dann durch Parallelverschiebung der einzelnen Kurven hervor. Die Abhängigkeit des Verdrängungsverhältnisses vom Dickenverhältnis der Profilkurven ist in Bild 2 dargestellt. Die Maximalgeschwindigkeit ergibt sich aus:

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dz} = \frac{df}{d\zeta'} \cdot \zeta'$$

für den Tangentenberührungspunkt

$$\zeta' = \sqrt{b^2 - a^2} \left\{ \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} + i \frac{a}{b} \right\}$$

mit Rücksicht auf (15) zu:

$$\frac{df}{dz} = u - iv = 2U,$$

d. h. die Maximalgeschwindigkeit ist stets die doppelte Anströmgeschwindigkeit, was man für die beiden Grenzfälle $a \to 0$ (Kreis im Luftmeer) und $a \to b$ (sehr lange Platte der Dicke $\frac{h}{2}$ im Kanal der Höhe h) unmittelbar einsieht.

3. Die kompressible Strömung im Kanal.

Wir beziehen im folgenden die Kreisebene auf ein Koordinatensystem $\zeta = \zeta' - b$ durch den Mittelpunkt des Kreises.

Das komplexe Potential (15) hat dann die Gestalt

$$f(\zeta) = U \ln \frac{(\zeta + b)(\zeta + c)}{\zeta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

für das inkompressible Geschwindigkeitspotential Φ_0 gilt so:

$$\Phi_0 = \Re f(\zeta) = \Re\, U \ln \frac{(\zeta + b)(\zeta + c)}{\zeta} \quad . \; . \; . \; (17)$$

Das Zusatzpotential Φ_1 wird dann nach (12), da man die auftretende Integration leicht ausführen kann:

$$\frac{1}{U}\Phi_1 = \frac{1}{4}\Re\Big\{ -\frac{b d \ln \zeta}{\bar\zeta} + \frac{b^2}{\zeta\bar\zeta} - \frac{b \ln(\zeta + b)}{\bar\zeta} + b d \ln\frac{\zeta + c}{\bar\zeta} + \underline{\frac{b(b-c)}{\bar\zeta(\zeta + c)} - \frac{b(b-c)}{\zeta(\bar\zeta + c)}} + \frac{(b-c)d}{\bar\zeta + c}\ln\zeta + \frac{(b-c)\ln(\zeta + b)}{\bar\zeta + c} - \frac{(b-c)d\ln(\zeta + c)}{\bar\zeta + c} - \frac{(b-c)^2}{(\zeta + c)(\bar\zeta + c)} + F_1(\zeta) + G_1(\bar\zeta)\Big\} \quad . \; . \; . \; (18)$$

wobei $d = -1 - \frac{2b^2}{a^2}$ gesetzt wurde.

Wegen der Konformität der Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene ($\zeta = r e^{i\varphi}$), lassen sich die Randbedingungen in der ζ-Ebene leicht angeben.

I. Das Verschwinden der Normalkomponente der Geschwindigkeit am Profil der xy-Ebene verlangt, daß die Ableitung von Φ_1 normal zum Kreise $r = a$ in der ζ-Ebene Null ist:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = 0.$$

II. Die Kanalwände müssen Stromlinien sein, auf dem ihnen entsprechenden Teil der negativen ξ-Achse muß also die Ableitung $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}$ verschwinden:

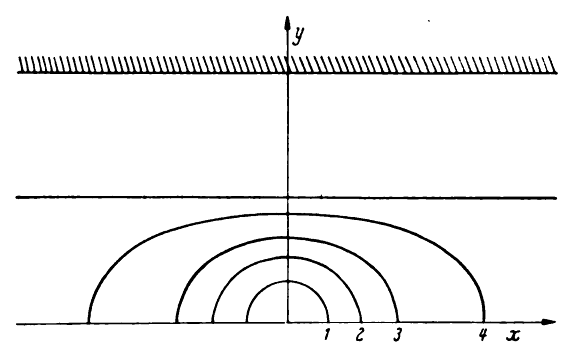


Bild 1a. Die Schar der untersuchten Zylinder im Kanal, deren Maximalgeschwindigkeit gleich der doppelten Anströmgeschwindigkeit ist.

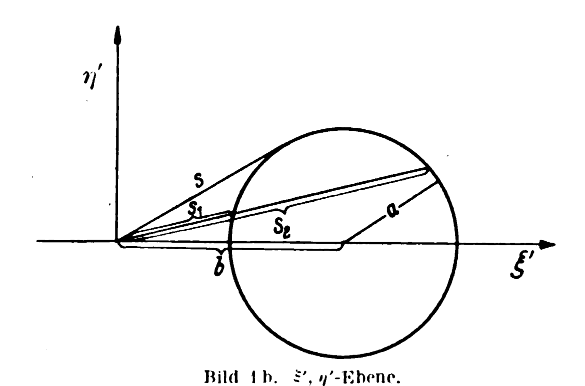


Bild 1b. ξ', η'-Ebene.

Bild 2. Die Verdrängung in Abhängigkeit von der Dicke.
d = Dicke des Profils,
t = Tiefe des Profils,
h = Kanalhöhe.

[8]) Um die durch $f(\zeta')$ dargestellte Strömung zu finden, wenn das Profil in der ζ'-Ebene noch kein Kreis ist, müßte man das Außengebiet des Profiles konform auf das Außengebiet eines Kreises einer komplexen z'-Ebene abbilden. Von der konformen Abbildung wird verlangt, daß sie symmetrisch zur ξ'-Achse ist, daß also die ξ'-Achse in die x'-Achse übergeht und der unendlich ferne Punkt der ζ'-Ebene in den der z'-Ebene abgebildet wird. In der z'-Ebene erhält man dann auch wieder die Strömung einer Quelle um einen Kreis.



$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\xi < -b \\ \eta = 0}} = 0.$$

III. Die Zusatzgeschwindigkeit im Unendlichen muß in der Kanalebene Null werden. Im Punkte $\zeta = -b$ und $\zeta = \infty$ müssen also die Ausdrücke:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Re (\zeta + b) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Im (\zeta + b)$$

und

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Im (\zeta + b) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Re (\zeta + b)$$

verschwinden.

IV. Da die Strömung zirkulationsfrei werden soll, muß die Ableitung $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}$ für $\zeta = \pm a$ Null werden:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\xi = a \\ \eta = 0}} = 0; \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\xi = -a \\ \eta = 0}} = 0.$$

Die Funktionen $F_1(\zeta)$ und $G_1(\bar{\zeta})$ sind so zu bestimmen, daß $\Phi_1(\zeta)$ den Bedingungen (I), (II), (III), (IV) genügt und daß das Geschwindigkeitsfeld in der xy-Ebene außerhalb des Profiles im Endlichen keine Singularitäten hat.

Man erhält dann für Φ_1 den folgenden Ausdruck (19). Wie man die Funktionen $F_1(\zeta)$ und $G_1(\bar{\zeta})$ findet, geben wir unten an.

Die auftretenden Integrale sind unbestimmte Integrale, da beim Potential eine Konstante nichts ausmacht. Die Integrationen können alle leicht ausgeführt werden. Wir haben das nicht getan, weil die Ausdrücke komplizierter werden und dies zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes ohnehin nicht notwendig ist.

Zunächst haben wir die Randbedingungen (I) erfüllt, ohne auf die anderen Bedingungen Rücksicht zu nehmen. Dies geschah für jedes Glied der rechten Seite von (18) einzeln. Ein Glied der rechten Seite hat die Gestalt $\Re (h(\zeta) \cdot k(\bar{\zeta}))$ und liefert als Bestandteil zur Radialableitung $\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}$ für $r = a$:

$$\Re \left[\frac{dh}{d\zeta} \cdot k(\bar{\zeta})\, e^{i\varphi} + \frac{dk}{d\bar{\zeta}}\, h(\zeta)\, e^{-i\varphi}\right]_{r=a}.$$

Dieser Ausdruck ist jetzt Realteil einer Funktion von $e^{i\varphi}$, etwa $\Re(g(e^{i\varphi}))$. Bildet man nun die beiden Ausdrücke:

$$-\Re\left\{\int \frac{g\left(\frac{\zeta}{a}\right)}{\frac{\zeta}{a}}\, d\zeta\right\} \quad \text{und} \quad -\Re\left\{\int \frac{g\left(\frac{a}{\bar{\zeta}}\right)}{\frac{\bar{\zeta}}{a}}\, d\bar{\zeta}\right\},$$

so haben sie offenbar am Kreise $r = a$ gerade die zur Kompensation erforderliche Radialableitung: $-\Re\, g(e^{i\varphi})$.

Welche der beiden Funktionen man wählt, ist zunächst gleichgültig; eine Entscheidung kann meistens dadurch vor-

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{U}\Phi_1 = \frac{1}{4}\Re\Bigg\{ & -b\,d\left[\frac{\ln\zeta}{\bar{\zeta}} - \int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2} + \int\frac{\ln\frac{a^2}{\bar{\zeta}}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right] \\
& + b^2\left[\frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{a^2}\int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}}\right] \\
& - b\left[\frac{\ln(\zeta+b)}{\bar{\zeta}} - a^2\int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2(a^2+b\bar{\zeta})} + \int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+b\right)d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2}\right] \\
& + b\,d\left[\frac{\ln(\zeta+c)}{\bar{\zeta}} - a^2\int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2(a^2+c\bar{\zeta})} + \int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+c\right)d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}^2}\right] \\
& + (b-c)\,d\left[\frac{\ln\zeta}{\bar{\zeta}+c} - \int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta}+c)} + \int\frac{\ln\frac{a^2}{\bar{\zeta}}\,d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta}+c)^2}\right] \\
& + (b-c)\left[\frac{\ln(\zeta+b)}{\bar{\zeta}+c} - a^2\int\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(a^2+b\bar{\zeta})(\bar{\zeta}+c)} + \int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+b\right)}{(\bar{\zeta}+c)^2}\,d\bar{\zeta}\right] \\
& - (b-c)\,d\left[\frac{\ln(\zeta+c)}{\bar{\zeta}+c} - \int\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta+c)(a^2+c\zeta)} + \int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+c\right)}{(\bar{\zeta}+c)^2}\,d\bar{\zeta}\right] \\
& - (b-c)^2\left[\frac{1}{(\zeta+c)(\bar{\zeta}+c)} + \int\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta+c)^2(a^2+c\zeta)} + \int\frac{\bar{\zeta}\,d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta}+c)^2(a^2+c\bar{\zeta})}\right] \qquad \text{I} \\
& - b(1-d)\left[\frac{\ln(\zeta+b)}{\zeta} - \frac{\bar{\zeta}+b}{a^2}\ln b - \int\frac{d\bar{\zeta}}{a^2+b\bar{\zeta}} + \int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+b\right)}{a^2}\,d\bar{\zeta} + \ln b\int\frac{d\zeta}{\zeta^2}\right] \\
& - (c-b)(1-d)\left[\frac{\ln(\zeta+b)}{\zeta+c} + \frac{a^2\ln\left(b-\frac{a^2}{b}\right)}{c(a^2+c\bar{\zeta})} - a^2\int\frac{d\bar{\zeta}}{(a^2+b\bar{\zeta})(a^2+c\bar{\zeta})}\right. \\
& \qquad \left. + a^2\int\frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar{\zeta}}+b\right)}{(a^2+c\bar{\zeta})^2}\,d\bar{\zeta} + \ln\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\int\frac{d\zeta}{(\zeta+c)^2}\right] \qquad \text{II} \\
& - \left(1+3\frac{b^2}{a^2}-2\frac{b^4}{a^4}\right)\left[\ln(\zeta+b) - \ln\zeta + \ln(\zeta+c)\right]\Bigg\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III}
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

genommen werden, daß nur eine der beiden Funktionen gleichzeitig die Randbedingung (II) erfüllt. Bei manchen Gliedern schien es auch deshalb angebracht, die beiden additiven Bestandteile von $g(e^{i\varphi})$ verschieden zu behandeln.

Bei dem hier angegebenen Verfahren zur Erfüllung der Randbedingungen (I) wird nicht nur der Realteil der Funktion $g(e^{i\varphi})$ am Kreise kompensiert, sondern auch der Imaginärteil, was an und für sich nicht notwendig wäre.

Die ersten 8 Zeilen der Formel (19) zeigen für die einzelnen Glieder von (18) den Anteil für die Zusatzfunktionen $F_1(\zeta)$ und $G_1(\bar\zeta)$. Dabei ist noch zu bemerken, daß die beiden unterstrichenen Glieder in (18) zusammen rein imaginär sind, also weggelassen werden können. In (18) werden sie nur wegen der Parallele zur Stromfunktion (vgl. unten) aufgeführt.

Die zweite Randbedingung $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\xi=0\\ \xi<-b\\ \eta=0}}$ ist von allen logarithmenfreien Gliedern erfüllt, weil der unter dem Zeichen $\Re e$ stehende Ausdruck nach φ abgeleitet rein imaginär wird. Sonst kann es z. B. beim Glied $\frac{\ln(\zeta+b)}{\bar\zeta}$ (3. Zeile) vorkommen, daß reelle Anteile übrigbleiben. Um diese zum Verschwinden zu bringen, waren die unter (II) aufgeführten 2 Zeilen von (19) erforderlich. Die Ausdrücke sind so gewählt, daß die Randbedingung (I) erfüllt bleibt.

Schließlich ist in der letzten Zeile die Lösung der homogenen Gleichung mit einem passenden Faktor so zugefügt, daß auch die Randbedingung (III) erfüllt wird. Die Bedingung (IV) ist dann von selbst erfüllt.

Bei der Stromfunktion lauten die den beiden Gleichungen (18) und (19) entsprechenden Gleichungen (vgl. (14))

$$\frac{1}{U}\Psi_1 = -\frac{1}{4}\Im m\left\{-\frac{b\,d\ln\zeta}{\bar\zeta} + \underline{\frac{b^2}{\zeta\bar\zeta}} - \frac{b\ln(\zeta+b)}{\bar\zeta} + \frac{b\,d\ln(\zeta+c)}{\bar\zeta} + \frac{b(b-c)}{\bar\zeta(\zeta+c)} - \frac{b(b-c)}{\zeta(\bar\zeta+c)} + \frac{(b-c)\,d}{\bar\zeta+c}\ln\zeta + \frac{(b-c)\ln(\zeta+b)}{\bar\zeta+c} - \frac{(b-c)\,d\ln(\zeta+c)}{\bar\zeta+c} - \underline{\frac{(b-c)^2}{(\zeta+c)(\bar\zeta+c)}} + F_2(\zeta) + G_2(\bar\zeta)\right\},$$

wobei wieder $d = -1 - 2\frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wurde. Die unterstrichenen Glieder sind reell, können also wegbleiben.

$$\frac{1}{U}\Psi_1 = \frac{1}{4}\Im m\left[b\,d\left\{\frac{\ln\zeta}{\bar\zeta} - \frac{\ln\frac{a^2}{\bar\zeta}}{\bar\zeta}\right\}\right.$$
$$b\left\{\frac{\ln(\zeta+b)}{\bar\zeta} - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+b\right)}{\bar\zeta}\right\}$$
$$-b\,d\left\{\frac{\ln(\zeta+c)}{\bar\zeta} - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+c\right)}{\bar\zeta}\right\}$$
$$-2b(b-c)\left\{\frac{1}{\bar\zeta(\zeta+c)} - \frac{\zeta}{a^2(\zeta+c)}\right\}$$
$$-(b-c)\,d\left\{\frac{\ln\zeta}{\bar\zeta+c} - \frac{\ln\frac{a^2}{\bar\zeta}}{\bar\zeta+c}\right\}$$
$$-(b-c)\left\{\frac{\ln(\zeta+b)}{\bar\zeta+c} - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+b\right)}{\bar\zeta+c}\right\}$$
$$(b-c)\,d\left\{\frac{\ln(\zeta+c)}{\bar\zeta+c} - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+c\right)}{\bar\zeta+c}\right\}$$
$$-b(1-d)\left\{\frac{\ln(\zeta+b)}{\zeta} + \frac{\bar\zeta}{a^2}\ln b - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+b\right)}{a^2}\bar\zeta - \frac{\ln b}{\zeta}\right\}$$
$$-(a-b)(1-d)\left\{\frac{\ln(\zeta+b)}{\zeta+c} - \frac{a^2\ln\left(b-\frac{a^2}{b}\right)}{c(a^2+c\bar\zeta)} - \frac{\ln\left(\frac{a^2}{\bar\zeta}+b\right)}{\frac{a^2}{\bar\zeta}+c} + \frac{\ln\left(b-\frac{a^2}{b}\right)}{\zeta+c}\cdot\frac{\zeta}{c}\right\}\Bigg].$$

Die Randbedingung bei der Stromfunktion $\Psi = 0$ am Kreise $r = a$ haben wir dadurch erfüllt, daß wir von jedem Glied den Ausdruck abgezogen haben, der entsteht, falls man ζ bzw. $\bar\zeta$ durch $\frac{a^2}{\bar\zeta}$ bzw. $\frac{a^2}{\zeta}$ ersetzt. Dies ist in den ersten sieben Zeilen der Formel für ψ_1 erfolgt, die zwei letzten bringen die übrigen Randbedingungen in Ordnung. Wenn wir ebenso wie bei der Potentialfunktion vorgegangen wären, so würden im wesentlichen die gleichen Glieder wie dort auftreten, nur mit teilweise anderen Vorzeichen. Das erste Glied ist z. B. identisch mit folgendem:

$$b\,d\left[\frac{\ln\zeta}{\bar\zeta} + \int\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta^2} + \int\frac{\ln\frac{a^2}{\bar\zeta}\,d\bar\zeta}{\bar\zeta^2}\right].$$

4. Numerische Auswertung.

Für die Komponenten der Geschwindigkeit im Kanal gilt:

$$\frac{u}{U} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi}{U} + M^2\frac{\Phi_1}{U}\right) = \quad\Re e\left(1 + \frac{b-c}{\zeta+c} - \frac{b}{\zeta}\right) + \frac{M^2}{U}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$$
$$\frac{v}{U} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Phi}{U} + M^2\frac{\Phi_1}{U}\right) = -\Im m\left(1 + \frac{b-c}{\zeta+c} - \frac{b}{\zeta}\right) + \frac{M^2}{U}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$$
$$\dots (20)$$

Wir wollen $\frac{u}{U}$ und $\frac{v}{U}$ nur am Profilrand angeben. Zur Berechnung der Differentialquotienten $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$ gehen wir über die Polarkoordinaten r,φ der Kreisebene und beachten, daß am Profil $\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = 0$ ist:

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)_{r=a}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=a}$$
$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)_{r=a}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{r=a}.$$

Für $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=a}$ und $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{r=a}$ erhält man wegen $r\,e^{i\varphi} + b = e^{x+iy}$:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=a} = -\frac{b}{a}\sin\varphi;\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{r=a} = 1 + \frac{b}{a}\cos\varphi.$$

$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)_{r=a}$ hat nach (19) die Gestalt:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{U}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)_{r=a}$$
$$= -\frac{1}{4}\Re e\left[b\,d\frac{2i}{a\bar\zeta} + b\frac{2i\,e^{i\varphi}}{\bar\zeta(\zeta+b)} - b\,d\frac{2i\,e^{i\varphi}}{\bar\zeta(\zeta+c)}\right.$$
$$-(b-c)\,d\frac{2i}{a(\bar\zeta+c)} - (b-c)\frac{2i\,e^{i\varphi}}{(\zeta+b)(\bar\zeta+c)}$$
$$+\left(1+3\frac{b^2}{a^2}-2\frac{b^4}{a^4}\right)\frac{2i\,e^{i\varphi}}{\zeta+b}$$
$$b(1-d)\left\{\frac{2i\,e^{i\varphi}}{\zeta(\zeta+b)} + \frac{2i\ln b}{a^2}e^{-i\varphi} - \frac{2i\,e^{i\varphi}\ln(\zeta+b)}{\zeta^2}\right\}$$
$$(c-b)(1-d)\left\{\frac{2i\,e^{i\varphi}}{(\zeta+b)(\zeta+c)} - \frac{2i\,e^{i\varphi}\ln(\zeta+b)}{(\zeta+c)^2}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2i\,e^{i\varphi}\ln\left(b-\frac{a^2}{b}\right)}{(\zeta+c)^2}\right\}\right]_{r=a}.$$

Für die Maximalgeschwindigkeit am Profil im Kanal findet man dann:

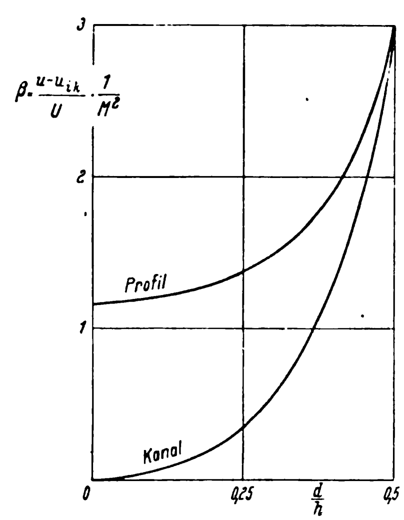


Bild 3. Der Kompressibilitätseinfluß auf die Übergeschwindigkeit am Profil und der Kanalwand.
d = Dicke des Profils,
h = Kanalhöhe.

$$\frac{u_{max}}{U} = 2 + \beta M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wobei

$$\beta = 1 + \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\left\{1 + \frac{b^2}{a^2}\left[-\frac{2a}{b}\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \arcsin\frac{a}{b} - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\right]\right\}.$$

Bild 3 zeigt den Parameter β in Abhängigkeit vom Verdrängungsverhältnis. Für den Fall des Kreises im Luftmeer $a \to 0$, $\frac{d}{h} = 0$ wird $\beta = 7/6$, wie es nach der schon von Rayleigh selbst gerechneten zweiten Näherung beim Kreise der Fall sein muß. Für den anderen Grenzfall $a \to b$, $\frac{d}{h} = 0{,}5$ (sehr lange Platte der Dicke $\frac{h}{2}$ im Kanal der Höhe h) wird $\beta = 3$. In diesem Fall wird die Geschwindigkeit zwischen dem Profil und der Kanalwand konstant sein. Sie berechnet sich aus der Forderung, daß die Stromdichte doppelt so groß wie im Unendlichen wird:

$$u\,\varrho = 2\,U\,\varrho_\infty$$

oder

$$\frac{u}{U} = 2\,\frac{\varrho_\infty}{\varrho}.$$

Entwickelt man $\frac{\varrho_\infty}{\varrho}$ nach der Machschen Zahl $M = \frac{U}{a_\infty}$, so erhält man

$$\frac{u}{U} = 2 + 3\,M^2 + \cdots$$

β ergibt sich also auch zu 3.

Die zweite in Bild 3 eingezeichnete Kurve gibt den Wert von β in der engsten Stelle an der Kanalwand an, wenn man setzt:

$$\frac{u}{U} = \frac{u_{ik}}{U} + \beta\,M^2.$$

u_{ik} ist die Geschwindigkeit an der Wand bei inkompressibler Strömung. In Bild 4 ist der Eintritt der Schallgeschwindigkeit am Profil (kritische Machsche Zahl der Anströmung) in Abhängigkeit vom Verdrängungsverhältnis dargestellt. Die kritische Machsche Zahl erhält man aus (21), indem man $\frac{u_{max}}{U} = \frac{a^*}{U}$ (a^* kritische Geschwindigkeit) setzt.

Für einen Zylinder, wir wählten dazu das Profil 3 von Bild 1a mit dem Dickenverhältnis $\frac{d}{t} = 0{,}761$ und dem Verdrängungsverhältnis $\frac{d}{h} = 0{,}356$, geben die Figuren 5 und 6 noch die Geschwindigkeitsverteilungen am Profil bzw. in der engsten Stelle des Kanals in Abhängigkeit der Machschen Zahl der Anströmung wieder.

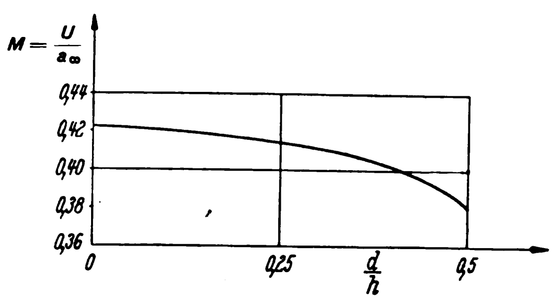


Bild 4. Kritische Machsche Zahl.
d = Dicke des Profils,
h = Kanalhöhe.

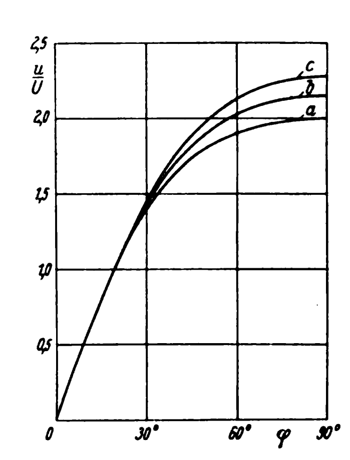


Bild 5. Geschwindigkeitsverteilung längs des Profils der Dicke $\frac{d}{t} = 0{,}761$ $\left(\frac{d}{h} = 0{,}356\right)$ in Abhängigkeit des Polarwinkels.

Kurve a: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0$,

Kurve b: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0{,}3$,

Kurve c: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0{,}407$.

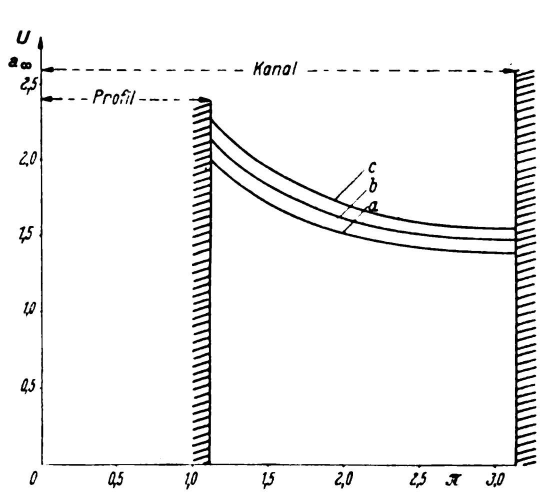


Bild 6. Geschwindigkeitsverteilung im engsten Querschnitt beim Profil der Dicke $\frac{d}{t} = 0{,}761$ $\left(\frac{d}{h} = 0{,}356\right)$

Kurve a: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0$,

Kurve b: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0{,}3$,

Kurve c: Machsche Zahl $M = \frac{U}{a_\infty} = 0{,}407$.

Rollstabilität eines um seine Längsachse freien Flugzeugs bei automatisch gesteuerten, intermittierenden, konstanten Querrudermomenten.

Von Herbert Bilharz.

Bericht aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Der vorliegende Bericht untersucht die Möglichkeit, einen Mitteldecker ohne V-Stellung bei gegebenem Steuergesetz und von Null verschiedener (aerodynamischer) Dämpfung um die Längsachse zu stabilisieren. Wir beschränken uns also auf ein indifferentes gedämpftes System mit nur einem Freiheitsgrad.

Gliederung.

I. Einleitung.

Wir betrachten ein um seine Längsachse indifferentes Flugzeug, einen Mitteldecker ohne V-Stellung des Tragwerks. Durch eine Automatik (Geber und Steuerungsaggregat) werde ein abteilungsweise konstantes, intermittierendes Kräftepaar $M(t) \neq 0$ durch unstetigen Querruderausschlag (bei gegebenem konstanten Staudruck) dem Flugzeug aufgegeben, so daß dieses Drehbewegungen $\varphi(t)$ um die Längsachse ausführt (Bild 1). Das Flugzeug habe überdies eine der Rollgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ proportionale (aerodynamische) Dämpfung.

Der Geber besteht aus einem vollkardanisch aufgehängten Lagekreisel (φ) und einem durch eine Feder (ϱ) elastisch gefesselten geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskreisel ($\dot{\varphi}$). Die Auslenkungen des Dämpfungskreisels werden durch ein Stabwerk mit Gelenken auf eine um eine Achse Z drehbare Walze übertragen, die an ihrem Rand eine Kontaktstelle besitzt und im übrigen aus Isolierstoff besteht. Um Z dreht sich ferner ein längs der Peripherie der Walze gleitender Kontaktstift, der ebenfalls durch einen gelenkigen Stabzug mit dem Lagekreisel verbunden ist (Bild 2). Der Winkel F zwischen Kontaktstelle und -stift genüge dabei der Gleichung

$$F(t) = \varphi(t) + \varrho\,\dot{\varphi}(t)$$

mit reellem Steuerungsparameter ϱ, einem Maß für die Fesselung des Dämpfungskreisels.

An den Stellen

$$F(t) = 0$$

schließt sich ein Stromkreis, und das Steuerungsaggregat schaltet das Moment $M(t)$ impulsiv. Einzelheiten der Schaltung interessieren hierbei nicht. Die impulsive Umschaltung bringt gegenüber der stetigen mancherlei erwünschte Vorteile, auf die ebenfalls nicht eingegangen werden soll. Es sei auf die diesbezüglichen Arbeiten von W. Oppelt (Luftf.-Forsch., Bd. 16 [1939], S. 447 bis 472 und Bd. 17 [1940], S. 59 bis 64) verwiesen.

Gefragt ist nach der Existenz stabiler Rollbewegungen des Flugzeugs um eine bestimmte Lage φ_0 als Funktion des Steuerungsparameters ϱ. Die Lage φ_0 kann wegen der Indifferenz des Systems (was methodisch unwesentlich ist) ohne Beschränkung der Allgemeinheit als horizontal angenommen werden.

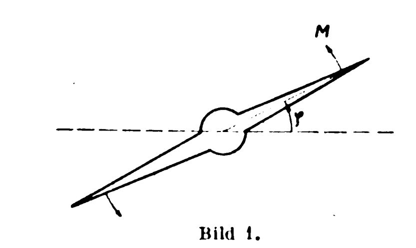


Bild 1.

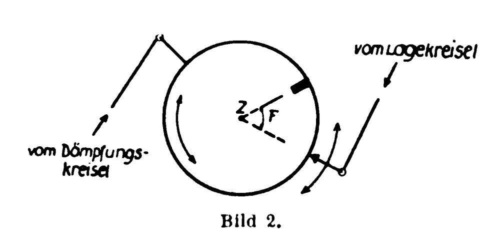


Bild 2.

In den Abschnitten II und III werden folgende Behauptungen bewiesen:

1. Es gibt stabile Bewegungen für $-\infty < \varrho < 0$.
2. Die stabilen Bewegungen werden mit wachsender Zeit periodisch und sind dann explizit angebbar.
3. Eine Vergrößerung von ϱ wirkt wie eine Vergrößerung der (aerodynamischen) Dämpfung des Systems.

Wegen 1. ist ϱ vorläufig in 3. auf das Intervall $-\infty < \varrho < 0$ beschränkt, so daß hiernach sich eine optimale Wirkung für $\varrho \to 0$, also bei nahezu abgeschaltetem Dämpfungskreisel, ergäbe.

Wir nennen dabei eine stabile Bewegung $\varphi_1(t)$ stärker gedämpft als eine stabile Bewegung $\varphi_2(t)$, wenn die Maximalelongation der grenzperiodischen Schwingung von φ_1 kleiner ist als diejenige der grenzperiodischen Schwingung von φ_2, oder, was damit äquivalent ist, wenn die Frequenz der grenzperiodischen Schwingung von φ_1 größer ist als diejenige der grenzperiodischen Schwingung von φ_2.

Die Ergebnisse 1. bis 3. beziehen sich zunächst auf die fehlerfreie Steuerung, welche dem eingangs formulierten Steuerungsgesetz gehorcht. Hingegen wird die technische Ausführung einer Selbststeuerung im allgemeinen mit Fehlern behaftet sein, welche die obigen Ergebnisse mehr oder minder beeinflussen. Wir zählen einige mögliche Fehler auf: Lagerspiel im Übertragungsgestänge zwischen den Kreiseln und der Kontaktvorrichtung des Gebers, Trägheit von Relais und Selbstinduktion von Magneten im Steuerungsaggregat, sowie die Massenträgheit aller bewegten Teile. Diese Fehler wirken sich in einem Nachlauf der aufgeschalteten Momente hinter ihrem Sollstand aus. Sie lassen sich durch Einführung einer »Nachlaufzone« näherungsweise der Rechnung zugänglich machen. Die Nachlaufzone infolge Lagerspiels im Übertragungsgestänge ist nicht amplitudenabhängig und zeitlich konstant. Die anderen

zuvor genannten Einflüsse sind amplitudenabhängig und ergeben eine Zone zeitlich variabler Breite. Die instationäre Querruderwirksamkeit, die ebenfalls eine Nachlaufeigenschaft ist, indem das Moment $M(t)$ erst allmählich seinen vollen Wert erreicht, wenn sich ein stationärer Strömungszustand ausgebildet hat, wird nicht berücksichtigt.

In Abschnitt IV wird die Stabilität bei Vorhandensein einer Nachlaufzone konstanter Breite untersucht. Bei noch so geringer Breite der Zone erhalten wir folgende Resultate, die mit dem Versuch qualitativ übereinstimmen:

1*. Es gibt stabile Bewegungen für $-\infty < \varrho < \infty$.

2*. Die Aussagen 2. und 3. bleiben bestehen.

Wegen 1* kann nunmehr der Steuerungsparameter ϱ in 3. alle reellen Zahlen durchlaufen — er kann insbesondere positiv gewählt werden — womit der Einfluß des Dämpfungskreisels zur Geltung kommt.

Der Übergang von $-\varrho$ zu $+\varrho$ geschieht dabei durch Drallumkehr des Dämpfungskreisels.

Es sei kurz auf eine Variationsmöglichkeit der Automatik hingewiesen: Auf dem Rand der Kontaktwalze des Gebers sei noch eine zweite, der ersten nahe benachbarte Kontaktstelle angebracht. Die Schaltung im Steuerungsaggregat sei so durchgebildet, daß dieses das Moment $M(t)$ identisch auf Null schaltet, solange der Kontaktstift in der engen »Totzone« zwischen den Kontaktstellen verweilt. Durch diese Anordnung läßt sich erreichen, daß die Rollbewegung in endlicher Zeit zur Ruhe kommt. Auf diese Mehrstufenanordnung wird hier nicht eingegangen. Nachlauf- und Totzone können schließlich superponiert werden.

Zusammengefaßt besteht unsere Aufgabe darin, die stabilen Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + a\,\dot{\varphi} + b \cdot \operatorname{sgn}(\varphi + \varrho\,\dot{\varphi}) = 0$$

mit positiven Konstanten a und b als Funktion des reellen Parameters ϱ zu bestimmen. Die Funktion $\operatorname{sgn} f$ ist für alle reellen $f \neq 0$ definiert durch

$$\operatorname{sgn} f = \begin{cases} +1 & f > 0, \\ & \text{für} \\ -1 & f < 0. \end{cases}$$

Die benutzte Methode ist elementar, es wird z. B. nirgends von Dirichletentwicklungen Gebrauch gemacht. Der Stabilitätsbegriff wird im Hinblick auf die technische Realisierbarkeit der Automatik enger gefaßt als dies sonst üblich ist.

II. Periodische Bewegungen.

Es sei

- $t \geq 0$ die Zeitvariable, deren Nullpunkt später geeignet festgelegt wird,
- φ der Rollwinkel, positiv gezählt im Drehsinn gegen den Uhrzeiger von einer festen Nullrichtung, der Horizontalen,
- J das Trägheitsmoment des Flugzeugs um seine Längsachse,
- M das Querrudermoment bei gegebenem konstanten Staudruck und
- $P = M \cdot J^{-1}$,
- $D \neq 0$ die aerodynamische Rolldämpfung des Flugzeugs und $\varkappa = D/2J$.

Die Bewegungsgleichung für den Rollvorgang

$$\ddot{\varphi} + 2\varkappa\,\dot{\varphi} = P \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

ist eine gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Rollwinkel $\varphi(t)$, wobei ein aufgesetzter Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet.

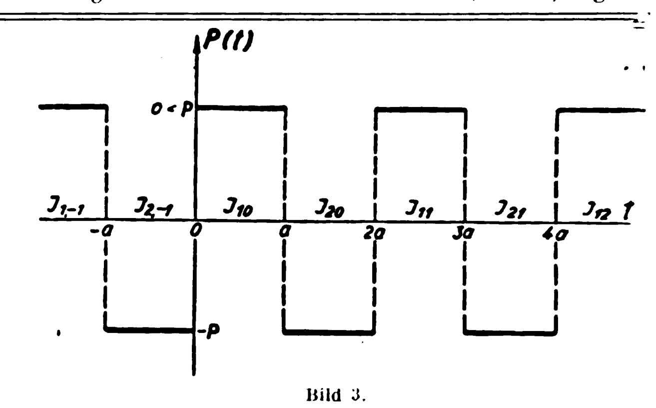


Bild 3.

(1) ist äquivalent dem System (2) von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi} - \chi &= 0 \\ \dot{\chi} + 2\varkappa\chi &= P \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Danach hat die homogene Gleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\varkappa\,\dot{\varphi} = 0$$

die beiden linear unabhängigen Integrale

$$\varphi = \alpha\, e^{-2\varkappa t}, \quad \varphi = \beta \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

mit zwei beliebigen (reellen) Konstanten $\alpha \neq 0$ und β.

Ein Partikularintegral von (1) ist

$$\varphi = \frac{P}{2\varkappa}\, t, \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

so daß wegen (3) und (4) die allgemeine Lösung von (1) sich in der Gestalt

$$\varphi(t) = \alpha\, e^{-2\varkappa t} + \frac{P}{2\varkappa}\, t + \beta \quad \ldots \ldots (5)$$

darbietet.

Es sei a positiv reell, s durchlaufe die ganzen Zahlen ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... und $P(t)$ sei eine mod. $2a$ periodische, abteilungsweise konstante Funktion von t. Wir setzen speziell

$$P(t) = \left\{\begin{matrix} +P\,(>0) & & 2sa \leq t \leq (2s+1)\,a \\ & \text{für} & \\ -P & & (2s+1)\,a \leq t \leq (2s+2)\,a \end{matrix}\right\} \quad (6)$$

und haben damit die Zeitmarke $t = 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit eindeutig in einer Aufschaltstelle (d. i. Übergang von $-P$ zu $+P$) festgelegt (Bild 3). Soweit nichts Gegenteiliges ausdrücklich gesagt wird, halten wir im folgenden an dieser Normierung fest. Ferner sei

$$\begin{matrix} J_{1s} & & 2sa \leq t < (2s+1)\,a, \\ & \text{das Intervall} & \\ J_{2s} & & (2s+1)\,a \leq t \leq (2s+2)\,a \end{matrix}$$

und

$$J_{10} + J_{20}$$

das Grundintervall.

Mit den zunächst unbestimmten Integrationskonstanten A_{1s}, B_{1s}, A_{2s}, B_{2s} folgt dann aus (5)

$$\varphi(t) = \left\{\begin{matrix} A_{1s}\, e^{-2\varkappa t} + \dfrac{P}{2\varkappa}\, t + B_{1s} & & J_{1s} \\ & \text{in} & \\ A_{2s}\, e^{-2\varkappa t} - \dfrac{P}{2\varkappa}\, t + B_{2s} & & J_{2s} \end{matrix}\right\} \quad \ldots (7)$$

Wir kommen nun zur Bestimmung dieser Konstanten. Es werde hierfür gefordert:

1. Stetigkeit der Lösungen (7) und ihrer ersten Ableitungen nach t in den Intervallen $J_{1s} + J_{2s}$, also

$$\left.\begin{aligned} \varphi((2s+1)\,a)_{J_{1s}} = \varphi((2s+1)\,a - 0) &= \varphi((2s+1)\,a + 0) = \varphi((2s+1)\,a)_{J_{2s}} \\ \dot{\varphi}((2s+1)\,a - 0) &= \dot{\varphi}((2s+1)\,a + 0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

2. Periodizität mod. $2a$ in t von φ und $\dot{\varphi}$, also

$$\left.\begin{aligned} \varphi(2sa)_{J_{1s}} = \varphi(2sa + 0) &= \varphi((2s+2)\,a - 0) = \varphi((2s+2)\,a)_{J_{2s}} \\ \dot{\varphi}(2sa + 0) &= \dot{\varphi}((2s+2)\,a - 0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Explizit lauten die Gl. (8) und (9):

$$\left.\begin{array}{llll} e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{1s} + B_{1s} - & e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{2s} - B_{2s} & = -\frac{P}{\varkappa}(2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{1s} & +2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{2s} & = -\frac{P}{\varkappa} \\ e^{-4\varkappa s a} A_{1s} + B_{1s} - & e^{-2\varkappa(2s+2)a} A_{2s} - B_{2s} & = -\frac{P}{\varkappa}(2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-4\varkappa s a} A_{1s} & +2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+2)a} A_{2s} & = -\frac{P}{\varkappa} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Dies ist ein System von vier linearen inhomogenen Gleichungen mit verschwindender Determinante Δ_s für die Unbekannten $A_{1s}, .., B_{2s}$. Da jedoch der Minor

$$\Delta_s^{(44)} = 2\varkappa e^{-2\varkappa(4s+1)a}\left(1 - e^{-4\varkappa a}\right)$$

von Null verschieden ist für $a\varkappa \neq 0$, enthält das System (10) nur dann keinen Widerspruch, wenn der Rang der folgenden Matrix drei ist

$$\begin{pmatrix} e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 1 & -e^{-2\varkappa(2s+1)a} & -1 & \frac{P}{\varkappa}(2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 0 & 2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 0 & \frac{P}{\varkappa} \\ e^{-4\varkappa s a} & 1 & -e^{-2\varkappa(2s+2)a} & 1 & -\frac{P}{\varkappa}(2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-4ksa} & 0 & 2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+2)a} & 0 & -\frac{P}{\varkappa} \end{pmatrix} \quad \ldots (11)$$

Wir zeigen zunächst, daß der Rang r von (11) kleiner als vier ist. aus dem Vorangehenden folgt dann $r = 3$. Wegen der speziellen Gestalt von (11) genügt hierfür, daß für jedes a z. B. die folgende Determinante

$$\tilde{\Delta}_s = \begin{vmatrix} e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 1 & -e^{-2\varkappa(2s+1)a} & (2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 0 & 2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} & 1 \\ e^{-4\varkappa s a} & 1 & -e^{-2\varkappa(2s+2)a} & (2s+1)a \\ -2\varkappa e^{-4\varkappa s a} & 0 & 2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+2)a} & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall.

Wir setzen in (10) für B_{2s} einen festen Wert B_{2s}^0 ein und lösen die drei inhomogenen linearen Gleichungen

$$\begin{array}{ll} e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{1s} + B_{1s} - & e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{2s} = B_{2s}^0 - \frac{P}{\varkappa}(2s+1)a, \\ -2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{1s} & +2\varkappa e^{-2\varkappa(2s+1)a} A_{2s} = \quad -\frac{P}{\varkappa}, \\ e^{-4\varkappa s a} A_{1s} + B_{1s} - & e^{-2\varkappa(2s+2)a} A_{2s} = B_{2s}^0 - \frac{P}{\varkappa}(2s+1)a. \end{array}$$

Setzen wir noch speziell

$$B_{2s}^0 = \frac{P}{\varkappa}(2s+1)a,$$

so ergibt sich für die vier Integrationskonstanten in (7):

$$\left.\begin{array}{ll} A_{1s} = \frac{P}{2\varkappa^2}\,\frac{e^{4\varkappa s a}}{\left(1+e^{-2\varkappa a}\right)}, & B_{1s} = \frac{-P}{2\varkappa^2} \\ A_{2s} = \frac{-P}{2\varkappa^2}\,\frac{e^{2\varkappa(2s+1)a}}{\left(1+e^{-2\varkappa a}\right)}, & B_{2s} = \frac{P}{\varkappa}(2s+1)a \end{array}\right\} \quad (12)$$

Da die B nur bis auf eine reelle additive Konstante C bestimmt sind, ist damit eine einparametrige Schar von periodischen Lösungen von (1), deren Existenz auch aus allgemeinen Sätzen über Differentialgleichungen gefolgert werden könnte, explizit angegeben. Wegen der Periodizität der Lösung darf man sich dabei auf das Grundintervall $s = 0$ beschränken, was wir im folgenden tun wollen. Die Koeffizienten sind dann

$$\left.\begin{array}{ll} A_{10} = \frac{P}{2\varkappa^2\left(1+e^{-2\varkappa a}\right)}, & B_{10} = \frac{-P}{2\varkappa^2} \\ A_{20} = \frac{-P e^{2\varkappa a}}{2\varkappa^2\left(1+e^{-2\varkappa a}\right)}, & B_{20} = \frac{P}{\varkappa}\cdot a \end{array}\right\} \quad \ldots (13)$$

Aus der Mannigfaltigkeit der Lösungen (7) mit (12) greifen wir eine heraus

$$\Phi(t) = \varphi(t) + C^0 \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

und bestimmen die Konstante C^0 so, daß Φ die Mittellage Null ergibt. Hierzu ist wegen der Periodizität notwendig und hinreichend, daß

$$\int_0^{2a} \Phi(t)\,dt = 0$$

ist. Für C^0 folgt nach kurzer Zwischenrechnung der Wert

$$C^0 = \frac{P}{4\varkappa^2}(1 - a\varkappa).$$

Für ganzzahliges n genügen Φ und $\dot{\Phi}$ den Funktionalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(t) = (-1)^n\,\Phi(t+na) \\ \dot{\Phi}(t) = (-1)^n\,\dot{\Phi}(t+na) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Die Periode 2a bestimmt sich durch Vorgabe von $\dot{\Phi}$ zur Zeit $t = 0$, also aus

$$\dot{\Phi}(0) \equiv \dot{\varphi}(0) = \frac{P\left(e^{-2\varkappa a} - 1\right)}{2\varkappa\left(e^{-2\varkappa a} + 1\right)};$$

daraus folgt

$$2a = \frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{Log}\,\frac{P - 2\varkappa\dot{\Phi}(0)}{P + 2\varkappa\dot{\Phi}(0)} \quad \ldots\ldots (16)$$

Bei positiven P und $\varkappa$ ist 2a positiv reell für $\dot{\Phi}(0) < 0$ und wird für $\dot{\Phi}(0) = -\frac{P}{2\varkappa}$ logarithmisch unendlich (sog. aperiodischer Fall). Für $\dot{\Phi}(0) > 0$ ist die Bewegung instabil (Zeitbeginn beim Aufschaltvorgang!).

An den Stellen

$$t_* = \frac{1}{2\varkappa}\,\mathrm{Log}\,\frac{P - 2\varkappa\dot{\Phi}(0)}{P} + 2sa$$

hat $\Phi(t)$ ein Minimum Φ_* und für

$$t^* = t_* + a$$

ein Maximum Φ^*; dabei ist

$$-\Phi_* = \Phi^* = \left|\frac{A_{10}P}{P - 2\varkappa\dot{\Phi}(0)} - \frac{P}{4\varkappa^2}\left(1 + a\varkappa - \mathrm{Log}\,\frac{P - 2\varkappa\dot{\Phi}(0)}{P}\right)\right| \quad (17)$$

und im aperiodischen Fall

$$\lim_{a=\infty} \Phi^* = 2\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

also $\Phi(t)$ eine volle Umdrehung.

Wir wollen uns im folgenden auf diejenigen Fälle beschränken, für welche

$$-2\pi < \Phi(t) < 2\pi$$

ist. Für $\dot{\Phi}(0) < -\frac{P}{2\varkappa}$ wird die Periode komplex, d. h. die Bewegung bleibt periodisch, der maximale Rollwinkel



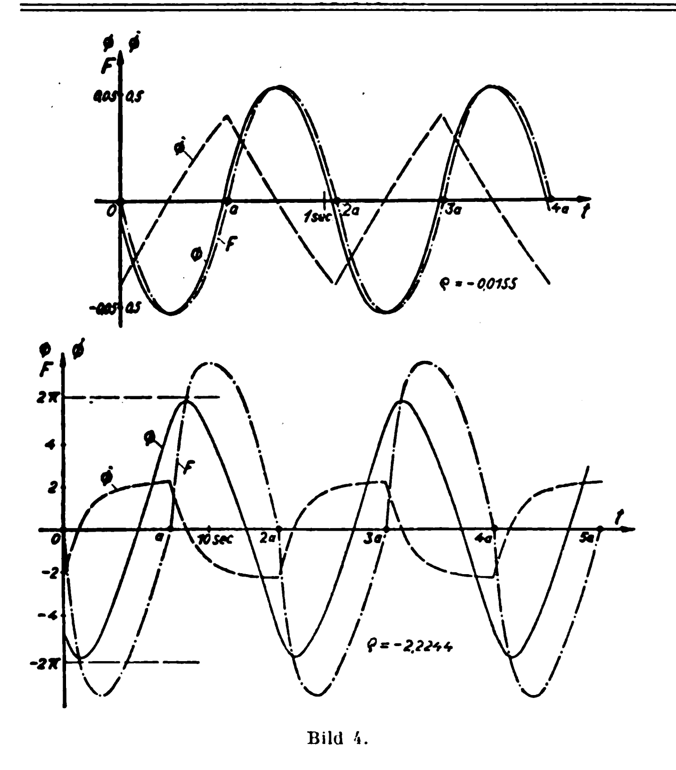


Bild 4.

wird jedoch größer als 2π. Wegen (18) in Verbindung mit (16) werde also $\dot{\Phi}(0)$ auf das Intervall

$$-\frac{P}{2\varkappa} < \dot{\Phi}(0) < 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

beschränkt. Schließlich ist für die periodische Bewegung $\Phi(t)$ aus (14)

$$\operatorname{sgn}\Phi(0) = \operatorname{sgn}\dot{\Phi}(0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Zu jedem $\dot{\Phi}(0)$ im Intervall (19) gibt es daher eine reelle Zahl $\varrho < 0$ so, daß

$$\Phi(0) + \varrho\,\dot{\Phi}(0) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

und wegen (15)

$$\Phi(na) + \varrho\,\dot{\Phi}(na) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

für jedes ganzzahlige n ist.

Die Funktion

$$F(t) \equiv \Phi(t) + \varrho\,\dot{\Phi}(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

kann daher als Steuerungsfunktion betrachtet werden, denn an ihren separiert liegenden sukzessiven (einfachen) Nullstellen vermittelt sie gerade den Übergang von $+P$ zu $-P$ und umgekehrt.

In Bild 4 sind zwei periodische Lösungen $\Phi(t)$, ihre Geschwindigkeiten $\dot{\Phi}(t)$ und die zugehörigen Steuerungsfunktionen aus (23) dargestellt. Den Rechnungen wurden dabei folgende Werte zugrunde gelegt:

P	$2\varkappa$	$P/2\varkappa$	ϱ	$\dot{\Phi}(0)$	$\Phi(0)$	a
1,5255	0,66964	2,2781	−0,0155	−0,4	−0,0062	0,5299
			−2,2244	−2,2446	−4,9928	7,3260

Für ϱ als Funktion von $\dot{\Phi}(0)$ bzw. der Halbperiode a ergeben sich die Ausdrücke

$$\varrho = \frac{1}{2\varkappa}\left(1 + \frac{P}{4\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}\,\operatorname{Log}\frac{P - 2\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}{P + 2\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}\right) \quad \ldots \quad (24)$$

bzw.

$$\varrho = \frac{1}{2\varkappa}\left(1 - a\varkappa\,\frac{1 + e^{-2\varkappa a}}{1 - e^{-2\varkappa a}}\right).$$

Es sei die reelle Zahl ϱ fest gewählt und $P > 0$.

Wir nennen die Integrale der Differentialgleichung (1) mit

$$P(t) = (-1)^{\nu}\cdot P \text{ für } t_{\nu} < t < t_{\nu+1} \ (t_0 = 0;\ \nu \geq 0,\ \text{ganz})$$

und

$$F(t_{\nu}) = 0$$

Lösungen in einem gesteuerten System S_{ϱ}.

Mit Hilfe dieser Definition ergibt sich aus dem Vorangehenden:

In jedem gesteuerten System S_{ϱ} mit $\varrho < 0$ gibt es genau eine Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\Phi}_{\varrho}(0)$ mit

$$\frac{-P}{2\varkappa} < \dot{\Phi}_{\varrho}(0) < 0$$

und eine Anfangslage $\Phi_{\varrho}(0)$ mit

$$\operatorname{sgn}\Phi_{\varrho}(0) = \operatorname{sgn}\dot{\Phi}_{\varrho}(0)$$

derart, daß die durch (23) gesteuerte Funktion $\Phi_{\varrho}(t)$ mit

$$-2\pi < \Phi_{\varrho}(t) < 2\pi$$

mod. 2a periodisch ist und die Mittellage Null hat. Die positiv-reelle Periode 2a bestimmt sich aus (16).

Bild 5 gibt für die obigen P- und $\varkappa$-Werte eine Übersicht über die Anfangswerte der periodischen Lösungen in allen Systemen S_{ϱ}. Im unteren Teil der Figur ist über $\dot{\Phi}(0)$ die Kurve

$$\Phi(0) = -\varrho\,\dot{\Phi}(0) = -\frac{\dot{\Phi}(0)}{2\varkappa}\left(1 + \frac{P}{4\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}\,\operatorname{Log}\frac{P - 2\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}{P + 2\varkappa\,\dot{\Phi}(0)}\right) \quad \ldots \quad (25)$$

gezeichnet. Die Gesamtheit der Systeme S_{ϱ} ist in einem $(\dot{\Phi}(0),\ \Phi(0))$-Diagramm festgelegt durch ein Geradenbüschel G durch den Nullpunkt, das einzelne System S_{ϱ_0} mit festem ϱ_0 durch die Gerade G_0 des Büschels G, deren Neigungswinkel γ_0 sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{-\Phi(0)}{\dot{\Phi}(0)} = \varrho_0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \quad (26)$$

bestimmt. Der vom Nullpunkt verschiedene Schnittpunkt (einen solchen gibt es nur für $\varrho_0 < 0$) dieser Geraden mit der Kurve (25) ergibt die Anfangswerte der zugehörigen periodischen Lösung.

Es genügt hierbei, sich in Bild 5 auf die rechte Halbebene zu beschränken. Wäre der Zeitpunkt Null in eine Schaltstelle verlegt, an welcher $+P$ in $-P$ übergeht, so würden wir die linke Halbebene in Bild 5 erhalten, wobei die Quadranten 1 bzw. 4 den Quadranten 3 bzw. 2 in der $(\dot{\Phi}(0),\ \Phi(0))$-Ebene entsprächen. Von dieser Tatsache machen wir in Abschnitt III gelegentlich Gebrauch. Die so gewonnenen periodischen Bewegungen unterscheiden sich von den bereits angegebenen nur durch eine Phasenverschiebung um ein ungerades Multiplum ihrer Halbperiode. Die Mannigfaltigkeit der Lösungen geht also durch Vorzeichenänderung der Anfangswerte und Momentumkehr in sich über.

Im oberen Teil von Bild 5 sind über $\dot{\Phi}(0)$ die Halbperiode a aus (16) und die maximale Amplitude Φ^* aus (17) aufgetragen.

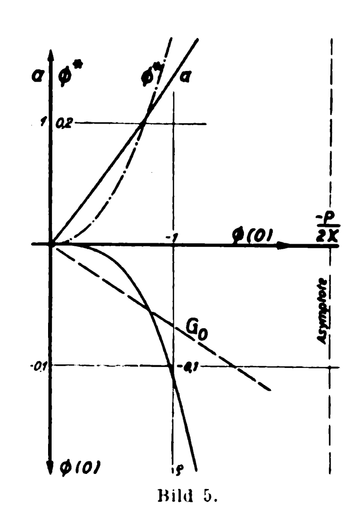


Bild 5.

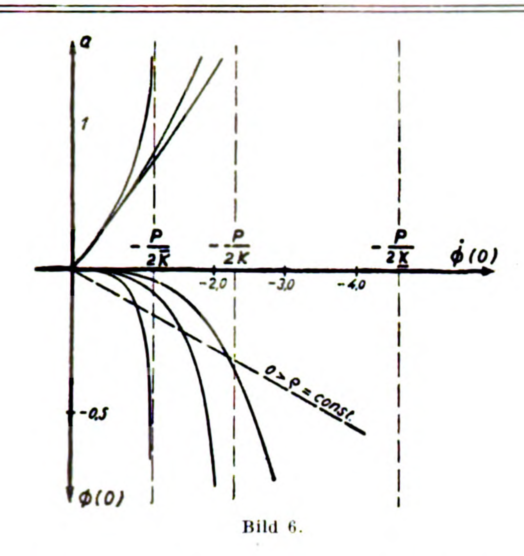


Bild 6.

Schließlich wurde die Dämpfung variiert $\left(\bar{\varkappa} = 2\,\varkappa,\ \underline{\varkappa} = \frac{\varkappa}{2}\right)$ und die Funktionen (16) und (25) in Bild 6 über $\dot{\Phi}(0)$ gezeichnet. Dieser Darstellung ist folgendes Resultat mühelos zu entnehmen:

Im fest gewählten System nimmt mit wachsender Dämpfung die Periode ab, d. h. die Schwingung wird rascher (im Gegensatz zur freien Schwingung); oder bei konstanter Periode nimmt mit wachsender Dämpfung der Steuerungsparameter ϱ ab; oder wachsendes ϱ wirkt wie eine Vergrößerung der aerodynamischen Dämpfung.

Wir haben damit ausführlich die periodischen Lösungen in gesteuerten Systemen untersucht, obwohl die Frage nach den periodischen Bewegungen in diesen zunächst nicht begründet erscheint, denn die periodischen Lösungen stellen sich nur in Systemen mit negativem ϱ ein und dort nur bei bestimmten Anfangswerten, sind also vorerst vor den stabilen nichtperiodischen Lösungen nicht bevorzugt. Trotzdem erweisen sie sich für die weitere Untersuchung als sehr nützlich.

III. Stabilitätsuntersuchung.

Zunächst geben wir eine Definition für die Stabilität von Integralen der Differentialgleichung (1) in gesteuerten Systemen:

Bewegungen $\Psi(t)$ in S_ϱ sollen stabil heißen, wenn die Funktion

$$F(t) \equiv \Psi(t) + \varrho\,\dot{\Psi}(t)$$

abzählbar unendlich viele Nullstellen t_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ hat und es zwei positive endliche Zahlen p und q gibt (welche vom System S_ϱ abhängen dürfen), derart, daß gleichmäßig für alle ν

$$p \leq t_{\nu+1} - t_\nu \leq q$$

ist.

Wegen

$$\nu\,p \leq t_\nu \ (\leq \nu\,q)$$

haben diese Nullstellen keinen Häufungspunkt im Endlichen.

Nach dieser Definition sind z. B. die zuvor angeführten periodischen Lösungen stabil, da F unendlich viele Nullstellen hat und die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Nullstellen gleich der Halbperiode $a\ (\neq 0)$ ist. Ferner ersieht man unschwer, daß die stabilen Lösungen für alle Zeiten beschränkt sind und bis auf eine Menge vom Maß Null

$$\operatorname{sgn} F(t) \neq \operatorname{sgn} P(t)$$

ist; weitere Eigenschaften werden nun aufgezeigt. Es gilt nämlich:

Für $\varkappa > 0$ sind die Integrale $\Psi(t)$ von (1) mit $\dot{\Psi}(0) < 0$ in den gesteuerten Systemen S_ϱ mit $-\infty < \varrho < 0$ stabil, und alle stabilen Lösungen in einem solchen fest gewählten System konvergieren asymptotisch gegen die zu eben diesem System gehörende periodische Lösung; die Lösungen in Systemen mit positivem ϱ sind sämtlich instabil; für $\varrho = 0$ strebt die Bewegung zur Ruhe, die Ruhelage selbst jedoch ist instabil.

Darnach ist die obige Stabilitätsdefinition sinnvoll, denn für die stabilen Bewegungen existiert dann der Grenzwert

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(\tau)\,d\tau$$

und ist gleich Null.

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Wir beginnen mit folgendem Satz:

Es sei $\varrho < 0$ fest gewählt und $t = 0$ gemäß unserer Vereinbarung in eine Aufschaltstelle gelegt. $\dot{\Phi}(0)$ sei die zur eindeutig bestimmten periodischen Lösung $\Phi(t)$ gehörige Anfangsgeschwindigkeit im System S_ϱ. $\Psi(t)$ sei ein Integral von (1) in S_ϱ mit

$$\Psi(0) + \varrho\,\dot{\Psi}(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

und

$$\dot{\Psi}(0) = \dot{\Phi}(0) + \delta_0$$

mit $\delta_0 \neq 0$ derart, daß

$$-\frac{P}{2\,\varkappa} < \dot{\Psi}(0) < 0$$

ist. Dann ist $\Psi(t)$ stabil und strebt für wachsendes t asymptotisch gegen $\Phi(t)$, d. h. nach hinreichend langer Zeit stellt sich die zu S_ϱ gehörende periodische Lösung ein.

Beweis: Wir schreiben $\dot{\Psi}_0(0)$ für $\dot{\Psi}(0)$. Neben der periodischen Lösung $\Phi(t)$ in S_ϱ mit der Periode $2a$ betrachten wir das periodische Integral $\Phi_0(t)$ von (1) mit

$$\dot{\Phi}_0(0) = \dot{\Psi}_0(0), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

das zu einem System S_{ϱ_0} gehört, das wegen $\delta_0 \neq 0$ von S_ϱ verschieden ist und die Periode $2a_0$ hat. Im folgenden beschränken wir uns auf $\delta_0 < 0$, also $a < a_0$; der Beweis für positives δ_0 verläuft analog.

Es sei $0 < t < a$. Dann ist nach (5)

$$\Psi(t) = \alpha\,e^{-2\varkappa t} + \frac{P}{2\,\varkappa}\,t + \beta$$

ein Integral von (1) mit

$$\dot{\Psi}(t) = -2\,\varkappa\,\alpha\,e^{-2\varkappa t} + \frac{P}{2\,\varkappa}$$

und

$$\dot{\Psi}(0) = -2\,\varkappa\,A_{10} + \delta_0 + \frac{P}{2\,\varkappa}$$

mit A_{10} aus (15), also

$$\alpha = A_{10} - \frac{\delta_0}{2\,\varkappa}.$$

Wegen (27) ist ferner

$$\Psi(0) = \Phi(0) - \varrho\,\delta_0$$

mit

$$\Phi(t) = A_{10}\,e^{-2\varkappa t} + \frac{P}{2\,\varkappa}\,t + B_{10} + C^0,$$

also

$$\beta = B_{10} + C^0 + \delta_0 \left(\frac{1}{2\,\varkappa} - \varrho\right).$$

Für $0 < t < a$ wird daher

$$\Psi(t) + \varrho\,\dot{\Psi}(t) = \Phi(t) + \varrho\,\dot{\Phi}(t) + \delta_0 \left(\frac{1}{2\,\varkappa}(1 - e^{-2\varkappa t}) - \varrho\left(1 - \frac{1}{2\,\varkappa}\,e^{-2\varkappa t}\right)\right) < 0. \quad (29)$$

Aus

$$\Phi_0(0) + \varrho_0\,\dot{\Phi}_0(0) = \Psi(0) + \varrho\,\dot{\Psi}(0) = 0$$

folgt

$$\Psi(0) = \Phi_0(0) - K_0$$

mit der Konstanten

$$K_0 = (\varrho - \varrho_0)\,\dot{\Psi}(0) \qquad (< 0).$$

Für $t = a_0$ wird

$$\Psi(a_0) + \varrho\,\dot\Psi(a_0) = \Phi_0(a_0) + \varrho_0\,\dot\Phi_0(a_0) + (\varrho - \varrho_0)\,(\dot\Phi_0(a_0) - \dot\Psi(0))$$
$$= -2\,\dot\Psi_0(0)\cdot(\varrho - \varrho_0) > 0 \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

da nach (15) und (28)

$$\dot\Phi_0(a_0) = -\dot\Psi_0(0)$$

ist.

Wegen der Stetigkeit von

$$F(t) \equiv \Psi(t) + \varrho\,\dot\Psi(t)$$

folgt aber aus (29) und (30), daß diese Funktion mindestens eine Nullstelle t^0 mit

$$a < t^0 < a_0$$

hat und nach (29) im Intervall $0 < t < a$ nullstellenfrei ist.

t^0 sei die erste dieser Nullstellen; sie ist die auf $t = 0$ nächstfolgende Wurzel der Steuerungsgleichung

$$F(t) \equiv \Psi(t) + \varrho\,\dot\Psi(t) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

An der Stelle $t = t^0$ schaltet $+P$ nach $-P$. Wir führen eine neue Zeitvariable

$$t_1 = t - t^0 \qquad (\geq 0)$$

ein und setzen

$$\dot\Psi_0(t) = \dot\Psi_1(t_1)$$

und

$$\Psi_0(t) = \Psi_1(t_1),$$

also

$$\dot\Psi_0(t^0) = \dot\Psi_1(0)$$

und

$$\Psi_0(t^0) = \Psi_1(0).$$

Durch direkte Rechnung überzeugt man sich, daß schließlich die Ungleichungen

$$0 < \dot\Psi_1(0) < |\dot\Psi_0(0)|$$

und

$$0 < \Psi_1(0) < |\Psi_0(0)|$$

gelten, mithin

$$0 < \dot\Psi_1(0) = \dot\Phi(a) + \delta_1$$

ist mit $0 < \delta_1 < |\delta_0|$ wegen

$$0 < \dot\Psi_1(0) < |\dot\Psi_0(0)| = |\dot\Phi(0) + \delta_0| \leq |\dot\Phi(0)| + |\delta_0| = \dot\Phi(a) + |\delta_0|.$$

Für $t_1 > 0$ ist also die gleiche Rechnung wie zuvor mit $-P$ statt $+P$, positivem δ_1 und den Anfangswerten $\dot\Psi_1(0)$, $\Psi_1(0)$ zu wiederholen. Zum Vergleich nehme man die periodische Lösung $\Phi_1(t_1)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot\Phi_1(0) = \dot\Psi_1(0)$$

und der Periode $2a_1$ im System S_{ϱ_1}, wobei wegen $a < a_1 < a_0$

$$\varrho > \varrho_1 > \varrho_0$$

ist. So findet man wieder eine erste auf t^0 folgende Nullstelle t_1^0 der Steuerungsfunktion

$$\Psi_1(t_1) + \varrho\,\dot\Psi_1(t_1)$$

mit

$$t_1^0 \geq t^0 + a$$

und Endwerten $\Psi_1(t_1^0)$, $\dot\Psi_1(t_1^0)$, welche absolut kleiner als die Anfangswerte zur Zeit $t_1 = 0$ und diesen den Vorzeichen nach entgegengesetzt sind.

Schließlich ergibt sich durch wiederholte Fortsetzung der beschriebenen Methode eine wachsende Folge

$$0 < t^0 < t_1^0 < \ldots < t_r^0 < \ldots$$

von Wurzeln der Gl. (31), von denen je zwei aufeinander folgende um mindestens a und höchstens a_0 Zeiteinheiten voneinander entfernt liegen. Zu jedem t_r^0 gibt es aber ein δ_r derart, daß die alternierende Folge

$$\delta_0,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_r,\ \ldots$$

Nullfolge ist. Damit ist unsere Behauptung für $\delta_0 < 0$ bewiesen. Setzen wir $\delta_0 > 0$ voraus, so haben je zwei aufeinander folgende Wurzeln t_r^0 von (31) mindestens den Abstand $a_0\,(> 0)$ und höchstens den Abstand $a\,(> a_0)$, so daß auch hier die Schlußweise des obigen Beweises in Gültigkeit bleibt.

Mit den Werten zu Bild 4 für $\varrho = -0{,}0155$ und $\delta_0 = \pm\,0{,}1$ zeigt Bild 7 nach einem Vorschlag von B. Hesselbach im Phasenraum $(\dot\Phi, \Phi)$ je drei volle Schwingungen und die periodische Bewegung, welche mit wachsendem t sich einstellt. Die Steuerungsgleichung

$$\Phi + \varrho\,\dot\Phi = 0$$

stellt im Phasenraum eine durch den Nullpunkt gehende Gerade mit der Steigung-ϱ dar. Durch Elimination der Variablen t in der Differentialgleichung

$$\ddot\Phi + 2\varkappa\dot\Phi + P\cdot\operatorname{sgn}(\Phi + \varrho\dot\Phi) = 0 \qquad (P > 0)$$

erhalten wir bis auf eine additive reelle Konstante für Φ als Funktion von $\dot\Phi$ den Ausdruck

$$\Phi = \frac{1}{2\varkappa}\left(\pm\frac{P}{2\varkappa} - \dot\Phi\right) \mp \frac{P}{4\varkappa^2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{P}{2\varkappa} \mp \dot\Phi\right);$$

dabei gelten durchweg die oberen bzw. unteren Vorzeichen in den Halbebenen $\Phi + \varrho\dot\Phi < 0$ bzw. > 0. Die Lösungen gehen durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} \dot\Phi & \Phi \\ -\dot\Phi & -\Phi \end{pmatrix}$$

ineinander über. Es ergeben sich zwei Scharen von je ∞^1 einander zugekehrten, orientierten, parabelähnlichen Parallelkurven, deren Extremwerte auf der Geraden $\dot\Phi = 0$ liegen und dort horizontale Tangenten haben.

Die periodische Bewegung im gesteuerten System S_ϱ mit negativem ϱ wird im Phasenraum durch eine einen konvexen Bereich berandende geschlossene Linie wiedergegeben; ihre zwei kongruenten Teilbögen gehören beiden Kurvenscharen an und schließen sich auf der Steuerungsgeraden. Die anderen stabilen Bewegungen bestehen abwechselnd aus je einem Bogen der einen und der anderen Schar, setzen sich auf der Steuerungsgeraden stetig aneinander und bilden so einen offenen Kurvenzug, der gegen den geschlossenen der periodischen Bewegungen von innen oder von außen sich spiralenförmig anschmiegt. Für $\varrho < 0$ stimmen die stabilen Bewegungen der intermittierenden Steuerung mit den Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot\Phi + 2\varkappa\dot\Phi + P\cdot\operatorname{sgn}(\Phi + \varrho\dot\Phi) = 0$$

überein. Dieses Ergebnis legt nahe, den Geber der Automatik derart abzuändern — was in der Tat durchführbar ist — daß als Steuerungsgesetz die Signumbedingung

$$P(t) = \begin{cases} +P\,(>0) \\ -P \end{cases} \text{für}\ \operatorname{sgn}(\Phi + \varrho\dot\Phi) = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$$

vorgeschrieben wird.

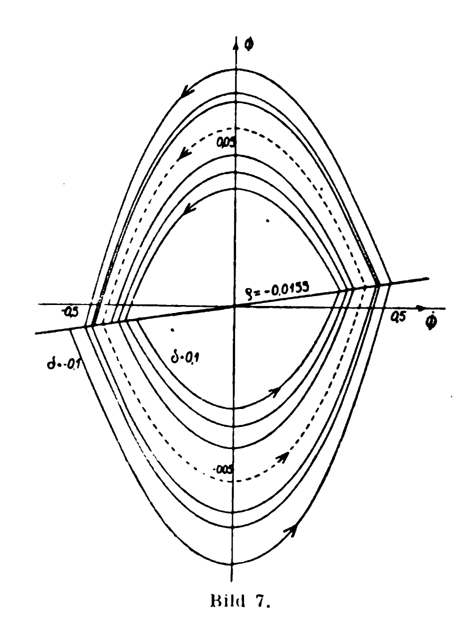


Bild 7.

Wir kommen nun zu den Systemen mit $\varrho \geq 0$. Hierfür gilt folgender Satz:

Es sei $\varrho > 0$ und $\Psi(t)$ eine Lösung von (1) in S_ϱ mit

$$-\frac{P}{2\varkappa} < \dot\Psi(0) < 0.$$

Dann ist $\Psi(t)$ instabil.

Beweis: Zunächst ist

$$\Psi(0) + \varrho\,\dot\Psi(0) = 0.$$

Neben $\Psi(t)$ betrachten wir die periodische Lösung $\Phi(t)$, für welche

$$\dot\Phi(0) = \dot\Psi(0)$$

ist. $\Phi(t)$ gehört zu einem System S_{ϱ_0} mit $\varrho_0 < 0$ und der Periode $2a_0$. Es ist also

$$\Phi(t) + \varrho_0\,\dot\Phi(t) = 0$$

für

$$t = 0,\quad a_0,\quad 2a_0,\quad \ldots$$

und für $0 \leq t \leq a_0$

$$\Psi(t) = \Phi(t) + C_{10} - B_{10} - C^0$$

mit der Konstanten

$$C_{10} > B_{10} + C^0 = \frac{-P}{4\varkappa^2}(1 + a_0\varkappa).$$

Für $t = a_0$ ist dann

$$\begin{aligned}\Psi(a_0) + \varrho\,\dot\Psi(a_0) &= \Phi(a_0) + \varrho_0\,\dot\Phi(a_0) + C_{10} - B_{10} - C^0 + (\varrho - \varrho_0)\,\dot\Phi(a_0)\\ &= C_{10} - B_{10} - C^0 + (\varrho - \varrho_0)\,\dot\Phi(a_0) > 0 \quad \ldots\ldots (32)\end{aligned}$$

R sei eine obere Schranke für $\varrho > 0$ derart, daß

$$\frac{d}{dt}(\Psi + \varrho\,\dot\Psi)_{t=+0} < 0$$

wird, also

$$R = \frac{1}{2\varkappa}\left(1 - \frac{P}{P - 2\varkappa\,\dot\Phi(0)}\right) = -\frac{\dot\Phi(0)}{\ddot\Phi(0)} > \varrho > 0.$$

Die Funktion

$$\bar\Phi = -R \cdot \dot\Phi(0) \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

gibt eine obere Schranke für die Anfangslage $\Psi(0)$ zu gegebenem $\dot\Psi(0)$ so, daß die Steuerungsfunktion

$$F(t) = \Psi(t) + \varrho\,\dot\Psi(t) \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

an der Stelle $t = +0$ fällt.

$\bar\Phi$ ist in Bild 8 über $\dot\Phi(0)$ aufgetragen. Für $\dot\Phi(0) \leq 0$ ist $\bar\Phi$ nicht negativ, monoton steigend und nach unten konvex; die Tangente im Nullpunkt ist horizontal. Alle Geraden, die im Innern des ersten Quadranten liegen und durch den Nullpunkt hindurchgehen, schneiden also die Kurve $\bar\Phi$ noch in einem vom Nullpunkt verschiedenen Punkt. Diese Geraden repräsentieren aber nach (26) die Systeme S_ϱ mit positivem ϱ.

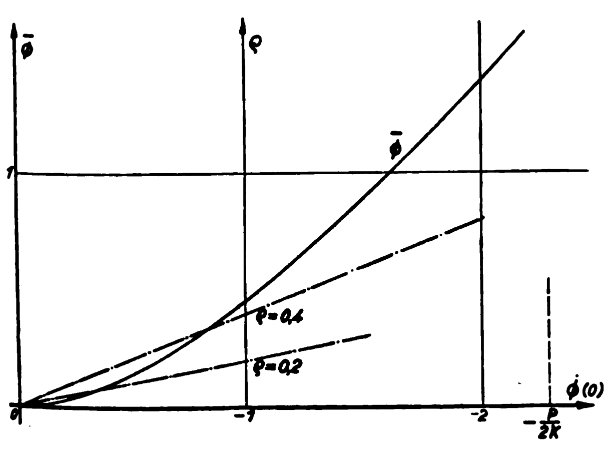


Bild 8.

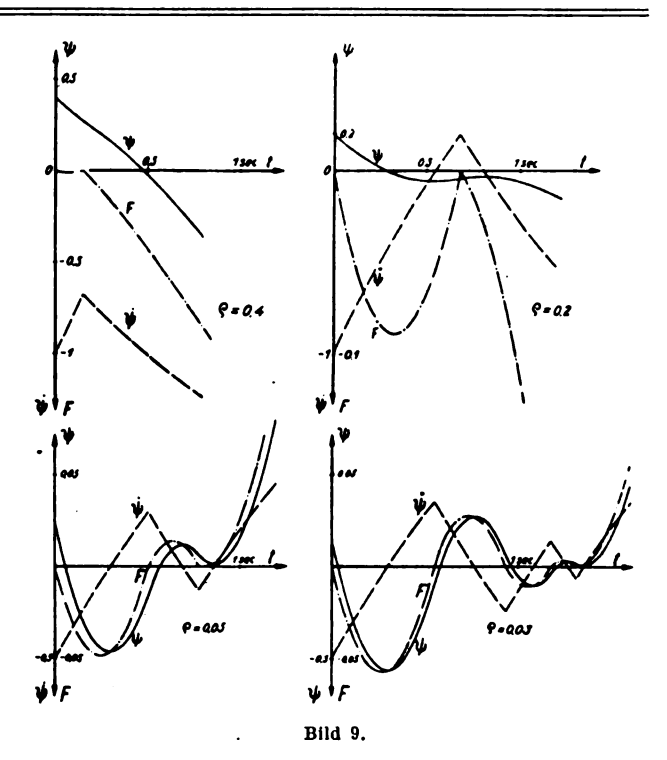


Bild 9.

Für $\Psi(0) \geq \bar\Phi(\dot\Psi(0))$, d. h. $\varrho > R(\dot\Psi(0))$, ist die Bewegung instabil, weil für $t = +0$

$$\operatorname{sgn} F(t) = \operatorname{sgn} P(t)$$

wird.

Es sei also $\Psi(0) < \bar\Phi(\dot\Psi(0))$, d. h. $0 < \varrho < R(\dot\Psi(0))$, gewählt. Dann gibt es ein positives $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\varrho_0) < a_0$ derart, daß für $0 < \tau < \varepsilon_0$

$$F(\tau) < 0$$

wird. Infolge der Stetigkeit von (34) in Verbindung mit (32) gibt es also mindestens ein t^0 mit

$$\varepsilon_0 < t^0 < a_0$$

und

$$F(t^0) = 0.$$

Da $\Psi(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = a_0$ jedoch nur ein Extremum hat, welches sich von (17) um die additive Konstante $C_{10} - B_{10} - C^0$ unterscheidet und $\dot\Psi(t)$ monoton ist, gibt es genau ein solches t^0.

Ferner ist

$$|\dot\Psi(t^0)| < |\dot\Phi(0)| = \dot\Phi(a_0)$$

und

$$|\Psi(t^0)| < \Psi(0)|$$

mit

$$\Psi(t^0) \gtrless 0 \quad \text{für} \quad \dot\Psi(t^0) \lessgtr 0.$$

An der Stelle t^0 schaltet $+P$ nach $-P$, wobei folgende Fälle möglich sind:

1. $\operatorname{sgn}\dot\Psi(t^0) = \operatorname{sgn}\dot\Phi(0)$.

Dann ist $\Psi(t^0) > 0$ und die Bewegung a priori instabil, da für $t > t^0$ die Funktion $F(t)$ monoton fällt und

$$\operatorname{sgn} F(t) = \operatorname{sgn} P(t)$$

ist (vgl. Bild 9 mit $\varrho = 0,4$).

2. $\operatorname{sgn}\dot\Psi(t^0) \neq \operatorname{sgn}\dot\Phi(0)$, also $\Psi(t^0) < 0$.

a) $|\Psi(t^0)| > |\bar\Phi(\dot\Psi(t^0))|$.

Dann ist $\Psi(t)$ ebenfalls instabil, da die notwendige Bedingung für die Neigung von $F(t)$ für $t = t^0 + \varepsilon$ bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ nicht erfüllt ist, also auch hier schließlich

$$\operatorname{sgn} F(t) = \operatorname{sgn} P(t)$$

wird (vgl. Bild 9 mit $\varrho = 0,2$).

b) $|\Psi(t^0)| < |\bar\Phi(\dot\Psi(t^0))|$.

Wir setzen als neue Zeitvariable

$$t_1 = t - t^0 \qquad (\geq 0)$$

und haben nun das gleiche Anfangsproblem wie beim Beginn der Bewegung zu lösen mit $-P$ statt $+P$ und dem Integral $\Psi_1(t_1)$ mit $\dot{\Psi}_1(0) = \dot{\Psi}(t^0) > 0$ als Anfangsgeschwindigkeit. Zum Vergleich betrachten wir die periodische Lösung $\Phi_1(t_1)$ mit $\dot{\Phi}_1(0) = \dot{\Psi}_1(0)$ und der Periode $2a_1 < 2a_0$ in einem System S_{ϱ_1} mit $0 > \varrho_1 > \varrho_0$. Es gibt dann wieder genau ein $t_1^0 > t_1$ derart, daß

$$\Psi_1(t_1^0) + \varrho \dot{\Psi}_1(t_1^0) = 0$$

ist und die Endwerte von Ψ_1 und $\dot{\Psi}_1$ in t_1^0 absolut kleiner als die Anfangswerte zur Zeit $t_1 = 0$ sind.

Wir erhalten also eine neue Schaltstelle in S_ϱ und es sind wieder die obigen Fälle 1. und 2. möglich (vgl. Bild 9 mit $\varrho = 0{,}05$ und $\varrho = 0{,}03$). Tritt der Fall 2b ein, so kann man nach der dargelegten Methode weiterschließen. Bei jeder folgenden Schaltstelle befinden wir uns auf der Steuergeraden näher am Nullpunkt als an der vorangehenden Stelle. Für positives ϱ hat jedoch die Folge der absoluten Beträge der Abszissen dieser Stellen keinen Häufungspunkt. Sonst würde sich nämlich nach hinreichend langer Zeit eine periodische Bewegung in S_ϱ einstellen; eine solche existiert aber nicht für $\varrho > 0$ nach unseren früheren Angaben. Da ferner die Steuergerade nach den Ausführungen auf Seite 323 schließlich die Kurve $\overline{\Phi}$ aus (33) in einem von Null verschiedenen Punkt schneidet, kann der Fall 2b nicht unendlich oft sich wiederholen, d. h. die Integrale $\Psi(t)$ von (1) in S_ϱ mit $\varrho > 0$ sind instabil, w. z. b. w.

Bild 10 zeigt im Phasenraum für positives ϱ zwei (instabile) Lösungen in S_ϱ. Wir geben in der Abbildung zwei (stark ausgezogene) Kurven I und II wieder, die bis zum Punkt Q mit den Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi} + 2\varkappa\dot{\Phi} + P \cdot \operatorname{sgn}(\Phi + \varrho\dot{\Phi}) = 0$$

durch die gleichen Anfangswerte übereinstimmen. Im Punkt Q hört die obige Differentialgleichung auf sinnvoll zu sein. Die über Q hinaus fortgesetzten (gestrichelt gezeichneten) Kurven geben den weiteren Verlauf der Rollbewegung bei der intermittierenden Steuerung.

Schließlich sind die Lösungen $\Psi(t)$ von (1) in S_0 instabil. Die Gerade $\varrho = 0$ ist Tangente an $\overline{\Phi}$ im Nullpunkt, der obige Fall 2b) tritt genau unendlich oft ein; die Lösungen konvergieren asymptotisch nach Null, die Schaltfrequenz wird jedoch unendlich groß, und es gibt keine positive Zahl p, deren Existenz wir für die Stabilität gefordert haben.

Hieraus ersieht man, daß die Relation

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P(\tau)\,d\tau = 0$$

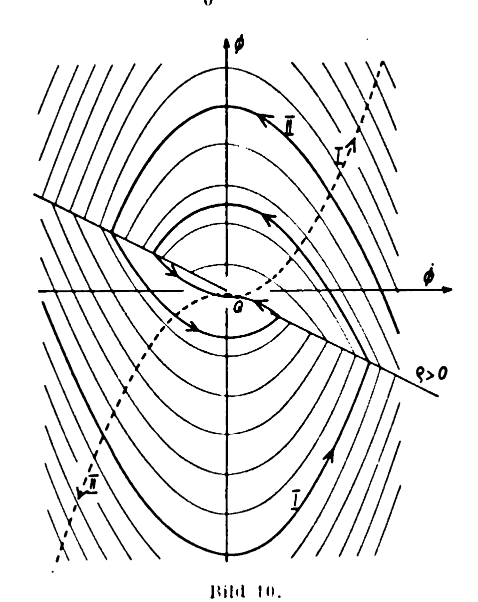


Bild 10.

keine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Bewegung ist. Wäre in unserer Stabilitätsdefinition nur die gleichmäßige Beschränktheit in ν der Differenzen

$$t_{\nu+1} - t_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

der sukzessiven Nullstellen der Steuerungsfunktion $F(t)$ nach oben gefordert, also $p = 0$ zugelassen, so wären die Integrale $\Psi(t)$ in S_0 mit $0 > \dot{\Psi}(0) > -\frac{P}{2\varkappa}$ und die Ruhelage selbst stabil. Diesen Fall haben wir aber auszuschließen, denn wie in der Einleitung dargelegt wurde, läßt sich die Annahme, daß bei einer Automatik die Umschaltung der Momente völlig impulsiv erfolgt — wie wir es bislang voraussetzten — technisch nur näherungsweise verwirklichen; eine unendliche Menge von Umschaltungen in der Zeit Null wird praktisch gegenstandslos. Hieran wird auch durch die Tatsache, daß dieser Fall theoretisch erst nach unendlich langer Zeit eintreten kann, nichts geändert.

Bei den vorangehenden Rechnungen wurde eine positive (aerodynamische) Dämpfung $2\varkappa$ vorausgesetzt. Ergänzend bringen wir noch den Fall $\varkappa = 0$. An Stelle von (1) lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = P.$$

Hierfür existiert ebenfalls ein stetiges Integral der Periode $2a$, welches die Mittellage Null ergibt und im Grundintervall folgende Gestalt hat:

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{P}{2}t^2 - \frac{Pa}{2}t & J_{10}, \\ & \text{in} \\ -\frac{P}{2}t^2 + 3\frac{Pa}{2}t - Pa^2 & J_{20}. \end{cases}$$

$\Phi(t)$ setzt sich also aus zwei kongruenten Parabelbögen zusammen. Die Halbperiode

$$a = \frac{-2\dot{\Phi}(0)}{P}$$

ist durch Vorgabe der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt. Die Abszissen $t^* = t_*$ mod. a der Extremwerte von Φ (d. s. die Scheitel der Parabeln) liegen symmetrisch zu den Stellen $t = (2n+1)a$. Betrachten wir auch hier nur den Fall

$$0 < \Phi^* < 2\pi,$$

so kann die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\Phi}(0)$ auf das Intervall

$$0 > \dot{\Phi}(0) > -\frac{1}{2}\sqrt{P\pi}$$

beschränkt werden. In der Steuerungsfunktion $F(t)$ verschwindet wegen $\dot{\Phi}(0) = 0$ der Steuerungsparameter ϱ; $F(t)$ wird identisch mit der Raumzeitkurve $\Phi(t)$ der Rollbewegung.

Für $\varkappa = 0$ sind die Lösungen $\Phi(t)$ in den gesteuerten Systemen S_ϱ für $\varrho = 0$ stabil (sie sind nach obigem sogar periodisch) und für $\varrho \neq 0$ instabil. Diese Instabilität ist für $\varrho > 0$ von gleicher Art wie diejenige für $\varrho > 0$ und $\varkappa > 0$; für $\varrho < 0$ wachsen Amplituden und Schwingungszeiten über alle Grenzen (es existiert kein endliches $q > 0$, wie wir es in unserer Stabilitätsdefinition gefordert haben).

IV. Nachlaufzone konstanter Breite.

Die nach (23) zugrunde gelegte Steuerungsfunktion

$$F(t) = \Phi(t) + \varrho\dot{\Phi}(t)$$

mit dem Schaltgesetz

$$F(t_\nu) = 0$$

entspricht dem fehlerfreien Selbststeuerungsvorgang. Wir gehen nun dazu über, die Stabilität der Bewegungen bei fehlerbehafteter Automatik zu untersuchen. Hierzu führen wir folgendermaßen eine Nachlaufzone konstanter Breite ein:

Es sei σ eine nur von der Automatik abhängige, reelle, von Null verschiedene Konstante.

In Erweiterung unserer früheren Definition nennen wir die Integrale der Differentialgleichung (1) mit

$$P(t) = (-1)^\nu \cdot P \quad \text{für} \quad t_\nu \leq t \leq t_{\nu+1} \quad (t_0 = 0;\ \nu \geq 0,\ \text{ganz})$$

und

$$F(t_\nu) - (-1)^\nu \cdot \sigma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Lösungen in einem gesteuerten System S^σ_ϱ.
(In den Abschnitten II und III wurde für S^σ_ϱ abkürzend S_ϱ geschrieben.)

Für $\sigma < 0$ erhalten wir die träge Automatik, die Umschaltung von $P(t)$ erfolgt jedesmal nach dem Schnittpunkt der Kurve $F(t)$ mit der t-Achse; für $\sigma > 0$ erfolgt die Umschaltung stets vor dem Erreichen des Schnittpunktes von F mit der t-Achse. In beiden Fällen liegen die Schaltstellen abwechselnd auf zwei Parallelen zur Zeitachse im Abstand $\pm\sigma$. Selbststeuerungen mit $\sigma > 0$ dürften — falls sie baulich realisierbar sein sollten — keine praktische Bedeutung haben. Versuchsergebnisse mit einer technisch ausgeführten Automatik, über die von W. Kerris und H. Scharn an anderer Stelle berichtet wurde, stimmen mit unserer Theorie qualitativ überein, sofern wir die obige Annahme über den Nachlauf ($\sigma > 0$) machen. Beim Versuch kommt z. B. für $\varrho = 0$ die Bewegung nicht zur Ruhe, sondern es stellt sich eine periodische Bewegung mit endlicher Frequenz und von Null verschiedener Amplitude ein. Das Folgende läßt den praktischen Wert der Automatik gerade in ihrem Nachlauf erkennen.

Ist $\sigma < 0$ fest gewählt und $\dot\Phi(0) < 0$ vorgegeben, so gibt es nach (20) ein ϱ derart, daß

$$\Phi(0) + \varrho\,\dot\Phi(0) = \sigma$$

und wegen (15)

$$\Phi(n a) + \varrho\,\dot\Phi(n a) = (-1)^n\,\sigma$$

für jedes ganzzahlige positive n ist. ϱ ist dann in Verbindung mit (24) durch

$$\varrho = \frac{\sigma - \Phi(0)}{\dot\Phi(0)} = \frac{\sigma}{\dot\Phi(0)} + \frac{1}{2\varkappa}\left(1 + \frac{P}{4\varkappa\,\dot\Phi(0)}\,\mathrm{Log}\,\frac{P - 2\varkappa\,\dot\Phi(0)}{P + 2\varkappa\,\dot\Phi(0)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

gegeben und kann unter Umständen positiv sein. In Bild 11 ist ϱ über $\dot\Phi(0)$ mit σ als Parameter zur Darstellung gebracht. Wie im Fall $\sigma = 0$ gibt es für $\sigma < 0$ zu jedem ϱ genau ein $\dot\Phi(0)$ derart, daß die Lösung $\Phi(t)$ von (1) mit den Anfangswerten $\dot\Phi(0)$, $\Phi(0)$ in S^σ_ϱ periodisch ist. Für $\sigma > 0$ gibt es dagegen keinen, einen oder zwei Werte $\dot\Phi(0)$, je nachdem die Gerade $\varrho = \text{konst.} < 0$ die Kurve (36) bei festem σ nicht schneidet, berührt oder schneidet.

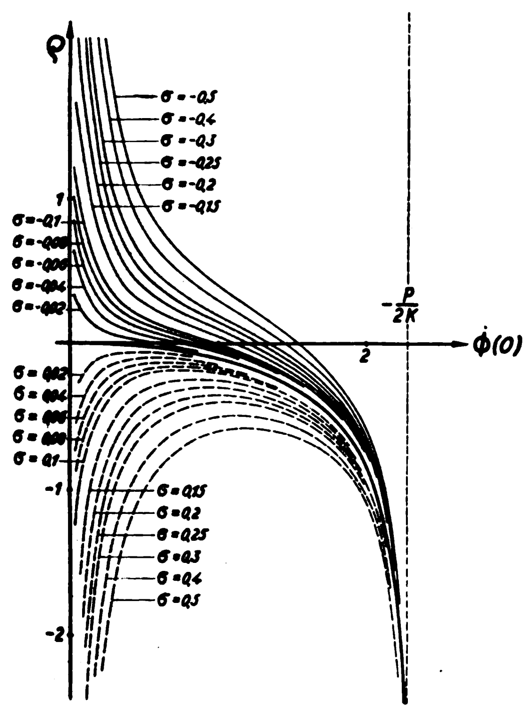


Bild 11.

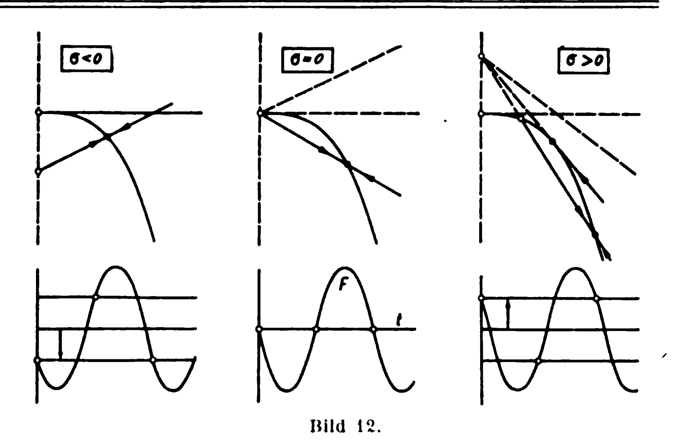


Bild 12.

Eine Übersicht über die Anfangswerte der periodischen Lösungen von (1) in den durch (35) gesteuerten Systemen S^σ_ϱ ergibt sich folgendermaßen: Analog Bild 5 zeichne man in einem $(\dot\Phi(0), \Phi(0))$-Diagramm die Funktion (25) über $\dot\Phi(0)$ und durch den Punkt $\Phi(0) = \sigma$, $\dot\Phi(0) = 0$ ein Strahlenbüschel G. Das System $S^\sigma_{\varrho_0}$ mit festem ϱ_0 wird dann durch diejenige Gerade G_0 des Büschels repräsentiert, für welche der Neigungswinkel γ_0 sich aus

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \frac{\sigma - \Phi(0)}{\dot\Phi(0)} = \varrho_0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}\right)$$

bestimmt. Der Schnittpunkt von G_0 mit der Kurve (25) ergibt die Anfangswerte der periodischen Lösung. Die Schwingungsdauer 2a folgt aus (16). Bild 12 gibt für das Gesagte eine schematische Darstellung.

Für $\sigma < 0$, d. h. für $-\infty < \varrho < \infty$, gibt es stets einen solchen Schnittpunkt und wie im Fall $\sigma = 0$, d. h. $-\infty < \varrho < 0$, beweist man, daß die Integrale von (1) mit $0 > \dot\Phi(0) > -\dfrac{P}{2\varkappa}$ im System S^σ_ϱ stabil sind und mit zunehmender Zeit gegen die zum System gehörende periodische Lösung konvergieren. Beachten wir, daß eine Vergrößerung von ϱ wie eine Vergrößerung der (aerodynamischen) Dämpfung $2\varkappa$ sich auswirkt, so ist die trägheitsbehaftete Automatik — selbst bei noch so kleinem Nachlauf — der fehlerfreien Automatik vorzuziehen.

Für $\sigma > 0$ hat ϱ eine obere Grenze $\varrho < 0$, die durch die Neigung der Tangente an (25) vom Punkt $\Phi(0) = \sigma$, $\dot\Phi(0) = 0$ gegeben ist. Für $\varrho < \tilde\varrho$ tritt eine Verzweigung ein; die zu S^σ_ϱ gehörende Gerade schneidet die Kurve (25) in zwei verschiedenen Punkten, es existieren eine rasche und eine langsame periodische Schwingung. Diese sind in Bild 13 für die Werte

P	$2\varkappa$	ϱ	σ	$\dot\Phi(0)$	$\Phi(0)$	a
1,5255	0,66964	—0,17093	0,06217	— 0,4	—0,00620	0,5299
				— 1,0	—0,10876	1,40653

veranschaulicht.

$\dot\Phi_1(0)$ sei die Anfangsgeschwindigkeit der raschen periodischen Schwingung, $\Phi_1(0)$ ist dann durch die Steuergleichung

$$\Phi_1(0) + \varrho\,\dot\Phi_1(0) = \sigma$$

bei gegebenem ϱ und σ, also durch das System S^σ_ϱ bestimmt. Stabil sind in S^σ_ϱ diejenigen Lösungen von (1), für welche

$$-\frac{P}{2\varkappa} < \dot\Phi(0) \leqq \dot\Phi_1(0)$$

ist, und diese stabilen Schwingungen konvergieren für $-\dfrac{P}{2\varkappa} < \dot\Phi(0) < \dot\Phi_1(0)$ mit wachsendem t gegen die zu S^σ_ϱ gehörende langsame periodische Schwingung. Die Instabilität der Integrale von (1) in S^σ_ϱ tritt für die Anfangsgeschwindigkeiten $0 > \dot\Phi(0) > \dot\Phi_1(0)$ dadurch ein, daß schließlich der Extremwert von F einmal absolut kleiner als $|\sigma|$

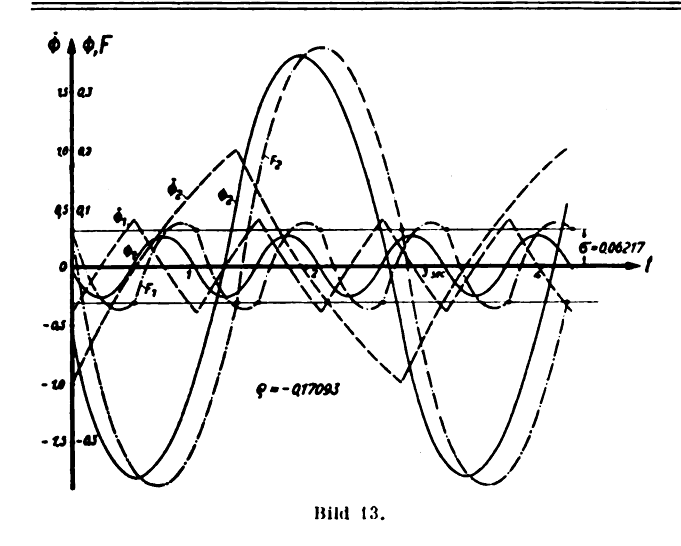


Bild 13.

wird, so daß für hinreichend großes (jedoch endliches) t eine letzte Schaltung erfolgt, also nur endlich viele Schaltstellen existieren, während nach unserer Definition der Stabilität unendlich viele Schaltstellen notwendig sind. Entsprechendes gilt für die Systeme $S_{\tilde{\varrho}}^{\sigma}$. Für $\sigma > 0$ müssen also die Anfangsstörungen ein Mindestmaß $\dot{\Phi}_1(0)$, $\Phi_1(0)$ besitzen, damit die Automatik die Bewegung stabilisiert; der Steuerungsparameter ϱ selbst muß dabei kleiner als eine von σ abhängige Konstante $\tilde{\varrho}$ sein.

Die gefundenen Ergebnisse für die Systeme S_{ϱ}^{σ} lassen im Phasenraum sich ebenfalls gut veranschaulichen. Man erhält darin zwei parallele Geraden im Abstand $\pm\sigma$ vom Nullpunkt mit der Steigung-ϱ und zwei Kurvenscharen, wie früher angegeben wurde. Die Lösungen in S_{ϱ}^{σ} ergeben sich durch Aneinandersetzen der Kurven der einen und der anderen Schar, wobei die Ansatzstellen jetzt abwechselnd auf den zwei parallelen Geraden liegen.

IV. Zusammenfassung.

Es wurde die automatische Stabilisierung der Rollbewegung eines um die Längsachse freien Flugzeugs untersucht. Als Stabilisator dient eine Automatik, durch welche intermittierende, abteilungsweise konstante Querrudermomente aufgegeben werden. Der Geber der Selbststeuerung besteht im Prinzip aus einem ausschlagsproportionalen Lagekreisel (Φ) und einem durch eine Feder (ϱ) elastisch gefesselten geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskreisel ($\dot{\Phi}$). Für die fehlerfreie Steuerung gilt das Gesetz

$$\Phi(t_\nu) + \varrho\,\dot{\Phi}(t_\nu) = 0$$

und ergibt stabile Bewegungen für $-\infty < \varrho < 0$. Für die fehlerbehaftete Automatik wurde das Schaltgesetz in der Form

$$\Phi(t_\nu) + \varrho\,\dot{\Phi}(t_\nu) = (-1)^\nu\,\sigma$$

zugrunde gelegt. $\sigma < 0$ ist dabei eine von der Automatik abhängige Konstante. In diesem Fall gibt es stabile Bewegungen für $-\infty < \varrho < \infty$ bei noch so kleinem σ. Die Theorie der fehlerbehafteten Automatik stimmt mit Versuchen qualitativ überein.

Zur Aerodynamik des Flugzeugrumpfes.

Berichtigung.

In der Arbeit von Multhopp in Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941) Lfg. 2/3, S. 61, 1. Zeile, links, muß es heißen »das arithmetische Mittel« statt »das geometrische Mittel«, und weiter in Zeile 3, links, muß die Formel heißen

$$b = \sqrt{\overline{a^2} - \overline{E^2}} \quad \text{statt} \quad b = \sqrt{\overline{A^2} - \overline{E^2}}.$$

Über den Navier-Stokesschen Spannungsansatz für zähe Flüssigkeitsströmungen.

Von Ernst Mohr, Breslau.

Im Lichte des Maxwellschen Mechanismus der Reibung wird der Ansatz von Navier-Stokes überprüft, und im Zusammenhang damit auf die Möglichkeit eines andern Ansatzes hingewiesen.

Gliederung.

I. Der phänomenologische Ansatz von Navier-Stokes.

Im folgenden betrachten wir sog. laminare Strömungen von Flüssigkeiten, zu denen wir bekanntlich auch die Gase rechnen dürfen, solange deren Dichteänderungen vernachlässigbar sind. Dabei wird es keine Einschränkung bedeuten, wenn wir uns auf ebene Strömungen beschränken, die wir uns jedoch stets räumlich vorzustellen haben, und für die wir daher auch die üblichen räumlichen Bezeichnungen beibehalten wollen.

Bild 1 zeigt in üblicher Bezeichnung die Spannungen $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, die als Zeilenvektoren aufgefaßt zu der Spannungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

führen. Aus ihr erhält man durch den leicht verständlichen Differentiationsprozeß

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) \quad (2)$$

die betreffende Volumkraft. Ist dann $\mathfrak{w} = (u, v)$ die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit, so besagt der Ansatz von Navier-Stokes: Die Spannungsmatrix ist proportional der Matrix der Deformationsgeschwindigkeiten, in Zeichen

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (3\text{a})$$

wo μ eine für die Flüssigkeit charakteristische Konstante, genannt Zähigkeit, ist. Berechnet man mittels der rechten Seite von (3a) die Volumkraft nach (2), so sieht man, daß infolge der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die zweite Matrix in (3a) rechts keinen Beitrag liefert. Speziell postuliert der Ansatz (3) die Symmetrie der Spannungsmatrix. Als wichtigste Randbedingung sei genannt: Das Haften an festen Wänden bedingt durch die Zähigkeit.

Derselbe Ansatz (3) wird auch auf plastische Körper angewandt, nur mit dem Unterschied, daß dort μ keine Konstante mehr ist.

Zwei einfache Beispiele!

1. Für die Strömung in Bild 2, im folgenden kurz als Plattenströmung bezeichnet, erhält man nach (3) als Schub in der Strömungsrichtung

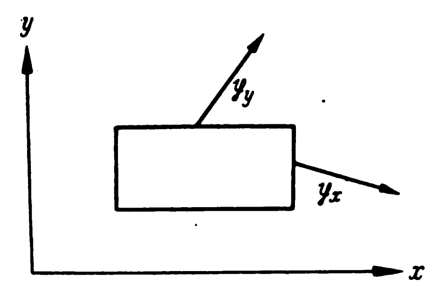


Bild 1. Das Spannungsbild.

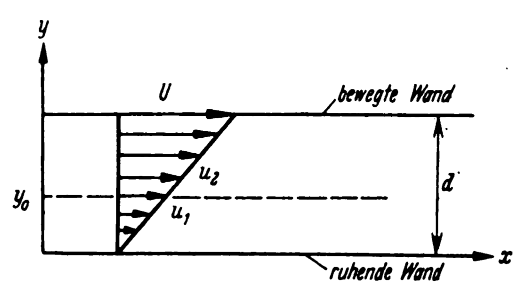


Bild 2. Die Plattenströmung.

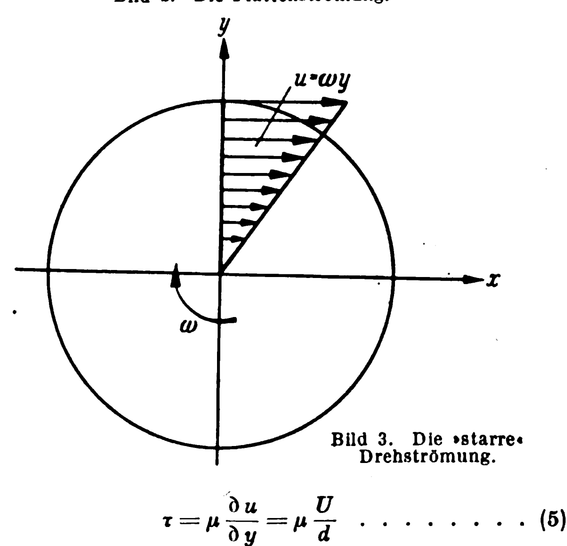


Bild 3. Die »starre« Drehströmung.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

in welcher Form der Ansatz bereits von Newton ausgesprochen worden ist.

2. Bei der »starren« Drehströmung, Bild 3 (ω = Drehgeschwindigkeit), verschwindet die Matrix der Deformationsgeschwindigkeiten identisch, d. h. hier treten keine Schube auf.

II. Der Mechanismus der Reibung nach Maxwell.

Wie man sieht, ist der Ansatz von Newton bzw. Navier-Stokes rein phänomenologisch: darüber, wie nun eigentlich z. B. der Schub in Strömungsrichtung in Bild 2 zustande kommt, erfährt man nichts. Maxwell verdankt man nun für den Fall, daß die Flüssigkeit ein wirkliches (ideales) Gas ist, die wichtige Entdeckung, daß bei der Plattenströmung der betreffende Schub in Strömungsrichtung eine Folge des Transportes an makroskopischer Bewegungsgröße ist, wie



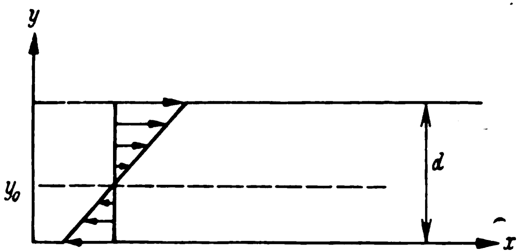


Bild 4. Die Plattenströmung von einem Bezugssystem aus, in welchem die gestrichelte Schicht ruht.

er durch die Diffusion zustande kommt: Da durch jede Flächeneinheit der gestrichelten Fläche $y = y_0$ in Bild 2 im Mittel gleichviel Moleküle von oben wie von unten her durchtreten, die oberen aber im Mittel eine größere makroskopische Geschwindigkeit mitbringen, so erfährt hierdurch die langsamere Schicht alles in allem je Zeiteinheit einen gewissen Zuwachs an Bewegungsgröße, der proportional $(u_2 - u_1)$, d. h. proportional dem dortigen Geschwindigkeitsanstieg ist, und daher nach Newtons Grundgesetz (wonach die Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit der Wirkung einer Kraft entspricht) der Wirkung eines Schubes gleichkommt. Wir wollen die diesbezügliche Rechnung kurz reproduzieren[1]).

Dazu bemerken wir, daß sich in dieser Maxwellschen Auffassung der Schub (ähnlich wie der Druck) auf das mitbewegte Flächenelement bezieht. So erhalten wir die Strömung, Bild 4, wo der Geschwindigkeitsanstieg der gleiche wie früher ist. Mit den Bezeichnungen

c = Betrag der mikroskopischen Molekülgeschwindigkeit,
n = Zahl der Moleküle pro cm^3,
Δn_c = Zahl der Moleküle pro cm^3, mit einer Geschwindigkeit im Intervall $c \ldots\ldots c + \Delta c$,
m = Masse eines Moleküls,
ϱ = Gasdichte also $= m \cdot n$,

stellen wir dann die folgende Betrachtung an:

Um den Transport von oben nach unten zu bestimmen, fassen wir zunächst nur die Moleküle ins Auge, welche eine Geschwindigkeit im Intervall $c \ldots\ldots c + \Delta c$ besitzen, im folgenden kurz als c-Moleküle bezeichnet. Aus diesen sieben wir abermals jene aus, welche unter einem Winkel im Intervall $\vartheta \ldots\ldots \vartheta + \Delta\vartheta$ gegen die y-Achse eintreffen (Bild 5), und nennen diese Moleküle c, ϑ-Moleküle. Solcher c, ϑ-Moleküle gibt es nun pro cm^3

$$\frac{\Delta n_c}{2} \sin\vartheta \, \Delta\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Diese Zahl, noch multipliziert mit dem Inhalt $c \cos\vartheta$ des in Bild 5 in Draufsicht erscheinenden Zylinders von der Mantellänge c ergibt dann die Zahl ΔN_c von c, ϑ-Molekülen, welche sekundlich die Flächeneinheit treffen:

$$\Delta N_c = \frac{\Delta n_c}{2} \sin\vartheta \, \Delta\vartheta \cdot c \cos\vartheta \quad \ldots\ldots (7)$$

Hat ein solches Molekül seinen letzten Zusammenstoß in der (schiefen) Entfernung λ gehabt, so transportiert es also bei seinem freien Durchtritt die makroskopische Bewegungsgröße

$$m\,u = m\left\{u_0 + \lambda\cos\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

wo durch den Zeiger 0 der Wert der betreffenden Größen für die gestrichelte Schicht angedeutet, und also speziell $u_0 = 0$ ist. In Bild 5 ist ein solches Molekül eingezeichnet, wobei zu beachten ist, daß dort von c, ϑ und λ nur ihre diesbezüglichen Projektionen c', ϑ', λ' in der Draufsicht erscheinen. Alle c, ϑ-Moleküle transportieren mithin zusammen

$$\sum_0^{\Delta N_c} m\left\{u_0 + \lambda\cos\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

oder unter Einführung eines mittleren Wertes λ_c für λ

$$\Delta N_c \cdot m\left\{u_0 + \lambda_c\cos\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

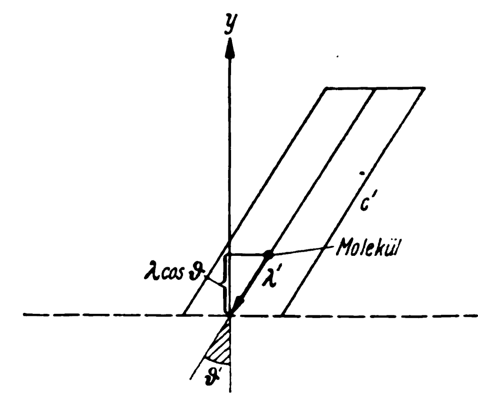


Bild 5. Zur Berechnung des Schubes als Überschuß eines Transportes von makroskopischer Bewegungsgröße (Plattenströmung).

Ausführlich ergeben also die von oben kommenden c, ϑ-Moleküle den Transport $\tau^+_{c,\vartheta}$:

$$\tau^+_{c,\vartheta} = \frac{\Delta n_c}{2} \sin\vartheta \, \Delta\vartheta \cdot c\cos\vartheta \cdot m\left\{u_0 + \lambda_c\cos\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad (11)$$

Integration über ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ liefert alsdann den von allen c-Molekülen bewirkten Transport τ^+_c von oben:

$$\tau^+_c = \frac{\Delta n_c}{2}\, c\, m\left\{\frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{3}\lambda_c \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

Analog ist der Transport von unten:

$$\tau^-_c = \frac{\Delta n_c}{2}\, c\, m\left\{\frac{1}{2} u_0 - \frac{1}{3}\lambda_c \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

und damit der Überschuß τ_c:

$$\tau_c = \tau^+_c - \tau^-_c = \frac{1}{3}\Delta n_c \cdot m \cdot c \cdot \lambda_c \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \quad \ldots (14)$$

Durch Integration über alle c-Moleküle erhält man hieraus, wenn man noch einen entsprechenden Mittelwert $\overline{c\,\lambda_c}$ für $c\,\lambda_c$ einführt, für den gesuchten Transport oder Schub τ:

$$\tau = \frac{1}{3} n \cdot m \cdot \overline{c \cdot \lambda_c} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{3} \varrho\, \overline{c\,\lambda_c} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \quad \ldots (15)$$

d. h. wieder den Newtonschen Ansatz (5), und durch Vergleich mit ihm für die Zähigkeit den expliziten Ausdruck

$$\mu = \frac{1}{3} \varrho\, \overline{c\,\lambda_c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Bei dieser Rechnung wird das Maxwellsche Verteilungsgesetz für Geschwindigkeiten im Ruhezustand verwendet, eine Annahme, die sicher erlaubt ist, solange, wie hier, die makroskopische Geschwindigkeit u klein ist gegenüber der mikroskopischen c. Vgl. hierzu die Fußnote 2 auf S. 420 des unter [1)] zitierten Werkes von Schaefer. Die Rechnung zeigt noch, daß auch durch die ruhend gedachte Flächeneinheit der gestrichelten Schicht $y = y_0$ in Bild 2 derselbe Schub transportiert wird. Auch ist sie nicht an die Bedingung geknüpft, daß das Geschwindigkeitsprofil wie hier einen konstanten Anstieg hat: an Stelle von (8) hätte man dann

$$m\,u = m\left\{u_0 + \lambda\cos\vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \ldots\right\} \quad \ldots (17)$$

wo durch die Punkte ..... Glieder angedeutet sind, die als von kleinerer Ordnung vernachlässigbar sind.

III. Die Fragestellung.

In dieser Maxwellschen Auffassung ist der Schub τ also nur »scheinbar«, indem er lediglich den Ersatz für einen gewissen Impulstransport bildet, der seinerseits durch die Diffusion bedingt ist. Bild 6 soll diesen Sachverhalt veranschaulichen: Während der Zeiteinheit 0 .... 1 sind eine gewisse Anzahl schwarzer Moleküle aus- und eine entsprechende Anzahl weißer Moleküle eingetreten. Dies bringt mit sich, daß hier die Methode der Kontinuumsmechanik zunächst gar nicht angewandt werden kann, da ja das kontinuumsmäßig abgegrenzte Teilchen im Zustand $t = 1$

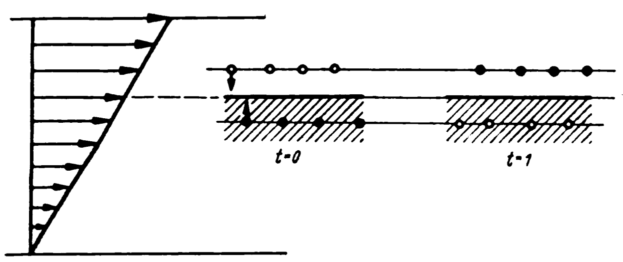


Bild 6. Stark schematisierte Darstellung vom Zustandekommen der Spannungen im Falle der Plattenströmung.

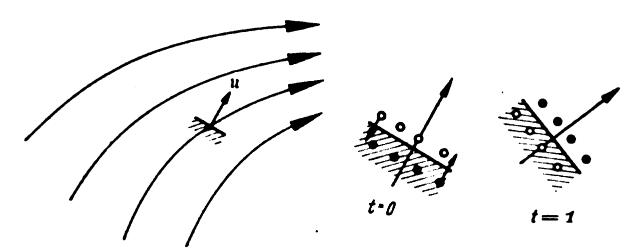


Bild 7. Übertragung der schematisierten Darstellung in Bild 6 auf eine beliebige Strömung.

gar nicht mehr alle früheren Moleküle enthält! Um die Kontinuumsmechanik anwenden zu können, müssen wir erst noch die Korrektur anbringen, die durch den Übertritt von Molekülen bedingt ist, und welche eben zu der scheinbaren Spannung führt. Für den entsprechenden Fließzustand eines plastischen Körpers ist eine solche Betrachtung offenbar nicht möglich, da dieser im Gegensatz zum Gas keine Diffusion besitzt.

Bedenkt man, daß die übliche Begründung des Navier-Stokesschen Ansatzes sich an das Vorbild des plastischen Körpers hält, so erscheint es in jedem Falle wünschenswert, nachträglich auch diesen allgemeinen Ansatz ähnlich wie den Newtonschen Spezialfall im Sinne Maxwells zu begründen. Überträgt man nun aber die an Bild 6 geknüpfte und stark schematisierte Überlegung auf die beliebige Strömung, Bild 7, so erhält man als Spannung in bezug auf das dort eingezeichnete mitbewegte Flächenelement mit $\frac{\partial}{\partial n}$ als normaler Differentiation offenbar

$$\mu \frac{\partial w}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

und damit die unsymmetrische Spannungsmatrix

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

die gerade mit der ersten Matrix in (3a) rechts übereinstimmt. Nach diesem Ansatz ergibt sich für unsere Drehströmung im Gegensatz zu früher ein Schub in Strömungsrichtung

$$\tau = \mu \cdot \{\text{Geschwindigkeitsanstieg}\} = \mu \cdot \omega \quad . . \quad (20)$$

den also, ähnlich wie bei der Plattenströmung, jede raschere Schicht auf die unter ihr liegende langsamere ausübt.

Welche der Matrizen ist nun zu nehmen? Die symmetrische (3) oder die unsymmetrische (19)? Kein Zweifel, die Diffusion ist das entscheidende Merkmal, durch das sich ein Gas von einem plastischen Körper unterscheidet, und es müßte fast wundernehmen, wenn sich dieser Unterschied im Spannungsansatz nicht auswirken würde. Wir präzisieren die hier auftauchende entscheidende Frage an dem folgenden leicht verständlichen Schema:

Plastische Körper	Gase
Hier Zusammenhalt der Moleküle	Hier kein Zusammenhalt, sondern vielmehr die Diffusion
Hier Kontinuumsmechanik sofort anwendbar	Hier nicht
Hier haben die Spannungen ihre Ursache in dem Zusammenhalt der Moleküle	Hier sind im Falle der Plattenströmung die Spannungen nach Maxwell eine Folge des Transportes an makroskopischer Bewegungsgröße infolge der Diffusion
Hier ist die Spannungsmatrix proportional der Matrix der Deformationsgeschwindigkeiten	?

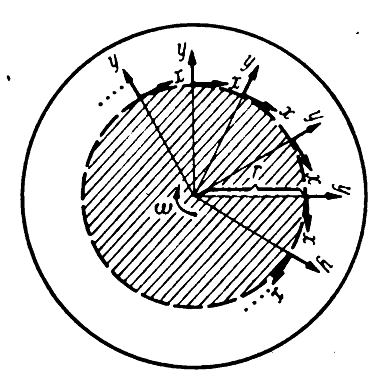


Bild 8. Die Schubwirkung auf die schraffierte Flüssigkeitsmasse im Falle der starren Drehströmung.

Man sieht: Gelingt es uns, die Maxwellsche Betrachtung auf die Drehströmung auszudehnen, so können wir die Frage beantworten. Dies wollen wir jetzt versuchen.

IV. Versuch einer Antwort.

Um die Antwort für unsere Drehströmung zu bekommen, gehen wir folgendermaßen vor. Statt daß wir den Transportüberschuß bzw. Schub τ auf eine bewegte Flächeneinheit der in Bild 8 gestrichelten Fläche berechnen, fragen wir gleich nach dem Gesamtschub $2\pi r \cdot \tau$, den diese bewegte Fläche erleidet. Da aber diese Fläche bei der makroskopischen Bewegung dauernd in sich übergeht, ist jener Gesamtschub offenbar identisch mit dem Gesamtschub, den die eingeschlossene und in Bild 8 schraffierte Flüssigkeitsmasse von der äußeren Flüssigkeit erleidet; in dieser Auffassung dürfen wir aber dann die gestrichelte Fläche als ruhend behandeln! D. h.: wir fragen jetzt einfach nach dem Transportüberschuß durch diese ruhende Fläche; ist ein solcher vorhanden, so entspricht er einer Schubwirkung auf die schraffierte Flüssigkeitsmasse. Um nun die Rechnung durchzuführen, denken wir uns weiter längs der raumfesten gestrichelten Fläche in dichter Aufeinanderfolge für jede Flächeneinheit gleichartige Koordinatensysteme x, y, z wie in Bild 8 gezeichnet (z-Achse senkrecht zur Zeichenebene). Können wir dann den Transport für ein solches raumfestes Flächenelement berechnen, so sind wir fertig; fällt dieser Transport insgesamt positiv aus, so dürfte der unsymmetrische Ansatz (19) zuständig sein.

Die Rechnung für ein solches Flächenelement führen wir nun in einfacher Weise auf die frühere entsprechende Rechnung für die Plattenströmung zurück, wobei wir die Bezeichnungen von damals auch jetzt wieder benutzen. Bild 9 zeigt in Draufsicht, wie ein c, ϑ-Molekül frei aus der Entfernung λ eintritt (wobei in der Figur wieder nur die Projektionen ϑ', λ' von ϑ, λ erscheinen): Dasselbe bringt die Bewegungsgröße $m u(P)$ mit, wo $u(P)$ die Geschwindigkeit im Punkte P bezeichnet, und daher etwas nach unten geneigt ist. Folgende beide Tatsachen ermöglichen nun die Zurückführung auf den Fall der früheren Plattenströmung:

1. Schreiben wir für $u(P)$:

$$u(P) = u(P'') + \{u(P) - u(P'')\} \quad . . . . \quad (21)$$

und bedenken, daß sich aus der Symmetrie bezüglich der yz-Ebene die hier auftretenden geschweiften Klammern im Mittel für alle Moleküle wegheben, so erkennen wir,

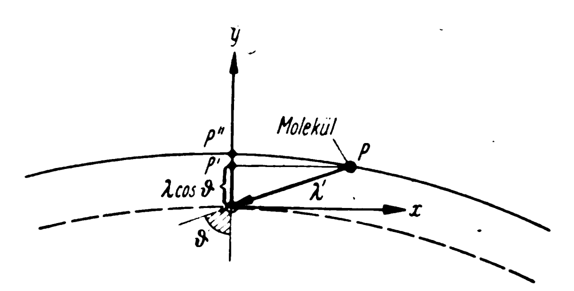


Bild 9. Zur Berechnung des Schubes als Überschuß eines Transportes von makroskopischer Bewegungsgröße (starre Drehströmung).

daß wir so rechnen dürfen, als ob nur $m u$ (P'') von dem betreffenden Molekül transportiert wird.

2. Da weiter für die Längen $\overline{OP''}$ und $\overline{OP'}$ gilt:

$$\overline{OP''} = \overline{OP'} + \ldots = \lambda \cos \vartheta + \ldots \quad (22)$$

wo durch Punkte Glieder angedeutet sind, die von der Ordnung λ^2 und daher vernachlässigbar sind, so dürfen wir setzen

$$u(P'') = u_0 + \lambda \cos \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \ldots \quad (23)$$

Alsdann verläuft aber die Rechnung offenbar genau wie früher, wobei jetzt der Geschwindigkeitsanstieg $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ gleich der Drehgeschwindigkeit ω ist.

Damit ist gezeigt, daß die in Bild 8 schraffierte Flüssigkeitsmasse pro Flächeneinheit von der äußeren Flüssigkeit den Schub $\tau = \mu \omega$ in Strömungsrichtung erfährt. Die Ähnlichkeit der Platten- und Drehströmung hinsichtlich des Schubes leuchtet auch anschaulich ein: Denn beide stimmen in der Nähe der bewegten Wand nahezu miteinander überein; auch wird in beiden Fällen dauernd von dieser Wand Arbeit geleistet, indem die mit einer etwas kleineren makroskopischen Geschwindigkeit anfliegenden Moleküle wieder auf die volle Wandgeschwindigkeit gebracht und dann ins Flüssigkeitsinnere abgestoßen werden; diese Arbeit äußert sich dann in einer entsprechenden Erwärmung. Schließlich sei noch erwähnt, daß der Ansatz nach der unsymmetrischen Matrix (19) nicht mehr in Übereinstimmung mit dem sog. Boltzmannschen Axiom [2] steht.

V. Weitere Bemerkungen.

Nachdem wir den Schub τ als scheinbar erkannt haben, vermuten wir dasselbe für den Druck p. Dies trifft in der Tat zu. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor, und betrachten zunächst ruhende, sodann bewegte Gase.

Im Fall eines ruhenden Gases ist der Druck p auf eine feste Wand bekanntlich das Ergebnis der dauernden Stöße der Moleküle: ein mit der Geschwindigkeit c unter dem Winkel ϑ gegen die Wand fliegendes Molekül überträgt auf diese insgesamt die senkrechte Bewegungsgröße $2\, c \cdot \cos \vartheta$, und die kinetische Gastheorie lehrt, daß diese Stöße zu dem mittleren Druck

$$p = \frac{1}{3} \varrho \overline{c^2} \quad (24)$$

führen, wo ϱ die Dichte und $\overline{c^2}$ der Mittelwert von c^2 ist. Betrachten wir alsdann einen gedachten Schnitt im Inneren des Gases, so kommt auf jede der beiden Seiten derselbe Druck (24), jetzt aber im Sinne Maxwells als Transport von molekularer oder mikroskopischer Geschwindigkeit zustande. In der Tat liefert jedes unter dem Winkel ϑ mit der Geschwindigkeit c austretende Molekül zusammen mit dem dazu spiegelbildlich eintretenden insgesamt einen Zuwachs an senkrechter Bewegungsgröße vom selben Betrag $2\, c \cdot \cos \vartheta$ wie vorhin, so daß sich derselbe Druck wie an der festen Wand ergibt.

Ist das Gas bewegt, so können wir unsere bisherige Vorstellung vom Schub durch Einbeziehung des Druckes wie folgt ergänzen: der Transport der Moleküle geschieht in erster Annäherung allein durch die mikroskopische Geschwindigkeit; transportiert wird aber 1. die mikroskopische und 2. die makroskopische Geschwindigkeit. Der zweite Fall liefert den uns schon bekannten Schub, während der erste den Druck ergibt. Hierin haben wir den Ausdruck für die freie Verschieblichkeit der Moleküle zu sehen, die schon Euler für den Druck und Maxwell für den Schub als charakteristisch erkannt haben.

Da der neue Ansatz zu denselben Bewegungsgleichungen, besonders also auch zu demselben Druckfeld führt, so ist der Druckwiderstand in beiden Fällen derselbe. Wir zeigen, daß dies auch noch für den Reibungswiderstand zutrifft, sofern der Körper ruht (bzw. gleichförmig bewegt wird) und die Haftbedingung erfüllt ist. Es genügt die Behauptung für ein Flächenelement des Körpers einzusehen. Legen wir den Koordinatenursprung samt x-Achse in dasselbe, die y-Achse senkrecht nach außen, so folgt aus der Haftbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{für } y = 0 \quad (25)$$

und daher wegen der Kontinuitätsgleichung weiter

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = 0 \quad (26)$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Unterschiede im Reibungswiderstand treten also erst an beliebig bewegten Flächen auf, wie z. B. im Falle unserer Drehströmung.

Und schließlich erwähnen wir, daß wenn der neue Ansatz zutrifft, zwischen dem plastischen Körper und der Flüssigkeit alle Übergänge bestehen werden, von denen wir hier nur die beiden äußersten Grenzfälle betrachtet haben.

VI. Zusammenfassung.

Den Spannungsansatz von Navier-Stokes begründet man im allgemeinen in der Weise, daß man sich an das Vorbild des plastischen Körpers hält. Man geht also rein phänomenologisch vor, wie dies schon seinerzeit Newton mit seinem speziellen Ansatz für eindimensionale Strömungen getan hat. Erst Maxwell konnte an diesen eindimensionalen Strömungen und für den Fall, daß die Flüssigkeit ein (ideales) Gas ist, den physikalischen Mechanismus, durch den der Schub in Strömungsrichtung zustande kommt, aufdecken: danach ist dieser Schub nur »scheinbar«, indem er lediglich den Ersatz für einen gewissen Transport an makroskopischer Bewegungsgröße darstellt, wie er durch die Brownsche Molekularbewegung bzw. durch die Diffusion bedingt ist. Es ist klar, daß dieser Mechanismus nicht an den Spezialfall der eindimensionalen Strömungen gebunden, sondern als Ausdruck der Diffusion, durch die sich eine Flüssigkeit scharf von einem plastischen Körper unterscheidet, auch für beliebige Strömungen zuständig sein wird. Bedenkt man andererseits, daß beim plastischen Körper die Spannungen ihre Ursache in einem gewissen Zusammenhalt der Moleküle haben, so erscheint es von vornherein keineswegs selbstverständlich, daß dieser Unterschied im Mechanismus der Reibung zwischen Flüssigkeit und plastischem Körper sich nicht auch im Spannungsansatz äußern soll, sicher aber auf jeden Fall wünschenswert, wenigstens nachträglich auch den allgemeinen Ansatz im Sinne Maxwells zu begründen. Tatsächlich wird einem bei diesem Versuch ein anderer Ansatz nahegelegt, der im Gegensatz zu dem von Navier-Stokes die Form einer unsymmetrischen Matrix hat. Ohne einer endgültigen Entscheidung vorzugreifen, werden an der Hand einer speziellen Strömung einige Gründe angeführt, die auf eine Bejahung dieses neuen Ansatzes hinzuweisen scheinen. Klarzumachen, daß hier tatsächlich eine Frage vorliegt, die ihrer endgültigen Beantwortung noch harrt, ist der eigentliche Zweck der Arbeit.

VII. Schrifttum.

[1] Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, 2. Band, 2. Auflage, Berlin und Leipzig 1929, Walter de Gruyter & Co., S. 415 ff.

[2] G. Hamel, Elementare Mechanik, 2. Auflage, Teubner, Leipzig und Berlin 1922, S. 325/326.



Ein Beitrag zur Ausbildung von Sperrholzschalen.

Von S. Blumrich.

Bericht der Gothaer Waggonfabrik, A.-G., Gotha.

Das Beulen der Haut einer Schalenkonstruktion bedeutet einerseits den Ausfall von tragendem Querschnitt und anderseits durch auftretende Zusatzspannungen ein vorzeitiges Erreichen gefährlicher Lasten. Da die Haut bei gleichbleibender Dicke nur durch radikale Verminderung der Felddimensionen zum Tragen herangezogen werden kann, kommt man für den Metallbau zu meistens unwirtschaftlichen Lösungen. Im Holzbau ist dieser Weg wesentlich leichter zu begehen, und die folgende Arbeit bringt einige der Grundüberlegungen, rechnerische und versuchsmäßige Untersuchungen für Längsbeanspruchung. Dabei wurde die Annahme bestätigt, daß durch das Heranziehen der Haut zum Tragen der Längsspannungen das Konstruktionsgewicht bedeutend absinkt.

Die konstruktive Ausbildung bei Anwendung im Flugzeugbau fordert oder bietet natürlich z.T. beträchtliche Veränderungen. Hier sollen nur die Grundfragen behandelt werden und als Beleg die notwendigsten Versuche.

Gliederung.

Es ist ein wesentlicher Nachteil der heute üblichen Schalenkonstruktionen, daß die Festigkeit des Beplankungswerkstoffes weder auf Druck noch auf Schub voll ausgenutzt werden kann. Bei Schub werden die durch die Faltenbildung entstehenden Zusatzspannungen rasch maßgebend, bei Druckbeanspruchung konzentriert sich die Belastung durch das Überschreiten der Knickspannung des Bleches auf die Stringer, wodurch mit steigender Last die Haut praktisch ausfällt. Der naheliegende Weg, durch Verminderung der Felddimensionen, also der Stringerteilung, die kritischen Hautlasten zu erhöhen, führt im Metallbau zu unwirtschaftlichen Konstruktionen (vermehrte Nietarbeit), so daß man heute meistens geneigt ist, den gewichtlich nachteiligen Weg: wenig Stringer, dicke Haut zugunsten der besseren Wirtschaftlichkeit zu gehen.

Im Holzbau hat man nun die Möglichkeit, diesen Weg zu begehen, der im folgenden beschrieben werden soll. Leitgedanke dabei ist der, die Haut, also das Beplankungssperrholz, erst dann ausknicken zu lassen, wenn auch die Stringer knicken. Auf diese Weise ist der Gesamtquerschnitt völlig gleichmäßig ausgenutzt, was eine Verminderung des Baugewichts je getragenes kg Last zur Folge haben muß. Im folgenden wird diese Konstruktion als »verstärktes Sperrholz« bezeichnet. Das Knicken der Haut ist abhängig von den Abmessungen Länge, Breite und Wandstärke, das des Stringers von Querschnittsfläche und -form, sowie von seiner Länge.

In den folgenden Abschnitten sind Platten und Zylinder verschiedener Feldabmessungen rechnerisch und versuchsmäßig untersucht. Ihre Festigkeits- und Gütewerte werden auf die der üblichen Konstruktion, also mit verschiedenen Knickspannungen von Haut und Stringern, bezogen.

I. Rechnerische Untersuchungen.

1. Verstärktes Sperrholz.

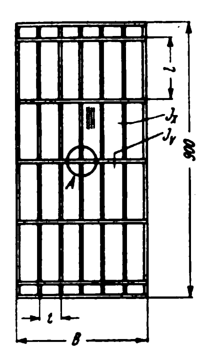
a) Ebene Platten. Wenn man — wie oben gefordert — Stringer und Haut gleichzeitig ihre Knickspannungen erreichen lassen will, dann muß die Stringerteilung im Vergleich zu üblichen Größen sehr klein werden. Dasselbe gilt natürlich auch für die Abmessungen der Stringerquerschnitte. Man wird durch geeignete Wahl der Spantquerschnitte die Knicklänge der Stringer nicht auf die Spantteilung beschränken, sondern auch die Spante ausbiegen lassen können. Dadurch hat man für eine gegebene Last eine große Variationsmöglichkeit in der Wahl aller Abmessungen.

In Bild 1 ist das Schema einer solchen verstärkten Sperrholzplatte gezeigt. Die Kleinheit der Dicke d des Spantes, sowie die große Stringerzahl verbietet ein Einlassen derselben in den Spant. Das System Haut-Stringer wird vielmehr einfach auf die Spante aufgeleimt. (Die dafür zur Verfügung stehende Leimfläche ist $2 \cdot a \cdot b$.) Dadurch fällt eine Bestimmungsgröße für die Veränderung der Hautknicklast aus; die Feldlänge wird unendlich.

Die Feldbegrenzung der ganzen Platte in Richtung der Breite B wird bei Bauausführungen durch verstärkte Einleitungsprofile oder durch das Ansetzen von Krümmungen erreicht werden. Es ist naheliegend, für das Ausknicken die Anwendbarkeit der Formel von H. Wagner[1])

$$P = \frac{20 \cdot E}{B} \cdot \sqrt{J_v^* \cdot J_x^*} + \frac{10\,G}{B} \cdot T_v^*$$

[1]) Sheet-metal airplane construction.



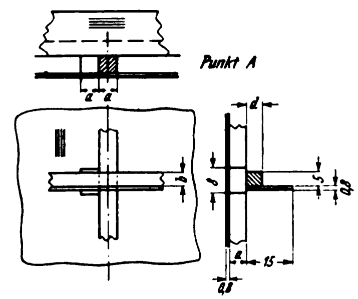


Bild 1. Platte aus verstärktem Sperrholz.

Zahlentafel 1.

a mm	l mm	t mm	Nr.	F cm²	J_x cm⁴	$J_x{}^*$ cm³	i cm	J_v	$J_v{}^*$	Knicklast kg Rechnung	Versuch
		30	1	0,46	0,00868	0,00289	0,138			336	300
	100	50	2	0,66	0,00968	0,00194	0,121	0,2597	0,02597	250	250
		70	3	0,86	0,01028	0,00147	0,109			212	200
		30	4	0,46	0,00868	0,00289	0,138			256	200
4	200	50	5	0,66	0,00968	0,00194	0,121	0,3014	0,01507	191	225
		70	6	0,86	0,01028	0,00147	0,109			162	150
		30	7	0,46	0,00868	0,00289	0,138			216	400
	300	50	8	0,66	0,00968	0,00194	0,121	0,3219	0,01073	161	150
		70	9	0,86	0,01028	0,00147	0,109			136	150
		30	10	0,66	0,03095	0,01032	0,216			744	350
	100	50	11	0,86	0,03655	0,00731	0,206	0,3584	0,03584	572	400
		70	12	1,06	0,03995	0,00571	0,194			489	300
		30	13	0,66	0,03095	0,01032	0,216			577	550
6	200	50	14	0,86	0,03655	0,00731	0,206	0,4254	0,02127	442	300
		70	15	1,06	0,03995	0,00571	0,194			376	350
		30	16	0,66	0,03095	0,01032	0,216			488	500
	300	50	17	0,86	0,03655	0,00731	0,206	0,4549	0,01516	375	250
		70	18	1,06	0,03995	0,00571	0,194			318	250

F- und J-Werte gelten für die Stringerteilung bzw. die Spantteilung l.

hier zu prüfen. Der zweite Teil der rechten Gleichungsseite, der die Verdrehsteifigkeit berücksichtigt, ist weggelassen worden. In Zahlentafel 1 sind die Maße und Querschnittswerte aller untersuchten Platten zusammengestellt. Es gibt natürlich zu jeder Stringerteilung nur eine bestimmte Hautknickspannung, deren Ermittlung keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet. Die hier mitgeteilten Plattenuntersuchungen sollten in der Hauptsache grundsätzliche Fragen klären und zur rechnerischen Behandlung als Kontrollwerte dienen. Die Werte $J_v{}^*$ und $J_x{}^*$ stellen die Biegesteifigkeit der entsprechenden Querschnitte je Zentimeter Länge dar.

Für die Ermittlung von $J_v{}^*$ wurde die Verschiedenheit der Elastizitätswerte der Beplankung (quer zur Faser) und Kiefer mit

$$E_{\text{Sph}} = 0{,}7 \cdot E_{\text{Kiefer}}$$

berücksichtigt. Für Kiefer wurde mit $E = 120\,000$ kg/cm² gerechnet. $J_x{}'$ wurde als über die Feldbreite nach

$$J_x{}' = \frac{2}{B} \cdot \Sigma J_x \cdot \cos^2 \frac{\pi y}{B}$$

veränderlich angesetzt.

Den so erhaltenen Werten für das Ausknicken sind die bei den anschließend beschriebenen Versuchen festgestellten Knicklasten gegenübergestellt. Man sieht, daß die Ergebnisse gut übereinstimmen.

Die Untersuchung der Knicklänge nach der Formel

$$L = 0{,}91 \cdot B \cdot \sqrt[4]{\frac{J_x{}^*}{J_v{}^*}}$$

ergibt die Werte, Zahlentafel 2.

Es sind hier auch gleichzeitig wieder die im Versuch bestimmten Werte beigegeben. Dabei ist zu den letzteren zu bemerken, daß sie ursprünglich nur zur Information gemessen wurden und daher keinen großen Anspruch auf Genauigkeit haben.

Die Ableitung einer Formel für die Bruchlast beginnen wir mit der Betrachtung des Deformationszustandes. Bild 2

Zahlentafel 2. Knicklängen. cm.

Nr.	Rechnung	Versuch	Nr.	Rechnung	Versuch
1	21,3	—	10	27	30
2	19,2	21,5	11	25	25
3	18,1	—	12	23,4	25
4	24,4	25	13	31	24
5	22,2	20	14	28	25
6	20,7	20	15	27	—
7	26,6	20	16	34	18
8	24,0	25	17	31	25
9	22,5	—	18	29	21

enthält die verwendeten Bezeichnungen. Bild 3 zeigt den Belastungszustand eines Stringers und eines Spantes in dem

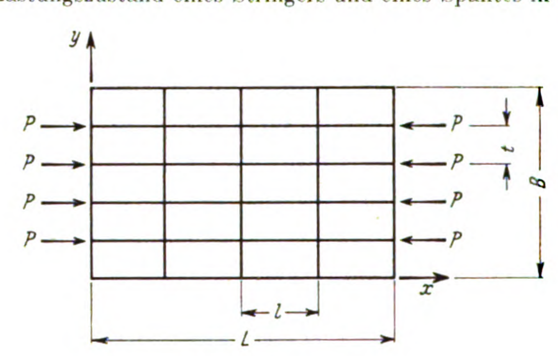


Bild 2. Bezeichnungen.

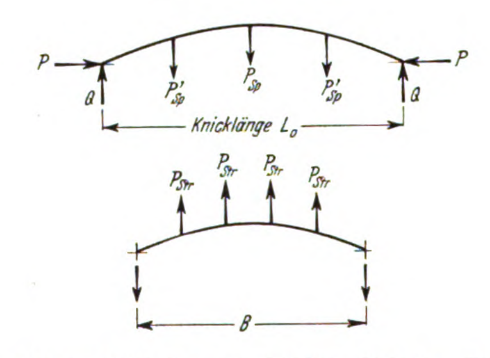


Bild 3. Belastungsbild eines ausgeknickten Stringers. Belastungsbild eines ausgebogenen Spantes.

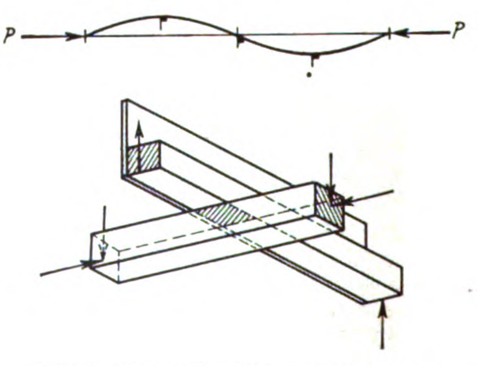


Bild 4. Deformationsbild eines Stringers. Lastschema an einer Verbindungsstelle zwischen Spant und Stringer.

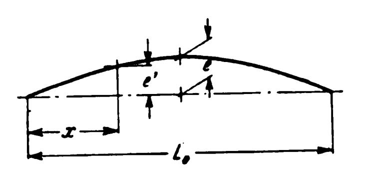


Bild 5. Bezeichnungen an einem Stringer.

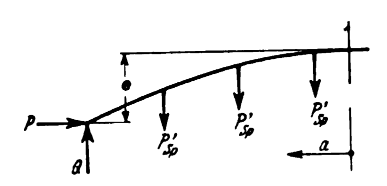


Bild 6. Lastbild eines Stringers zur Ermittlung der Biegemomente.

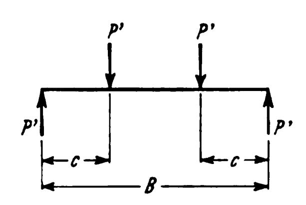


Bild 7. Schema einer Spantbelastung (vereinfacht).

Bereich der Elastika, der die Leimverbindung zwischen Spant und Stringer auf Zug beansprucht, vgl. auch Bild 4.

Der Stringer stellt demnach einen elastisch gestützten Knickstab dar. Die Stützkräfte, die von den Spanten auf die Stringer abgegeben werden (P_{Sp}), werden über die Knicklänge L_0 dem Verlauf der Ausbiegung des Stringers gleichgesetzt, also entsprechend $\sin \frac{\pi x}{L_0}$. Von einer in der Mitte der Knicklänge gedachten Kraft P_{Sp} erhält man also

$$P'_{Sp} = P_{Sp} \cdot \sin \frac{\pi x}{L_0}$$

entsprechend

$$e' = e \cdot \sin \frac{\pi x}{L_0} \quad \text{(vgl. Bild 5).}$$

Die größte Biegebeanspruchung erhält man in der Stringermitte, Bild 6, folgendermaßen:

$$M = P \cdot e + \Sigma P'_{Sp} \cdot a - Q \cdot \frac{L_0}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Dabei ist $a = \frac{L_0}{2} - x$ und man wird den Ausdruck für P'_{Sp} für diesen Zweck günstiger in der Form

$$P'_{Sp} = P_{Sp} \cdot \cos \frac{\pi a}{L_0}$$

schreiben. Also ist

$$\Sigma P'_{Sp} \cdot a = \Sigma P_{Sp} \cdot \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a$$

oder

$$\Sigma P'_{Sp} \cdot a = P_{Sp} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

und außerdem

$$\Sigma P'_{Sp} = P_{Sp} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} = Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Damit wird

$$M = P \cdot e + P_{Sp} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a - P_{Sp} \cdot \frac{L_0}{2} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0}$$

$$M = P \cdot e + P_{Sp} \left(\Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a - \frac{L_0}{2} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \right) . \; . \; . \; (4)$$

Für P_{Sp} ist die Biegesteifigkeit des Spantes maßgebend. Führen wir in Übereinstimmung mit J. Ratzendorfer (Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien 1936, Julius Springer) den Wert A als die Kraft ein, die zu 1 cm Spantdurchbiegung erforderlich ist, dann ist infolge der Gleichheit der Spant- und Stringerdurchbiegung

$$P_{Sp} = A \cdot e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Für unseren Fall muß A die Summe der über die Spantlänge B verteilten Kräfte P_{Str} sein. Wir nehmen zur Vereinfachung der Rechnung eine zur Stelle $x = \frac{L_0}{2}$ immer symmetrische Lage dieser Kräfte an, was in Anbetracht der großen Stringerzahl nie zu großen Fehlern führen kann. Für eine einfache Kräftegruppe nach Bild 7 ist bekanntlich

$$f = \frac{P' \cdot c}{24 \cdot E \cdot J} (3 B^2 - 4 c^2).$$

Mit n = Feldzahl und m als Bezeichnung für die betreffende Stelle wird

$$c = B \cdot \frac{m}{n}.$$

Also

$$f = \frac{P'}{24 \cdot E \cdot J_v} \cdot B \cdot \frac{m}{n} \left[3 B^2 - 4 B^2 \left(\frac{m}{n} \right)^2 \right]$$

$$f = \frac{P' \cdot B^3}{24 \cdot E \cdot J_v} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{3 n^2 - 4 m^2}{n^2}.$$

Wenn man nun auch hier die Verteilung von P' über B entsprechend $\sin \frac{\pi c}{B}$ vornimmt, erhält man:

$$\frac{c}{B} = \frac{m}{n}$$

$$f = \frac{P_{Str} \cdot \sin \frac{\pi m}{n} \cdot B^3}{24 E J_v} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{3 n^2 - 4 m^2}{n^2},$$

wobei P_{Str} analog der Kraft P_{Sp} die Last an der Stelle der größten Ausbiegung ist, die als Ausgangswert dient. Unter dem Einfluß aller Kräfte P' erhält man dann

$$\Sigma f = \frac{P_{Str} \cdot B^3}{24 E J_v} \cdot \Sigma \sin \frac{\pi m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{3 n^2 - 4 m^2}{n^2}; \quad . \; . \; (6)$$

für $\Sigma f = 1$ cm wird $P_{Str} = A$ und man erhält mit

$$C = \Sigma \sin \frac{\pi m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{3 n^2 - 4 m^2}{n^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

$$A_{Sp} = \frac{24 \cdot E \cdot J_v}{C \cdot B^3}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Gl. (8) in Gl. (5) eingesetzt ergibt

$$P_{Sp} = \frac{24 \cdot E \cdot J_v}{C \cdot B^3} \cdot e.$$

Also wird das Moment (Gl. (4))

$$M = P \cdot e + e \cdot \frac{24 \cdot E \cdot J_v}{C \cdot B^3} \left(\Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a - \frac{L_0}{2} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \right).$$

Für den Bruchzustand erhält man im Stringer

$$\sigma_{Br} = \sigma_D + \sigma_B = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Zur einfacheren Schreibweise wird gesetzt:

$$K = \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \cdot a - \frac{L_0}{2} \cdot \Sigma \cos \frac{\pi a}{L_0} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Außerdem kann man noch $W = \frac{J_x}{s}$ schreiben, wobei s den Schwerpunktsabstand von der Innenfaser bedeutet. Durch Umwandlung der Gl. (9) erhält man dann:

$$P = \frac{F \cdot W}{W + F \cdot e} \cdot \left(\sigma_{Br} - 24 \cdot E \cdot \frac{e}{B^3} \cdot s \cdot \frac{K}{C} \cdot \frac{J_v}{J_x} \right) \quad (11)$$

Die Werte F, W, J_v und J_x gelten pro Teilbreite t, ebenso die Endlast P.

Wie aus dem Versuchsbericht, Abschnitt II 1a, ersichtlich ist, hat die Loslösung der Stringer vom Spant (Zugbruch in der Fläche 2ab) erheblichen Einfluß auf die Bruchlast, denn dadurch erfolgt ein sprunghafter Zuwachs der Durchbiegung, also aller Spannungen. Es ist noch nicht gelungen, eine befriedigende, rechnerische Lösung dafür zu finden. In Anlehnung an die Durchbiegung der Versuchsplatten erhält man mit $e = 1{,}0$ cm z. B. für die Ausführung mit 6-mm-Stringern, Zahlentafel 3.

b) Kreiszylindrische Schalen. Der später durchgeführte und in Abschnitt II, 1, b beschriebene Versuch bestätigte die Annahme, daß die aus Bild 8 ersichtlichen Spantdimensionen eine ausreichende Steifigkeit ergeben, um eine Deformation der Spante zu verhindern. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung wesentlich, denn man kann das Element: Stringer + Haut nunmehr einfach als Knickstab zwischen den Spanten auffassen. Zur Ermittlung des

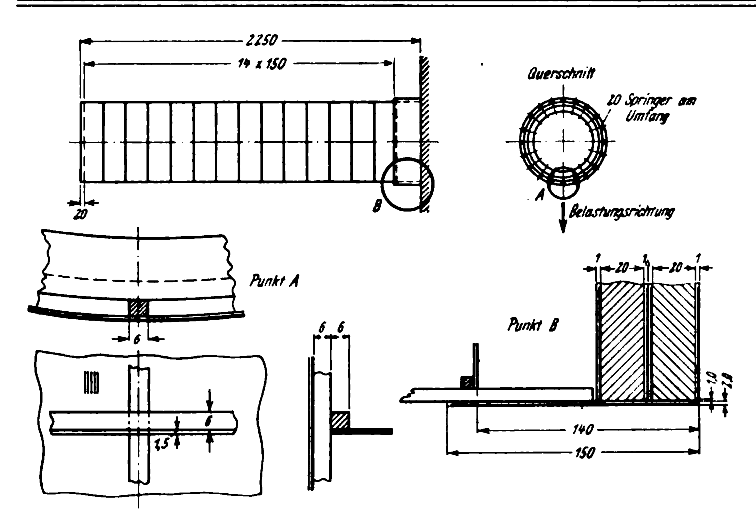


Bild 8. Trommel in der Ausführung als verstärktes Sperrholz.

Zahlentafel 8.

l mm	t mm	Bruchlast P kg Rechnung	Bruchlast P kg Versuch
100	30	75	73,5
	50	112	95,5
	70	141	113,0
200	30	67	74
	50	97	99
	70	121	125
300	30	56	78
	50	78	86
	70	97	115

Querschnittsträgheitsmomentes der Trommel genügt es, diese als einen Kreisring mit mittlerer Wandstärke

$$\delta_m = \delta + \frac{a^2}{t}$$

aufzufassen. Für das Knicken untersucht man dann einen Stringer mit der voll mittragenden Breite t. Für die Trommel, Bild 8, sind die Werte: $J = 9500\ \text{cm}^4$, $W = 346\ \text{cm}^3$, für das Haut-Stringer-Element sind $i = 0{,}187$ cm und bei 150 mm Spantteilung $\lambda = 80$. Das Ergebnis des Versuchs sei wieder vorweggenommen und man erhält für den Knickbruch

$$\text{Rechnung}\quad \sigma = 173\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2},$$
$$\text{Versuch}\quad \sigma = 187\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}.$$

Dabei liegt der Ermittlung von σ das im Anhang mitgeteilte Knickspannungsdiagramm von Kiefernholz zugrunde.

2. Übliche Konstruktion.

a) Ebene Platten. Die Berechnung der Tragfähigkeit von ebenen Platten der üblichen Konstruktion bietet auch bei Holz keine Schwierigkeiten mehr. In Bild 9 ist eine derartige Platte dargestellt. Man kann dabei die Spante als steif genug ansehen, um ein Ausweichen derselben zu verhindern, welche Annahme später durch den Versuch bestätigt wird. Die statischen Werte eines Stringers einschließlich einer mittragenden Breite von 3 cm im Sperrholz sind im folgenden angegeben. Sie betragen:

$$F = 1{,}02\ \text{cm}^2,$$
$$J_x = 0{,}197\ \text{cm}^4,$$
$$i = 0{,}44\ \text{cm}.$$

Bei einer Spantteilung von 340 mm erhält man also ein $\lambda = 78$ und damit, wieder mit Hilfe der im Anhang mitgeteilten Knickspannungskurve, ein $\sigma_K = 175\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}$. Der später beschriebene Versuch ergab $\sigma_K = 178\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}$.

Für Holz wie auch für Metall verursacht die Bestimmung der mittragenden Breite anfänglich einen unnötig hohen Zeitaufwand. Man wird jedoch bald sehen, daß — von Aus-

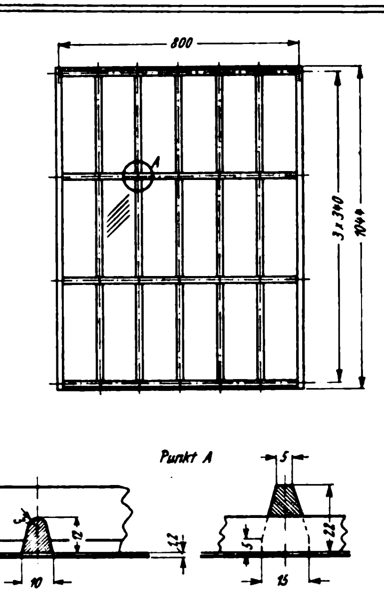


Bild 9. Platte üblicher Konstruktion.

nahmefällen abgesehen — die erhaltenen Werte meistens von derselben Größenordnung sind und wird bald in der Lage sein, genügend genaue Werte zu schätzen. Zu dem hier mitgerechneten Sperrholzanteil ist noch zu bemerken, daß der E-Modul, nachdem wir ein diagonal beplanktes Feld haben, mit rd. 40% des Kiefern-E-Moduls eingesetzt wurde.

b) Kreiszylinder in üblicher Bauweise. Der Aufbau ist aus Bild 10 zu ersehen. Man kann selbstverständlich auch hier die Spante als starre Lagerpunkte ansehen. Die Werte für den Gesamtquerschnitt sind

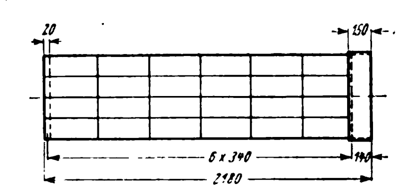
$$J = 11\,760\ \text{cm}^4,$$
$$W_{\min} = 428\ \text{cm}^3,$$
$$W_{12} = 496\ \text{cm}^3.$$

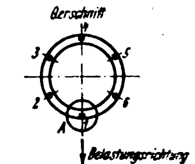
Dabei ist die Haut voll mitgerechnet. Da wir den Einfluß der Feldbreite auf das Ausknicken gekrümmter Sperrholzfelder noch nicht kennen, müssen wir das Ergebnis des mit diesem Zylinder durchgeführten Versuchs zur Unterstützung mit heranziehen; vgl. auch Abschnitt II, 2, b. Wir erhalten dort für den Augenblick des Ausknickens ein Moment von 46800 cmkg. Behält man bei einer Weiterbelastung diesen Betrag als konstant bei, dann haben die Stringer die Zunahme des Momentes bis zu ihrem Bruch zu übernehmen. Entsprechend dem oben angeführten $W_{\min}$ ergibt sich als Spannung im Stringer bei dem »Hautknickmoment«

$$\sigma_{\text{Str}} = 109\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}.$$

Die Knickspannung eines Stringers einschließlich 4 cm mittragender längsgefaserter Haut ist $175\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}$. Die Spannungsdifferenz von $66\ \text{kg}\,\text{cm}^{-2}$ mußte also dem noch aufzubringenden Moment bis zum Bruch entsprechen. Das Trägheitsmoment der Stringer allein ist

$$J_{\text{Str}} = 2230\ \text{cm}^4.$$





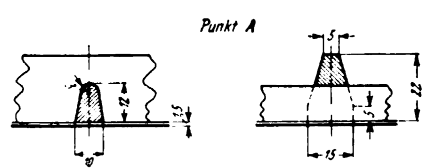


Bild 10. Trommel üblicher Ausführung.



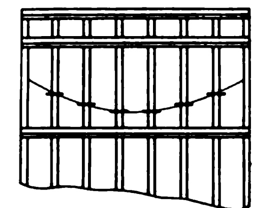


Bild 11. Verteilung der Bruchstellen über Plattenbreite.

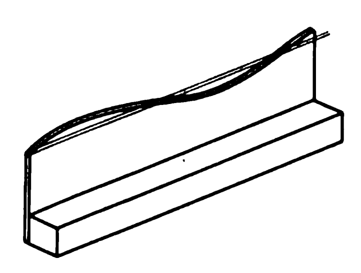


Bild 12. Ausgeknickte Sperrholzfahne eines gebogenen Spantes.

Für den äußersten Stringerschwerpunkt ist $W = 82{,}5\ \text{cm}^3$ und somit

$$\Delta M = 5450\ \text{cm kg}.$$

Als rechnerisches Bruchmoment erhält man dann

$$M_{\text{Br}} = 46\,800 + 5450 = 52\,250\ \text{cm kg},$$

das einer Querkraft

$$P = 282\ \text{kg}$$

entspricht. Der Versuch ergab eine Kraft $P = 295$ kg.

II. Versuche.

1. Verstärktes Sperrholz.

a) Ebene Platten. Es war wesentlich, die Last über die Plattenbreite möglichst gleichmäßig zu verteilen. Deshalb wurden alle Stringer einzeln belastet und aus demselben Grunde wurden am Rand einer jeden Platte zwei Spante in geringem Abstand voneinander verleimt. Die Aufbringung der Last erfolgte mit einem Dynamometer über Hebel auf die Einleitungspunkte (Schneidenlager). Die seitlichen Ränder der Platte sollten einspannungsfrei gestützt sein und außerdem eine Stauchung zulassen. Dies wurde durch Beilegen von schmalen Holzklötzen erreicht.

Zur Bestimmung der Beullast wurde ein Lineal in Längsrichtung an die Beplankung gelegt. Durch entsprechende Beleuchtung wird eine Wölbung der Platte sichtbar gemacht.

Es wurde schon erwähnt, daß die Verbindung zwischen Spant und Stringer über die Verleimung der Fläche $2 \cdot a \cdot b$ erfolgt. Offenbar wird nun jener Teil der S-förmigen Elastika maßgebend, der dem Bild 4 unten entspricht, denn bei stärkerer Ausbiegung der Stringer wird schließlich der Zug im Leim so groß, daß die Verbindung gelöst wird. Unmittelbar nachher erfolgt in der Regel infolge der nun vergrößerten Durchbiegung der Druck-Bruch an der Stringerinnenseite. Der Bruch beginnt naturgemäß normalerweise bei den mittleren Stringern. Die Verteilung der Bruchstellen über die Plattenbreite hat immer die aus Bild 11 ersichtliche Charakteristik. Mit Ausnahme der Platte Nr. 9 erfolgte der Bruch durch Ausknicken der Holzfasern an der Wölbungsinnenseite. Nur bei der eben erwähnten Platte trat ein Zugbruch im Sperrholz ein. Ein Bruch im Spant ist bei keinem Versuch erfolgt. Lediglich hat bei Spanten, die nach c beansprucht wurden, in einem Bereich von 60 bis 80% der Bruchlast das Ausknicken der Sperrholzfahne des Spantes begonnen, Bild 12.

Die Bruchausbiegung der Stringer wurde nicht gemessen. Sie betrug schätzungsweise 7 bis 12 mm.

b) Kreiszylindrische Schale. Die in Bild 8 gezeichnete Trommel wurde über die eine Endscheibe mit einer horizontalen Konsole fest verschraubt, während an der anderen Seite mittels eines Dynamometers und einer Stahllasche die Querkraft zur Erzeugung des Biegemomentes eingeleitet wurde. Um einen Bruch im Ausleitungsbereich der unteren Endscheibe zu vermeiden, wurde von vornherein, wie ebenfalls aus Bild 8, Punkt B, ersichtlich, ein 150 mm breites Sperrholzband von 2 mm Stärke über den Umfang verleimt. Die Versuchsanordnung zeigt Bild 13.

Die Laststeigerung erfolgte allmählich und gleichmäßig. Aus Bild 13 ist zu erkennen, daß es nicht gelungen war, die Knickspannungen von Stringern und Haut gleich groß zu machen. Das liegt zum Teil an der schon erwähnten mangelnden Kenntnis des Einflusses der Feldbreite auf die Knickspannung und außerdem sollten, um einen direkten Vergleich mit der Trommel üblicher Konstruktion zu ermöglichen, beide Versuche möglichst gleiche Endlast erreichen, was ebenfalls ziemlichen Einfluß auf die Feldbreite hatte.

Bei $P = 275$ kg wurde die Gesamtdurchbiegung mit 23 mm festgestellt. Der Bruch erfolgte bei $P = 320$ kg, was für die Mitte zwischen den Spanten 14 und 15 einem Moment

$$M = 202 \cdot 320 = 64\,600\ \text{cm kg}$$

entspricht. Mit $W = 346\ \text{cm}^3$ (s. a. Abschnitt I, 1, b) erhält man die Bruchspannung

$$\sigma = 187\ \text{kg cm}^{-2}.$$

Wie schon vorher gezeigt, stimmt dieses Ergebnis mit der Rechnung gut überein.

2. Übliche Konstruktion.

a) Ebene Platten. Der Versuchsaufbau entspricht in allen Teilen dem des unter II, 1, a beschriebenen. Die

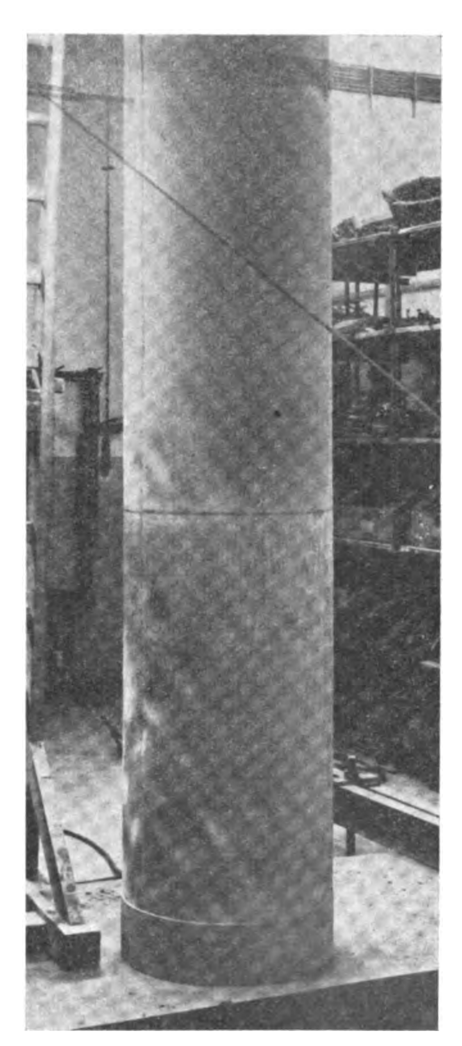
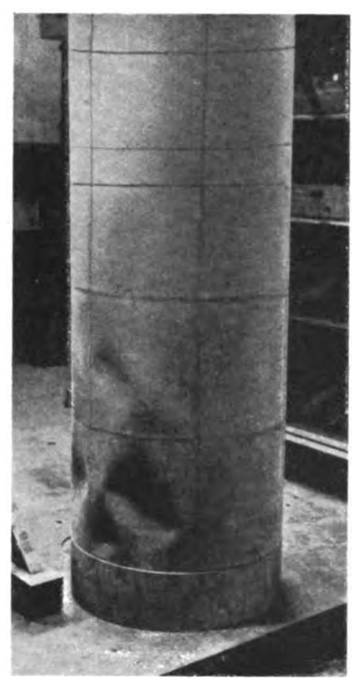
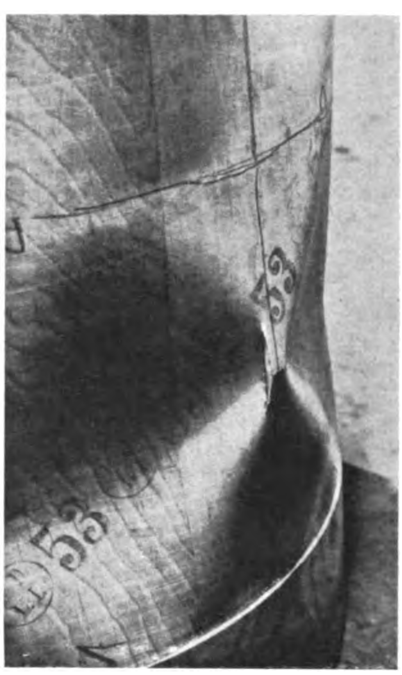


Bild 13. Trommel aus verstärktem Sperrholz bei $Q = 250$ kg.


Bild 14. Trommel üblicher Konstruktion bei $Q = 250$ kg.


Bild 15. Trommel üblicher Konstruktion. Bruchzustand.

für die Rechnung getroffene Annahme, daß die Spante steif genug seien, um für die Knickstäbe als Lagerung zu gelten, wurde bestätigt. Der Bruch erfolgte durchwegs an der Schmalseite des Stringers durch Druckbruch der Fasern. Die Verteilung der Bruchstellen über die Plattenbreite folgt ebenfalls der in Bild 11 angedeuteten Charakteristik. Die ursprünglich dreifeldrige Platte wurde, nachdem alle Brüche im Randfeld auftreten, um das Außenstück gekürzt und abermals belastet. Die praktisch gleichbleibende Bruchlast zeigt, daß tatsächlich das Knicken nur zwischen den starren Spanten erfolgt, Zahlentafel 4.

Zahlentafel 4.

Nr.	Ausführung	Bruchlast
1	3 Knicklängen	172
2		180
3		170
4	2 Knicklängen	168
5		200
6		196

Mittel: 181 kg; mit $F = 1{,}02$ cm² (siehe Abschnitt I 2a) ist $\sigma = 178$ kgcm⁻² Bruchspannung.

b) Kreiszylindrische Schale. Die Ausführung der Trommel ist aus Bild 10 zu ersehen. Der Aufbau des Versuches erfolgte wiederum analog dem unter II, 1, b beschriebenen. Siehe Bild 14. Bei $P = 250$ kg knicken die an den höchstbelasteten Stringern angrenzenden Hautfelder zwischen den Spanten 6 und 7. Das Widerstandsmoment für die Feldmitte ist

$$W_{12} = 496 \text{ cm}^3.$$

Rechnet man für die Hautknickspannung das Moment bis zur Mitte zwischen den beiden Spanten, dann erhält man

$$M = 187 \cdot 250 = 46\,800 \text{ cm kg}$$

als »Hautknickmoment«. Die zugehörige Hautknickspannung ist also

$$\sigma = 94 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Wie unter II, 1, b wurde auch hier bei $P = 275$ kg die Durchbiegung gemessen, die sich zu 32 mm ergab. Daß dieser Wert trotz der größeren Wandstärke so weit über dem der Trommel aus verstärktem Sperrholz liegt, läßt sich aus dem starken Abfall des scheinbaren Gleitmoduls von Sperrholz mit zunehmender Schubspannung erklären.

Der höchstbelastete Stringer beginnt bei $P = 280$ kg auszuknicken. Unmittelbar darauf beginnt an der Stelle der stärksten Stringerkrümmung infolge der scharfen Umlenkung die Haut zu reißen. Bei $P = 295$ kg erfolgt der Druckbruch im Stringer, wobei sich der Riß in der Haut rasch vergrößert. Das Bruchbild ist in Bild 15 wiedergegeben.

III. Gewichtsvergleich.

Um nach den oben ermittelten Ergebnissen einen Vergleich in bezug auf das Baugewicht durchzuführen, wollen wir den Reziprokwert der Spannungen, also die Anzahl Quadratzentimeter je getragenes kg Bruchlast, gegenüberstellen. Den Zahlenwerten, Zahlentafel 5, liegen nicht die rechnerischen sondern die Bruchlasten der Versuche zugrunde.

Dieses an sich schon für die übliche Konstruktion ungünstige Ergebnis würde sich bei Vergrößerung der Stringerteilung weiter verschlechtern, weil dann in bezug auf das Gewicht jedem Stringer eine größere Hautbreite zuzurechnen ist.

Zahlentafel 5. Gewichtsvergleich $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}\right)$ für Platten üblicher Konstruktion mit verstärktem Sperrholz.

Verstärktes Sperrholz						Übl. Konstruktion	
Nr.	cm²/kg	Nr.	cm²/kg	Nr.	cm²/kg	Nr.	cm²/kg
1	0,0094	7	0,0047	13	0,0089		Mittelwert
2	0,0111	8	0,0102	14	0,0087		
3	0,0129	9	0,0116	15	0,0085	1 bis 6	0,0137
4	0,0085	10	0,0090	16	0,0085		
5	0,0097	11	0,0090	17	0,0100		
6	0,0131	12	0,0094	18	0,0092		

Wesentlich einfacher ist hier der Vergleich für die Trommeln. Die gewogenen Gewichte der beiden Trommeln sind:

$G = 5{,}37$ kg bei 1957 mm Länge für verstärktes Sperrholz und

$G = 6{,}47$ kg bei 2004 mm Länge für die übliche Konstruktion. Unter Berücksichtigung der getragenen Bruchmomente ergibt sich das Gewichtsverhältnis zu

$$\frac{G_{\text{verst. Sperrh.}}}{G_{\text{übl. Konstr.}}} = \frac{5{,}37}{1957} \cdot \frac{2004}{6{,}47} \cdot \frac{55000}{64600} = \underline{0{,}723}.$$

Diese beiden Ergebnisse: Zahlentafel 5 und das eben errechnete Gewichtsverhältnis beweisen zur Genüge, daß, wie erwartet wurde, die Bauweise mit verstärktem Sperrholz um einen beträchtlichen Prozentsatz leichter ist als die übliche Konstruktion. Zu bemerken ist dabei noch, daß für den Vergleich der ebenen Platten das Spantgewicht nicht mit einbezogen wurde.

Um schließlich noch die Herstellungsfrage der als verstärktes Sperrholz bezeichneten Bauweise zu streifen, ist zu sagen, daß man das System Stringer-Haut in sehr einfachen Vorrichtungen vorher verleimen und dann auf die Spante (oder Rippen usw.) aufbringen kann. Die Grifffestigkeit ist sehr gut. Die Behandlung von Kräfteeinleitungen in tangentialer oder Längsrichtung bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, ebenso die Schäftung zweier derartiger Hautfelder.



IV. Zusammenfassung.

Durch Rechnung und Versuch wird nachgewiesen, daß man durch weitgehende Heranziehung der Haut zur Aufnahme von Längskräften (Verringerung der Stringerteilung) die Stringerquerschnitte so klein machen kann, daß man wesentlich an Baugewicht einsparen kann. Diese Ersparnis liegt in den Grenzen von etwa 5% bis etwa 40%.

V. Anhang.

Es ist wegen der großen Streuung der Festigkeits- und Elastizitätswerte von Holz ziemlich undankbar, theoretische Ableitungen der Knickkurven vorzunehmen. Dies ist meines Wissens auch erst einmal von Roš und Brunner aus dem Druckstauchungsdiagramm für Bauholz durchgeführt worden. Für ausgesuchte Holzsorten, wie sie im Flugzeugbau verwendet werden, ist noch keine Knickkurve veröffentlicht worden. Es mußten daher Knickversuche mit derartigem Holz gemacht werden, deren Ergebnisse Bild 16 zeigt. Die darin mitgeteilte Kurve wurde den Knickberechnungen der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt.

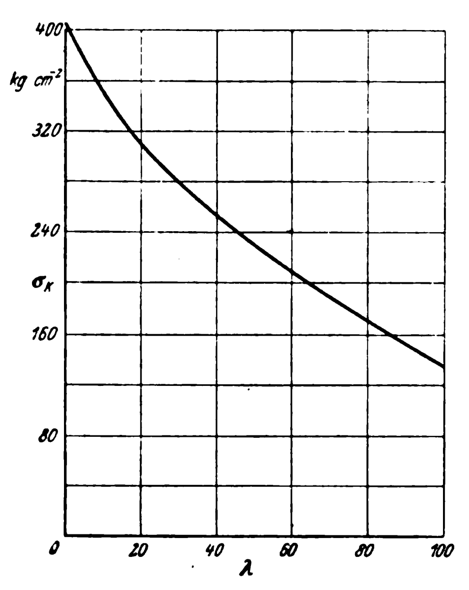


Bild 16. Knickspannung von Kiefernholz.

Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben.

Zuschrift.

In dem Wolffschen Aufsatz in Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), Lfg. 2/3, S. 67 bis 69, werden als Merkmale für einen günstigen Luftschraubenentwurf mit Rücksicht auf hohe Umfangsgeschwindigkeiten bei bereits optimal gewählter Blattbreite dünne Luftschraubenprofile mit weiter Rücklage der größten Dicke und als allerwichtigstes »richtige Steigungsverteilung« genannt. Richtige Steigungsverteilung wird aber im Gegensatz zur dort gegebenen Formulierung weder durch annähernd konstanten Steigungsverlauf, noch durch nach der Blattspitze zu abnehmende c_a-Werte an sich gekennzeichnet, sondern nur durch den c_a-Verlauf, der wirklich der günstigsten Gleitzahl unter Berücksichtigung von Profilform und Machzahl entspricht und nicht notwendig nach der Spitze monoton fallen muß. Man erkennt das gerade an dem angeführten Beispiel der für die Fw 200-A sonderentwickelten Focke-Wulf-Schraube und der Hamilton-Schraube, wo die Nachrechnung zeigt, daß nur die geringere Blattbreite und die Profilform und -dicke, nicht aber die Steigungsverteilung für die bessere Geschwindigkeitsleistung der ersten Schraube maßgebend ist. Das Ergebnis der Rechnung dürfte von allgemeinem Interesse sein und sei daher kurz mitgeteilt.

Da die Flugversuche für beide Schrauben mit etwas verschiedenen Motordrehzahlen durchgeführt waren, wurden auch der Rechnung die nicht ganz gleichen Werte von Fluggeschwindigkeit, Drehzahl und Motorleistung des Versuches zugrunde gelegt. Die Zuströmungsbeeinflussung durch den Motor war dabei durch Annahme konstanter axialer Anströmung $\frac{v}{V} = 1$ von Blattspitze bis $\frac{r}{R} = 0{,}6$, eines Übergangsbogens nach $\frac{v}{V} = 0{,}92$ bei $\frac{r}{R} = 0{,}45$ und anschließenden Abfalles auf $\frac{v}{V} = 0{,}73$ bei $\frac{r}{R} = 0{,}35$ berücksichtigt. Zur Bestimmung des c_a-Verlaufes wurde für jede Schraube auf Grund der Ergebnisse des NACA-Rep. Nr. 463 ein Auftriebs-Winkel-Diagramm gezeichnet, in welchem die Kurven $c_a = f(\alpha_d)$ für Profile verschiedener Dicke und die jeweils zugehörige Machzahl eingetragen waren. Der Zusammenhang zwischen Dickenverhältnis und Machzahl war durch deren Verlauf längs des Blattes gegeben und ist in Bild 1 dargestellt. Für das Fw-Blatt war dabei das Clark-Y-Profil, für das Hamilton-Blatt das RAF-6-Profil des Reports zugrunde gelegt. Infolge des geringen Einflusses der Reynoldsschen Zahl auf den Auftrieb in dem in Frage kommenden c_a-Bereich konnte diese unberücksichtigt bleiben. Eine notwendige Extrapolation nach Machzahlen über 0,85 hinaus war möglich auf Grund anderer Untersuchungsergebnisse, vor allem von Lock (J. roy. aeron. Soc. (1938), März).

Mit Hilfe dieser Unterlagen ergaben sich die in Bild 2 gezeigten ausgezogenen und gestrichelten c_a-Verläufe. Wir haben in beiden Fällen, also auch beim Hamilton-Blatt — und das ist das wesentliche —, an der Spitze einen fallenden

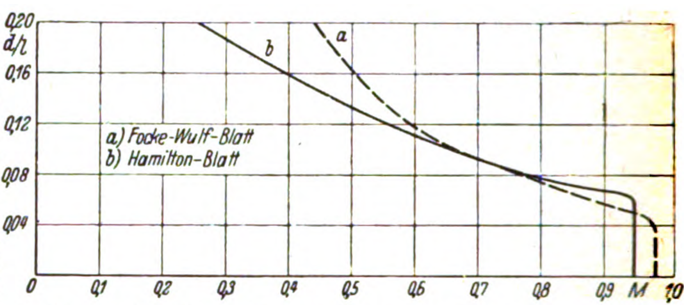


Bild 1. Profildickenverhältnis über zugehöriger Machscher Zahl.

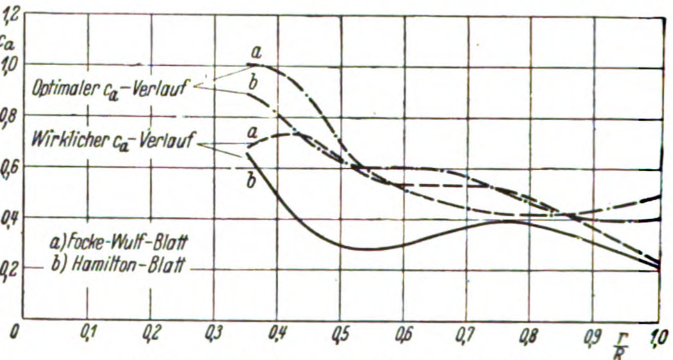


Bild 2. Wirklicher und optimaler c_a-Verlauf.

c_a-Verlauf. Während nämlich die nach außen zunehmende Machzahl im mittleren Blatteil gemäß der Prandtlschen Regel einen Anstieg der c_a-Werte über den durch die Steigung gegebenen Verlauf hinaus bedingt, tritt oberhalb davon ein starker Abfall infolge Erreichens örtlicher Schallgeschwindigkeit ein, der jeden Steigungseinfluß überwiegt. Bestimmt man für die oben aufgestellten $c_a(\alpha_d)$-Kurven die c_a-Werte bester Gleitzahl, die aber nicht mehr ganz unabhängig von der Reynolds-Zahl sind, und trägt diese ebenfalls in Bild 2 ein (einfach und doppelt strichpunktiert), so erkennt man im übrigen, daß für beide Schrauben der fallende c_a-Verlauf nicht dem der optimalen Gleitzahl entspricht, daß aber wegen der geringeren Blattbreite die c_a-Werte des Fw-Blattes den günstigsten Werten im Mittel näher kommen. Der bessere Wirkungsgrad der Schraube ist also lediglich durch die geringere Blattbreite und die speziell für hohe Geschwindigkeiten entworfene Profilform mit ihrer kleineren Gleitzahl bedingt, nicht aber, wie in dem Wolffschen Aufsatz betont, durch die Steigungsverhältnisse an der Blattspitze, also etwa oberhalb von $\frac{r}{R} = 0{,}75$, wo bei Luftschrauben mit hoher Machzahl infolge großer Umfangsgeschwindigkeit Verluste allein zu befürchten sind. Auch die Rechnung ergibt eine Überlegenheit, und zwar von 8%.

Dessau. G. Cordes.

Entgegnung.

Es ist natürlich zutreffend, daß die »richtige Steigungsverteilung« für Bestluftschrauben mit hoher Spitzen-Machscher Zahl an und für sich nicht durch konstante Druckseitensteigung, sondern durch eine c_a-Verteilung entsprechend dem optimalen c_a-Verlauf gekennzeichnet ist. Leider liegen aber bis jetzt noch nicht genügend Messungen vor, um für die verschiedensten Profilformen, Profildicken und für die verschiedenen insbesondere hohen Machschen Zahlen eindeutig den $c_{a\,\mathrm{opt}}$-Verlauf erkennen zu können.

Trotzdem kann man wohl schon jetzt auf Grund der Meßergebnisse aus NACA-Rep. Nr. 463 und 492 mit Sicherheit aussagen, daß der der besten Gleitzahl entsprechende optimale c_a-Verlauf bei konstantem Profildickenverhältnis mit steigender Machzahl im allgemeinen abfällt. Besonders deutlich zeigen das die Messungen an den symmetrischen Profilen 0009—05 und 0009—35 (Rep. Nr. 492), die wegen des kleinen Nasenhalbmessers und der großen Dickenrücklage für Luftschrauben mit hohen Spitzen-Machzahlen insbesondere nach der Flügelspitze zu in Frage kommen. Die Messungen an den 3 symmetrischen Profilen 0006—63, 0009—63 und 0012—63 mit normalem Nasenhalbmesser und normaler Dickenrücklage lassen erkennen, daß die Messungen bei hohen Machzahlen scheinbar um so ungenauer sind, je größer das Profildickenverhältnis wird (vgl. 0012—63; $V/V_c = 0{,}80$). Es dürfte also selbst bei diesem Profil mit normalem Nasenhalbmesser insbesondere bei kleineren Profildicken bestimmt noch mit einem über der steigenden Machzahl abfallenden Verlauf der optimalen c_a-Werte zu rechnen sein. Auch das Profil 0009—64 zeigt, wenn man von der offensichtlich ungenauen Messung bei $V/V_c = 0{,}86$ absieht, einen Abfall in der optimalen c_a-Verteilung. Ausnahmen bilden nur Profile, die für Luftschrauben, insbesondere nach der Spitze zu, nicht in Frage kommen, wie z. B. 0009—62 wegen der geringen Dickenrücklage, sowie 4409—34 wegen der großen Wölbung. Auch das 6% dicke Profil Clark-*Y* aus Rep. 463 zeigt, wenn man c_{wp} über c_a aufträgt, deutlich den Abfall der optimalen c_a-Werte über der steigenden Machzahl.

Wichtig ist allerdings noch die Feststellung, daß offenbar bei kleineren Machzahlen die optimalen c_a-Werte um so höher liegen, je größer das Profildickenverhältnis ist, während bei größeren Machzahlen sich die Verhältnisse teilweise umkehren.

Dadurch könnte allerdings bei nach der Flügelspitze zu starkem Abfall der Profildicken ein leichter Anstieg der optimalen c_a-Werte eintreten. Trotzdem wurde aber bisher stets nur die Erfahrung gemacht, daß bei der bei Luftschrauben allgemein üblichen Profildickenverteilung durch die Abnahme der relativen Profildicke nach der Flügelspitze zu nur eine Abschwächung des Abfalls der optimalen c_a-Werte gegenüber dem Abfall eintrat, wie er bei konstantem Profildickenverhältnis vorhanden gewesen wäre.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß trotz des nach der Flügelspitze zu abfallenden Profildickenverhältnisses bei den für Luftschrauben in Frage kommenden Profilen mit einem über der steigenden Machzahl abfallenden Verlauf der optimalen c_a-Werte zu rechnen ist. Daraus folgt aber die Bedingung, daß Bestschrauben mit hoher Spitzen-Machzahl im Gegensatz zu solchen ohne nennenswerten Kompressibilitätseinfluß eine nach der Flügelspitze zu abfallende aerodynamische Steigung, d. h. also etwa konstante Druckseitensteigung aufweisen müssen. Selbstverständlich wird später einmal, sobald über die optimalen c_a-Werte bei den verschiedensten Profilen und hohen Machzahlen umfangreichere Messungen vorliegen, diese Faustregel durch eine genauere ersetzt werden können. Bei dem in dem Aufsatz »Einfluß der Machschen Zahl auf den Wirkungsgrad von Luftschrauben«, Lufo, Bd. 18 (1941), Lfg. 2/3, S. 67, angeführten Beispiel ist gerade aus der erfolgten Nachrechnung zu erkennen, daß die Flügel der Hamilton-Schraube im Bereich von $r/R = 0{,}45$ bis $0{,}75$ gegenüber den in diesem Radienbereich sicher vorhandenen optimalen c_a-Werten einen zu niedrigen c_a-Verlauf aufweisen, d. h. das Hamilton-Blatt hätte in diesem Bereich eine größere Einstellung haben müssen. Würde man aber in diesem Radienbereich die Steigung der Hamilton-Schraube vergrößern, so würde sich, wie Bild 6 in dem genannten Aufsatz erkennen läßt, eine ungefähr konstante Druckseitensteigung ergeben.

Bremen. H. Wolff.



Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 10 SEITE 341 BIS 372 | MÜNCHEN, 27. 10. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Halbjahresbezugspreis RM. 9.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 27. Oktober 1941 Lfg. 10

Über die Stabilität der Laminarströmung um eine Kugel.

Von J. Pretsch.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., Institut für Forschungsflugbetrieb und Flugwesen.

Die Methode der Stabilitätsuntersuchung einer ebenen Laminarströmung läßt sich auf die Laminarströmung um eine Kugel ohne Änderung übertragen; sie wird auf die Geschwindigkeitsverteilung im Staupunkt eines Rotationskörpers angewendet.

Gliederung.

I. Aufgabenstellung.

Bei der Widerstandsberechnung bewegter Körper ist es entscheidend zu wissen, unter welchen Umständen die laminare Strömung in der wandnahen Reibungsschicht turbulent wird. Die in der Theorie zur Klärung dieser Frage gelieferten Beiträge von Tollmien [1, 2], Schlichtung [3, 4, 5, 6] und Görtler [7, 8] beziehen sich auf das ebene Problem. Diese Untersuchungen erfolgten auf der Grundlage der Methode der kleinen Schwingungen, indem geprüft wurde, ob die der vorgelegten Grundströmung überlagerten kleinen Schwingungen verschiedener Frequenz bei bestimmten Reynoldsschen Zahlen angefacht oder gedämpft werden. Als ein erstes orientierendes Maß für die Stabilität der Laminarströmung kann man dabei eine kritische Reynoldssche Zahl, die sog. Stabilitätsgrenze, ansehen, unterhalb deren für das betreffende Geschwindigkeitsprofil die Schwingungen aller Frequenzen gerade noch gedämpft werden. Für die bei Druckgefälle und Druckanstieg in einer ebenen Reibungsschicht auftretenden Geschwindigkeitsprofile kann man diese Stabilitätsgrenze angeben und die Ergebnisse dieser Rechnungen zu einer näherungsweisen Aussage über den Umschlagbeginn an Tragflügeln benutzen.

Es wäre nun wünschenswert, die entsprechende Frage für einen in Richtung seiner Längsachse angeströmten Rotationskörper zu untersuchen; als solchen kann man annähernd den Flugzeugrumpf ansprechen, dessen Widerstand in letzter Zeit eine an Bedeutung zunehmende Rolle im Leistungsverbrauch des Flugzeugs spielt. Dabei tritt aber folgende Schwierigkeit auf:

Für die Stabilitätsuntersuchung muß man die Kurven der laminaren Geschwindigkeitsverteilungen so genau kennen, daß sich noch ihre Krümmungen mit Sicherheit angeben lassen; zur Zeit besteht aber wenig Aussicht, für einen Rotationskörper mit beliebigem Querschnitt diesen Grad an Genauigkeit zu erreichen.

Als vorläufige Studie soll darum zunächst die Stabilitätstheorie der laminaren Reibungsschicht an dem einfachsten Rotationskörper, der Kugel, aufgestellt werden, für die hinreichend genaue Geschwindigkeitsverteilungen in der Reibungsschicht vielleicht in absehbarer Zeit vorliegen werden. Außerdem wird für die Kugel dann ein Vergleich mit dem Experiment am vielseitigsten ausfallen, da Druckverteilungs-, Reibungsschicht- und Widerstandsmessungen an ihr reichlich zur Verfügung stehen. Da die Kugel weiterhin auch das verbreitetste Gerät zur Bestimmung des Turbulenzgrades ist, dürfte eine theoretische Untersuchung ihrer Umschlagbedingungen auch von allgemeinerem Interesse sein.

Um überhaupt eine konkrete Angabe über die Stabilität einer Laminarströmung am Rotationskörper zu machen, werden wir zum Schluß die einzige zur Zeit zuverlässig bekannte Verteilung, das von Homann [9] berechnete Staupunktprofil, einer Stabilitätsuntersuchung unterziehen.

II. Die allgemeine Störungsdifferentialgleichung.

Um die Stabilitätstheorie für die Kugelströmung abzuleiten, gehen wir von den allgemeinen Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen aus, die wir in den sphärischen Polarkoordinaten R, ϑ und Φ, Bild 1, ausdrücken. Bezeichnen wir mit u, v, w die Geschwindigkeiten in Richtung der wachsenden Koordinaten ϑ, R, Φ, so ist für das rotationssymmetrische Problem zunächst:

$$w = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u \sin \vartheta) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 v) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die Bewegungsgleichungen für u und v haben die Gestalt:

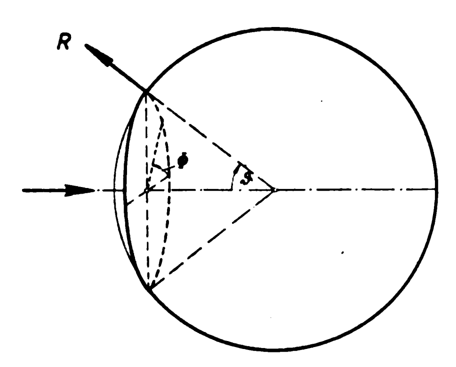


Bild 1. Zur Definition der sphärischen Polarkoordinaten.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{R}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}+v\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{u v}{R}=-\frac{1}{\varrho R}\frac{\partial p}{\partial \vartheta}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}-\frac{u}{R^2\sin^2\vartheta}\right), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial R}+\frac{u}{R}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}-\frac{u^2}{R}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial R}$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial v}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}+\frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right.$$
$$\left.-\frac{2 v}{R^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}-\frac{2 u \operatorname{cotg}\vartheta}{R^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Wir führen als neue Koordinaten die Bogenlänge s vom Staupunkt aus und den Abstand n von der Kugeloberfläche ein:

$$s = R_0\,\vartheta,$$
$$n = R - R_0,$$

wo R_0 den Kugelradius bezeichnet.

Beschränken wir uns auf die Betrachtung des Strömungsgebietes, in dem $n \ll R_0$ ist, so erhalten wir nach Elimination des Druckes aus (3) und (4) die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial n}+\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial s}+u\frac{\partial^2 u}{\partial s\,d n}+\frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n}+v\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\frac{v}{R_0}\frac{\partial u}{\partial n}$$
$$+\frac{u}{R_0}\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{\partial^2 v}{\partial t\,d s}-\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}-u\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial n}$$
$$-v\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial n}+\frac{2 u}{R_0}\frac{\partial u}{\partial s}=\nu\left[\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial n\,\partial s^2}+\frac{2}{R_0}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right.$$
$$+\frac{\operatorname{cotg} s/R_0}{R_0}\frac{\partial^2 u}{\partial n\,\partial s}-\frac{1}{R_0^2\sin^2 s/R_0}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial^3 v}{\partial n^2\,\partial s}$$
$$-\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}-\frac{\operatorname{cotg} s/R_0}{R_0}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\frac{1}{R_0^2\sin^2 s/R_0}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{2}{R_0^2}\frac{\partial v}{\partial s}$$
$$\left.+\frac{2}{R_0}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{2\operatorname{cotg} s/R_0}{R_0^2}\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{2 u}{R_0^3\sin^2 s/R_0}\right] \quad . . (5)$$

Es sei nun U und V die Tangential- und Normalkomponente der rotationssymmetrischen Grundströmung um die Kugel, deren Stabilität gegenüber kleinen Schwingungen untersucht werden soll. Die überlagerte Störungsbewegung habe die Stromfunktion:

$$\psi(s, n, t)=\varphi(s, n)\,e^{i\alpha(s-c t)}, \quad \ldots \ldots (6)$$

wo α die räumliche Kreisfrequenz und der Realteil von $c = c_r + i c_i$ ihre Phasengeschwindigkeit bedeutet. Die Störungsgeschwindigkeiten sind gegeben durch:

$$u^*=-\frac{1}{R_0\sin s/R_0}\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{1}{R_0\sin s/R_0}\,\varphi'\,e^{i\alpha(s-c t)},$$
$$v^*=\frac{1}{R_0\sin s/R_0}\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{1}{R_0\sin s/R_0}\,e^{i\alpha(s-c t)}\left(i\alpha\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right), \quad \ldots \ldots (7)$$

wenn ′ Differentation nach n bedeutet.

Zu der grundlegenden Bewegungsgleichung des Störungsproblems gelangen wir nun, wenn wir die durch Überlagerung der Grundströmung und der Störungsbewegung hervorgehende Strömung mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = U + u^*; \quad v = V + v^*$$

in die Bewegungsgleichung (5) einführen.

Unter Beschränkung auf die in φ linearen Glieder und unter Vernachlässigung der Terme von unterlegener Größenordnung (man vergleiche hierzu die Abschätzung im Anhang 1 von [10]) erhalten wir die allgemeine Störungsdifferentialgleichung zunächst in der Form:

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi+\underline{\frac{1}{R_0}(U\varphi'-U'\varphi)}$$
$$=-\frac{i\nu}{\alpha}[\varphi^{IV}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi]+\frac{i}{\alpha}[V(\varphi'''-\alpha^2\varphi')-V''\varphi']$$
$$+\frac{i}{\alpha}\left[(2\alpha^2 c-3\alpha^2 U-U'')\frac{\partial\varphi}{\partial s}+U\frac{\partial\varphi''}{\partial s}\right]$$
$$\underline{+\frac{i}{\alpha R_0}\operatorname{cotg} s/R_0\,[(3U-c)\,\alpha^2\varphi-2(U\varphi''+U'\varphi')]} \quad (8)$$

Führen wir dimensionslose Bezeichnungen ein, indem wir die Geschwindigkeiten auf die Geschwindigkeit U_∞ der ungestörten Strömung beziehen, die Bogenlänge auf den Kugelradius R_0 und den Wandabstand sowie die Wellenlänge der Schwingung auf eine Bezugslänge der Reibungsschicht, etwa die Verdrängungsdicke δ^* in einem festen Punkt der Kugeloberfläche, so läßt sich (8) mit

$$Re_\infty^* = \frac{U_\infty\,\delta^*}{\nu}$$

auch in der Form schreiben:

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi+\underline{\frac{\delta^*}{R_0}(U\varphi'-U'\varphi)}$$
$$=-\frac{i}{\alpha\,Re_\infty^*}[\varphi^{IV}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi]$$
$$+\frac{i}{\alpha}[V(\varphi'''-\alpha^2\varphi')-V''\varphi']$$
$$+\frac{i\,\delta^*}{\alpha R_0}\left[(2\alpha^2 c-3\alpha^2 U-U'')\frac{\partial\varphi}{\partial s}+U\frac{\partial\varphi''}{\partial s}\right]$$
$$\underline{+\frac{i\,\delta^*}{\alpha R_0}\operatorname{cotg} s/R_0\,[(3U-c)\,\alpha^2\varphi-2(U\varphi''+U'\varphi')]} \quad (9)$$

Diese lineare partielle Differentialgleichung 4. Ordnung stellt die allgemeinste Bewegungsgleichung der gestörten Reibungsschichtströmung an der Kugel dar. Sie unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung des ebenen Problems durch das Hinzukommen der unterstrichenen Glieder, die dieselbe Größenordnung wie die übrigen Glieder der rechten Seite von (9) besitzen.

Die Störungsgleichung gilt auch in unmittelbarer Umgebung des Staupunktes $s = 0$, da dort U und c wie $\sin s/R_0$ abnehmen, während $\operatorname{cotg} s/R_0 \to \infty$ geht; für $R_0 \to \infty$ geht die Störungsgleichung, wie zu erwarten, in die ebene Störungsgleichung über.

Wir werden nunmehr den Nachweis führen, daß die Störungsgleichung für die Strömung um die Kugel trotz des Hinzutretens der unterstrichenen Glieder genau dieselben Partikularlösungen hat wie die ebene Störungsgleichung.

III. Die Lösungen der Störungsdifferentialgleichung.

Nehmen wir $\alpha\,Re_\infty^*$ als sehr groß an und bedenken wir, daß

$$\frac{\delta^*}{R_0}=\frac{C}{Re_\infty^*} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

ist, so vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung (9) zu der Tollmienschen reibungslosen Störungsgleichung für das ebene Problem:

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi=0, \quad \ldots . (11)$$

deren »reibungslose Lösungen« φ_1, φ_2 wegen der gleichen Randbedingungen also mit denen des ebenen Problems identisch sind. Es gilt damit auch alles an anderer Stelle über diese Lösungen Gesagte; insbesondere ist bei der Konstruktion der Lösung φ_2 in der kritischen Schicht $U = c$ die Reibung in Form einer Übergangssubstitution zu berücksichtigen, die wir im folgenden ableiten werden.

Wir nähern dazu die laminare Grundgeschwindigkeit in der kritischen Schicht durch eine Parabel an:

$$U-c=U_0'(n-n_c)+\frac{U_0''}{2}(n-n_c)^2 \quad . . . (12)$$

Mit der neuen Veränderlichen:

$$\eta=\frac{n-n_c}{\varepsilon}; \quad \varepsilon=(\alpha\,Re_\infty^*\,U_0')^{-1/3}; \quad \xi=s, \quad . . (13)$$

die wir wie beim ebenen Problem definieren und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\eta}{\partial n}&=\frac{1}{\varepsilon}; \quad \frac{\partial\eta}{\partial s}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d n_c}{d s}+\frac{\eta}{3U_0'}\frac{d U_0'}{d s},\\ \frac{\partial}{\partial n}&=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}; \quad \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d n_c}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta}{3U_0'}\frac{d U_0'}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

lautet die Störungsgleichung (9) zunächst:

$$\left.\begin{aligned}&\left(U_0'\varepsilon\eta+\frac{U_0''}{2}\varepsilon^2\eta^2\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\alpha^2\varphi\right)-U_0''\varphi+\frac{C}{Re^*_\infty}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(c+U_0'\varepsilon\eta+\frac{U_0''}{2}\varepsilon^2\eta^2\right)-\varphi\left(U_0'+U_0''\varepsilon\eta\right)\right]=\\&-\frac{i}{\alpha Re^*_\infty}\left[\frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\eta^4}-\frac{2\alpha^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\alpha^4\varphi\right]+\frac{i}{\alpha}\left[V\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]+\\&+\frac{iC}{\alpha Re^*_\infty}\left\{\left[2\alpha^2c-3\alpha^2\left(c+U_0'\varepsilon\eta+\frac{U_0''}{2}\varepsilon^2\eta^2\right)-U_0''\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dn_c}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\eta}{3U_0}\frac{dU_0'}{d\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]\right.\\&+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[c+U_0'\varepsilon\eta+\frac{U_0''}{2}\varepsilon^2\eta^2\right]\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^2\partial\xi}+\frac{2}{3U_0'}\frac{dU_0'}{d\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dn_c}{d\xi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}+\frac{\eta}{3U_0'}\frac{dU_0'}{d\xi}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}\right]\\&\left.+\operatorname{cotg}s/R_0\left[\alpha^2\varphi\left(2c+3U_0'\varepsilon\eta+\frac{3}{2}U_0''\varepsilon^2\eta^2\right)-\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\left(c+U_0'\varepsilon\eta+\frac{U_0''}{2}\varepsilon^2\eta^2\right)-\frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(U_0'+U_0''\varepsilon\eta\right)\right]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Die Normalkomponente V der Geschwindigkeit erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung (2), die sich nach Vernachlässigung des Gliedes $\frac{2v}{R_0}$ vereinfacht zu:

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{u}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0=0 \quad \ldots\ldots (16)$$

Es wird demnach:

$$\begin{aligned}V=&-\frac{1}{Re^*_\infty}\int_0^n\left(\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{U}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0\right)dn\\=&-\frac{1}{2Re^*_\infty}\left\{2\frac{dc}{d\xi}(n_c+\varepsilon\eta)-\frac{dU_0'}{d\xi}(n_c^2-\varepsilon^2\eta^2)\right.\\&+\frac{1}{3}\frac{dU_0''}{d\xi}(n_c^3+\varepsilon^3\eta^3)\\&-2U_0'\frac{dn_c}{d\xi}(n_c+\varepsilon\eta)+U_0''\frac{dn_c}{d\xi}(n_c^2-\varepsilon^2\eta^2)\\&+\frac{1}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0\left[2c(n_c+\varepsilon\eta)-U_0'(n_c^2-\varepsilon^2\eta^2)\right.\\&\left.\left.+\frac{U_0''}{3}(n_c^3+\varepsilon^3\eta^3)\right]\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (17)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}=-\frac{1}{Re^*_\infty}&\left[\frac{dU_0'}{d\xi}\varepsilon^2+\frac{dU_0''}{d\xi}\varepsilon^3\eta-U_0''\frac{dn_c}{d\xi}\varepsilon^2\right.\\&\left.+\frac{1}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0\left(U_0'\varepsilon^2+U_0''\varepsilon^3\eta\right)\right]\quad .\ (18)\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (15) nach Multiplikation mit $\frac{\varepsilon}{U_0'}$, indem wir uns wegen der voraussetzungsgemäß großen Reynoldsschen Zahl Re^*_∞ auf die in ε linearen Glieder beschränken, zunächst die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{U_0''}{2U_0'}\varepsilon\eta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\frac{U_0''}{U_0'}\varepsilon\varphi\\&\underline{+\frac{cC}{Re^*_\infty U_0'}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\varepsilon C}{Re^*_\infty}\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\varphi\right)}=\\&-i\frac{\partial^4\varphi}{\partial\eta^4}+i\varepsilon\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}\left[-\frac{dc}{d\xi}\eta_c+\frac{1}{2}\frac{dU_0'}{d\xi}n_c^2\right.\\&-\frac{1}{6}\frac{dU_0''}{d\xi}n_c^3+U_0'\frac{dn_c}{d\xi}n_c-\frac{U_0''}{2}\frac{dn_c}{d\xi}\eta_c^2\\&\left.-\frac{C\,c\,dn_c}{d\xi}-\frac{1}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0\left(c\,n_c-\frac{U_0'}{2}n_c^2+\frac{U_0''}{6}n_c^3\right)\right]\\&\ldots\ldots (19)\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}&\frac{cC}{Re^*_\infty U_0'}\frac{d\varphi}{\partial\eta}+\frac{\varepsilon C}{Re^*_\infty}\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\varphi\right)\\&\qquad=Cc\alpha\varepsilon^3\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+U_0'\alpha C\varepsilon^4\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\varphi\right),\qquad(20)\end{aligned}$$

so daß die in (19) unterstrichenen Glieder zu vernachlässigen sind.

Um die Reibungskorrektur für die reibungslose Lösung φ_2 in der kritischen Schicht zu erhalten, entwickeln wir die Lösung φ_2 nach Potenzen von ε:

$$\varphi_2=\varphi\quad+\varepsilon\varphi_{21}+\varepsilon^2\varphi_{22}+\ldots,\quad\ldots\ldots (21)$$

die sich in einiger Entfernung von der kritischen Stelle $U=c$ an die reibungslose Lösung anschließt. Setzen wir (21) in (20) ein, so wird mit $\varphi_{20}=1$ und Multiplikation mit $-\frac{i}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4\varphi_{21}}{\partial\eta^4}-i\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial\eta^2}\left(\eta+\frac{U_0''}{2U_0'}\eta^2\varepsilon\right)=-i\frac{U_0''}{U_0'}(1+\varepsilon\varphi_{21})\\&\quad+\varepsilon\frac{\partial^3\varphi_{21}}{\partial\eta^3}\left[-\frac{dc}{d\xi}\eta_c+\frac{1}{2}\frac{dU_0'}{d\xi}n_c^2\right.\\&\quad-\frac{1}{6}\frac{dU_0''}{d\xi}n_c^3+U_0'\frac{d\eta_c}{d\xi}n_c-\frac{U_0''}{2}\frac{dn_c}{d\xi}n_c^2\\&\quad\left.-cC\frac{dn_c}{d\xi}-\frac{1}{R_0}\operatorname{cotg}s/R_0\left(c\,n_c-\frac{U_0'}{2}n_c^2+\frac{U_0''}{6}n_c^3\right)\right]\\&\qquad\qquad\ldots\ldots (22)\end{aligned}$$

Vernachlässigt man abermals die Glieder mit ε, so erhält man als Differentialgleichung für die Übergangssubstitution φ_{21} dieselbe wie beim ebenen Problem:

$$\frac{\partial^4\varphi_{21}}{\partial\eta^4}-i\eta\frac{\partial^2\varphi_{21}}{\partial\eta^2}=-i\frac{U_0''}{U_0'}\quad\ldots\ldots (23)$$

Schließlich ist leicht zu zeigen, daß auch die reibungsbedingten Lösungen in Wandnähe φ_3, φ_4 dieselben sind wie beim ebenen Problem. Für $\varepsilon\to 0$ erhält man aus (19) nämlich dieselbe Differentialgleichung wie dort:

$$i\frac{\partial^4\varphi_{3,4}}{\partial\eta^4}+\eta\frac{\partial^2\varphi_{3,4}}{\partial\eta^2}=0\quad\ldots\ldots (24)$$

Da die Randbedingungen der Störungsdifferentialgleichung bei der Strömung um die Kugel ebenfalls dieselben sind wie beim ebenen Problem, ist somit in allen Teilen nachgewiesen, daß die Untersuchung der Stabilität einer Laminarströmung um die Kugel nach genau demselben Verfahren wie beim ebenen Problem erfolgt.

Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, daß die Methode des ebenen Problems sich nicht nur auf die Kugel, sondern allgemein auf jeden Rotationskörper übertragen läßt. Zum strengen Beweis dieser Vermutung müßte man von den Bewegungsgleichungen in allgemeinen Orthogonalkoordinaten ausgehen.

IV. Die Stabilität der Laminarströmung im Staupunkt eines Rotationskörpers.

Wir wollen nunmehr die Geschwindigkeitsverteilung im Staupunkt der Kugel auf ihre Stabilität gegenüber kleinen Schwingungen untersuchen.

Dieses Geschwindigkeitsprofil, das im Staupunkt eines jeden anderen Rotationskörpers mit dort nicht verschwindendem Krümmungsradius dieselbe Form hat, leitete Homann [9] aus den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen ab, die er zu diesem Zweck in zylindrischen Polarkoordinaten ausdrückte:

$$\left.\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

hierbei bezeichnet u die Geschwindigkeit in Richtung der wachsenden Entfernung r vom Staupunkt in der Tangentialebene am Staupunkt und v die Geschwindigkeit in Richtung des wachsenden Abstandes z vom Staupunkt längs der Körperachse.

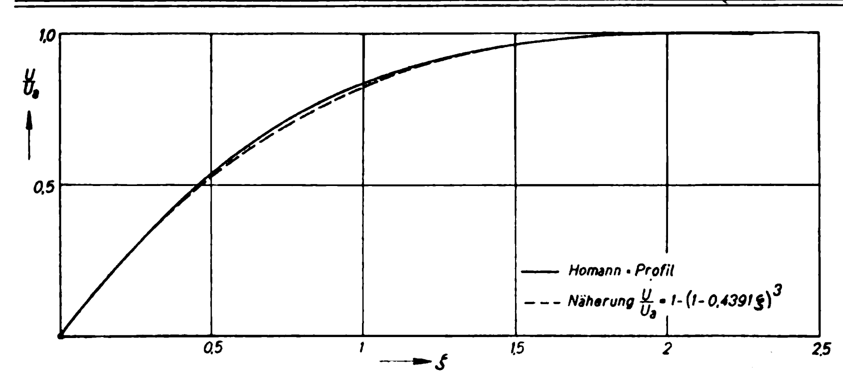


Bild 2. Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht am Staupunkt eines Rotationskörpers.

Außerhalb der Reibungsschicht ist die Potentialgeschwindigkeit im Staupunkt dieselbe wie die gegen die Platte:

$$U_a = \beta r; \quad V_a = -2\beta z \quad \dots\dots (26)$$

Mit dem dimensionslosen Wandabstand:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}\, z \quad \dots\dots\dots\dots (27)$$

und dem Ansatz für die Stromfunktion:

$$\psi = \sqrt{\beta \nu}\, r^2 f(\zeta) \quad \dots\dots\dots\dots (28)$$

erhielt Homann für das Staupunktprofil am Rotationskörper die Differentialgleichung:

$$f''' + 2ff'' - f'^2 + 1 = 0, \quad \dots\dots (29)$$

wo $f'(\zeta) = \frac{U(\zeta)}{U_a}$ die dimensionslose Geschwindigkeit in der Reibungsschicht bedeutet. Die Differentialgleichung unterscheidet sich von der Hiemenzschen Differentialgleichung für die ebene Staupunktströmung nur durch die Zahl 2 im zweiten Glied; sie hat dieselben Randbedingungen $f = f' = 0$ für $\zeta = 0$ und $f' = 1$ für $\zeta \to \infty$. Die Lösung ist in Bild 2 dargestellt.

Für die Stabilitätsuntersuchung brauchen wir noch eine passende Annäherung der Geschwindigkeitsverteilung, für die wir in Anlehnung an frühere Rechnungen [10] wieder einen Ausdruck der Form:

$$\frac{U}{U_a} = 1 - (1-y)^n \quad (n = 2, 3, 4 \dots) \quad \dots (30)$$

verwenden wollen. Wir wählen dazu die gleichfalls in Bild 2 dargestellte Gleichung:

$$\frac{U}{U_a} = 1 - (1 - 0{,}4391\,\zeta)^3 \quad \dots\dots (31)$$

In Bild 3 ist das Polardiagramm zur Ermittlung der Indifferenzkurve, Bild 4, aufgetragen, die in der von Reynoldsscher Zahl und Störungsfrequenz ausgespannten Ebene stabile und instabile Störungszustände trennt. Zum Vergleich ist in Bild 4 die Indifferenzkurve für das ebene Staupunktprofil nach Hiemenz eingezeichnet. Man sieht, daß die Stabilitätsgrenze Re^*_{krit} beim räumlichen Staupunktprofil nur etwa den dritten Teil des Wertes beim ebenen Profil beträgt. Es ist also die Laminarströmung in der Nähe des Staupunktes eines Rotationskörpers offenbar instabiler gegenüber kleinen Störungen als die ebene Staupunktsströmung.

V. Zusammenfassung.

Als Beitrag zur Frage der Turbulenzentstehung an einem Rotationskörper wird die Methode der kleinen Schwingungen auf die Strömung um die Kugel angewendet. Es zeigt sich, daß man das für die ebene Strömung entwickelte Verfahren ohne Änderungen übernehmen kann. In der Nähe des Staupunktes eines Rotationskörpers ist die Reibungsschicht instabiler gegenüber kleinen zweidimensionalen Störungen als im Staupunkt eines ebenen Strömungsvorganges, wie eine Untersuchung der von Homann berechneten Geschwindigkeitsverteilung ergibt.

VI. Schrifttum.

[1] W. Tollmien, Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1929, S. 21.
[2] W. Tollmien, Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1935, S. 79.
[3] H. Schlichting, Über die Stabilität der Couetteströmung. Ann. d. Phys. V. Folge, Bd. 14 (1932), S. 905.
[4] H. Schlichting, Über die Entstehung der Turbulenz in einem rotierenden Zylinder. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932, S. 160.
[5] H. Schlichting, Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1933, S. 181.
[6] H. Schlichting, Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1935, S. 47.
[7] H. Görtler, Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. ZAMM Bd. 20 (1940), S. 138.
[8] H. Görtler, Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1940, S. 1.
[9] F. Homann, Der Einfluß großer Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel. ZAMM Bd. 16 (1936), S. 11.
[10] J. Pretsch, Über die Stabilität einer Laminarströmung durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. ZAMM Bd. 21 (1941), S. 204.

Abgeschlossen August 1941.

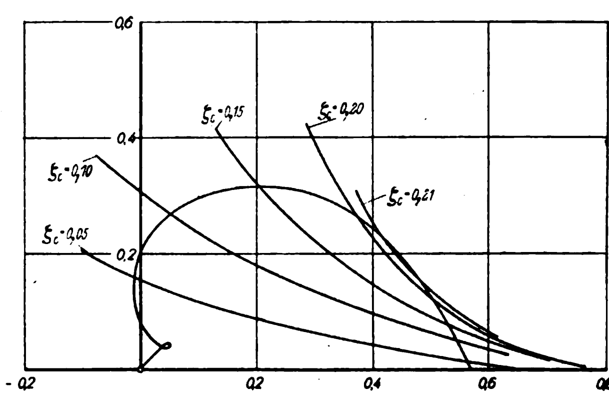


Bild 3. Polardiagramm zur Ermittlung der Indifferenzkurve.

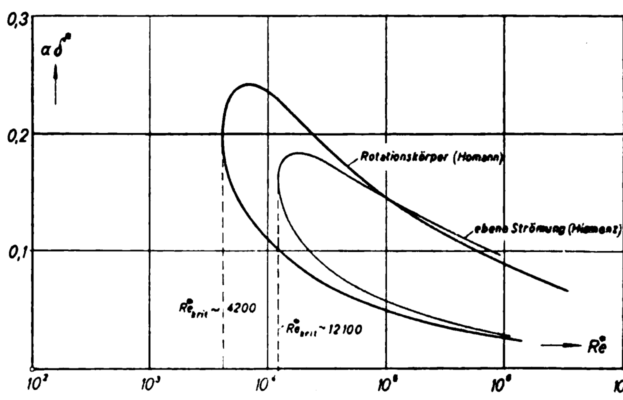


Bild 4. Indifferenzkurve für das Staupunktprofil.

Flugmessungen über den Einfluß der laufenden Schraube auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk (2. Bericht).

Von E. Eujen.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Institut für Forschungsflugbetrieb und Flugwesen.

Der vorliegende Bericht enthält Messungen am fliegenden Flugzeug zur Bestimmung von Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk. Dadurch, daß das Leitwerk selbst als Meßorgan und integrierende Fühlfläche benutzt wird, ergeben sich die gesuchten Größen in ihrem flugmechanisch wirksamen Mittelwert über der Leitwerksspannweite.

Gliederung.

I. Einleitung.

In einem früheren Bericht [1] wurde ein Flug-Meßverfahren zur Bestimmung von Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk eines Flugzeugs mitgeteilt. Die beiden flugmechanisch sehr wichtigen Einflußgrößen α_H und q_H/q erhält man dabei als Mittelwert über der Leitwerksspannweite durch Messung der Selbsteinstellung des Höhenruders. Längsstabilitätsuntersuchungen mit freiem Höhenruder gaben nunmehr Gelegenheit zu einer weiteren Erprobung des Meßverfahrens. Darüber hinaus liefern die Ergebnisse der Messungen einen Beitrag zur Frage der Beeinflussung der Leitwerksströmung durch den Schraubenstrahl, da die Klärung dieses Problems nach wie vor in wesentlichem Umfange auf die statistische Auswertung geeigneten Versuchsmaterials angewiesen ist.

II. Durchführung der Messungen.

Das Abwindmeßverfahren beruht darauf, daß die Einstellung eines mit vollem Gewichtsausgleich versehenen freien Ruders unabhängig von der Größe der Anströmgeschwindigkeit wird, vorausgesetzt, daß das Leitwerk aus geometrisch ähnlichen Profilschnitten besteht. Der jeweilige mittlere Leitwerksanströmwinkel α_H berechnet sich dann aus dem zu messenden Ruderwinkel η_R nach der Beziehung

$$c_r = \left[\frac{\partial c_r}{\partial \alpha_H}\right]_{\eta_R} \cdot \alpha_H + \left[\frac{\partial c_r}{\partial \eta_R}\right]_{\alpha_H} \cdot \eta_R = 0\,^{1)} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Für Ruderwinkel und Anstellwinkel des Leitwerks im Bereich gesunder Strömung ist der Quotient

$$\frac{\partial c_r/\partial \eta_R}{\partial c_r/\partial \alpha_H}$$

eine im wesentlichen durch das Verhältnis von Rudertiefe zu Leitwerkstiefe bestimmte Konstante. Sie kann bei Flugzeugen, die eine (am Boden oder im Fluge) einstellbare Höhenflosse besitzen, durch Flugversuch direkt gemessen werden, indem die einer vorgegebenen Höhenflossenverstellung (also α_H-Änderung) zugeordnete Änderung des Ruderwinkels ermittelt wird. Hierbei darf sich jedoch — was durch Ausgleich der Wirkung der Flossenverstellung mit entsprechender Verlagerung des Flugzeugschwerpunktes erreicht werden kann — der Flugzustand selbst und mithin die Strömung am Leitwerk nicht verändern. Eine weitere Voraussetzung, die u. U. einige Bedeutung gewinnen kann, ist die, daß die Rückwirkung der Flossenverstellung auf den Flügelauftrieb und damit auf die Abwindverteilung am Leitwerk selbst sowie der Einfluß der Höhenlagenänderung der Flossennase infolge der Verstellung klein bleibt. Man erhält

$$\left[\frac{\Delta \eta_D}{\Delta \eta_R}\right]_{\alpha,\lambda = \text{konst.}} = \left[\frac{\Delta \alpha_H}{\Delta \eta_R}\right]_{\alpha,\lambda = \text{konst.}} = -\frac{\partial c_r/\partial \eta_R}{\partial c_r/\partial \alpha_H} \quad (2)$$

Diese Größe hat als Leitwerkskonstante bei konstantem Rudermoment (der Sonderfall $M_r = 0$ ist hierin mit eingeschlossen) für ein Leitwerk, das die Voraussetzungen des Meßverfahrens erfüllt, d. h. geometrisch ähnliche Profilschnitte über der ganzen Spannweite besitzt, einen vom Flugzustand unabhängigen Wert. Wird in irgendeiner Weise ein bekanntes Moment um die Ruderachse erzeugt, so erfolgt die Einstellung des Ruders nicht nur abhängig vom Anstellwinkel, sondern auch von der Größe des Staudrucks am Leitwerk. Das Leitwerk nimmt dabei wiederum aus der im allgemeinen sehr ungleichmäßigen Verteilung des Staudrucks über der Spannweite die flugmechanisch wirksame Mittelwertbildung vor. Helmbold [2] bezeichnet diesen Mittelwert als Wirkungsfaktor des Leitwerks.

Da aus der vorausgegangenen Abwindmessung für einen bestimmten Flugzustand der mittlere Anströmwinkel α_H des Leitwerks bekannt ist und der Ruderwinkel η_R gemessen wird, erhält man bei einem Steuerkraftmoment M_{st} aus dem Gleichgewicht der Momente um die Ruderdrehachse die Beziehung

$$\frac{q_H}{q} \cdot \frac{\partial c_r}{\partial \alpha_H} \cdot F_H \cdot l_H = -\frac{M_{st}}{\left(\alpha_H + \frac{\partial c_r/\partial \eta_R}{\partial c_r/\partial \alpha_H} \cdot \eta_R\right) \cdot q} \quad . \; . \quad (3)$$

in der der Staudruckmittelwert ausgedrückt durch das Verhältnis q_H/q mit den Leitwerkskonstanten

$$\frac{\partial c_r}{\partial \alpha_H} \cdot F_H \cdot l_H = K$$

multipliziert erscheint. Dieser Faktor K kann durch Flugmessungen nicht direkt bestimmt werden. Um dennoch den Absolutwert des Staudruckverhältnisses im Vollgasflug angeben zu können, muß für den Wert q_H/q des Leerlauffluges eine bestimmte Annahme gemacht werden (z. B. $q_H/q = 1$).

Die vorliegenden Messungen wurden mit dem Flugzeugmuster Messerschmitt Bf 108 durchgeführt (Bild 1). Die Daten dieses Flugzeugs bringt nachstehende Zahlentafel:

Flugzeugdaten:

Fluggewicht	$G = 1235$ kg i. M.
Flügelfläche	$F = 16{,}7$ m²
Flächenbelastung	$G/F = 74$ kg/m²
Flügelspannweite	$b = 10{,}6$ m
Flügelstreckung	$\Lambda = \frac{b^2}{F} = 6{,}72$
Motorleistung	$N_0 = 240$ PS

[1]) Hier ist der Höhenruderwinkel mit η_R bezeichnet zur Unterscheidung von dem Einstellwinkel der Dämpfungsfläche η_D gegen die Rumpfachse. Im übrigen gelten die Bezeichnungen der Norm DIN L 100.

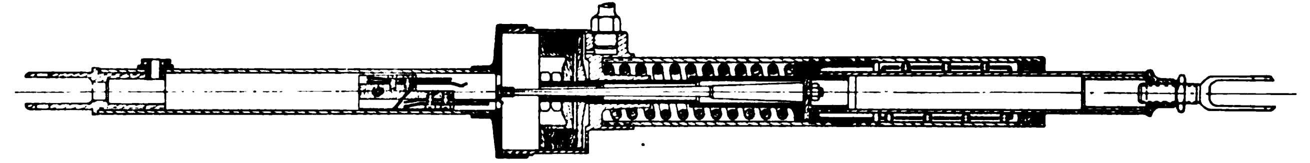
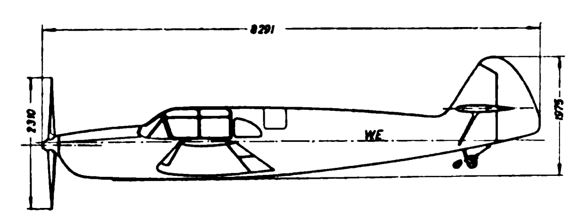


Bild 3. Stoßstangen-Entkupplungsvorrichtung für das Höhenruder.



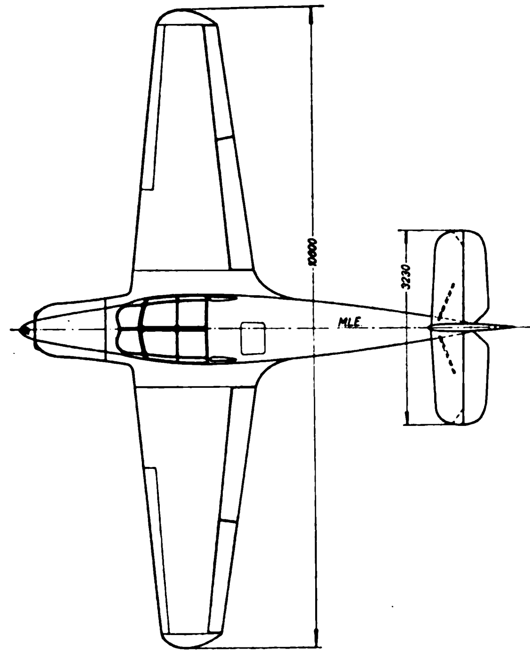


Bild 1. Hauptmessungen des Versuchsflugzeugs Bf 108.

Leistungsbelastung . . . . $G/N_0 = 5{,}14$ kg/PS
Flügeltiefe an der Flügelwurzel . . . $l = 2{,}00$ m
Mittlere aerodynamische Flügeltiefe im Abstand $2b/3\pi$ von Rumpfmitte . $l_m = 1{,}685$ m
Einstellwinkel des Flügels gegen die Rumpfachse innen und außen . . $\varepsilon = +2^0$
Flügelprofil innen . . . . NACA 2416
Flügelprofil außen . . . . NACA 2413
Schwerpunktlagenbereich der Messungen, bezogen auf die mittlere aerodynamische Flügeltiefe . . . . . . $x_s = 0{,}288$ bis $0{,}505 \cdot l$



Bild 2. Ansicht des geänderten Höhenleitwerks.

Hochlage der Luftschraubenachse gegenüber der Vorderkante des Flg.-Wurzelprofils . . . . $z_p = 0{,}19 \cdot l$
Vorlage der Luftschraubenebene vor der Vorderkante des Flg.-Wurzelprofils $x_p = 0{,}88 \cdot l$
Rück- und Hochlage des H.-Leitwerks gegenüber der Hinterkante des Flg.-Wurzelprofils . . . . $x_H = 1{,}465 \cdot l$
$z_H = 0{,}5 \cdot l$
Abstand des Leitwerkdruckpunktes ($l_H/4$) von der Vorderkante des Flg.-Wurzelprofils . . . . $r_H = 2{,}06 \cdot l$
Höhenleitwerksfläche . . . . $F_H = 2{,}73$ m²
Wirksame Spannweite des H.-Leitwerks $b_H = 3{,}096$ m
Wirksame Leitwerksstreckung . . . . $\Lambda_H = \frac{b^2_H}{F_H} = 3{,}51$
Flächenverhältnis . . . . $\frac{F_H}{F} = 0{,}1635$
Tiefenverhältnis . . . . $\frac{l_r}{l_H} = 0{,}425$
Durchmesser der Luftschraube . . . $D = 2{,}31$ m.

(Die weiteren Daten der Luftschraube werden in einem späteren Bericht zur Veröffentlichung kommen.)

Den Voraussetzungen des Meßverfahrens entsprechend wurde am Höhenleitwerk der Luftkraft-Außenausgleich beseitigt und das Leitwerk, soweit dies möglich war (Ausschnitt für das Seitenruder!), auf ein längs der Spannweite konstantes Verhältnis von Rudertiefe zu Gesamttiefe gebracht (Bild 2). Die für die geplanten Längsstabilitätsuntersuchungen mit losem Ruder eingebaute Höhenruder-Entkupplungsvorrichtung trug sehr wesentlich zum Erfolg der Messungen bei, da sie erstens den sauberen Gewichtsausgleich des Ruders um die Drehachse erleichterte und zweitens ein praktisch reibungsloses Einspielen des Ruders erreicht wurde. Die Entkupplung des Ruders wurde nach dem im ersten Bericht gemachten Vorschlag in die Antriebsstoßstange zum Höhenruder gelegt. Die Vorrichtung (Bild 3) besteht aus zwei ineinander verschieblichen Teilen, wobei im nicht entkuppelten Zustand eine starke Schraubenfeder die kraftschlüssige Verbindung herstellt. Die Entkupplung des Ruders erfolgt dadurch, daß durch Druckluft von 6 bis 8 atü ein Kolben betätigt wird, der die Feder zusammendrückt und hierdurch dem mit dem Ruderantriebshebel verbundenen Teil der Stoßstange einen Weg von 22 mm freigibt.

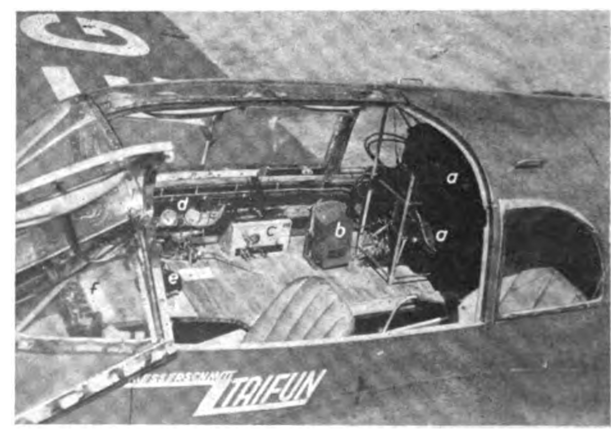


Bild 4. Einbau der Meßgeräte in das Versuchsflugzeug. *a* Zweifachschreiber, *b* Längsneigungsschreiber, *c* Kontaktwerk für Zeitmarken, *d* Preßluftflasche für Höhenruderentkupplung, *e* Laufgewichtsbetätigung, *f* Instrumentenschalter.

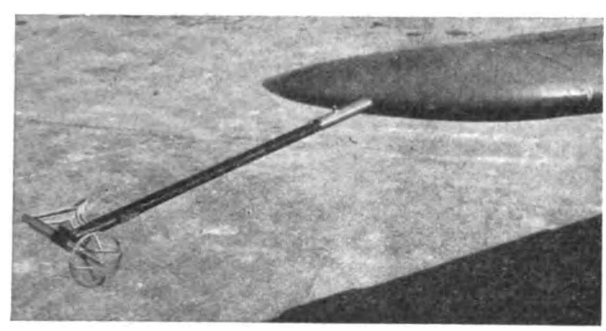


Bild 5. Staurohranbringung am Flügelende.

Dieser Weg entspricht im vorliegenden Falle einem freien Ruderwinkelbereich von ungefähr 10°. Die Endausschläge werden innerhalb der Stoßstange über zwei Kontakte, die ein Nocken an dem beweglichen Teil der Stange betätigt, im Führersitz angezeigt. Ganz frei von äußeren Kräften ist das Ruder auch im entkuppelten Zustand nicht, weil das Gewicht der Stoßstange ein gewisses von der Längsneigung des Flugzeugs und der Stellung des Höhenruders abhängiges Moment um die Ruderdrehachse erzeugt. Es entsteht jedoch hierdurch bei den vorliegenden Verhältnissen wie eine Abschätzung ergab, auch im ungünstigsten Falle kein meßbarer Einfluß auf die Selbsteinstellung des Ruders.

Bild 4 zeigt den Einbau der Meßgeräte bestehend aus zwei DVL-Zweifachschreibern für die Meßwerte: Staudruck, statischer Druck, Anstellwinkel und Drehzahl sowie einem Pendel-Längsneigungsschreiber. Als Registriergerät für die Höhenruderwinkel diente auch in diesem Falle ein mechanischer Schreiber mit besonders langer Trommel, wobei wiederum die Übersetzung zwischen Ruder und Schreibstift so gewählt wurde, daß möglichst die gesamte Schriebhöhe von 16 cm zur Aufzeichnung des in Frage kommenden Ruderwinkelbereichs ausgenutzt war (1 cm Schreibstiftweg $\approx 1°$ Ruderwinkel). Das mit einer Zweifingerdüse für die Anstellwinkelmessung kombinierte Staurohr wurde aus meßtechnischen Gründen an einem über das Flügelende hinausragenden Arm angebracht (Bild 5). Der Abstand vom Flügel war jedoch nicht so groß, daß eine Beeinflussung der Meßwerte durch die Zirkulation um das Flügelende nicht mehr erwartet werden konnte. Die Anzeigeverfälschung mußte daher durch Eichung des Staurohres mittels Gesamtdruckdüse und statischer Schleppsonde bestimmt werden. Wegen der gefälschten Anzeige konnten auch die von der Winkeldüse gemessenen Differenzdrucke nicht direkt für die Anstellwinkelbestimmung benutzt werden; hierzu wurde vielmehr die übliche Methode der Berechnung aus Bahn- und Längsneigung angewandt, bei der dann allerdings größere Ungenauigkeiten unvermeidlich sind.

Die Einleitung eines bekannten Momentes an der Ruderdrehachse geschah in der Weise, daß an der Hinterkante des Höhenruders ein Bleigewicht angesetzt wurde. In dieser Anordnung ist das Rudermoment jedoch nicht konstant, sondern ändert sich mit dem Kosinus von $(\vartheta + \eta_D + \eta_R)$, was bei der Berechnung von $q_H/q \cdot K$ nach Gl. (3) zu berücksichtigen ist.

Im übrigen unterschied sich das Meßverfahren nicht von dem im ersten Bericht angegebenen.

III. Ergebnis der Messungen.

Der Einfluß der laufenden Schraube auf den mittleren Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk ergab sich aus einer Gegenüberstellung von Messungen im Leerlauf- und Vollgasflug. Ursprünglich war geplant, die Messungen statt im Leerlaufflug mit stehender Luftschraube (Segelstellung) durchzuführen, um eine bessere Vergleichsbasis für die nach der Theorie berechneten Abwindwerte zu erhalten. Hierauf mußte jedoch vorläufig verzichtet werden, da die zu diesen Versuchen notwendige Verstellschraube bisher noch nicht geliefert wurde. Das Flugzeugmuster Bf 108 ist serienmäßig mit äußeren automatischen Hilfsflügeln (Slots) ausgerüstet. Diese wurden für die Messungen im geschlossenen Zustande blockiert.

Die Bestimmung der Abwindwinkel am Leitwerk für einen der Betriebszustände geht einerseits aus von der Auswertung der Messung des Auftriebsbeiwertes abhängig vom Anstellwinkel[2]), und andererseits von den für zwei konstante Höhenflossenstellungen ermittelten Abhängigkeiten der Selbsteinstellung des freien Ruders vom Auftriebsbeiwert des Flug-

[2]) Der Anstellwinkel, bezogen auf die Rumpfachse am Ort des Flügels, wurde mit α_F bezeichnet im Gegensatz zum Anstellwinkel der Rumpfachse am Ort des Höhenleitwerks α_L.

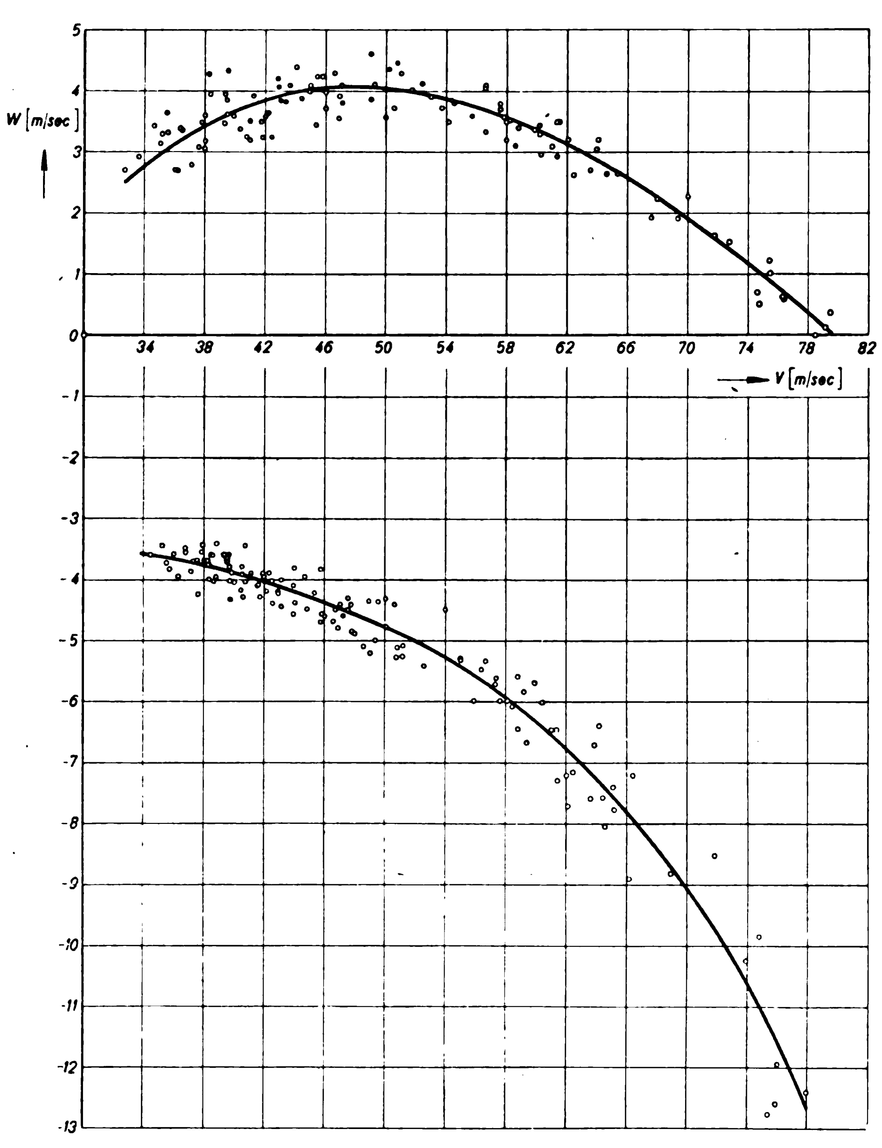


Bild 6. Steig- und Sinkgeschwindigkeiten abhängig von der Fluggeschwindigkeit.

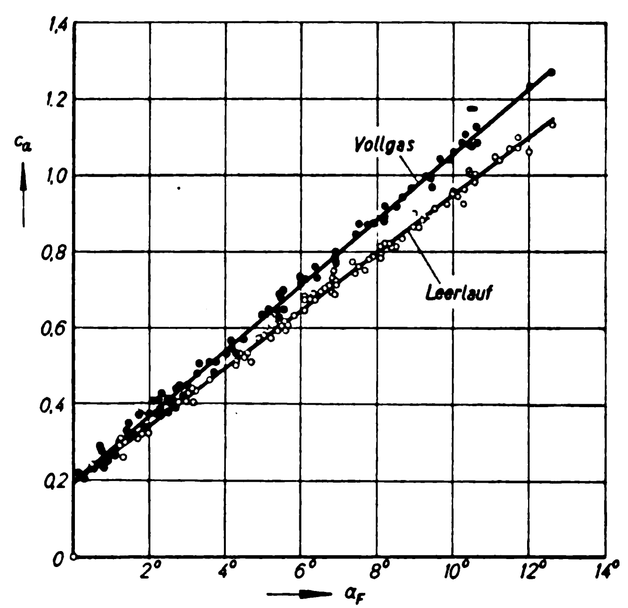


Bild 7. Abhängigkeit des Auftriebsbeiwertes vom Anstellwinkel der Rumpfachse bei den Betriebszuständen Vollgas und Leerlauf.

zeugs. Die Widerstandsbeiwerte wie auch die Polaren des Flugzeugs werden an sich für die Auswertung nicht benötigt. Sie stellen ein Nebenergebnis der Messungen dar und sind der Vollständigkeit halber beigefügt (Bild 8 und 9). Alle Auftragungen, die auf die Auswertung der zeitlichen Änderung des barometrischen Drucks zurückgehen, zeigen größere Streuungen; jedoch konnte ein gewisser Ausgleich durch eine größere Zahl von Messungen erreicht werden. Die bei der Auftragung des Fortschrittsgrades über dem Auftriebsbeiwert (Bild 10) auftretende Streuung der Meßpunkte im Leerlaufflug ist darauf zurückzuführen, daß sich einmal jeder Fehler in der Drehzahlmessung auf die Berechnung des Fortschrittsgrades umgekehrt proportional dem Quadrat der Drehzahl auswirkt und zum anderen der Motor in der Leerlauf-Drosselstellung empfindlicher auf den Zustand der umgebenden Luft reagiert. Der Anströmwinkel der Rumpfachse α_L am Ort des Leitwerks ergibt sich aus den Messungen mit voll gewichtsausgeglichenem Ruder unter Benutzung des vorstehend angegebenen Verfahrens sowie der in Bild 13 dargestellten Winkelbeziehungen. Man erhält den im Bild 14 wiedergegebenen Verlauf. Die Differenz $\alpha_F - \alpha_L$ ist der gesuchte Abwindwinkel α_w, der als Funktion des Flugzeuganstellwinkels α_F in Bild 15 für die beiden untersuchten Betriebszustände Vollgas und Leerlauf aufgetragen ist. Zum Vergleich ist gestrichelt der sich nach der Theorie für den Tragflügel ohne Strahleinfluß ergebende Abwindverlauf eingezeichnet. Zur Berechnung dieser Abwindwinkel wurde zunächst an Hand der gegebenen Konstruktionsdaten die Auftriebsverteilung des Flügels nach dem Multhoppschen Verfahren [3] bestimmt. Die Abwindwinkel selbst wurden mit Hilfe der in NACA-Report Nr. 648 [4] enthaltenen Nomogramme durch Interpolation gewonnen. Die beim Vergleich zwischen dem im Leerlaufflug gemessenen und dem berechneten Abwind zunächst ins Auge fallende Differenz der Absolutwerte dürfte größtenteils darauf zurückzuführen sein, daß die Bestimmung der geometrischen Winkel am Flugzeug (Einstellwinkel von Flügel und Dämpfungsfläche gegen die Rumpfachse) nur mit beschränkter Genauigkeit möglich ist. Für den Stabilitätsbeitrag des Höhenleitwerks wesentlich ist allein die Neigung der in Bild 15 gezeigten Kurven in der Form des Abwindfaktors

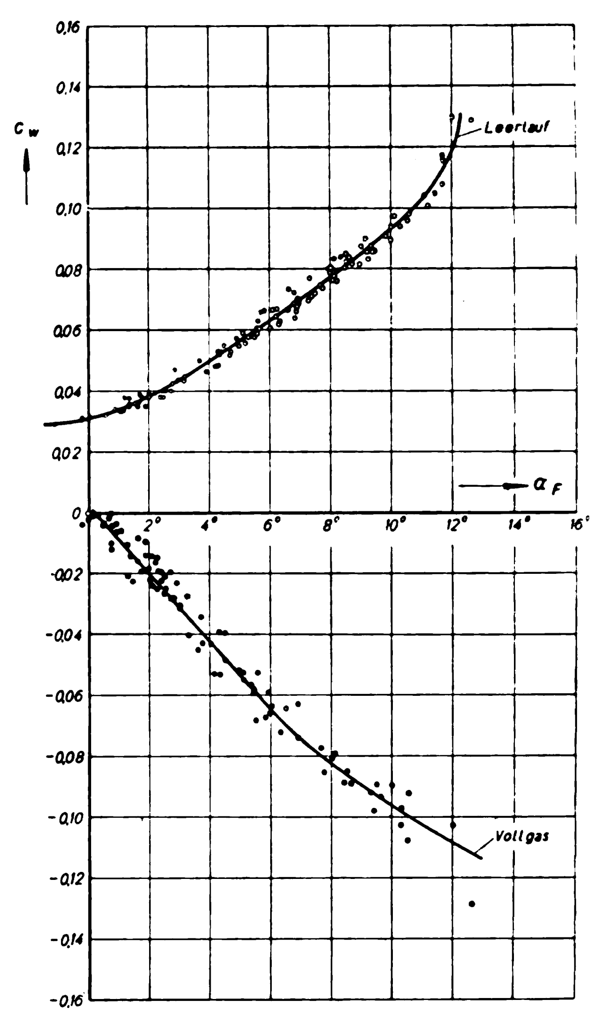


Bild 8. Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes vom Anstellwinkel der Rumpfachse bei den Betriebszuständen Vollgas und Leerlauf.

$$A_1 = \left[1 - \frac{d\,\alpha_w}{d\,\alpha_F}\right].$$

Dieser beträgt im vorliegenden Falle theoretisch $A_1 = 0{,}62$, während sich nach der Messung im Leerlaufflug $A_1 = 0{,}65$ ergibt. Die stabilisierende Wirkung des Leitwerks ist demnach im Leerlaufgleitflug etwas größer als sich nach der Rechnung ergibt. Der Unterschied beträgt jedoch nur 5 vH und ist wahrscheinlich bedingt durch eine Einsenkung in der Auftriebsverteilung des Flügels, die durch den Einfluß der drehenden Schraube sowie durch den Rumpf hervorgerufen sein kann.

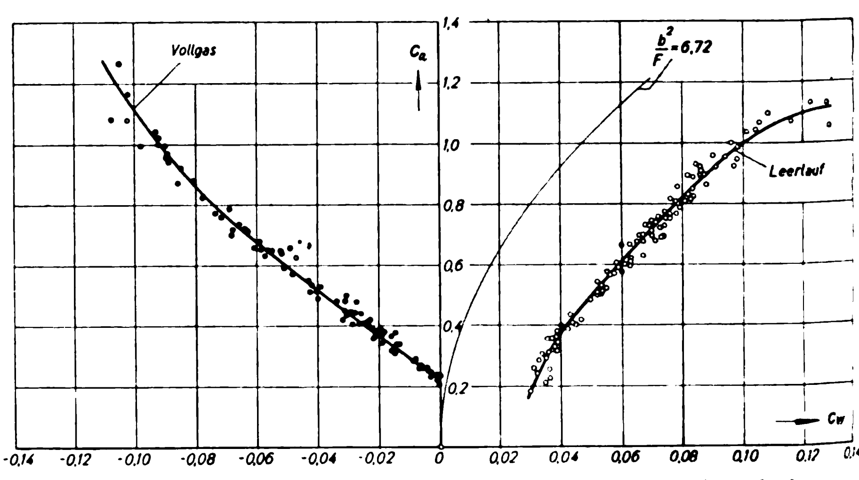


Bild 9. Polaren des Flugzeugs für die Betriebszustände Vollgas und Leerlauf.

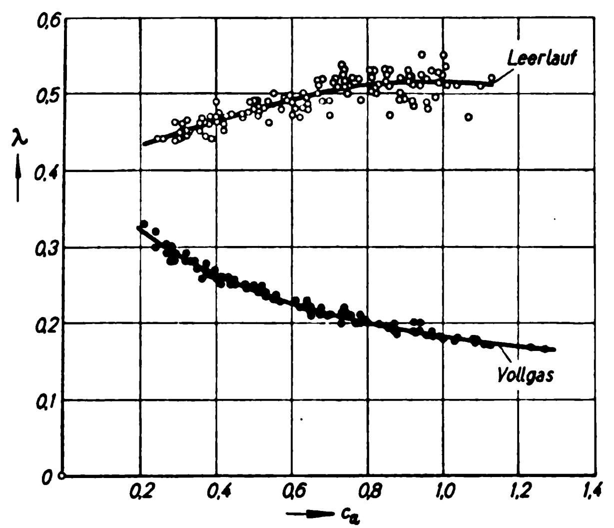


Bild 10. Abhängigkeit des Fortschrittsgrades vom Auftriebsbeiwert für Vollgas und Leerlauf.

Die Abnahme der stabilisierenden Wirkung des Leitwerks im Vollgasflug ist spürbar, wenn auch nicht so stark wie bei dem Flugzeugmuster Klemm Kl 36 A [1]. Der Abwindfaktor im Vollgasflug beträgt für die Bf 108 im mittleren Teil der Kurve $A_1 = 0{,}52$ und nimmt bei größeren Anstellwinkeln bis auf $A_1 = 0{,}47$ ab ($\alpha_F = 10^0$). Im Leerlaufflug zeigt sich die umgekehrte Tendenz.

Wollfadenaufnahmen während des Fluges wie auch Beobachtungen zeigten, daß im Vollgasflug selbst bei höchsten Auftriebsbeiwerten die Strömung an der Flügelwurzel noch gesund ist (Bild 16). Abreißerscheinungen zeigten sich vielmehr zuerst an der Klappenhinterkante. Dagegen beginnt im Leerlaufgleitflug das Abreißen der Strömung zunächst an der Flügelwurzel bei Auftriebsbeiwerten oberhalb $c_a = 0{,}7$ (Bild 17) übereinstimmend mit der beginnenden Abwärtskrümmung der Abwindkurve. Dieses Abreißen macht sich eigenartigerweise in der Abhängigkeit des Auftriebs vom Anstellwinkel (Bild 7) noch nicht bemerkbar.

Das zur Ermittlung des mittleren Staudrucks am Ruder eingeleitete Steuerkraftmoment betrug 0,282 mkg ($\vartheta = \eta_D = \eta_R = 0$).

Die aus den Messungen für die beiden Betriebszustände errechneten Werte $q_H/q \cdot K$ zeigten die in Bild 18 wiedergegebene Abhängigkeit vom Flugzeuganstellwinkel α_F. Der Berechnung des mittleren Staudruckverhältnisses q_H/q für Vollgas (in Bild 18 gestrichelt gezeichnet) wurde der mittlere Wert $q_H/q \cdot K = -0{,}075$ der Leerlaufmessung zugrunde gelegt. Der Verlauf der Kurve zeigt, daß das Höhenleitwerk mit zunehmendem Anstellwinkel aus dem Strahl auswandert, da die Staudruckwerte nach anfänglichem Anstieg bei größeren Anstellwinkeln wieder abfallen. Der höchste erreichte Wert beträgt $q_H/q = 1{,}25$. Aus der Auftragung des für die Stabilitätsberechnung eines Flugzeugs wichtigen Produkts von Wirkungsfaktor q_H/q und Leitwerksanstellwinkel α_H ($\eta_D = 0$) als Funktion des Anstellwinkels α_F (Bild 19) kann nunmehr der Leitwerksgütegrad [5]

$$\frac{d\,(q_H/q \cdot \alpha_H)}{d\,\alpha_F}$$

ermittelt werden. Er beträgt in vorliegendem Falle 0,635 im Vollgasflug.

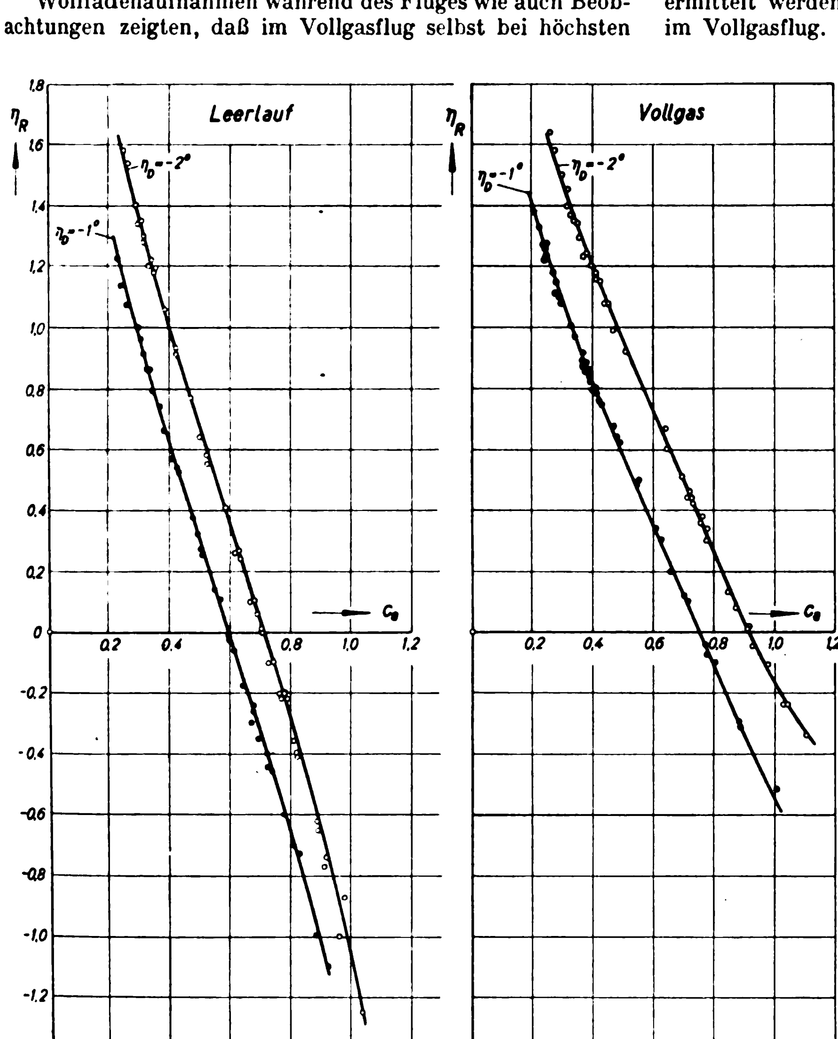


Bild 11. Abhängigkeit des Höhenruderwinkels vom Auftriebsbeiwert bei Gewichtsausgleich des Ruders für die Betriebszustände Vollgas und Leerlauf.

Die gewonnenen Meßergebnisse können im ganzen als in jeder Hinsicht befriedigend angesehen werden. An diesem günstigen Ergebnis hat die Entkupplung des Höhenruders von der Steuerung einen sehr wesentlichen Anteil, da die Herabsetzung der Reibung eine im Hinblick auf die Größenordnung der zu messenden Ruderwinkeldifferenzen nur sehr geringe Streuung der Meßpunkte zeitigte.

Die Unabhängigkeit des Quotienten

$$\frac{\Delta\,\eta_D}{\Delta\,\eta_R} = -\frac{\partial\,c_r/\partial\,\eta_R}{\partial\,c_r/\partial\,\alpha_H}$$

vom Flugzustand, die eine wichtige Voraussetzung des Meßverfahrens bildet, ist für das gewichtsausgeglichene Ruder im gesamten durchgemessenen Flugbereich vorhanden. Der sich ergebende Zahlenwert beträgt

$$\frac{\partial\,c_r/\partial\,\eta_R}{\partial\,c_r/\partial\,\alpha_H} = 2{,}63$$

in guter Übereinstimmung mit Modellmessungen an Leitwerken von ähnlichen Rudertiefenverhältnissen l_r/l_H. Bei den Messungen zur Ermittlung des Staudrucks am Leitwerk kann eine Konstanz des Wertes $\frac{\Delta\,\eta_D}{\Delta\,\eta_R}$ nicht mehr erwartet werden, da ja das eingeleitete Moment um die Ruderachse sich mit der Längsneigung des Flugzeugs und den Leitwerkswinkeln ändert. Die Abweichungen sind jedoch nicht sehr groß.

IV. Zusammenfassung.

Die vorliegenden Messungen bilden eine Fortsetzung der in einem früheren Bericht mitgeteilten Flugmessungen zur



Ermittlung des Schraubenstrahleinflusses auf die Strömung am Höhenleitwerk. Das Meßverfahren benutzt dabei das Leitwerk selbst als integrierende Fühlfläche, indem ausgehend von der Messung der Selbsteinstellung des Höhenruders der mittlere Abwindwinkel und Staudruck am Leitwerk ermittelt wird. Bei Erfüllung gewisser Voraussetzungen sind befriedigende Ergebnisse zu erwarten. Die Genauigkeit der Messungen kann erheblich gesteigert werden, wenn bei dem Meßvorgang das Ruder vollständig von der Steuerung gelöst wird. Denn hierdurch wird erstens der Einfluß der Reibung auf die Selbsteinstellung des Ruders auf ein Minimum reduziert und zweitens ein sauberer Gewichtsausgleich des Ruders erleichtert. Die konstruktive Gestaltung einer Stoßstangen-Entkupplungsvorrichtung ist im Bericht beschrieben.

Die Kenntnis der Strömungsvorgänge am Leitwerk hat für die Vorausberechnung der Längsstabilität eines im Entwurf befindlichen Flugzeugmusters große Bedeutung. Für den Fall des Motorfluges ist man bisher jedoch fast ausschließlich auf die Auswertung experimenteller Forschungsarbeiten angewiesen. Daher sollen die Untersuchungen vorstehender Art bei gegebener Gelegenheit fortgesetzt werden.

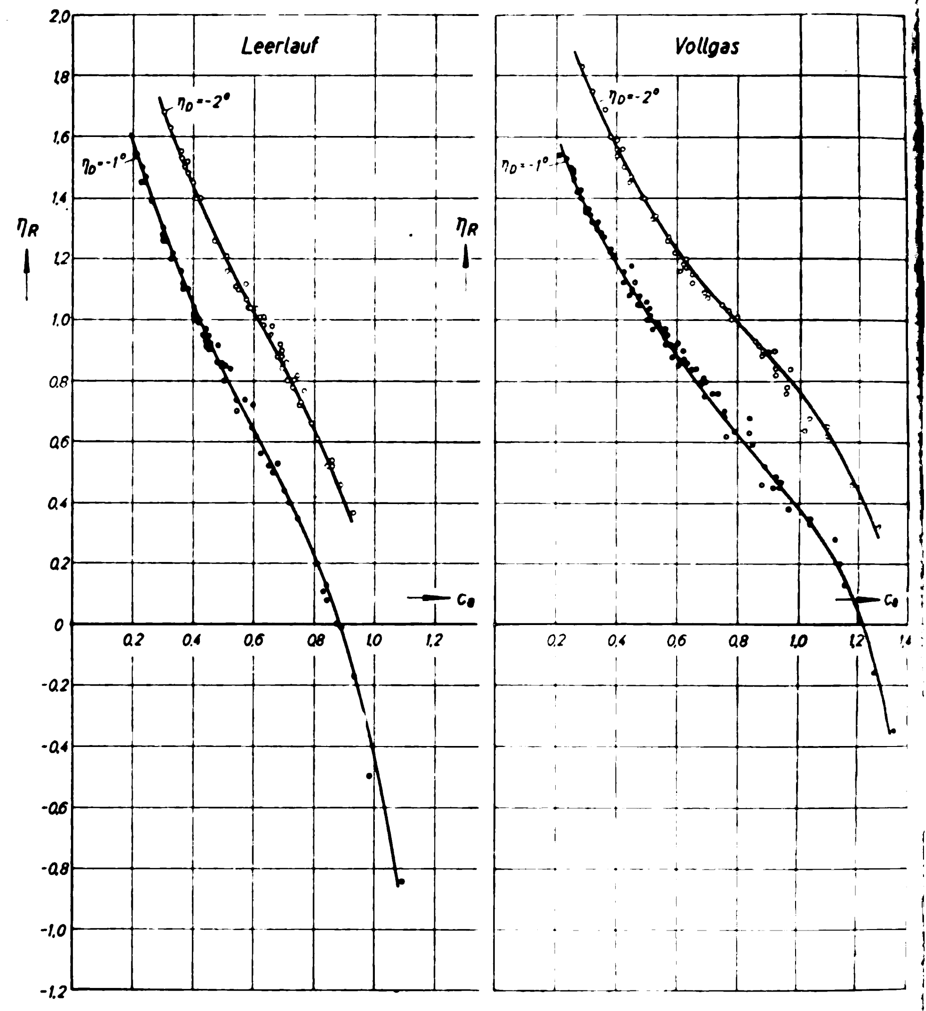


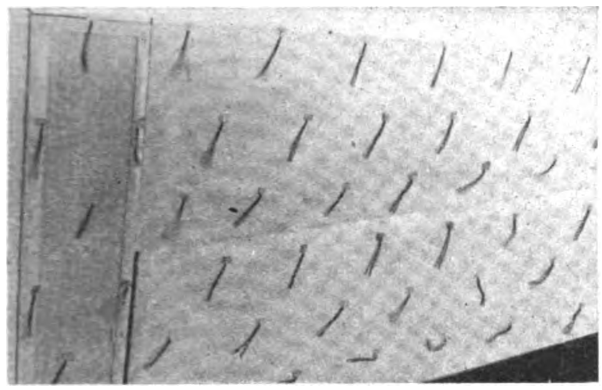
Bild 12. Abhängigkeit des Höhenruderwinkels vom Auftriebsbeiwert bei einem Steuerkraftmoment M_{st} = 0,282 mkg für die Betriebszustände Vollgas und Leerlauf.

Bild 13. Winkelbezeichnungen.

Bild 14. Anstellwinkel der Rumpfachse am Ort des Leitwerks abhängig vom Anstellwinkel der Rumpfachse am Ort des Flügels.

Bild 15. Abwindwinkel am Höhenleitwerk als Funktion des Anstellwinkels für die beiden Betriebszustände Vollgas und Leerlauf.





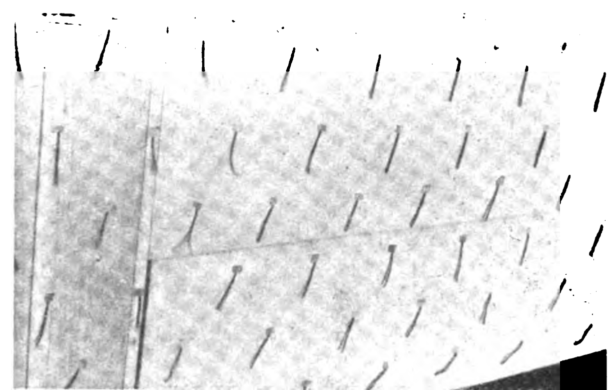
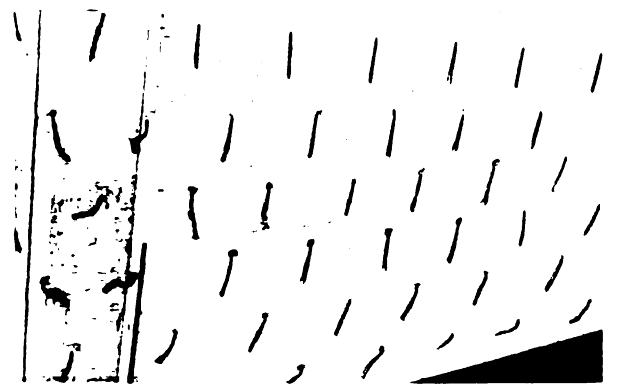


Bild 16. Wollfadenbild am Innenteil des Flügels beim Betriebszustand: Vollgas
a) $c_a = 0{,}925$, $\alpha_F = 8{,}4°$. b) $c_a = 1{,}275$, $\alpha_F = 12{,}3°$.



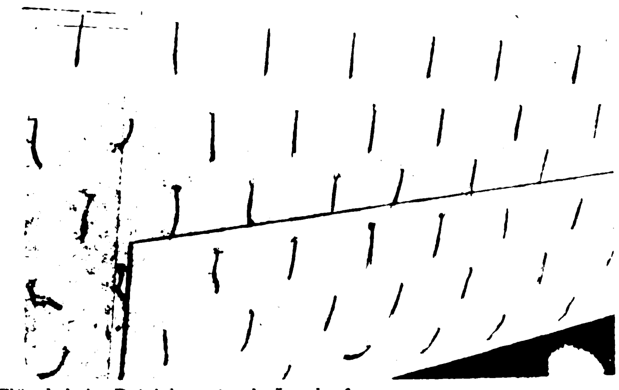


Bild 17. Wollfadenbild am Innenteil des Flügels beim Betriebszustand: Leerlauf
a) $c_a = 0{,}74$, $\alpha_F = 7{,}2°$. b) $c_a = 0{,}925$, $\alpha_F = 9{,}7°$.

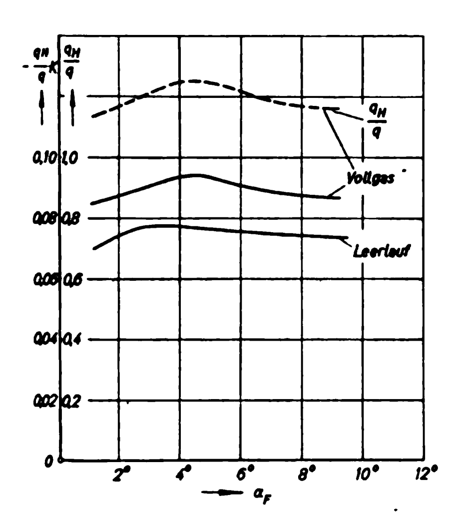




Bild 18. Abhängigkeit des Staudrucks am Höhenleitwerk vom Anstellwinkel des Flugzeugs.

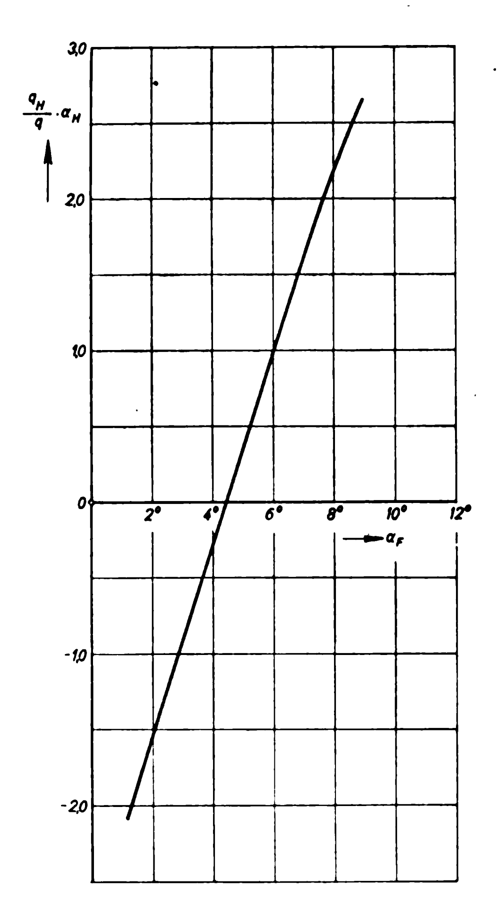


Bild 19. Diagramm zur Bestimmung des Leitwerksgütegrades.

V. Schrifttum.

[1] E. Eujen, Flugmessungen über den Einfluß von Schraubenstrahl und Landeklappenstellung auf Abwind und Staudruck am Höhenleitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 38.

[2] H. B. Helmbold, Untersuchung über den Einfluß des Schraubenstrahls auf den Abwind und die Höhenleitwerkswirkung. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 3.

[3] H. Multhopp, Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 153.

[4] A. Silverstein u. S. Katzoff, Design Charts for Predicting Downwash Angles and Wake Characteristics behind plain and flap Wings.

[5] I. Flügge-Lotz u. D. Küchemann, Zusammenfassender Bericht über Abwindmessungen ohne und mit Schraubenstrahl. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftf.-Forschg. S. I 172.

Der Einfluß des umgebenden Mediums bei der Bestimmung der Trägheitsmomente eines Flugzeugs durch Pendelung.

Von Getto und Henn.

Bericht des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Darmstadt.

Der Einfluß mitbewegter Luftmassen bei der Bestimmung der Trägheitsmomente von Flugzeugen durch Pendelung wird rechnerisch und experimentell untersucht. Die Versuche wurden mit zwei Modellflügeln verschiedener Trägheitszahl durchgeführt und umfassen die Bestimmung der wahren Trägheitsmomente durch Pendelung in einem Vakuumkessel und die Untersuchung des Einflusses naher Wände, insbesondere des Bodens, auf die Bestimmung der Trägheitsmomente bei der Pendelung in Luft.

Gliederung.

I. Einleitung.

Trägheitsmomente von Flugzeugen werden entweder berechnet oder durch Messung nach der Pendelmethode bestimmt. Die Berechnung der Trägheitsmomente ist immer sehr mühsam und meist nicht sehr genau, doch bereitet auch die Messung Schwierigkeiten. Unklar ist dabei vor allem der Einfluß mitbewegter Luftmassen. Die wahren Trägheitsmomente würde man erhalten, wenn man die Versuche im Vakuum durchführen würde. Da dies im allgemeinen nicht möglich ist, bestimmt man die Trägheitsmomente in Luft. Dabei sind die wahren Trägheitsmomente um bestimmte Beträge vergrößert, die dadurch entstehen, daß vom pendelnden Flugzeug Luftmassen mitbewegt werden, besonders bei der Messung der Trägheitsmomente um die Längsachse. Diese Beträge nennen wir zusätzliche scheinbare Trägheitsmomente. Die im Flugzeug eingeschlossenen Luftmassen sind hier vernachläsigt.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment für die x-Achse durch Rechnung bestimmt. Der Tragflügel wird dabei durch eine elliptische Scheibe ersetzt und die Rotation dieser Scheibe um ihre kleine Hauptachse betrachtet. Die Ansätze für diese Rechnung stammen von Lamb [1][1]). Eine gute Zusammenstellung gibt M. Munk [2].

Das Ergebnis der Rechnung wird mit einer im NACA-Report 467 [3] angegebenen Näherungslösung, die auch von Pleines [4] benutzt worden ist, verglichen.

Messungen zur Bestimmung der zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmomente, die an Rechteckflügeln durchgeführt worden sind, wurden zusammengestellt und die Ergebnisse eigener Messungen angegeben.

Im Rahmen dieser Messungen mußten die wahren Trägheitsmomente der Versuchsflügel bestimmt werden. Dazu wurden mehrere Versuche bei verschiedenen Luftdichten durchgeführt und die Ergebnisse auf Dichte Null extrapoliert. Die Modelle wurden hierbei in einem Kessel gependelt, der bis auf einen Druck von 0,5 mm Hg leer gepumpt werden konnte.

[1]) Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

II. Die Berechnung der scheinbaren Masse elliptischer Scheiben nach der Potentialtheorie und Vergleich mit einer Näherungslösung.

Bei der Interpretation des Greenschen Satzes zeigt H. Lamb, daß die kinetische Energie einer bewegten idealen Flüssigkeit durch den Ausdruck

$$T = -\frac{1}{2}\varrho\iint \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dF$$

dargestellt wird.

Die gesamte kinetische Energie besteht aus den beiden Anteilen, die von der Translations- und der Rotationsbewegung herrühren. Wir können daher schreiben

$$T = \frac{1}{2}\varrho U^2 K + \frac{1}{2}\varrho\,\omega^2 K'.$$

Darin ist U die Geschwindigkeit der Translationsbewegung, ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung. Die Größe K, die für die Translation gilt, wird im allgemeinen das Volumen der zusätzlichen scheinbaren Masse genannt. K' ist ein entsprechender Trägheitsfaktor bei der Rotation.

Für die Translations- und Rotationsbewegung dreiachsiger Ellipsoide läßt sich das Potential angeben, und damit ist die kinetische Energie bekannt. Zur Anwendung dieser Ergebnisse auf den Tragflügel ersetzen wir ihn durch eine elliptische Scheibe, die wir dadurch erhalten, daß wir eine Achse eines dreiachsigen Ellipsoids zu Null werden lassen. Um Übereinstimmung mit den Achsen im Flugzeug zu bekommen, legen wir die große Achse a der Ellipse in Richtung der y-Achse, die kleine Achse b in Richtung der x-Achse, Bild 1.

Für die hier wichtige Drehung um die x-Achse erhalten wir

$$K_x' = \frac{4}{15}\pi a^3 b^2\cdot\frac{1}{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}\cdot E\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)+\frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot K\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)}\ ^{2)}.$$

E und K sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi.$$

Im vorliegenden Fall wird

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1-\frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\Lambda^2}.$$

[2]) $E\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$ und $K\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$ bedeutet, daß E und K nur von $\frac{a^2-b^2}{a^2}$, also der numerischen Exzentrizität der Ellipse, abhängen.

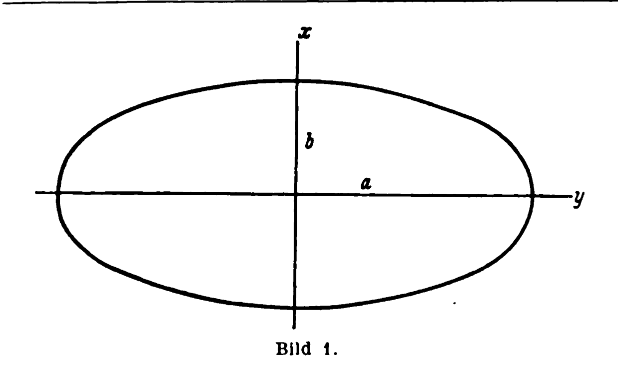


Bild 1.

Den Trägheitsfaktor K_x' machen wir durch Division mit $\frac{1}{2} F s^3 = \frac{1}{2} \pi a^4 b$ dimensionslos und erhalten

$$\frac{K_x'}{\frac{1}{2} F s^3} = k_x' = \frac{8}{15} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\frac{\frac{a^2}{b^2} - 2}{\frac{a^2}{b^2} - 1} E + \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} - 1} K}.$$

Als charakteristische Größe des Flügels führen wir das Seitenverhältnis ein:

$$\Lambda = \frac{4\, a^2}{F} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\pi}{4} \Lambda$$

und erhalten

$$k_x' = \frac{32}{15\pi} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{16} \Lambda^2 - 1}{\left(\frac{\pi^2}{16} \Lambda^2 - 2\right) \cdot E + K}.$$

Im NACA-Report 467 [3] finden wir eine Näherungsrechnung, die die Umströmung der Ränder zunächst vernachlässigt. Diese wird dann durch einen Faktor k berücksichtigt, der durch Messung bestimmt wird. Es ist von Bedeutung, diese Näherung mit der Lösung nach der Potentialtheorie zu vergleichen.

Bei Drehung einer Scheibe um ihre mittlere Tiefe gilt für die kinetische Energie bei dieser Näherung

$$\frac{J \omega^2}{2} = \varrho \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \int l_{(y)}\, y^2\, dy = \frac{1}{2} \varrho\, \omega^2 K'.$$

Für die Ellipse wird

$$l_{(y)} = 2 b \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Damit erhält man für die Drehung um die x-Achse

$$\frac{\varrho}{2} \cdot \pi \cdot \omega_y^2 \cdot a^3 b^2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{2} \varrho\, \omega_y^2 \cdot K_x' \qquad K_x' = \frac{4}{15} \cdot \pi \cdot a^3 b^2$$

$$k_x' = \frac{8}{15} \cdot \frac{b}{a} = \frac{32}{15\pi} \cdot \frac{1}{\Lambda}.$$

Die Ergebnisse beider Rechnungen sind in Bild 2 aufgetragen. Man sieht, daß im Bereich üblicher Seitenverhältnisse die Abweichung zwischen den Ergebnissen nach der Potentialtheorie und nach der Streifenmethode noch beträchtlich ist.

III. Experimentelle Bestimmung des zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmoments.

Die Tragflügel der heute gebräuchlichen Flugzeuge haben im allgemeinen nicht genau elliptischen Umriß. Zur Bestimmung des scheinbaren Trägheitsmomentes ist man daher auf Messungen angewiesen, da die Berechnung für beliebige Umrißformen außerordentlich schwierig ist. Die Messung bereitet zwar auch Schwierigkeiten, ist jedoch deshalb recht brauchbar, weil die Verhältnisse am Modell studiert werden können. Man muß dazu einmal das wahre Trägheitsmoment ohne Lufteinfluß durch Messung bei verschiedenen Luftdichten, von normaler Dichte abnehmend

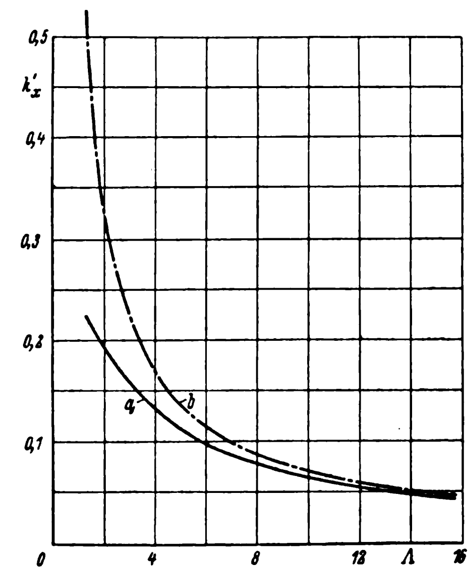


Bild 2. Beizahl k_x' für elliptischen Flügel nach Potentialtheorie und Näherungsrechnung.
—— a) Für Potentialströmung gerechnet.
—·— b) Nach Streifenmethode gerechnet.

bis zu möglichst kleinen Werten, und Extrapolation auf Dichte Null, zum zweiten das Trägheitsmoment in der Atmosphäre in einem möglichst großen Raum bestimmen.

Die Bestimmung der Trägheitsmomente geschieht in bekannter Weise durch Pendelung ohne und mit Zusatzgewichten, deren Masse, Trägheitsmoment und Schwerpunktslage bekannt sind. Man erhält so verschiedene Ausdrücke, aus denen man das gesuchte Trägheitsmoment erhält. In diesen Ausdrücken treten die Differenzen der Quadrate der Schwingungszeiten für Pendelung ohne und mit Zusatzgewichten auf.

Die Zusatzgewichte wurden so angeordnet, daß ihr Schwerpunkt in die Pendelachse fiel (s. Bild 3). Ihr Richtmoment wurde dadurch Null und somit die Schwingungsgleichung für die Pendelung mit Zusatzgewicht wesentlich vereinfacht.

Der Tragflügel führt bei der Pendelung nicht nur eine Rotations-, sondern infolge seines Abstandes von der Dreh-

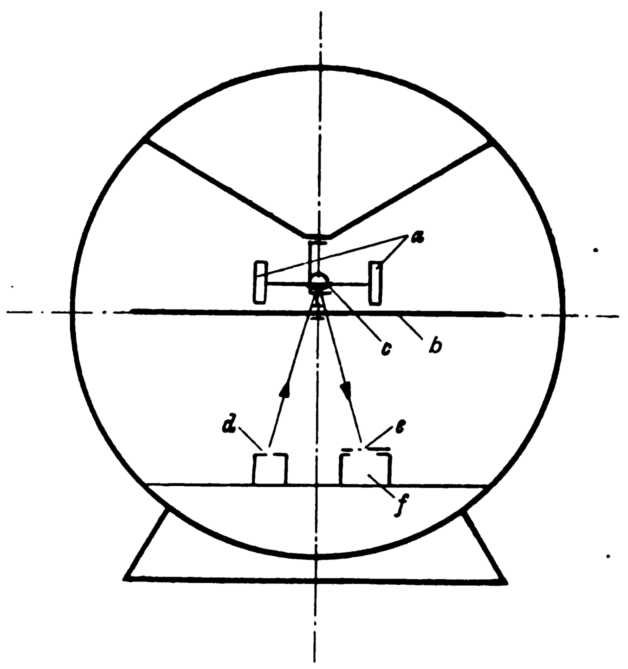


Bild 3. Anordnung des Pendels im Vakuumkessel.
a Zusatzgewichte, *b* Modellflügel, *c* plankonvexe Linse, *d* beleuchteter Spalt, *e* Doppelspalt, *f* Photozelle.

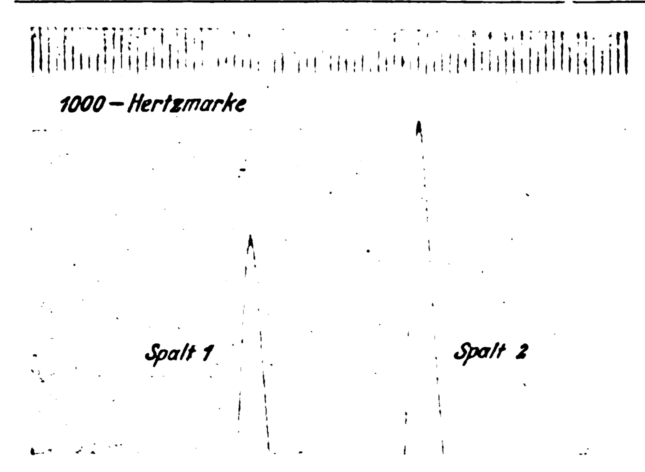


Bild 4. Ausschnitt aus einem Meßstreifen.

achse gleichzeitig eine Translationsbewegung aus. Man wird also die Pendellänge möglichst klein halten, um den Einfluß dieser Translation vernachlässigen zu können (siehe auch [4]). Das bedeutet aber eine Beschränkung der Größe der in der obenerwähnten Weise angebrachten Zusatzgewichte aus baulichen Gründen. Der Abstand der Gewichte von der Pendelachse ist aus Festigkeitsgründen begrenzt. Infolgedessen bleiben die verschiedenen Schwingungszeiten mit und ohne Zusatzgewichte von gleicher Größenordnung. Man muß sie also sehr genau bestimmen, um die Differenzen ihrer Quadrate mit genügender Genauigkeit zu erhalten. Nun ist die Genauigkeit der Zeitmessung nicht durch Mittelwertbildung aus möglichst vielen Schwingungen zu steigern, da die Schwingungsdauer nicht konstant bleibt. Außerdem darf der Ausschlagwinkel nur klein gewählt werden, damit der Einfluß des endlichen Pendelausschlages auf die Schwingungszeit vernachlässigbar klein bleibt.

Diese Überlegungen führten zu einem Aufbau des Pendels, wie in Bild 3 dargestellt. Für die Zeitmessung wurde eine Anordnung gewählt, die gleichzeitig die Bestimmung des logarithmischen Dekrementes gestattet. Am Pendel wurde in der Drehachse eine plankonvexe Linse mit versilberter Rückseite angebracht zur Abbildung eines beleuchteten Spaltes auf eine durch zwei nebeneinanderliegnde verschiebbare Spalte abgedeckte Photozelle, Bild 3.

In der Ruhelage des Pendels spielt die Lichtmarke mit einem Spalt ein. Die Stromänderung in der Photozelle, die durch die beim Pendeln über die Spalte gleitende Lichtmarke hervorgerufen wird, bewirkt nach entsprechender Verstärkung den Ausschlag der Meßschleife eines Siemens-Oszillographen. Zur Zeitbestimmung wird eine geeichte 1000-Hertz-Zeitmarke mit den Ausschlägen der Schleife zusammen aufgeschrieben. Tausendstel Sekunden lassen sich also genau ablesen, fünftausendstel Sekunden mit einer besonderen Auswerteeinrichtung gut schätzen, Bild 4.

Die Schwingungszeiten lagen bei unseren Versuchen in der Größenordnung von zwei Sekunden. Sie konnten also mit einer Genauigkeit von etwa 0,01% bestimmt werden.

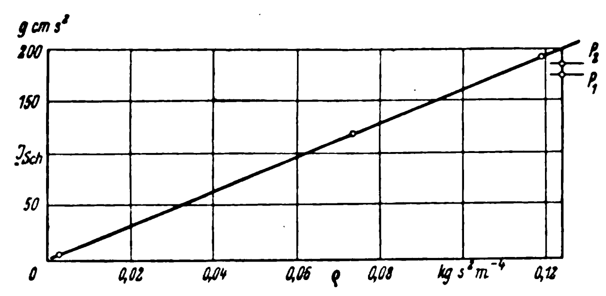


Bild 5. Zusätzliches scheinbares Trägheitsmoment bei Messung im Vakuumkessel.

Als Versuchsflügel wurden Rechteckflügel benutzt, um Vergleichsmöglichkeit mit den in [3] und [4] angegebenen Messungen zu haben.

Für einen dieser Flügel ist das Ergebnis der Messungen im Vakuumkessel in Bild 5 angegeben. Hier sind noch zwei weitere Punkte eingetragen, die den Einfluß der Abmessungen des Versuchsraumes wiedergeben. Da der Vakuumkessel nur beschränkte Größe haben konnte, wurde der Flügel noch in einem im Vergleich dazu großen Raum gependelt. Hierbei ergab sich ein geringeres zusätzliches Trägheitsmoment, Bild 5, Punkt P_1. Bei zur Pendelachse symmetrischer Anbringung seitlicher Wände, deren Abstand gleich dem Durchmesser des Kessels war, ergab sich eine Annäherung an den im geschlossenen Kessel gefundenen Wert, der jedoch, wie zu erwarten war, nicht erreicht wurde, Bild 5, Punkt P_2.

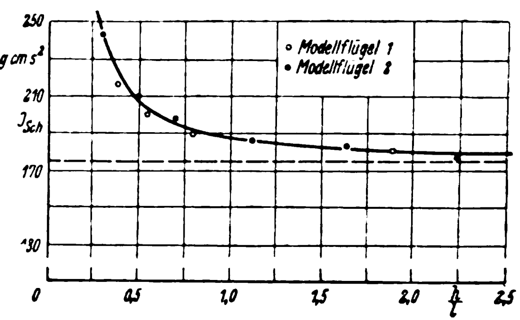


Bild 6. Das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment in Abhängigkeit vom Bodenabstand.
∘ Modellflügel 1. • Modellflügel 2.

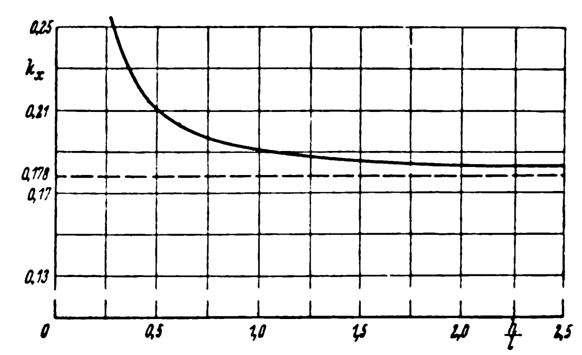


Bild 7. Beizahl $k_x = \frac{J_{sch}}{\frac{1}{2}\,\varrho\,F\,s^3}$ des in Bild 6 dargestellten zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmomentes.

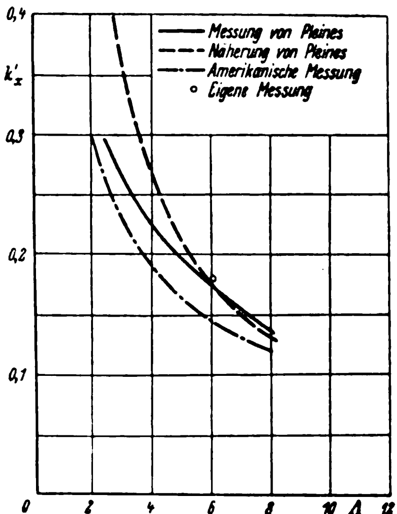


Bild 8. k'_x in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis Λ für Rechteckflügel.
——— Messung von Pleines. - - - Näherung von Pleines. —·— Amerikanische Messung. ∘ Eigene Messung.

Der Einfluß des Bodenabstandes auf die Größe des zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmomentes wurde an zwei Modellflügeln mit den Trägheitszahlen $\mathfrak{T} = 0{,}5$ und $\mathfrak{T} = 0{,}276$ untersucht. In Bild 6 ist das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment über dem Bodenabstand für beide Flügel aufgetragen. Die beiden Messungen zeigen recht gute Übereinstimmung.

In Bild 8 sind die Messungen von Pleines und amerikanische Messungen zusammengestellt. Der Wert für die beiden hier untersuchten Modellflügel ist zum Vergleich eingetragen.

Die Trägheitsmomente der Flugzeuge setzen sich im wesentlichen aus dem wahren und dem zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmoment zusammen. Dieses erreicht seine größten Werte in bezug auf die x-Achse. Das wahre Trägheitsmoment ist $J_W = m \cdot i^2$.

Das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment ist

$$J_{sch} = k \cdot \frac{\varrho F s^3}{2}.$$

Wir bilden das Verhältnis

$$\frac{J_{sch}}{J_w} = \frac{k \cdot \varrho F s^3}{2 m i^2} = \frac{k}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{s^2}{i^2} = \frac{k \cdot \varrho \cdot g}{2} \cdot \frac{s}{\frac{G}{F}} \cdot \frac{s^2}{i^2}.$$

Dieses Verhältnis wird groß, d. h. das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment muß berücksichtigt werden, wenn die Flächenbelastung klein ist. Bei ähnlichen Abmessungen nimmt seine Bedeutung mit steigender Flächenbelastung ab. Werden jedoch auch bei hoher Flächenbelastung die Abmessungen des Flugzeuges entsprechend groß, so wächst das Verhältnis der beiden Trägheitsmomente wieder an. Bei großen Flugzeugen muß das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment also ebenfalls berücksichtigt werden. Zum Vergleich seien hier Werte für ein Sportflugzeug, ein modernes Jagdflugzeug und ein großes Verkehrsflugzeug angegeben.

Sportflugzeug:

$$\frac{G}{F} = 30{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2};\ s = 5{,}5\ \text{m};\ J_x = 77{,}1\ \text{mkgs}^2;$$

Jagdeinsitzer:

$$\frac{G}{F} = 125\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2};\ s = 4{,}5\ \text{m};\ J_x = 200\ \text{mkgs}^2;$$

Großes Verkehrsflugzeug:

$$\frac{G}{F} = 125\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2};\ s = 17{,}5\ \text{m};\ i_x = 4{,}6\ \text{m}.$$

Nehmen wir an, daß k für diese drei Beispiele im Mittel 0,1 beträgt, so erhalten wir mit

$$\varrho = 0{,}125\ \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4} \text{ und } g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

für das erste Flugzeug $\frac{J_{sch}}{J_w} = 0{,}193;$

für das zweite Flugzeug $\frac{J_{sch}}{J_w} = 0{,}045;$

für das dritte Flugzeug $\frac{J_{sch}}{J_w} = 0{,}123.$

IV. Zusammenfassung.

Die Größe des Faktors k des zusätzlichen scheinbaren Trägheitsmomentes wurde rechnerisch und experimentell untersucht. Sie hängt stark vom Seitenverhältnis ab. Eine einfache Näherungsrechnung gibt für große Seitenverhältnisse ziemlich gute Übereinstimmung mit den nach der Potentialtheorie errechneten Werten. Die Rechnungen müßten noch ergänzt werden durch Messungen an Flügeln mit elliptischem Umriß.

Bei der experimentellen Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Pendelung erfährt das zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment durch den Einfluß naher Wände eine weitere Vergrößerung. Im allgemeinen wird der Bodeneinfluß die größte Rolle spielen. Er wurde für zwei rechteckige Modellflügel mit den Trägheitszahlen $\mathfrak{T}_1 = 0{,}5$ und $\mathfrak{T}_2 = 0{,}276$ und dem Seitenverhältnis $\lambda = 6$ untersucht. Das durch den Bodeneinfluß vergrößerte zusätzliche scheinbare Trägheitsmoment kann als Funktion des Bodenabstandes angegeben werden. Man erhält einen Ausdruck von der Form

$$J_{sch} = J_{0\,sch} + a \cdot \frac{1}{\frac{h}{l}} + b \frac{1}{\left(\frac{h}{l}\right)^2}.$$

Der Einfluß des Bodens muß berücksichtigt werden, wenn sein Abstand von der Größenordnung der Flügeltiefe wird.

V. Anmerkungen.

Bezeichnungen:

J = Trägheitsmoment
J_{sch} = zusätzliches scheinbares Trägheitsmoment
$J_{0\,sch}$ = zusätzliches scheinbares Trägheitsmoment ohne Einfluß naher Wände
J_M = durch Messung bestimmtes Trägheitsmoment
J_W = wahres Trägheitsmoment
i = Trägheitsradius
h = Bodenabstand
F = Flügelfläche
l = Flügeltiefe
s = Halbspannweite
Λ = Seitenverhältnis
$\mathfrak{T}$ = $\frac{2J}{\varrho F s^3}$ = Trägheitszahl
ϱ = Luftdichte (alle Werte, auch die zum Vergleich herangezogenen, wurden, soweit die Dichte angegeben, auf $\varrho = 0{,}124$ reduziert).

Daten:

Abmessungen der Modellflügel:	Abmessungen des Vakuumkessels:
b = 150 cm	Durchmesser = 2 m
l = 25 cm	Länge = 2 m
F = 3750 cm²	
$\mathfrak{T}_1$ = 0,5	
$\mathfrak{T}_2$ = 0,276.	

VI. Schrifttum.

[1] Horace Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik.
[2] Max M. Munk, Fluid Mechanics. Aerodynamic Theory. Bd. 1, Abt. C.
[3] H. A. Soulé und M. P. Miller, The Experimental Determination of the Moments of Inertia of Airplanes. NACA-Report 467.
[4] W. Pleines, Der Einfluß der mitschwingenden Luftmassen bei Pendelschwingungsversuchen mit Flugzeugen. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung.
[5] S. B. Gates, The Determination of the Moments of Inertia of Aeroplanes. R. und M. 1415.

Unmittelbar zeigender elektrischer Drehschwingungsschreiber auf der Grundlage eines gegeninduktiven Meßverfahrens.

Von K. Staiger[1]).

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart. Stuttgart-Untertürkheim.

Die Anwendung elektrischer Verfahren bei der Messung mechanischer Schwingungen wird durch die Notwendigkeit, die eingebauten Verstärker häufig zu eichen, erschwert. Es kann vorkommen, daß die Eichkonstante schon während einer Meßreihe sich ändert. Die Arbeit zeigt am Beispiel eines Drehschwingungsmessers, wie dieser Nachteil vermieden werden kann, und eine unmittelbare Anzeige ohne häufige Eicheinstellungen ermöglicht wird.

Bei Verfahren, welche die mechanische Schwingung als Amplitudenschwankung einer höheren Frequenz darstellen (Trägerfrequenzverfahren) ist der Mittelwert der Trägeramplitude ein Maß für die Gesamtverstärkung des Geräts und kann daher, wenn sein Zusammenhang mit der Vergrößerung einmal ermittelt wurde, als Eichwert dienen. Es wird eine Regelschaltung angegeben, welche Schwankungen des Trägermittelwerts und damit der Vergrößerung so weit ausgleicht, daß Änderungen zwischen dem halben und dem doppelten Sollwert die Anzeige um noch nicht ± 1% verändern.

Damit die Regelung nur den Mittelwert des Trägers beeinflußt, muß ihr Einsatz zeitlich verzögert erfolgen. Der Zusammenhang zwischen den Konstanten der Regelschaltung und dem Fehler in der Amplitudenanzeige bei verschiedenen Meßfrequenzen sowie die Stabilität der Regelung werden untersucht. Da es für die Bemessung der Schaltung wichtig ist, die niedrigste zu erwartende Meßfrequenz zu kennen, erleichtert die Drehschwingungsmessung nach dem seismischen Meßprinzip die Anwendung einer solchen Regelschaltung; hierbei ist durch die Eigenfrequenz des Gebersystems die niedrigste Meßfrequenz von vornherein festgelegt und größer als Null.

Ein ausgeführtes Gerät für Drehschwingungsmessungen im Frequenzbereich von etwa 700 bis 100000 $\frac{1}{min}$ (12 bis 1600 Hz) und das hierbei verwendete Schwingungsmeßverfahren werden beschrieben.

Gliederung.

1. Einführung.

Die elektrischen Verfahren zur Messung mechanischer Schwingungen sind seit langem bekannt und haben sich mit der Entwicklung raschlaufender Maschinen dank ihres unbegrenzten Frequenzbereichs stark in den Vordergrund geschoben. Es ist hier nicht der Platz, eine Aufzählung aller Verfahren zu geben, sondern es sei nur festgehalten, daß man zwei Hauptgruppen unterscheiden kann. Die eine benutzt als mechanisch-elektrischen Wandler Geber nach dem elektrodynamischen oder elektromagnetischen Prinzip und mißt die Schwingungsgeschwindigkeit. Die andere drückt die zu messenden Schwingungen einem Träger höherer Frequenz auf und gestattet damit die Messung des Ausschlags. Die Geber können induktiv oder kapazitiv sein.

Beide Verfahren sind zur Messung von Drehschwingungen herangezogen worden. So beschreiben Draper und Bentley [1] einen Drehschwingungsschreiber auf elektrodynamischer Grundlage. Die Wegführung der Meßströme von den umlaufenden Geberspulen geschieht dabei über Schleifringe. Es wird ein integrierender Verstärker benutzt, so daß der Oszillograph den Ausschlag anzeigt. In der deutschen Patentschrift Nr. 678707 (Maybach) wird eine Anordnung beschrieben, bei der die Dämpfung eines Schwingungskreises durch die Schwingungsbewegungen verändert wird. Die Anzeige ist dem cos des Drehwinkels proportional. Die Herausführung der Meßströme geschieht diesmal induktiv über Kopplungsschleifen. Hoffmeister [2] entwickelte zu seinem Schwingungsmeßverfahren einen Drehschwingungsgeber, der ebenfalls schleifringlos arbeitet und sich durch besonders kleine Abmessungen auszeichnet.

Die Drehschwingungsmessung kann sowohl durch Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrads gegenüber einer gleichförmig umlaufenden trägen Masse ausgeführt werden (seismisches Meßprinzip), als durch Messung der Verdrehung zweier benachbarter Wellenquerschnitte. Die oben angeführten Geber benutzen alle die erste Möglichkeit, die wir auch für das hier entwickelte Gerät beibehalten. Sie lassen sich jedoch ohne weiteres auch für die Verdrehungsmessung ausführen. Bei Benutzung trägerfrequenter Verfahren gelangt man dann bereits zur Drehmomentmessung. Geber, die eine träge Bezugsmasse benutzen, gleichen grundsätzlich alle den bekannten mechanischen Torsiographen von Geiger oder der DVL. Infolge Fortfalls des Schreibwerks und der damit weitgehend verringerten Reibung lassen sie sich jedoch mit wesentlich kleineren Rückstellmomenten bauen. Gewicht und Drehmasse des Gebers werden dann erheblich kleiner. Damit sinkt die Rückwirkung auf den untersuchten Schwinger und ist zumindest an größeren Einheiten (Flugmotoren) vernachlässigbar. Da man Schleifringe vermeiden kann, treten betriebliche Schwierigkeiten nicht auf. Im Gegensatz zum mechanischen Gerät liegt das Ergebnis der Messung beim elektrischen sofort sichtbar vor, und zwar an beliebig entfernter Stelle und in bequemer Vergrößerung.

Wenn trotz dieser unbestreitbaren Vorteile die Verwendung des mechanischen Geräts für Drehschwingungen heute noch vorherrschend ist[2]), so liegt das in der Hauptsache an den meist umfangreichen elektrischen Hilfseinrichtungen und der Notwendigkeit einer Eichung, die vor jeder Meßreihe durchzuführen ist, sowie an der nicht ganz unbegründeten Scheu des Versuchsingenieurs vor einer größeren Anzahl von Regelknöpfen.

[1]) Die Arbeit wurde von der Abteilung Maschineningenieurwesen, Elektrotechnik und Luftfahrt der Technischen Hochschule Stuttgart als Dissertation angenommen. D 93.

[2]) Wenigstens soweit es sich um Messung nach dem seismischen Prinzip handelt.



Es erscheint daher als lohnende und für den Einsatz des elektrischen Drehschwingungsschreibers entscheidende Aufgabe, die Bedienung des Geräts auf ein Mindestmaß zu beschränken und der ganzen Einrichtung eine möglichst einfache und geschlossene Form zu geben. Es muß das Ziel sein, die Bedienung auf das Ein- und Ausschalten und die Feststellung des Meßergebnisses zu beschränken, wobei dieses möglichst sofort nach der Größe und nach der Kurvenform vorliegen soll. Erst dann werden die Vorteile des elektrischen Meßverfahrens voll zur Geltung kommen.

Das hier beschriebene Gerät versucht diese Forderung zu erfüllen. Die Drehschwingungen werden im Geber in Schwankungen der Gegeninduktivität zweier Spulen umgeformt, deren Größe nur vom Schwingungsausschlag und den geometrischen Abmessungen der Spulen bestimmt wird. Die Übertragungskonstante des Gebers bleibt daher zeitlich unverändert. Die Schwankungen der Gegeninduktivität werden mit einem trägerfrequenten Verfahren gemessen. Die Konstanten des hierzu verwendeten Geräts sind zunächst zeitlich nicht gleichbleibend, da sie von Änderungen der Verstärkerröhren u. a. beeinflußt werden, sie werden aber von einer Regelschaltung überprüft und nach jeder Änderung selbsttätig auf den Sollwert zurückgeführt, so daß die gesamte Anzeigevergrößerung des Meßgeräts stets gleich bleibt und daher die Anzeige der Schwingungen an einem unmittelbar in Grad Drehwinkel geeichten Instrument erfolgen kann.

2. Das Schwingungsmeßverfahren [2] [8].

Ein kleiner Sender S (Schwingaudion s. Bild 1) speist eine zylindrische Luftspule mit zwei gegensinnig laufenden Wicklungsteilen (Bild 2). Das Feld der Spule zeigt dann zwischen den beiden Wicklungsteilen einen Nulldurchgang, in dessen Nähe sich ein gut linearer Zusammenhang zwischen dem Fortschreiten auf der Spulenachse und der zum jeweiligen Punkt gehörigen Feldstärke ergibt. Im Innern dieser Senderspule befindet sich eine zweite gleichachsig gerichtete Zylinderspule, in welcher eine Hochfrequenzspannung induziert wird, die im linearen Bereich des Feldverlaufs ihrer Stellung in der Achse der Senderspule verhältig ist. Diese Hochfrequenzspannung beeinflußt über den Gleichrichter G und die Leistungsröhre R ein Instrument oder einen Oszillographen. Der Verlauf der am Gleichrichter entstehenden Gleichspannung ist in Bild 2 gestrichelt eingetragen. Verschiebt man die Empfängerspule 2 aus der Symmetrielage 0 um die Strecke φ_1 (bei der Drehschwingungsmessung ist φ ein Winkel) in die Mitte eines der beiden linearen Äste der Feldkennlinie, so entsteht hinter dem Gleichrichter eine bestimmte Gleichspannung U_1. Führt die Spule nun um diesen Punkt die zu messenden Schwingungen in der Achsenrichtung aus, so überlagert sich der Gleichspannung eine Wechselspannung

$$U_2 = \frac{U_1}{\varphi_1} \cdot \varphi_2,$$

die ein getreues Abbild der Spulenschwingungen bildet. Wir können diese Wechselspannung auch als Modulation der als Träger aufgefaßten Gleichspannung betrachten.

Die Besonderheit des Meßverfahrens liegt in der Unterteilung der Senderspule, durch welche nicht nur die Empfindlichkeit erhöht, sondern auch die Linearität des Feldverlaufs wesentlich gegenüber einer einfachen Spule verbessert werden. Höchste Meßempfindlichkeit erreicht man, wenn die Spulen, wie in Bild 1 gezeigt, unmittelbar als Schwingkreisinduktivitäten benutzt und beide Kreise auf Resonanz abgestimmt werden. Bei geringer Dämpfung der Kreise führen dann allerdings schon geringfügige Schwankungen in der Abstimmung, wie sie durch Temperaturänderung oder durch Einflüsse der Zuleitungen zwischen Meßstelle und Gerät entstehen können, zu merklichen Anzeigefehlern.

Die beiden auf Resonanz abgestimmten Kreise stellen nichts anderes dar als ein Koppelfilter, dessen Bandbreite durch Dämpfung der Kreise vergrößert werden kann, womit die Empfindlichkeit gegen Verstimmen zurückgeht. Gleichzeitig geht allerdings auch die Anzeigeempfindlichkeit des Geräts zurück, denn aus der Gleichung für das Übertragungsmaß des Koppelfilters [4]

$$\frac{1}{\ddot{u}} = \frac{e_2}{i_a} = \frac{\frac{k}{d}}{1+\left(\frac{k}{d}\right)^2} \sqrt{Z_1 Z_2} \quad \ldots\ldots (1)$$

sehen wir, daß mit wachsender Dämpfung $d = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{\omega^2 L_1 L_2}}$ (d ist hier die mittlere Dämpfung beider Kreise) auch der Kopplungsfaktor k vergrößert werden muß), damit dieselbe Spannung e_2 am Empfänger entsteht. Aus Gleichung (1) können wir ferner den Zusammenhang zwischen dem Kopplungsfaktor k und der Spannung e_2 bei fester Dämpfung entnehmen. Zeichnet man die Kurve $e_2 = f\left(\frac{k}{d}\right)$ für i_a = konst. auf, so zeigt diese nach einem zunächst geraden Anstieg ein Maximum, das bei $\frac{k}{d} = 1$ liegt (Bild 3). Für unsere Zwecke ist nur der näherungsweise lineare Teil dieser Kurve brauchbar und daher der maximale Kopplungsfaktor k in Abhängigkeit von der Dämpfung d zu beschränken. Für $\frac{k}{d} = 0{,}1$ wird die Ab-

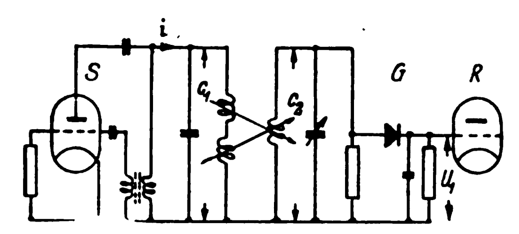


Bild 1. Grundschaltung des Schwingungsmeßverfahrens. S Sender, G Gleichrichter, R Leistungsröhre.

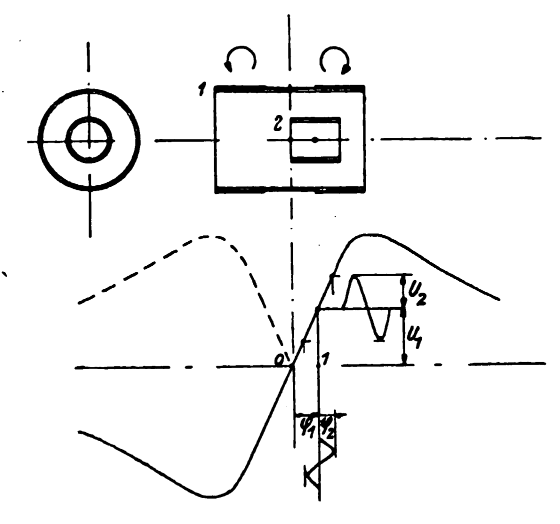


Bild 2. Feldverlauf in den Meßspulen. U_1 Ruhespannung, φ_1 Ruhewinkel, U_2 Nutzwechselspannung, φ_2 Scheitelwert der Schwingung.

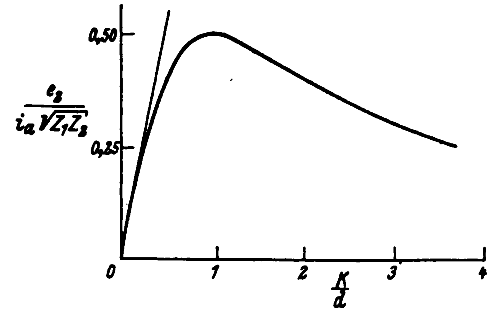


Bild 3. Verlauf der Ausgangsspannung am Bandfilter in Abhängigkeit von $\frac{k}{d}$.

weichung von der Geraden = 1%, für $\frac{k}{d}$ = 0,2 schon 4%. Die am Empfänger auftretende Spannung e_2 erhalten wir bei dieser Einschränkung einfach aus:

$$e_2 = i_a \frac{k}{d} \sqrt{Z_1 Z_2} = e_1 \frac{k}{d} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a)$$

wobei Z_1 und Z_2 die Scheinwiderstände der beiden Kreise sind.

3. Der Drehschwingungsgeber.

Die Messung von Drehschwingungen ist mit diesem Verfahren ohne weiteres möglich. Hoffmeister selbst hat hierfür eine sehr elegante Lösung angegeben. Er mußte dazu die Meßspulen so anordnen, daß die Verdrehungen zwischen der umlaufenden Welle und einer gleichförmig umlaufenden trägen Masse, die als Bezugspunkt dient, Verschiebungen zwischen Sender und Empfängerspule hervorrufen, also die Spulenachse in den Umfang des Drehkreises legen. Gleichzeitig mußten die Sende- und Empfangsspannungen von den umlaufenden Spulen auf feststehende Spulen übertragen werden. Bild 12 zeigt, welche Gestalt der Spulensatz dabei angenommen hat. Es sind 4 konzentrische Spulenkörper mit verschiedener Bewicklung vorhanden, die in Bild 12 auseinandergezogen gezeigt sind, damit die Bewicklung der einzelnen Körper sichtbar wird. Sie seien von außen nach innen mit *1*, *2*, *3*, *4* bezeichnet. Die eigentliche Empfangsspule *3* ist zu einem in sich geschlossenen mäanderförmigen Kupferband geworden, dem als Sendespulen ebensolche in sich geschlossene Rechtecke gegenüberstehen. Spule *3* ist mit der Welle und Spule *2* mit der Bezugsmasse verbunden; sie laufen also mit diesen um. Die Spulen *1* und *4* nehmen an der Drehung nicht teil und dienen zur Übertragung der Meßströme nach außen. Die Spulen *1* und *4* haben jede zwei Wicklungshälften, die den in Umfangsrichtung liegenden Teilen der Rechtecke bzw. Mäander gegenüber liegen, jedoch verlaufen die beiden Wicklungsteile in Spule *1* gegensinnig, in Spule *4* aber gleichsinnig.

Unbeeinflußt durch die Drehung der Spulen *2* und *3* induziert die mit dem Sender verbundene Spule *1* in den in Umfangsrichtung liegenden Wicklungsteilen der anderen Spulen Hochfrequenzspannungen, die sich jedoch infolge der gegensinnigen Wicklung der Hälften von Spule *1* im Mäander und in Spule *4* aufheben und daher zunächst nicht zu dem mit Spule *4* verbundenen Empfänger gelangen können. Nur in den Rechtecken auf Spule *2* entsteht ein Kurzschlußstrom, der nun seinerseits über die axial liegenden Wicklungsteile in dem Mäander Spannungen induziert. Sie sind der Gegeninduktivität zwischen den axialen Leiterstücken des Rechtecks und denen des Mäander proportional. In Bild 5 ist dies für ein Rechteck und das zwischenliegende

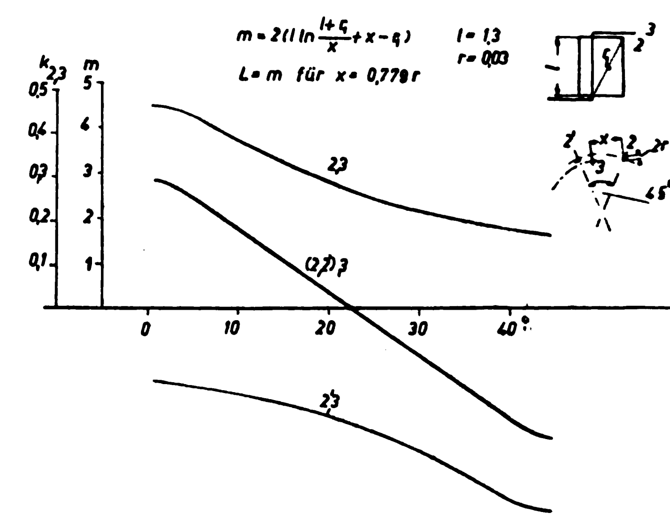


Bild 5. Zusammenhang zwischen Drehwinkel und Kopplung im Drehschwingungsgeber.

Mäanderstück herausgezeichnet und daneben die resultierende Gegeninduktivität bzw. der Kopplungsfaktor $k = \frac{m}{L}$ aufgetragen [5]. Man sieht, daß die Kopplung zwischen Spule *2* und *3* in einem gewissen Bereich linear mit ihrer gegenseitigen Verdrehung zusammenhängt und für die Stellung, bei welcher sich die Leiter des Mäander mitten zwischen denen der Rechtecke befinden, durch Null geht. Dieses Verhalten entspricht genau dem der Meßspulen nach Bild 2. Die von den Rechtecken der Spule *2* in den Mäander induzierten Spannungen rufen nun in diesem einen Kurzschlußstrom hervor, der über die in Umfangrichtung liegenden Mäanderteile auf die Spule *4* und von hier aus auf den Empfänger Spannungen induziert, die der Verdrehung der Spulen *2* und *3* verhältig sind.

Die Spulenanordnung vereinigt also auf kleinem Raum die Aufgabe der Drehschwingungsmessung mit der Übertragung der Meßströme nach außen. Sie ist leicht am Wellenende oder im Innern einer Hohlwelle unterzubringen.

Das Federmassesystem dieses Gebers muß zur Vermeidung von Meßfehlern gewisse Werte seiner Dämpfung und seiner Eigenfrequenz einhalten. Hoffmeister [3] hat den Anzeigeausschlag in Abhängigkeit vom Verhältnis Ω der Meßfrequenz zur Eigenfrequenz mit dem Dämpfungsgrad α als Parameter dargestellt (Bild 4). Auf dem Einheitskreis ist die Anzeige fehlerfrei. Die Ortskurven für den Ausschlag nähern sich für hohe Frequenzen dem Einheitskreis gut an, wenn der Dämpfungsgrad α zwischen 0,5 und 0,7 liegt. Ein Dämpfungsgrad α = 0,5 bedeutet, daß eine freie Schwingung die durch einen Stoß angeregt wurde, innerhalb einer Periode auf $e^{-\alpha\omega_0 T} = e^{-\pi} = \frac{1}{23}$, also fast aperiodisch abklingt. Bild 4 zeigt ferner, daß für solche Dämpfungen die Ortskurve des Ausschlags mit dem Einheitskreis für Frequenzen zusammenfällt, bei denen $\Omega \geqq 3$ ist, so daß die Eigenfrequenz der Geberanordnung höchstens $\frac{1}{3}$ der niedrigsten zu messenden Frequenz sein darf.

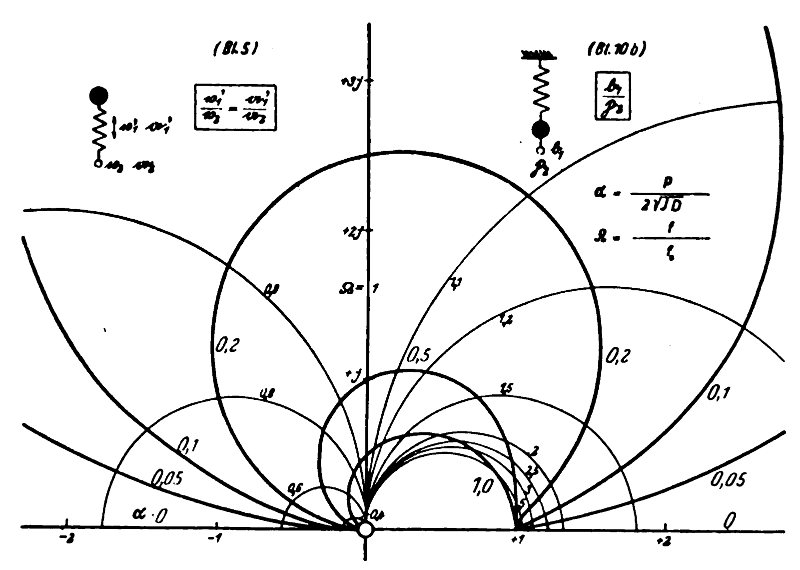


Bild 4. Ortskurven des Anzeigefehlers eines Feder-Masse-Systems nach Hoffmeister.

4. Die Entwicklung zum unmittelbar zeigenden Gerät.

a) Einführen der Regelung auf gleichbleibende Vergrößerung.

Der Grund, warum wir ein Schwingungsmeßgerät vorbeschriebener Art nicht so behandeln können wie ein gewöhnliches elektrisches Meßinstrument, das einfach angeschlossen und abgelesen wird, liegt, wie wir

bereits sahen, in den zeitlichen Schwankungen der Verstärkung im Gerät. Sie zwingen uns, die Vergrößerung, welche wir durch den Wert mm Oszillographenausschlag bzw. Instrumentausschlag für 1° Drehwinkel kennzeichnen, nicht nur einmal durch Eichung zu bestimmen, sondern sie fortlaufend mindestens vor jeder Meßreihe zu prüfen und zu berichtigen. Diese Arbeit durch eine Regelung selbsttätig vornehmen zu lassen, ist nun unsere Aufgabe.

Die Regelung muß einen Wert beeinflussen, der sich nur mit der Vergrößerung ändert. Die Gleichspannung U_1, die wir durch Verschieben der Empfängerspule um den Winkel φ_1 in die Mitte des linearen Teils unserer Feldkennlinie erhalten, erfüllt diese Bedingung, denn für sie gilt:

$$U_1 = c \cdot U_s \cdot V_e,$$

wobei U_s die Senderspannung am Geber, c ein den Spulensatz kennzeichnender zeitlich unveränderlicher Wert und V_e die Verstärkung auf der Empfangsseite ist. Das Produkt $U_s \cdot V_e$ schließt alle Einflüsse auf die Vergrößerung innerhalb des Geräts ein, da es sowohl die Sende- als auch die Empfangsseite berücksichtigt.

Es ist also eine Regelschaltung aufzubauen, welche U_1 selbsttätig gleichhält. Zuvor müssen wir aber noch prüfen, ob die wichtigste Voraussetzung des Verfahrens, nämlich die Unveränderlichkeit des Winkels φ_1, gesichert ist. Da die träge Masse des Gebers eine Lagerung erfordert, tritt ein gewisses Reibungsmoment auf. Für den von Hoffmeister entwickelten und in Bild 15 dargestellten Geber mit einer auf Kugellagern laufenden trägen Masse von 120 g Gewicht und einem Trägheitsmoment von $J = 0{,}43$ cmg/s² wurde das Reibungsmoment M_r zu 1,1 cmg ermittelt. Andererseits ist bei einer Schwingungsdauer $T = 0{,}167$ s das Rückstellmoment je Grad Drehwinkel $M_D = \frac{4\pi^2 J}{57{,}3\, T^2} = 10{,}8$ cmg, womit eine Unsicherheit der Ruhelage von $\pm 0{,}1°$ entsteht. Soll der hieraus mögliche Meßfehler nicht größer als ±1% werden, so muß der Winkel φ_1 wenigstens zu 10° gewählt werden. Damit andererseits die Kopplung *0* eindeutig von der gegenseitigen Lage der Spulen *2* und *3* abhängig ist, dürfen keine in unkontrollierbarer Weise veränderlichen kapazitiven Kopplungen auftreten. Außerdem ist es zweckmäßig, den Einfluß verschieden langer Zuleitungen zum Geber zu beseitigen. Wir erreichen dies am einfachsten, wenn wir den Geber senderseitig aus dem Schwingungskreis herausnehmen und ihn etwa über einen kapazitiven Spannungsteiler verhältnismäßig lose ankoppeln, so daß er auf die Frequenz des Senders nicht mehr einwirkt und im Empfangsteil festabgestimmte Kreise verwendbar sind. Die Kapazität des Abgriffs werden wir groß gegen die Kabelkapazität und den Scheinwiderstand klein gegen den des Gebers wählen. Auf der Empfängerseite ist dagegen die Beibehaltung eines Resonanzkreises möglich, wenn wir die Kapazität dieses Kreises genügend groß wählen, beispielsweise 30000 pF. Da die Kabelkapazität nicht größer als 300 pF wird, spielt sie dann auch hier keine Rolle mehr. Die geringfügigen Schwankungen werden ohne weiteres von der Regelung aufgenommen.

b) Die Regelschaltung und das grundsätzliche Schaltbild.

Der Empfangsteil besteht zunächst aus einem zweistufigen Hochfrequenzverstärker mit einer regelbaren Stufe und nachfolgendem Gleichrichter. Die Verstärkung ist so groß gewählt, daß im Gleichrichter eine Gleichspannung U_1 ungefähr = 100 V und dementsprechend große Nutzwechselspannungen entstehen. Die Spannung U_1 ist negativ gegen Kathode und wird über Siebglieder, welche die Nutzwechselspannungen fernhalten, sowie unter Zwischenschalten einer festen Gegenspannung dem Gitter der Regelröhre zugeführt (Bild 6). Die Gegenspannung ist so bemessen, daß das Gitterpotential der Röhre einen Wert annimmt, der sowohl ein Regeln nach unten als auch nach oben ermöglicht. Eine Röhre *AH 1* benötigt am Gitter beispielsweise —3 V bis —4 V gegen Kathode.

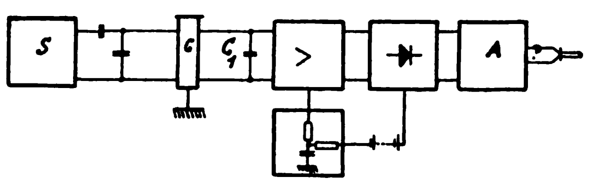


Bild 6. Grundsätzliche Schaltung des geregelten Geräts. *S* Sender, *G* Geber, *A* Anpassungsstufe für Oszillograph.

Nun entnehmen wir den Steilheitskennlinien dieser Röhre, daß zur Regelung ihrer Verstärkung in einem Bereich 1:4 eine Änderung der Gittervorspannung um ±1 V genügt. Schwankungen der Gesamtverstärkung des Geräts in diesem für den praktischen Fall schon sehr weit gehaltenen Umfang beeinflussen daher die Ausgangsspannung von 100 V gerade um ±1%. Normalerweise dürfen wir aber mit einer wesentlich engeren Toleranz rechnen. Wir sehen, daß für die Güte der Regelung das Verhältnis der Ausgangsspannung zur Regelsteilheit der Regelröhre maßgebend ist.

Da wir bei dieser Schaltung die Gegenspannung als Normal verwenden, mit dem der Regler die Ausgangsspannung U_1 vergleicht, ist ihre Konstanz Voraussetzung für die Meßgenauigkeit. Durch Verwenden eines Stabilisators oder eines magnetischen Spannungsgleichhalters im Netzteil gelingt es aber leicht, sie auf Bruchteile eines Prozents gleichzuhalten.

Das grundsätzliche Schaltbild (Bild 6) zeigt nun außer dem Regelverstärker noch den Sender, den Geber, der senderseitig über einen kapazitiven Spannungsteiler aperiodisch angekoppelt ist, während empfangsseitig mit dem Kondensator C_1 für Betriebsfrequenz Resonanz vorhanden ist. An den Gleichrichter kann unmittelbar eine Braunsche Röhre angeschlossen werden, während zur Steuerung eines Anzeigeinstruments oder eines Schleifenoszillographen noch eine Röhre vorzusehen ist, welche die hierfür notwendige Leistung liefert.

c) Der Einfluß der Gleichrichtung auf die Eichung.

Wir haben bisher stillschweigend angenommen, daß die Beziehung

$$U_2 = \frac{U_1}{\varphi_1} \cdot \varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

streng gültig sei, der Modulationsgrad des Senders $m = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ also auch als $\frac{U_2}{U_1}$ ausgedrückt werden kann. Erfolgt die Gleichrichtung mit einer nur durch den Widerstand R_g (Bild 7) belasteten Diode, so ist dies bei den hohen Hochfrequenzspannungen, die wir am Gleichrichter zur Verfügung haben, auch der Fall. Die zusätzliche Belastung der Diode durch die Siebkette $R_s C_s$, die bei auftreffender Modulation eintritt, hat aber zur Folge, daß die Leistungsentnahme der Diode aus dem Vorkreis bzw. ihre Anpassungsbedingungen an diesen für Träger und Seitenband verschieden werden. (Für die Begründung sei auf Nr. 6 des Schrifttumsverzeichnisses hingewiesen.) Man findet dann, daß die Gl. (3) die Form annimmt:

$$U_2 = \varkappa \cdot \frac{U_1}{\varphi_1} \cdot \varphi_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

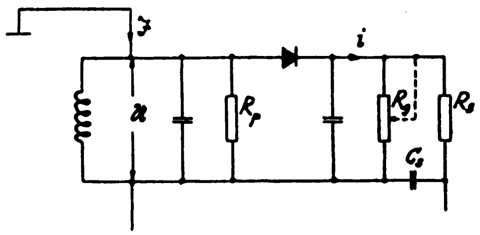


Bild 7. Schaltbild zur Bestimmung der Verhältnisse am Gleichrichter.

wobei

$$\varkappa = \frac{R_p // \frac{1}{2}(R_g // R_s)}{R_p // \frac{1}{2} R_g} \quad \ldots \ldots \ldots (3\text{b})$$

ist. R_p stellt den Resonanzwiderstand des Schwingkreises dar. Die Gleichung für $\varkappa$ zeigt, daß dieses durch das Hinzukommen von R_s nicht nur kleiner als 1 wird, sondern nun außerdem mit R_p, d. h. aber mit der Abstimmung des Vorkreises schwankt. Verstimmungen des Vorkreises ändern daher die Eichung des Geräts, ohne daß die Regelung dies ausgleichen könnte. Machen wir jedoch das Verhältnis R_s zu R_g so groß, daß $\varkappa \approx 1$ wird, so bleibt dieser Fehler verschwindend klein. Ist beispielsweise R_g ungefähr gleich R_p, so muß für $\varkappa = 0{,}98$ der Längswiderstand der Siebkette $R_s = 32\, R_g$ sein. Da R_s den Gitterableitwiderstand der Regelröhre bildet, wird R_s dann aber erheblich zu groß, da wir für R_g etwa mit 250 kΩ rechnen können. Erst wenn man die Siebkette an eine Anzapfung von R_g führt (in Bild 7 gestrichelt gezeichnet), kommt man zu brauchbaren Werten von R_s, denn das notwendige Verhältnis $R_s : R_g$ nimmt quadratisch mit der Spannungsteilung ab [6].

d) Die Zeitkonstante der Regelung und der zeitliche Verlauf des Regelvorganges.

Der Einsatz der Regelung muß so weit zeitlich verzögert sein, daß auch die tiefste zu übertragende Meßfrequenz nicht unzulässig beeinflußt wird. Ist am Ausgang des Verstärkers eine Wechselspannung $\mathfrak{U}_{(\text{Scheitel})}$ vorhanden, so wirkt diese über die Siebkette als Regelspannung nach Betrag und Phase geändert mit dem Wert $\mathfrak{U}\,\mathfrak{t}$ am Gitter der Regelröhre. Dabei ist $\mathfrak{t}$ das komplexe Spannungsteilverhältnis an der Siebkette.

Diese Wechselspannung bewirkt eine zusätzliche Modulation des am Verstärker vorhandenen Trägers, für die wir bei Beschränkung auf kleine Änderung linearen Zusammenhang annehmen dürfen. Wir können die Modulation ausdrücken durch die relative Steilheitsänderung $\left(\frac{\Delta S}{S}\right)_{1\,\text{Volt}}$ der Regelröhre bezogen auf 1 V Gitterspannungsänderung. Es wird dann die durch Rückwirkung erzeugte Modulation:

$$\mathfrak{M}_r = \frac{\Delta S}{S} \cdot \mathfrak{U}\,\mathfrak{t} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Ist die durch den Träger am Ausgang erzeugte Gleichspannung U_T, so ist die hier wirksame Modulation $\mathfrak{M}_w = \frac{\mathfrak{U}}{U_T}$ und wir erhalten:

$$\mathfrak{M}_r = -\mathfrak{M}_w \cdot \frac{\Delta S}{S} \cdot U_T\,\mathfrak{t} = -\mathfrak{M}_w K\,\mathfrak{t} \quad \ldots \ldots (5)$$

Das Minuszeichen folgt aus der Überlegung, daß für $\mathfrak{t} = 1$ die durch Rückwirkung erzeugte Modulation der am Ausgang wirksamen gerade entgegengesetzt ist. Der Ausdruck $\frac{\Delta S}{S} \cdot U_T$ ist eine für den Verstärker eigentümliche Größe, die wir durch K bezeichnen wollen. Da die ursprüngliche Modulation $\mathfrak{M}$ sich mit der durch Rückwirkung erzeugten vektoriell zur wirksamen Modulation $\mathfrak{M}_w$ zusammensetzt, d. h

$$\mathfrak{M}_w = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_w K\,\mathfrak{t}$$

ist, erhalten wir als Anzeigefehler (Modulationsgradverhältnis):

$$\frac{\mathfrak{M}_w}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{1 + K\,\mathfrak{t}} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Für das einfache Siebglied nach Bild 7 ist $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 = \frac{1}{1 + j\,\omega\, C_s R_s} = \frac{1}{1 + j\,\Omega}$. Wenn wir mit $\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}$ die Frequenz, bezogen auf die Grenzfrequenz, bezeichnen

$$\left(\omega_g = \frac{1}{R_s C_s} = \frac{1}{T}\right).$$

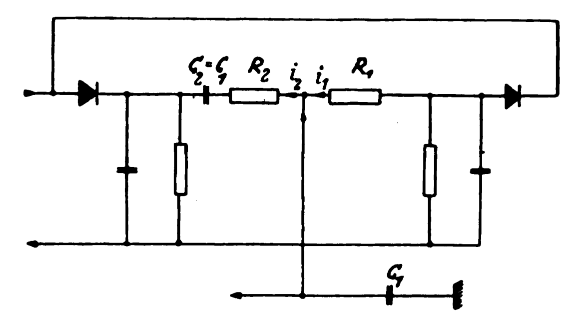


Bild 8. Schaltbild zur Berechnung der Regelwirkung.

Damit läßt sich die Gl. (6) in der Form anschreiben

$$\frac{\mathfrak{M}_w}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{1}{1+K} + j\,\frac{\Omega}{1+K}}{1 + j\,\frac{\Omega}{1+K}}.$$

Für die Werte $\Omega > \frac{1}{1+K}$ können wir mit guter Näherung auch schreiben

$$\frac{\mathfrak{M}_w}{\mathfrak{M}} = \frac{j\,\Omega'}{1 + j\,\Omega'} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

da $K \gg 1$ ist. Dabei ist $\Omega' = \frac{\Omega}{1+K}$ gesetzt. Dies ist aber der Verlauf der Spannung am Widerstand einer R, C-Serienschaltung mit der Zeitkonstante $T' = T/1 + K$ in Ortskurvendarstellung also ein Halbkreis (Bild 9 I). Nur bei Frequenzen, die wesentlich tiefer liegen als die Grenzfrequenz dieser Serienschaltung ist eine Abweichung vorhanden, da für die Frequenz Null eine wirksame Modulation

$$\mathfrak{M}_{w\,(\omega \to 0)} = \frac{1}{1+K}\,\mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

übrigbleibt. Gl. (8) gibt uns gleichzeitig die Wirkung der Regelung bezüglich des Ausgleichs von Schwankungen der Ausgangsspannung.

Die Siebkette wirkt infolge der zwischenliegenden Verstärkung mit einer $1/1 + K$ kleineren Zeitkonstante. Liegt die untere Grenze des zu übertragenden Bandes sehr tief, so erhält man für die Kapazität C_s beträchtliche Werte. Man wird daher versuchen, durch Hintereinanderschalten mehrerer Siebglieder eine bessere Wirkung zu erzielen. Führt man jedoch die Rechnung mit dem Teilverhältnis $\mathfrak{t}_2$ einer zweigliedrigen Kette mit gleichen Gliedern durch, so erhält man für den Anzeigefehler die Ortskurve 2 (Bild 9).

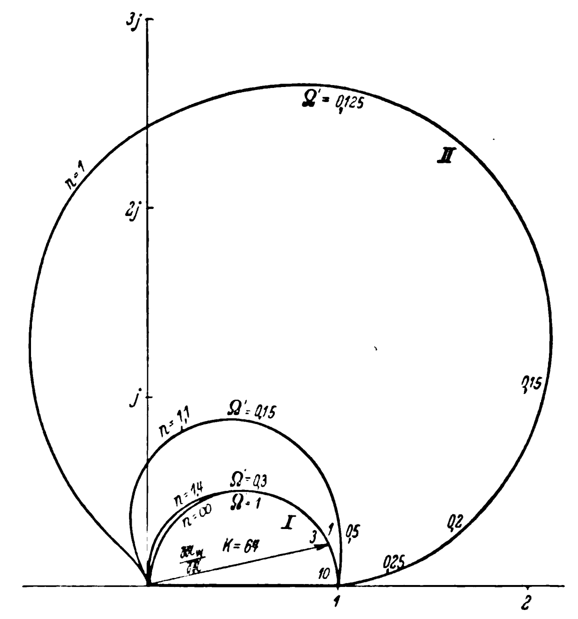


Bild 9. Ortskurven für den Anzeigefehler im Bereich der unteren Frequenzgrenze.

Da die Phasenverschiebung im Siebglied jetzt größer als 90° werden kann, kommen auch positive Rückwirkungen vor, d. h. es wird $\mathfrak{M}_w > \mathfrak{M}$.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß jetzt außerdem der Regelvorgang schwingungsförmig ausklingt, was unerwünscht ist. Macht man nun die Zeitkonstanten beider Glieder nicht gleich, so kann man die Kurve I allmählich in die Kurve II überführen, wenn man etwa die Zeitkonstante des zweiten Gliedes verändert. Dieselbe Wirkung erreicht eine Schaltung nach Bild 8 durch Verändern des Verhältnisses $R_2/R_1 = n$ der beiden Widerstände R_1 und R_2.

Die Schaltung ergibt außerdem den Vorteil, daß an dem zur Spannungsverdopplung erweiterten Gleichrichter gegen Erde symmetrische Nutzwechselspannungen zum Betrieb einer Braunschen Röhre abgenommen werden können.

Für $R_2 = \infty$ ist diese Anordnung gleichbedeutend mit der einfachen Siebkette. Andererseits ist auf Grund eines Vektordiagramms oder durch Ausrechnen leicht zu zeigen, daß die Anordnung für $R_2 = R_1$ mit der doppelten Siebkette mit gleichen Gliedern identisch wird. Für dazwischenliegende Werte von R_2 erhalten wir Kurven, wie sie in Bild 9 für die Werte $R_2/R_1 = n = 1{,}1$ bis $1{,}4$ gezeigt sind. Wo die Grenzen zwischen günstigem und ungünstigem Verlauf im Einzelfalle liegen, kann durch Bestimmung des zeitlichen Ablaufs der Regelung aus den Differentialgleichungen der Schaltung nach Bild 8 vollständig erfaßt werden.

Der zeitliche Ablauf der Regelung. Der Träger ändere sich im Zeitpunkt t_0 vom Wert U_T um den Betrag U auf $U_T + U$. Liegt nun infolgedessen in irgendeinem Zeitpunkt am Kondensator C_1 die Spannung U_{c_1}, so hat die Ausgangsspannung den Wert

$$(U + U_T) - (U + U_T) \cdot \frac{\Delta S}{S} \cdot U_{c_1} \quad \text{(9)}$$

und ihre Änderung gegen U_T ist:

$$(U + U_T) - (U + U_T)\frac{\Delta S}{S} \cdot U_{c_1} - U_T = U - K\left(1 + \frac{U}{U_T}\right) U_{c_1} \quad \text{(10)}$$

Für kleine Störungen U können wir auch U/U_T gegen 1 vernachlässigen und erhalten dann für die Störung am Ausgang zur Zeit t:

$$U_t = U - K\, U_{c_1} \quad \text{(11)}$$

Mit Bild 8 ergeben sich dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{Q_{c_1}}{C} + R_1 \cdot i_1 = U - \frac{Q_{c_1}}{C} \cdot K \\ &\frac{Q_{c_1}}{C} + n\, R_1 \cdot i_2 = U - \frac{Q_{c_1}}{C} \cdot K + \frac{Q_{c_1}}{C} \\ &i_1 + i_c = i_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(12)}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &i_1 - i_2 + T' \frac{d\, i_1}{d\, t} = 0 \\ &i_2 \frac{2 - K}{1 + K} + i_1 \frac{1 - K}{1 + K} + n\, T' \frac{d\, i_2}{d\, t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(13)}$$

Mit dem Lösungsansatz:

$$i_1 = C_1\, e^{r\,t};\quad i_2 = C_2\, e^{r\,t}$$

folgt

$$r_1, r_2 = \frac{1}{T'} \times \frac{-[K(n-1)+n+2] \pm \sqrt{[K(n-1)+n+2]^2 - 4\,n\,(1+K)}}{2\,n\,(1+K)} \quad \text{(14)}$$

und schließlich der Verlauf der Störung am Ausgang:

$$U_t = U - U_{c_1} K = \frac{U}{1+K}\left[1 + K\left(\frac{\frac{1}{n} - 1 - r_1 T'}{T'(r_2 - r_1)}\, e^{r_2 t} + \left(1 - \frac{\frac{1}{n} - 1 - r_1 T'}{T'(r_2 - r_1)}\right) e^{r_1 t}\right)\right] \quad \text{(15)}$$

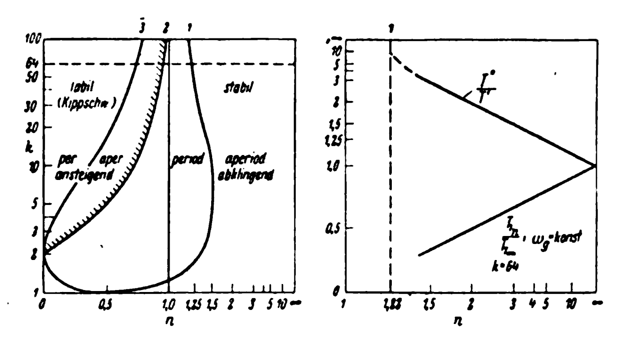


Bild 10. Wirksame Zeitkonstante und Stabilitätsgrenze der Regelschaltung.

Aus (14) folgt mit der Bedingung, daß der Wurzelausdruck Null ist, die Stabilitätsgrenze der Regelung für

$$n_2 = \frac{K - 2}{1 + K} \quad \text{(16)}$$

und die Grenzen zwischen denen der Regelvorgang schwingungsförmig verläuft

$$n_{1,3} = \frac{K \pm 2\sqrt{K-1}}{1 + K} \quad \text{(17)}$$

Bild 10 zeigt den Verlauf dieser Grenzen in Abhängigkeit von K. Alle Werte links der Grenze *1* sind für uns nicht brauchbar, denn zwischen *1* und *2* klingt die Störung U als gedämpfte Schwingung ab, jenseits der Grenze *2* tritt Selbsterregung auf. Rechts der Grenze *1* setzt sich der Verlauf der Ausgangsstörung aus zwei e-Funktionen zusammen. Bis in die Nähe der Grenze ist jedoch $r_1 \gg r_2$, $\dfrac{\frac{1}{n} - 1 - r_1 T'}{T'(r_2 - r_1)} \approx 1$ so daß das Glied mit $e^{r_1 t}$ vernachlässigbar bleibt, und das Abklingen nach einer reinen e-Kurve erfolgt. Der Verlauf ihrer Zeitkonstante $T'' = 1/r_2$ in Abhängigkeit von n ist in Bild 10 für den Wert $K = 64$ gezeigt, der dem ausgeführten Gerät entspricht. Dabei ist ihr Wert T' für $n = \infty$ als Einheit gewählt. Bis etwa $n = 1{,}4$ verläuft T'' mit n nach einer Hyperbel $T'' = \frac{1}{n-1} + 1$ die natürlich in der Reziprokdarstellung von Bild 10 als Gerade erscheint. Dabei steigt das Verhältnis T''/T' für $n = 1{,}4$ auf 3,8. Dementsprechend kann die Zeitkonstante T_1 der Siebkette $R_1\,C_1$ auf $0{,}28\ T_1$ verringert werden, ohne daß die Frequenz, bei welcher der Anzeigefehler merklich wird, zunimmt. Daraus ergibt sich eine nicht unbeträchtliche Verringerung an Kondensatorgröße. Außerdem gibt die Schaltung aber die Möglichkeit, durch Verändern eines einzigen Widerstandes R_2 die Grenzfrequenz der Siebkette etwa im Verhältnis 1:3 zu verschieben und damit eine genaue Anpassung des Geräts an die Eigenschaften des Drehschwingungsgebers vorzunehmen.

e) Anpassung des Oszillographen.

Zum Betrieb von Oszillographenschleifen benötigen wir hinter dem Gleichrichter noch eine Röhre, welche die notwendige Leistung zu liefern hat. Diese stellt wieder ein zeitlich veränderliches Teil der Schaltung dar, das von der Regelung nicht erfaßt wird. Da uns aber am Gleichrichterausgang Spannungen zur Verfügung stehen, welche die zur Aussteuerung der Anpassungsröhre notwendigen bei weitem überschreiten, können wir durch eine starke Gegenkopplung diese Einflüsse auf ein vernachlässigbares Maß herabsetzen.

Die Gegenkopplung erreichen wir in einfachster Weise durch einen Widerstand in der Kathodenleitung, wobei die Wirksamkeit bis 0 Hz erhalten bleibt. Liegt zwischen Gitter und Kathode die resultierende Spannung $\mathfrak{U}_r$, so entsteht am Kathodenwiderstand die Spannung:

$$\mathfrak{U}_k = R_k \cdot i_a = \mathfrak{U}_r \cdot \frac{1}{D}\left(\frac{R_k}{R_a + R_i + R_k}\right)$$

und die anzulegende Spannung ist dann:

$$\mathfrak{U}_g = \mathfrak{U}_k + \mathfrak{U}_r = \mathfrak{U}_r\left(1 + \frac{R_k}{R_a + R_i + R_k}\right).$$

Daraus erhalten wir die Abnahme der Verstärkung durch die Gegenkopplung zu:

$$\frac{\mathfrak{U}_r}{\mathfrak{U}_g} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_k}{R_a + R_i + R_k}\right)}.$$

Für den Fall $R_a = 0$ und $R_i \gg R_k$ folgt einfach:

$$\frac{\mathfrak{U}_r}{\mathfrak{U}_g} = \frac{1}{1 + S R_k}$$

oder

$$\frac{i_a}{\mathfrak{U}_g} = S_g = \frac{S}{1 + S R_k} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Diese Überlegung ist genau gleich der, wie wir sie bei der Bestimmung der Rückwirkung auf die Modulation über die Regelschaltung gemacht haben. Soll die wirksame Steilheit $n\,S$ sein, so folgt hieraus für den Kathodenwiderstand der Wert:

$$R_k = \frac{1 - n}{n\,S} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Bei einer Änderung von S um ΔS erhalten wir

$$S_g\left(1 + \frac{\Delta S_g}{S_g}\right) = \frac{S\left(1 + \frac{\Delta S}{S}\right)}{1 + \frac{1-n}{n}\left(1 + \frac{\Delta S}{S}\right)}$$

und bei Entwicklung in eine Potenzreihe nach $\frac{\Delta S}{S}$:

$$\frac{\Delta S_g}{S_g} = n \cdot \frac{\Delta S}{S} - 2\,(1 - n)\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \ldots \quad (20)$$

In erster Näherung wird also der Einfluß von Schwankungen der Röhrendaten im selben Maße durch die Gegenkopplung verringert, wie die Steilheit selbst.

5. Beschreibung eines ausgeführten Geräts.

a) Der Geber.

Bild 11 zeigt die Ansicht des vorhandenen Gebers, der für das Gerät mit geringfügigen Abänderungen übernommen wurde. Bild 12 zeigt die Teile des Spulensatzes, besonders erkennt man hier die aus Kupferfolie hergestellte Bewicklung der Spulen *2* und *3*. Die Transformatorspulen *1* und *4* wurden neu bewickelt, so daß empfängerseitig mit einem Parallelkondensator von 30000 pF Resonanz bei der Betriebsfrequenz eintritt. Der Geber war ferner mit einer Reibungsdämpfung — durch Ölfüllung der Lager — versehen, die aus den unter 4a angeführten Gründen nicht beibehalten werden durfte. Nach Auswaschen der Lager ging der Einstellfehler auf weniger als $\pm 0{,}1^\circ$ herunter. Dies wurde so festgestellt, daß der Geber an einem Elektromotor in gleichförmigem Umlauf gehalten und durch kurzzeitiges Ändern der Drehzahl zu Schwingungen angestoßen wurde.

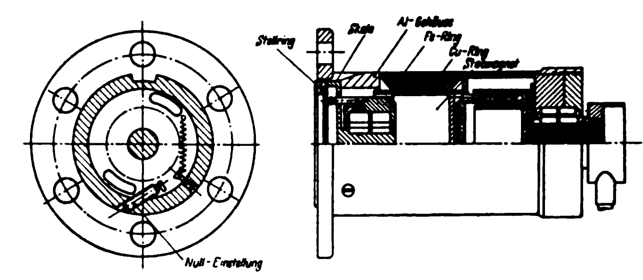


Bild 13. Drehschwingungsgeber in neuerer Ausführung.

Nach Beruhigung wurde dann jeweils die Änderung der Nulllage festgestellt.

Die im Hinblick auf den Frequenzgang und zur Unterdrückung dauernder Pendelungen notwendige geschwindigkeitsabhängige Dämpfung wurde durch behelfsmäßigen Anbau eines in dem in Bild 20 sichtbaren Rohr R untergebrachten Wirbelstromdämpfers erzielt. Bei einer endgültigen Ausführung muß freilich die durch den Dämpfer bedingte zusätzliche Drehmasse viel kleiner bleiben. Man wird am besten den Magneten, unter Umständen auch den ganzen Eisenkreis als Bezugsmasse ausbilden. Bei dem Neuentwurf eines Gebers nach Bild 13 ist beispielsweise der Magnet, der hier ein einfacher Stabmagnet ist, als Teil der Bezugsmasse verwendet, der Kraftlinienschluß geschieht über einen in dem aus Leichtmetall ausgeführten Gehäuse eingelegten Ring, der im Innern zugleich die Dämpferscheibe trägt. Da in dem Eisenring höhere Induktionen als im Magnetstahl zulässig sind, kann er verhältnismäßig schwach bemessen sein, so daß seine Drehmasse keinen unzulässigen Wert annimmt. Bei diesem Geber ist außerdem zur Einstellung der gegenseitigen Lage von Spule *2* und *3* eine Feinstellvorrichtung mit Noniusskala vorgesehen, während bei dem vorhandenen Modell die Einstellung durch Aufsetzen einer Skala mit $^1/_{10}{}^\circ$ Ablesung vorgenommen wurde.

Das Dämpfungsmoment, welches von der Anordnung geliefert werden muß, folgt aus der Schwingungsgleichung des Drehsystems

$$J\frac{d^2\varphi}{d t^2} + p\frac{d\varphi}{d t} + D\varphi = 0$$

und der Wurzel ihrer charakteristischen Gleichung

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p}{2J} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4J^2} - \frac{D}{J}}$$

im aperiodischen Grenzfall zu

$$p = 2\sqrt{J D} = 2 J \omega_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Für uns genügt es, wenn der Dämpfungsgrad:

$$\alpha = \frac{p}{2 J \omega_0} = 0{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

ist, s. Bild 4, so daß

$$p = J\omega_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

wird.

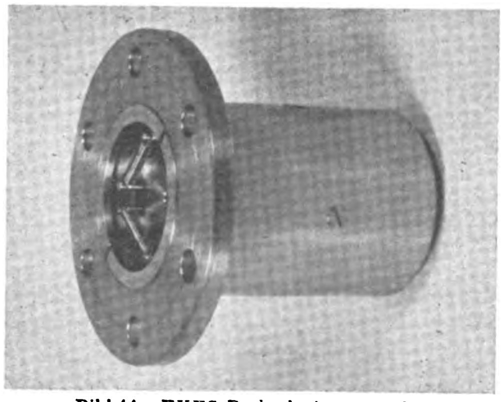


Bild 11. FKFS-Drehschwingungsgeber Außenansicht.

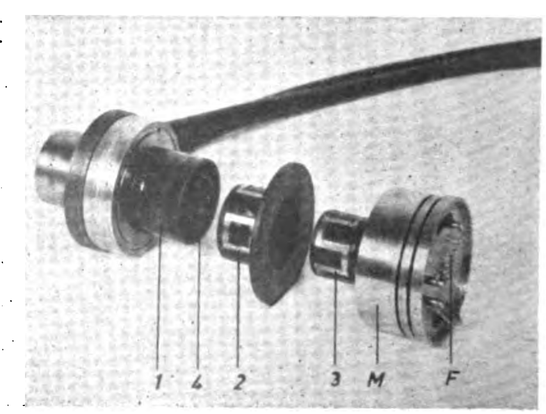


Bild 12. FKFS-Drehschwingungsgeber Innenteile. *1*, *2*, *3*, *4* Spulen. *M* Masse, *F* Federn.



Das Moment, das ein Magnetpol der Breite a und der Länge in Bewegungsrichtung c auf den im Luftspalt d' mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ laufenden Dämpfungszylinder (s. Bild 13) ausübt, findet man aus der induzierten Spannung [8], [9]

$$E = (-)\, H \cdot a \cdot r \cdot 10^{-8}\ [\text{Volt}]$$

und dem Strom

$$J = \frac{E}{R} = E \cdot \frac{c\,d}{a\,\varrho\, C} \cdot 10^{4} [\text{A}]$$

zu

$$p = \frac{H^2 r^3 dF}{C\varrho} \cdot 16 \cdot 10^{-9} \left[\text{cmg} \Big/ \frac{1}{\text{s}}\right] \quad . \; . \; . \; (24)$$

Dabei ist d die Dicke des Zylinders, ϱ sein spezifischer Widerstand und r sein Halbmesser. C ist eine Konstante, die den Widerstand der Rückschlußbahnen für die Wirbelströme im Zylinder berücksichtigt. Für den Fall, daß der Zylinder wenigstens doppelt so breit ist wie der Pol (2a), wird sie von verschiedenen Autoren mit ungefähr 5 bis 10 angegeben.

Den Ausdruck (24) können wir noch etwas umformen. Ist $d' = \varepsilon\, d$, so wird die erforderliche magnetische Spannung unter Vernachlässigung des Eisenwegs

$$V = \varepsilon\, d\, H$$

und wenn wir mit l die Länge des Magnets bezeichnen, wird

$$\frac{\varepsilon\, d\, H^2}{C} = H_c\, B = \beta.$$

β hat für ein bestimmtes H_c bei jedem Magnetmaterial einen Höchstwert, ist also eine Materialkonstante. Damit folgt

$$p = 3 \cdot \frac{\beta}{\varepsilon\,\varrho} \cdot r^2 \cdot V_{\text{magnet}} \cdot 10^{-9}\ [\text{cmgs}]\ \ (C = 5) \quad . \; . \; (25)$$

Das Moment ist also dem Magnetvolumen V, d. h. aber seinem Energieinhalt verhältig und wächst quadratisch mit dem Halbmesser. Das Volumen ist:

$$V_{\text{magnet}} = \frac{p \cdot \varepsilon\,\varrho}{3\,\beta\, r^2} \cdot 10^{9}\ [\text{cm}^3] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

In der Anordnung (Bild 13) erhalten wir ferner für die Drehmasse des Magnets

$$J_{\text{magnet}} = \frac{1}{12} \frac{\gamma}{g}\, l^2 \cdot V_{\text{magnet}} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \cdot r^2 \cdot V_{\text{magnet}}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \cdot p \cdot \frac{\varepsilon\,\varrho}{3\,\beta} \cdot 10^{9}\ [\text{cmgs}^2]$$

und da für $\alpha = 0{,}5$, $p = J_{\text{ges}}\, \omega_0$ ist, folgt:

$$J_{\text{magnet}} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \cdot J\, \omega_0 \cdot \frac{\varepsilon\,\varrho}{3\,\beta} \cdot 10^{9}\ [\text{cmgs}^2]$$

unabhängig vom Halbmesser. Da dieser Wert stets kleiner als das gesamte Trägheitsmoment der Bezugsmasse bleiben muß, ist die Anordnung in dieser Form nur ausführbar, wenn:

$$\frac{1}{3} \frac{\gamma}{g}\, \omega_0 \cdot \frac{\varepsilon\,\varrho}{3\,\beta} \cdot 10^{9} < 1$$

oder

$$\beta > 0{,}11\, \frac{\gamma}{g}\, \omega_0\, \varepsilon\, \varrho \cdot 10^{9} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

ist.

Mit $\omega_0 = 2\,\pi \cdot 6$ Hz, $\varrho = 0{,}0165$ und $\varepsilon = 1{,}3$ folgt dann:

$$\beta > 0{,}04 \cdot 10^{6}$$

(Der Einfluß der Streuung ist dabei noch nicht einbezogen!)

Dieser Wert von β ist nur mit den hochwertigsten Magnetstählen zu erreichen, und auch dann nur, wenn die Magnetisierung so erfolgt, daß betriebsmäßig der remanente Zustand vorhanden ist. Sind diese Stähle nicht verfügbar, oder will man noch stärkere Dämpfung erzielen, so kann man Stabmagnet und Eisenring miteinander vertauschen und erhält dann bei gleichem Durchmesser eine größere Magnetlänge. Außerdem wird der starre Zusammenhang zwischen Magnetvolumen und Trägheitsmoment der Bezugsmasse vermieden. Eine andere Möglichkeit, die ein noch kleineres Gesamtträgheitsmoment, jedoch größere Baulänge ergibt, ist, den Magnet u-förmig um die Achse zu legen, was allerdings baulich nicht schön ist. Auch hierbei wird ja die untergebrachte Magnetlänge vergrößert, ohne daß die Drehmasse im selben Maße zunimmt.

b) Das Röhrengerät.

Bild 14 zeigt die Gesamtschaltung des Röhrengeräts, Bild 15 seinen Aufbau. Neben der Anschlußmöglichkeit für einen Schleifenoszillographen besitzt das Gerät noch eine eingebaute Braunsche Röhre mit 75 mm Schirmdurchmesser, die unmittelbar am Gleichrichter angeschlossen ist und so gegen Erde symmetrische Meßspannungen erhält. Außerdem ist in das Gerät ein Scheitelspannungsmesser eingebaut, der im Anodenkreis der Oszillographenanpassungsröhre liegt. Er besteht aus einem Drehspulinstrument mit vorgeschaltetem Spitzengleichrichter in Spannungsverdopplungsschaltung und zeigt daher den Gesamtdrehwinkel. Durch diese Maßnahme wird das Gerät zu einer Einheit, die auch ohne getrennten Oszillographen voll betriebsfähig bleibt, wenngleich die eingebaute Braunsche Röhre mehr für Beobachtungszwecke gedacht ist.

Für die Zeitablenkung an der Braunschen Röhre ist ein aus einer Glimmlampe und der Verstärkerröhre *AF 7* bestehen-

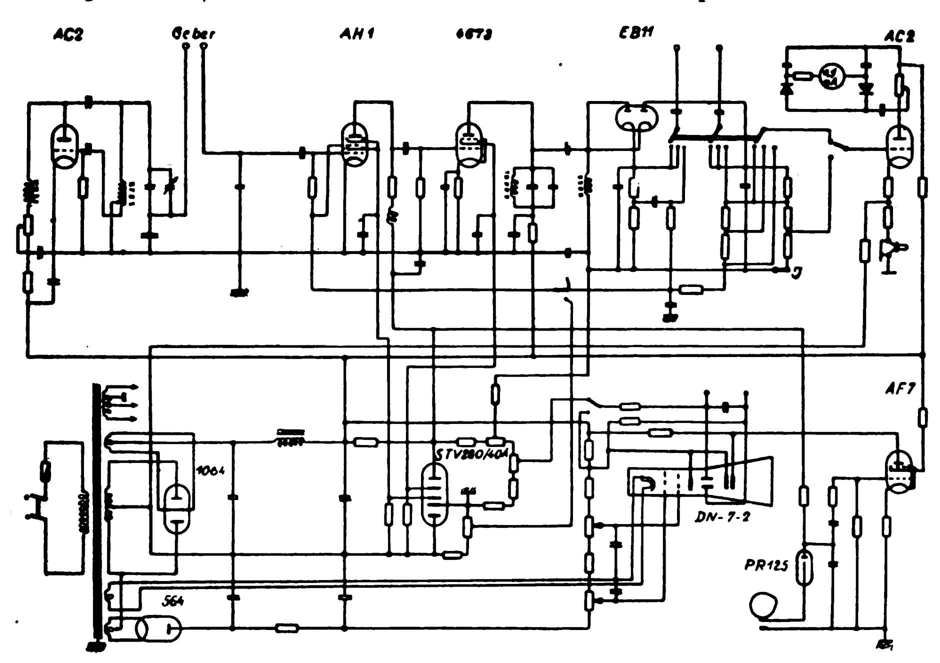


Bild 14. Gesamtschaltbild des Geräts.

des Kippgerät vorhanden, das über einen Wellenkontakt vom Motor aus fremd gesteuert wird, und zwar so, daß immer wenigstens zwei Motorumläufe gleichzeitig auf dem Schirm der Röhre zu sehen sind. Eine besondere Frequenzeinstellung ist nicht notwendig. Mit wachsender Motordrehzahl geht nur die Auslenkung in der Zeitachse zurück, während durch die Fremdsteuerung stets ein stillstehendes Bild erhalten bleibt.

Im Netzteil des Geräts ist ein Stabilisator vorgesehen, der die für die Meßgenauigkeit unmittelbar maßgebliche Vergleichsspannung bei Netzspannungsschwankungen von $\pm 10\%$ auf weniger als $\pm 1\%$ gleichhält. Für die Herstellung der Anodenspannung der Braunschen Röhre ist eine zweite Gleichrichterröhre vorgesehen, die ihre Spannung mit aus der Anodenwicklung des Transformators entnimmt, so daß sich eine besondere Wicklung erübrigt. Die Leistungsaufnahme des Geräts beträgt etwa 45 W, es kann daher ohne Schwierigkeiten auch über einen Wechselrichter an eine 12- oder 24-V-Batterie angeschlossen werden.

Die übrige Schaltungsausführung entspricht den grundsätzlichen Bedingungen, die wir in Abschnitt 4 aufgestellt hatten.

Der Aufbau wurde sehr gedrängt ausgeführt, da die normalen Gestellabmessungen der FKFS-Geräte verwendet werden sollten. Um hierbei unerwünschte Kopplungen zu vermeiden, wurde der Sender in ein eigenes Aluminiumgehäuse gesetzt, das in Bild 15 links hinter der Frontplatte zu sehen ist. Die Eingangsstufe des Empfängers liegt diagonal gegenüber, also so weit als möglich entfernt. Dazwischen ist der Netzteil und die Braunsche Röhre aufgebaut. Die Frontplatte zeigt von links nach rechts den Netzschalter, einen Ausschalter für die selbsttätige Regelung, den Stufenschalter für die Meßbereichwahl, darüber den Regler für die Bildschärfe an der Braunschen Röhre. Ferner einen Eichschalter, einen Schalter zum Kurzschließen der Oszillographenschleife und die Anschlußbuchsen für diese. Oben liegt in Gerätmitte der Bildschirm der Braunschen Röhre, rechts daneben der Spitzenwertzeiger.

Die Meßbereiche wurden auf $\pm 1{,}5^0$, $\pm 3^0$ und $\pm 6^0$ festgelegt, so daß bei einer Ruheverdrehung des Gebers von 9^0 im Höchstfall 67proz. moduliert wird.. Durch den Kippumschalter S kann auf dem Schleifenoszillographen ein Eichausschlag erzielt werden, der je nach Meßbereich 1, 2 oder 4^0 entspricht, so daß verschiedene Empfindlichkeit der Oszillographenschleife nicht berücksichtigt werden muß.

Auf der Rückseite des Geräts befinden sich zwei konzentrische Steckanschlüsse für die Zuleitungen zum Geber, Anschlüsse für den Wellenkontakt sowie Netzanschluß und Netzsicherung. Die Möglichkeit, im Gleichrichterkreis bei J in der Schaltung Bild 14 ein Instrument anschließen zu können, ist vorgesehen.

c) Grundeichung.

Zur erstmaligen Einstellung wird in den Gleichrichterkreis ein mA-Meter eingeschaltet. Dann wird der Geber an das Gerät angeschlossen und zunächst bei abgeschalteter Regelung so eingestellt, daß die Ausgangsspannung am Gleichrichter Null wird. Nun drehen wir die Masse mit Hilfe der Skala um den vorgesehenen Ruhewinkel (9^0) und stellen sie in dieser Lage fest. Dabei wird durch Ändern der Dämpfung im Empfangskreis oder durch Regeln der Senderspannung, die am Gleichrichter vorhandene Spannung etwas größer eingestellt als der selbsttätig geregelte Wert, damit für die Regelung eine Reserve vorhanden ist.

Jetzt muß das Instrument auf 3^0 Vollausschlag abgeglichen werden. Dazu bestimmen wir, am besten durch Kompensation, die Spannung U_1 am Gleichrichter bei eingeschalteter Regelung. Für 1^0 erhalten wir daraus die Spannungsänderung am Gleichrichter zu

$$U = \varkappa \cdot \frac{U_1}{\varphi_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Wir müssen also am Gitter unserer Anpassungsröhre eine Wechselspannung vom Scheitelwert $1{,}5 \cdot \frac{U_1}{\varphi_1} \cdot \varkappa$ anlegen und

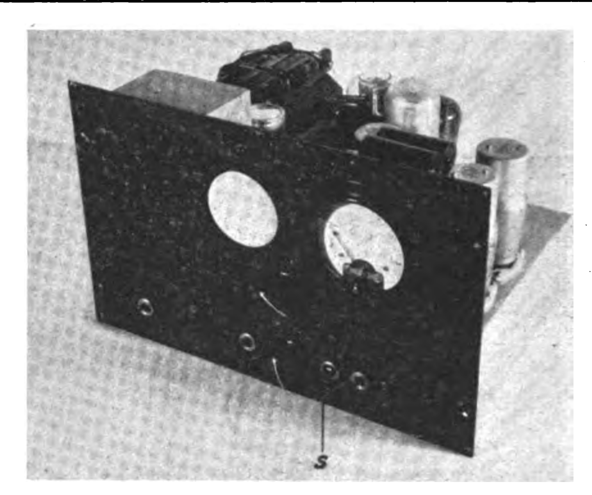


Bild 15. Ansicht des Geräts. S Eichschalter für den Oszillographen.

dann durch Einstellen des Abgriffs am Anodenwiderstand das Instrument auf Vollausschlag bringen. Das Verhältnis $\varkappa$ bestimmen wir rechnerisch aus den Widerständen im Gleichrichterkreis nach Gl. (3b). Es beträgt im ausgeführten Gerät infolge des Anschlusses der Braunschen Röhre und der Spannungsteilung durch den Abgriff an R_g 0,9.

Der Eichausschlag für den Schleifenoszillographen ist durch das Widerstandsverhältnis R_1/R_g bestimmt, wobei R_1 den für die Eichung an R abgegriffenen Teil bedeutet. Damit der Eichausschlag einem Winkel von 1^0 entspricht, muß in unserem Fall $R_1/R_g = {}^1/_9 \cdot \varkappa$ sein. Benutzen wir hier auf 1% abgeglichene Widerstände, so erübrigt sich ein nachträglicher Abgleich. Wenn wir auf diese Weise den Oszillographenausschlag φ_e für 1^0 Verdrehung bestimmt haben, so ist die Herstellung der oben geforderten Spannung mit dem Scheitelwert $1{,}5\ \varkappa \frac{U_1}{\varphi_1}$ entsprechend 3^0 Gesamtausschlag in bequemer Weise möglich. Wir haben nur die Gitterwechselspannung so einzuregeln, daß der Oszillographenausschlag $= 3\ \varphi_e$ wird.

Damit ist die Eichung beendet.

d) Meßergebnisse.

Kurve *1* in Bild 16 zeigt den Verlauf der Spannung am Gleichrichter in Abhängigkeit von der Verdrehung der Spulen *2* und *3* im Geber. Er ist bis zu einem Drehwinkel von $15{,}5^0$ praktisch linear, so daß auch im größten Meßbereich von $\pm 6^0$ die Linearität der Anzeige noch gesichert ist. Kurve *2* zeigt den Verlauf des Ausgangsstroms der Oszillographenanpassungsröhre in Abhängigkeit von ihrer Gitterspannung. Da die Röhre etwa 1:10 gegengekoppelt ist, ist auch hier gute Linearität vorhanden. Bei Vollaussteuerung erhält man an einer Meßschleife der Type *5* von Siemens einen Ausschlag von etwa 90 mm, für 1^0 im empfindlichsten Meßbereich also 30 mm.

Die durch die Regelung verursachte Frequenzabhängigkeit des Geräts (also ohne Berücksichtigung des Frequenzgangs im Geber) wurde mittels einer durch Exzenter mit Frequenzen zwischen 0 und 60 Hz nahezu sinusförmig beweglichen Spule aufgenommen, die in Bild 17 mit ihrem Exzenterantrieb gezeigt ist. Die geringfügige Amplitudenabhängigkeit des Exzenterausschlags von der Frequenz wurde durch Messen bei ausgeschalteter Regelung und auch mittels eines normalen Schwingungsmeßgeräts festgestellt und danach die Verbesserung der aufgenommenen Frequenzkurven vorgenommen. Kurve *1* in Bild 18 zeigt den Verlauf der Frequenzkurve für eine Regelzeitkonstante $T_1 = 2$ s und $n = \infty$. Kurve *2* zeigt den Verlauf für $n = 1{,}4$ und man sieht hieraus die beträchtliche Regelfähigkeit, die man durch Änderung von n für den Frequenzgang erhält. Für eine Gebereigenfrequenz von 6 Hz, eine Dämpfung $\alpha = 0{,}5$ und $n = 1{,}4$ ergibt sich dann rechnerisch ein Gesamtverlauf des Frequenzgangs entsprechend Kurve *5*, der bis in die Nähe der Eigenfrequenz des Gebers gut ausgeglichen ist.

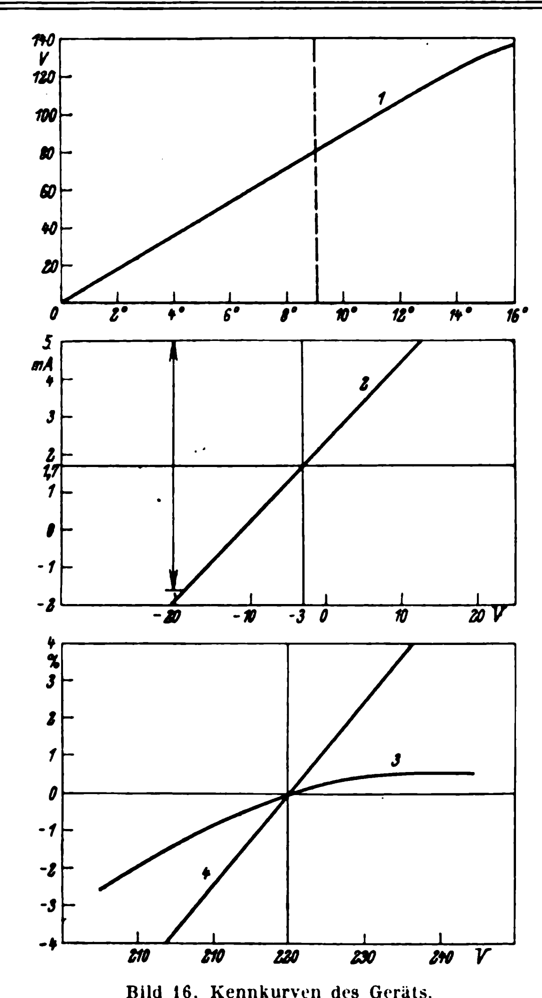


Bild 16. Kennkurven des Geräts.
1 Kennlinie des Gleichrichters, *2* Kennlinie der Anpassungsröhre zum Schleifen-Oszillographen, *3* und *4* Regelkennlinien bei Netzspannungsschwankungen.

Ein Phasenfehler ist natürlich unvermeidlich. Er setzt sich aus der Phasendrehung im Geber und im Gerät zusammen und ist in Kurve *7* dargestellt.

Der Frequenzgang des Scheitelspannungsmessers ist in Kurve *4* und *5* für die Zeitkonstanten von 0,3 s und 0,6 s gezeigt. Er entspricht gut dem theoretisch zu erwartenden. Zusammen mit Kurve *4* ergibt sich für die Anzeige des Scheitelspannungsmessers ein Verlauf nach Kurve *6*, der ebenfalls bis in die Nähe der Eigenfrequenz gut ausgeglichen ist und wenigstens bis zur doppelten Eigenfrequenz des Gebers die Anwendung von Korrekturwerten überflüssig macht. Die Regeleigenschaften des Geräts gehen aus den Kurven *3* und *4* in Bild 16 hervor. Kurve *3* zeigt die Änderung der Empfindlichkeit mit der Netzspannung, die in einem Bereich von 210 bis 420 V kleiner als $\pm 1\%$ bleibt. Infolge der direkten Kopplung schwankt dabei die Ruhelage der Oszillographenschleife um etwa 5% des Ausschlags bei Vollaussteuerung. Da Änderungen der Netzspannung

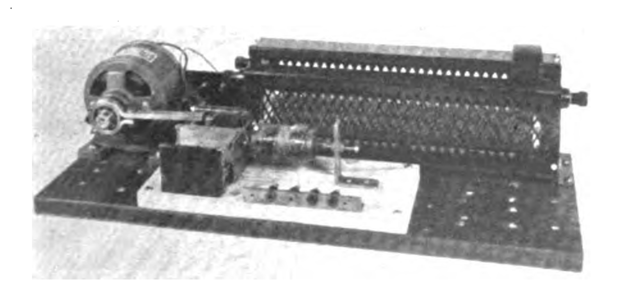


Bild 17. Gebervorrichtung zur Untersuchung des Frequenzverlaufs.

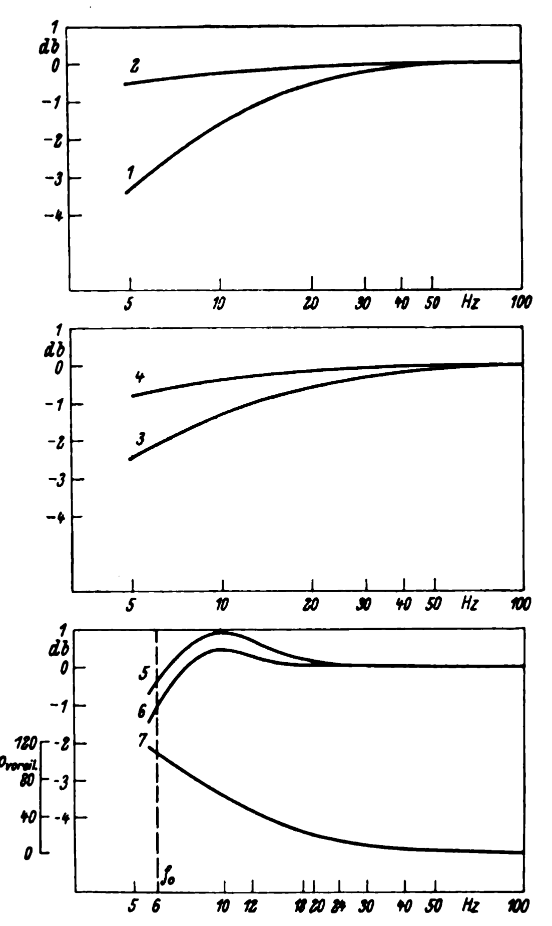


Bild 18. Frequenzkurven des Geräts (s. Text).

in dieser Größe während einer Messung praktisch nicht vorkommen dürften, ist diese Nullinienschwankung belanglos. Zusammen mit der Meßunsicherheit im Geber infolge des Reibungseinflusses kann man eine relative Genauigkeit des Geräts von etwa $\pm 2\%$ garantieren. Die absolute Genauigkeit der Eichung kann mit den vorhandenen Teilen günstigstenfalls auf $\pm 1\%$ gebracht werden, so daß zwischen zwei verschiedenen Geräten mit Abweichungen von $\pm 3\%$ zu rechnen ist. Diese Toleranz erscheint in Anbetracht der Art dieses »Instruments« als angemessen. Ihre weitere Verbesserung würde den Aufwand erheblich vergrößern.

Bei einer Neuausführung des Geräts wird es zweckmäßig sein, den Aufbau weniger gedrängt durchzuführen und gleichzeitig Maßnahmen vorzusehen, welche die Durchführung der Grundeichung ohne Inanspruchnahme fremder Hilfsmittel ermöglichen.

Zur praktischen Erprobung wurde das Gerät am Argus As-8-B-Flugmotor angebaut, der auch früher schon für Versuche zur Drehschwingungsmessung herangezogen wurde. Insbesondere war es hier leicht möglich, Vergleichsmessungen mit dem mechanischen DVL-Gerät durchzuführen. Bild 19 und 20 zeigen den Aufbau der Meßeinrichtung am Motor. In Bild 20 ist insbesondere der Geber zu erkennen, der über ein Zwischenrohr *R* an die Welle angeflanscht ist. In diesem Rohr ist die behelfsmäßige Wirbelstromdämpfung untergebracht, bei welcher ein mit der Bezugsmasse verbundener Aluminiumzylinder im Feld eines permanenten Magneten schwingt. Rechts neben dem Geber ist der mit halber Kurbelwellendrehzahl laufende Steuerkontakt für die Glimmlampenkippschaltung zu sehen. Er ist hier über ein Untersetzungsgetriebe 2:1 und eine biegsame Welle am Tachometeranschluß angebracht. Schwierigkeiten durch die biegsame Welle ergeben sich dabei nicht.

Bild 21 zeigt neben dem Eichausschlag Aufnahmen mit dem tragbaren Oszillographen, und zwar von der gut ausgeprägten Resonanzstelle 6. Ordnung, die bei $n = 1610$ liegt.

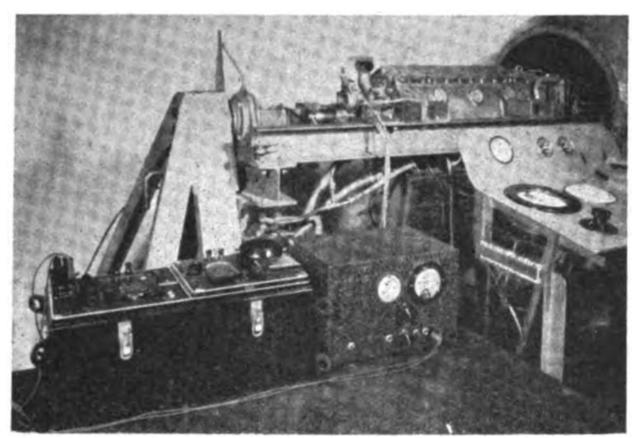


Bild 19. Aufbau der Meßeinrichtung am Argus As—8 B. Gesamtansicht.

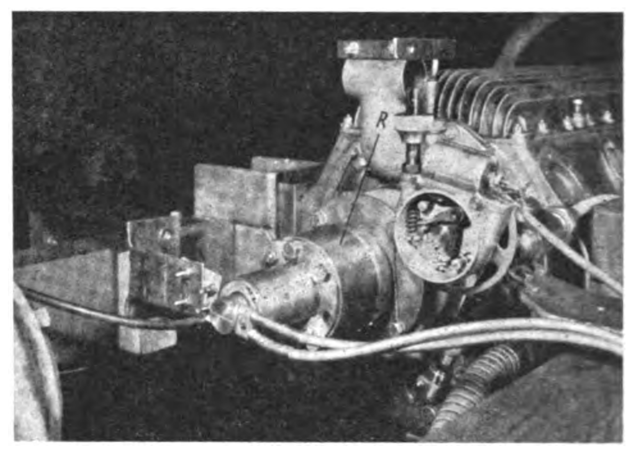


Bild 20. Geber und Steuerkontakt am Motor.

Das Ausschlagmaximum liegt bei ±1,2°, was sich sowohl unmittelbar am Instrument ablesen läßt, als auch aus der Auswertung des Oszillogramms hervorgeht. Der Schwingungsverlauf ist nahezu sinusförmig, jedoch sind die Ausschläge der einzelnen Schwingungen während einer Umdrehung nicht alle ganz gleich. Bild 23 zeigt eine Vergleichsmessung mit dem DVL-Torsiograph, die ebenfalls Maximalausschläge von ±1,2 (bis ±1,25°) erbrachte. Hier ist auch die dem Schwingungsbild überlagerte Eigenschwingung des Gebers gut zu sehen, denn der DVL-Torsiograph besitzt außer der Reibung durch das Schreibsystem keine Dämpfung. Da die Eigenfrequenz jedoch wesentlich tiefer liegt als die Meßfrequenzen, wird hierdurch die Diagrammauswertung wenig beeinflußt. Auch in Bild 21 ist die Eigenschwingung des Gebers noch zu erkennen.

Die Wirkung schwacher Dämpfung ist aus Bild 22 zu ersehen, bei welchem die Eigenschwingung das Kurvenbild jeweils bis an die Grenze des linearen Aussteuerungsbereichs trägt. Hier wirkt als Dämpfung nur die sehr geringe Eigenreibung des fast ohne Öl laufenden Kugellagers zwischen Welle und Bezugsmasse. (Außerdem war die Anregung durch den etwas unregelmäßig laufenden Motor besonders groß.) Trotz der starken Schwankung wird die Auswertung des Oszillogramms noch nicht unmöglich, dagegen ist eine einwandfreie Ablesung am Instrument unter diesen Umständen nicht auszuführen, da dieses sehr stark schwankt und fehlerhaft anzeigt. Ist zwecks Erzielung geringster Abmessungen der Einbau einer Wirbelstromdämpfung nicht angängig, so kann man jedoch den Geber ungedämpft verwenden, wenn der Frequenzbereich des Anzeigeinstruments bei etwa 4facher Gebereigenfrequenz abgeschnitten wird, da dann die Schwankungen mit der Eigenfrequenz nicht mehr oder nur noch stark unterdrückt zur Wirkung kommen. Ebenso erzielt man ein ruhiges Bild auf der Braunschen Röhre durch geeignete Bemessung der Kopplungsglieder. Natürlich ist jetzt der Geber hinsichtlich des Frequenzbereichs nicht ganz ausgenützt und eine solche Anordnung daher vom rein entwicklungstechnischen Standpunkt aus betrachtet weniger befriedigend.

Der Vorteil des elektrischen Geräts, die Drehschwingung, insbesondere Resonanzstellen während des Laufs zu zeigen, tritt bei unmittelbar aufeinanderfolgenden Messungen mit elektrischem und mechanischem Gerät besonders hervor. Die Zeit für Anbau und Durchführung der Messung ist in beiden Fällen etwa die gleiche, da ja eine Eichung des elektrischen Geräts vor der Meßreihe nicht mehr notwendig ist, dagegen gibt dieses durch Anzeige des Schwingungsausschlags und Erfassung der Resonanzdrehzahl noch während des Laufs auch gleich die Auswertung dazu.

6. Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, daß die Vorteile der elektrischen Verfahren zur Drehschwingungsmessung erst bei möglichst weitgehender Vereinfachung der Hilfsgeräte und ihrer Bedienung voll zur Geltung kommen. Die Bedingungen, unter denen diese Vereinfachung durch Schaffung eines unmittelbar anzeigenden Geräts möglich ist, wurden erörtert und ein Gerät beschrieben, das im allgemeinen keiner Nacheichung bedarf und festabgestufte Meßbereiche besitzt. Es kann leicht zu einer in sich geschlossenen Einheit ausgebaut werden, die zusätzliche Hilfsmittel überflüssig macht. Seine Anzeigegenauigkeit erscheint mit ±3% vom gemessenen Wert für die praktische Verwendung ausreichend.

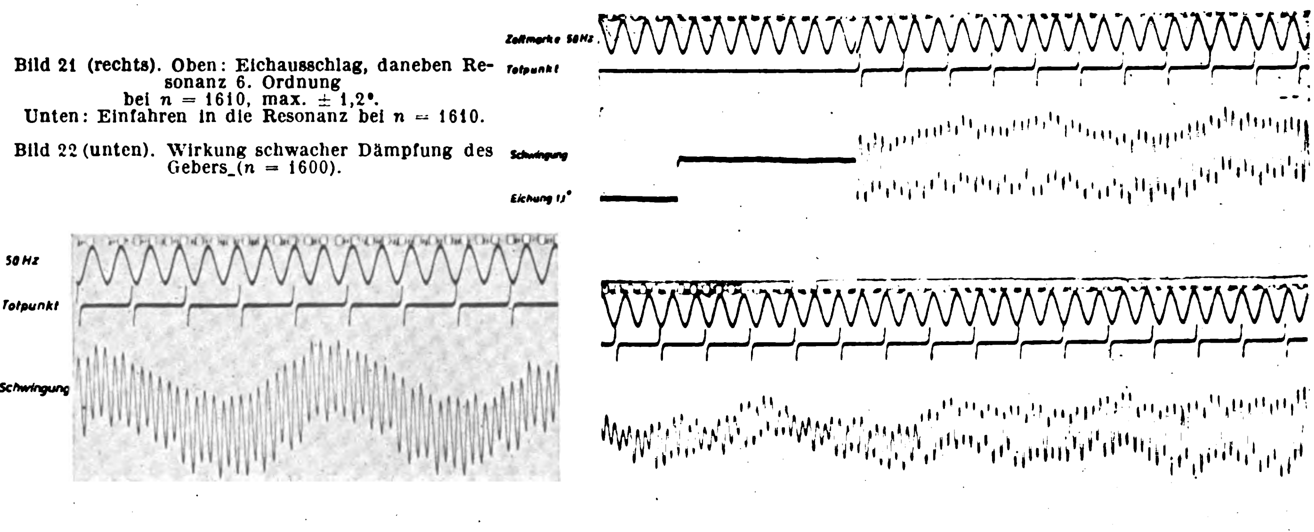


Bild 21 (rechts). Oben: Eichausschlag, daneben Resonanz 6. Ordnung bei $n = 1610$, max. ± 1,2°.
Unten: Einfahren in die Resonanz bei $n = 1610$.

Bild 22 (unten). Wirkung schwacher Dämpfung des Gebers ($n = 1600$).

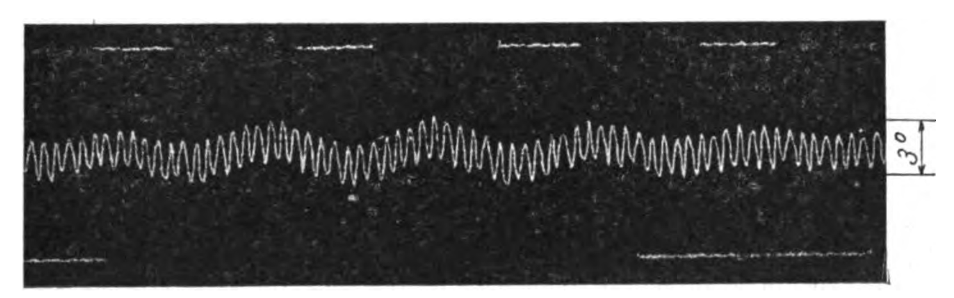


Bild 23. Vergleichsaufnahme mit dem DVL-Torsiograph bei $n = 1610$ max. ± 1,2°.

7. Schrifttum.

[1] C. S. Draper u. G. P. Bentley, Measurement of aircraft Vibration During Flight. J. A. S. (1936) Februar.

[2] O. Hoffmeister, Schwingungsmeßgeräte, ein Beitrag zu ihrer Theorie, Anordnung und Weiterentwicklung. Dissertation Stuttgart 1938.

[3] O. Hoffmeister, Elektrische Verfahren zur Messung von Schwingungen an Motor und Zelle. Jahrbuch 1937 d. Dtsch. Luftfahrtforschg. II, S. 283.

[4] R. Feldtkeller u. R. Tamm, Zur Theorie der Bandfilter in Rundfunkempfängern. E. N. T. Bd. 13 (1936), H. 5, S. 156/64.

[5] Hak, Eisenlose Drosselspulen, insbesondere die Gl. (36). Leipzig 1938.

[6] K. Wilhelm, Die Röhre im Rundfunkempfänger: Diodengleichrichtung. Die Telefunkenröhre (1936), H. 8, November.

[7] Barkhausen, Elektronenröhren, Bd. 4, Gleichrichter, Leipzig.

[8] W. Hofmann, Berechnung von magnetischen Dämpfungen. Arch. techn. Messen J 014—4.

[9] Zimmermann, Rechnung und Versuch bei der scheibenförmigen Wirbelstrombremse. Arch. f. Elektrotechnik. Bd. 10 (1921), S. 153/56.

Ferner:

Barkhausen, Elektronenröhren, Bd. 2, Verstärker, Leipzig 1933.

A. Leonhard, Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik. Berlin 1940.

M. Pflier, Elektrische Messung mechanischer Größen. Springer 1940.

Über die Dauerfestigkeit von hartverchromtem Dural.

Von A. Beerwald.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Über die Hartverchromung von Leichtmetall, die erst in letzter Zeit ausgearbeitet wurde, liegen nur sehr spärliche der Öffentlichkeit zugängliche Erfahrungen vor. Bei der Hartverchromung von Stahl ist es bekannt, daß in der Regel die Dauerfestigkeit des Werkstoffs durch die Hartverchromung herabgesetzt wird. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, den Einfluß der Hartverchromung bei Dauerbeanspruchung von Leichtmetall am Beispiel des Durals zu untersuchen und nach Möglichkeit die Ursachen für eine Herabsetzung der Dauerfestigkeit zu ermitteln.

Gliederung.

In dickeren Schichten elektrolytisch abgeschiedenes Chrom — in der Galvanotechnik als Hartchrom bezeichnet — nimmt unter den elektrolytischen Metallüberzügen eine Sonderstellung ein.

Gewöhnlich ist es der Zweck des Metallüberzuges, das Grundmetall vor Korrosion zu schützen oder der Oberfläche ein gefälliges Aussehen zu verleihen, wobei sich oft beide Ziele überdecken. Es genügt dazu meistens, einen dünnen Überzug in der Größenordnung von 0,01 mm herzustellen, dessen mechanischen Eigenschaften keine wesentliche Bedeutung zukommt. Im Gegensatz dazu wird eine Hartchromschicht gerade wegen ihrer mechanischen Eigenschaften: Härte, Verschleißfestigkeit und u. U. wegen ihrer guten Gleiteigenschaften auf das Grundmetall aufgetragen. Die Schichtdicke ist dementsprechend größer als bei den meisten galvanischen Überzügen. Sie kann nach Bedarf mehrere zehntel Millimeter betragen. In den meisten Fällen begnügt man sich mit 0,03 bis 0,1 mm Schichtdicke.

Abgesehen von der Sonderstellung der Hartchromschichten im Hinblick auf den Anwendungszweck fallen auch die elektrochemischen Abscheidungsvorgänge aus dem üblichen Rahmen der galvanotechnischen Prozesse heraus.

Das Metall wird aus ziemlich konzentrierter Chromsäurelösung bei erhöhter Temperatur und verhältnismäßig sehr hoher Stromdichte von etwa 40 Amp/dm² kathodisch abgeschieden. Da das Chrom zwischen der sechswertigen Form, wie es in der Chromsäure vorliegt und der nullwertigen des Metalls eine ganze Reihe dazwischenliegender Wertigkeitsstufen aufweisen kann, ist es verständlich, daß an der Kathode diese Stufen gebildet werden können. Diese niedrigwertigen Verbindungen überziehen die Kathode mit einem Film, der die endgültige Reduktion zum Metall verhindert. Ein Schwefelsäurezusatz von etwa 1% bewirkt eine Legierung des Films und ermöglicht damit erst die Metallabscheidung. Eine zweite Schwierigkeit ist das äußerst negative Abscheidungspotential des Chroms. Daher wird neben Chrom auch gleichzeitig Wasserstoff kathodisch gebildet. Nur etwa 15% des Stromes entfällt auf das Chrom. Der größte Teil wird auf die Abscheidung des Wasserstoffs verwandt. Der Wasserstoff wird z. T. in der Chromschicht gebunden und, sofern man Eisen oder Stahl verchromt, auch im Grundmetall und bewirkt dann die bekannte Wasserstoffsprödigkeit. Durch eine Wärmebehandlung zwischen 150° und 200° kann er sowohl aus dem Eisen als auch aus der Chromschicht herausgetrieben werden, wobei das Eisen seine ursprünglichen mechanischen Eigenschaften wiedererlangt. Auf die mechanischen Eigenschaften der Chromschicht selbst hat das Austreiben des Wasserstoffs keinen Einfluß. Weder die Härte noch die Verschleißfestigkeit des Chroms wird dadurch geändert.

Die Chromschichten sind immer — auch ohne jegliche Wärmebehandlung — von zahlreichen Haarrissen durchzogen, Bild 1. Durch eine Wärmebehandlung werden die Haarrisse etwas geweitet, Bild 2. Nach Ansicht des Verfassers liegt kein zwingender Grund vor, das Vorhandensein der Haarrisse auf die Mitabscheidung des Wasserstoffs zurückzuführen. Auch die Verbreiterung nach dem Anlassen kann durch die Unterschiede im Ausdehnungskoeffizienten zwischen Grundmetall und Chrom begründet werden. Jedenfalls sind wir heute noch nicht in der Lage, eine eindeutige Ursache für das Vorhandensein der Haarrisse anzugeben.

An hartverchromten Stählen sind von H. Wiegand[1]) eingehende Dauerfestigkeitsuntersuchungen mit Rundbiegestäben durchgeführt worden. Mit Ausnahme von austenitischem Stahl (Fliegwerkstoff 1440.3) zeigen alle anderen Stähle eine Verminderung der Dauerfestigkeit nach dem Verchromen und eine zusätzliche Verminderung nach der Wärmebehandlung. Wiegand äußert die naheliegende Vermutung, daß die Abnahme der Dauerfestigkeit infolge der Hartverchromung auf die Kerbwirkung der Risse in der Chromschicht zurückzuführen ist.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung war, festzustellen, ob die Hartverchromung bei Duralumin zu ähnlichen Nachteilen führt.

Die Bedingungen für die Hartverchromung von Leichtmetallen — vor allem von kupferhaltigen Legierungen — sind im Institut für Werkstofforschung der DVL vom Verfasser eingehend untersucht worden[2]). Zum besseren Verständnis des folgenden sollen die Ergebnisse hier kurz zusammengefaßt werden:

Es ist seit langem bekannt, daß vor der eigentlichen Verchromung das Leichtmetall einer Beizbehandlung unterworfen werden muß. Die Versuche zeigten, daß nicht nur bei verschiedenen Legierungen die gleiche Beizbehandlung verschiedene Ergebnisse zeigen kann, sondern sogar bei der gleichen Legierung von verschiedenem Gefügezustand sich starke Unterschiede im Hinblick auf die Haftfestigkeit und Glätte der Chromschicht zeigen. Als wesentlich für einen guten Überzug wurde eine möglichst dichte und gleichmäßige Aufrauhung der Oberfläche des Grundmetalls durch die Beize erkannt. Für kupferhaltige Legierungen wurde eine Arbeitsweise ausgearbeitet, die eine Unabhängigkeit vom Gefügezustand mit sich brachte. Die Arbeitsgänge waren folgende: 30 s beizen in Natronlauge von 60° C, darauf ohne den schwarzen Kupferüberzug abzulösen 40 s beizen in konzentrierter Nickelchlorürlösung, die einen Zusatz von Bor- und Flußsäure enthält. Ablösen des gebildeten Nickelüberzuges in Salpetersäure und darauf verchromen in einem üblichen schwefelsäurehaltigen Verchromungsbad.

[1]) H. Wiegand, VDI-Ztschr., Bd. 83 (1939), S. 655.
[2]) A. Beerwald, Aluminium Bd. 23 (1941), S. 149.



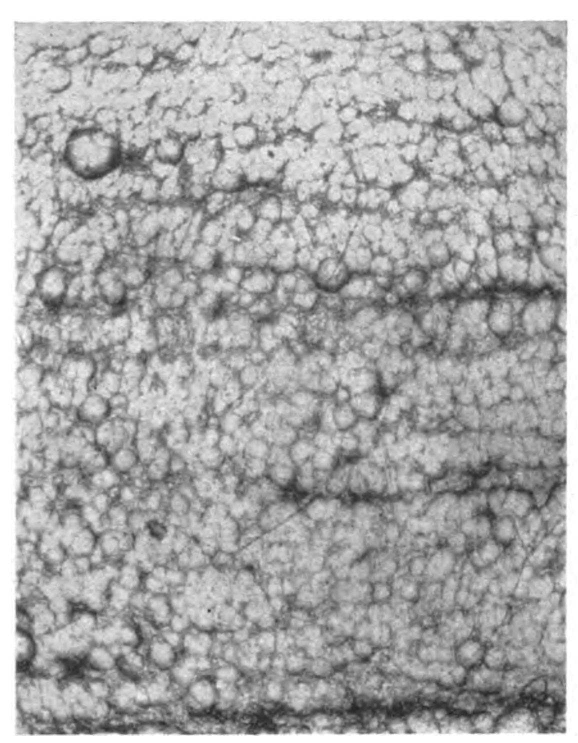


Bild 1. Chromschicht mit Haarrissen ohne Wärmebehandlung (Vergr. 200fach).

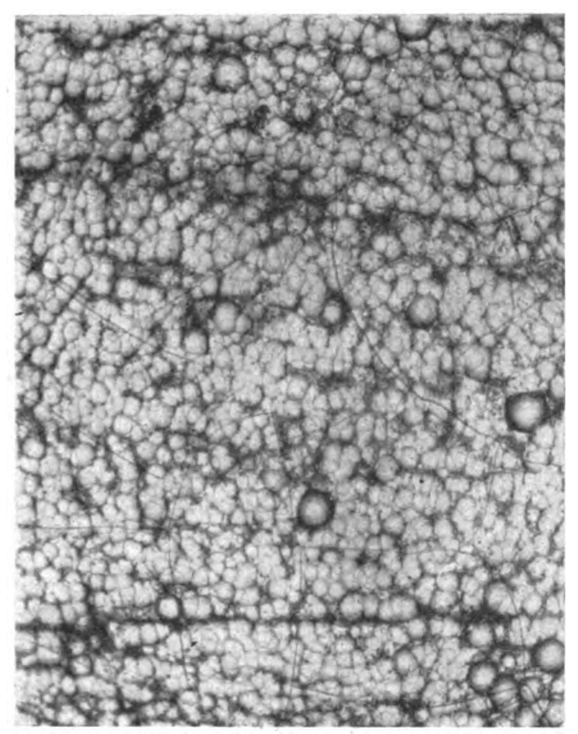


Bild 2. Chromschicht mit Haarrissen nach 2stündigem Anlassen bei 180° (Vergr. 200fach).

I. Versuche.

Als Werkstoff dienten Dural-Preßstangen (Fliegwerkstoff 3115.4). Die Versuche wurden in einer Rundbiegemaschine an Stäben von 6 mm Ausgangsdurchmesser bei einer Grenzlastwechselzahl von 20 Mill. durchführt. Bei allen Versuchen wurde die Last auf den Ausgangsdurchmesser bezogen. Die Dauerfestigkeit wurde aus 5 bis 10 Stäben ermittelt.

Beim Studium der Dauerfestigkeit von verchromtem Dural müssen von vornherein gewisse Unterschiede gegenüber verchromtem Stahl ins Auge gefaßt werden. Es mußte beachtet werden, daß eine zweistündige Anlaßbehandlung bei etwa 200° C bei Stahl keinerlei Veränderung des Grundmaterials mit sich bringt, während bei Dural eine Warmausscheidung stattfindet, die eine Änderung der Dauerfestigkeit mit sich führen könnte.

Außerdem sind die Bindungsverhältnisse zwischen Chromschicht und Grundmetall bei Stahl und Leichtmetall unterschiedlich. In der schon genannten Arbeit[2]) hat der Verfasser darauf hingewiesen, daß die Aufrauhung des Grundmetalls der ausschlaggebende Punkt der ganzen Leichtmetallverchromung ist und somit die mechanische Verankerung der Chromschicht im Grundmetall für die Haftfestigkeit von entschieden größerer Bedeutung ist als die Auswirkung atomarer Bindungskräfte zwischen Grundmetall und Plattierschicht. Bei Stahl spielt die Aufrauhung des Grundmetalls eine bedeutend kleinere Rolle; sie wird praktisch zwar auch vorgenommen, etwa durch kurze anodische Polarisation im Verchromungsbad, ist jedoch bedeutend schwächer als die für Leichtmetall erforderliche Aufrauhung. Neben der mechanischen Verankerung spielen die atomaren Bindungskräfte bei der Verchromung von Stahl somit eine bedeutende Rolle für die Haftfestigkeit. Es läßt sich z. B. auf glatter Stahloberfläche Chrom in dünnen Schichten mit einer recht brauchbaren Haftfestigkeit abscheiden, auf glattem Dural erhält man dagegen feine Chromschuppen, die man ohne weiteres mit dem Finger von der Oberfläche abreiben kann.

Es erschien möglich, daß die stark aufgerauhte Oberfläche des Leichtmetalls, in der die Chromschicht mechanisch verankert ist, ihrerseits einen Einfluß auf die Dauerfestigkeit des verchromten Materials ausüben kann. Daher wurden nicht nur an fertig verchromten Stäben, sondern auch an gebeizten und noch unverchromten Dauerprüfungen durchgeführt.

Die Versuchsergebnisse zeigt Tafel 1. Beim größten Teil der Versuche wurden die Stäbe nach der in der Einleitung angegebenen Arbeitsweise verchromt. In zwei Versuchen wurde die Beizbehandlung nur in Natronlauge (Versuch Nr. 15) bzw. in alkalischer Natriumzinkatlösung (Versuch Nr. 17) vorgenommen. Da die Chromschichten bei dieser Beizbehandlung pockig wurden und auch schlecht hafteten, wurde nur 0,01 mm Chrom aufgetragen.

Die Ergebnisse bei der Vorbehandlungsweise mit Natronlauge und Nickelchlorürlösung sind in Bild 3 graphisch dargestellt, wobei die Reihenfolge der Arbeitsgänge durch Pfeile zum Ausdruch gebracht wird.

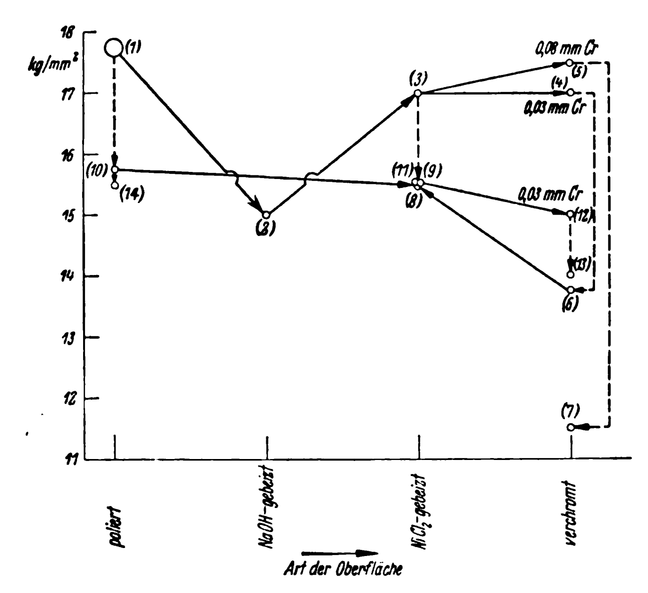


Bild 3. Schematische Darstellung der Dauerfestigkeit verschieden behandelter Stäbe aus Flw. 3115.4. Die Pfeile deuten an, auf welche Weise ein bestimmter Zustand erreicht wurde. Gestrichelte Pfeile bedeuten: 2 h bei 180° angelassen. Die eingeklammerten Zahlen sind Nr. des Versuchs in Zahlentafel 1.

Zahlentafel 1. Rundbiegeversuche mit Fliegwerkstoff 3115.4.

Versuch Nr.	Art der Oberfläche	Schichtstärke der Cr. in mm	Wärmebehandlung	Rundbiege-festigkeit in kg/mm²	Abnahme der Rundbiege-festigkeit in %
1	poliert	—	—	17,75	—
2	NaOH-gebeizt	—	—	15,0	15,5
3	NaOH und $NiCl_2$-gebeizt	—	—	17,0	4,3
4	verchromt	0,03	—	17,0	4,3
5	verchromt	0,08	—	17,5	1,5
6	verchromt	0,03	2 h bei 180°	13,7	22,5
7	verchromt	0,08	2 h bei 180°	11,5	35,0
8	Cr-Schicht in H_2SO_4 abgelöst	(0,03)	2 h bei 180°	15,5	13,0
9	NaOH und $NiCl_2$-gebeizt	—	2 h bei 180°	15,5	13,0
10	poliert	—	2 h bei 180°	15,7	11,0
11	Nr. 10 in NaOH und $NiCl_2$-gebeizt	—	—	15,5	13,0
12	Nr. 10 verchromt	0,03	—	15,0	15,5
13	Nr. 10 verchromt	0,03	2 h bei 180°	14,0	21,0
14	Nr. 10 poliert	—	2 h bei 180°	15,5	13,0
15	NaOH-gebeizt und verchromt	0,01	—	15,0	15,5
16	Zinkatgebeitz	—	—	16,2	8,5
17	Zinkatgebeizt und verchromt	0,01	—	15,7	11,5

Es ist auffallend, daß ein Beizen der Oberfläche in Natronlauge eine merkliche Abnahme der Dauerfestigkeit von 15,5% mit sich bringt (Versuch Nr. 2). Beim nachfolgenden Beizen in Nickelchlorürlösung steigt die Dauerfestigkeit bis fast auf den Ausgangswert wieder an (Versuch Nr. 3). Dieses Verhalten erklärt sich vermutlich dadurch, daß die Aufrauhung der Oberfläche nach dem Beizen in Nickelchlorür sehr dicht und gleichmäßig ist, so daß sich keine Spannungsspitzen am Grunde der einzelnen dicht nebeneinander liegenden Anfressungen ausbilden können. Die Aufrauhung ist somit gleichbedeutend mit einer geringen Verminderung des Querschnitts. Beizt man nur in Natronlauge, so ist der Angriff nicht so gleichmäßig und die an den verhältnismäßig vereinzelt auftretenden Angriffstellen entstehenden Spannungsspitzen bilden die Ausgangspunkte für den Dauerbruch.

Den ungünstigen Einfluß des Beizens in Natronlauge auf die Dauerfestigkeit haben schon H. Sutton und T. I. Peake[8]) beschrieben und dabei die gleiche Begründung wie der Verfasser gegeben. Die dort ebenfalls an Rundstäben aus Dural durchgeführten Versuche zeigten eine Abnahme der Dauerfestigkeit um 31% bei einer Beizdauer von 2½min. Nach den genannten Verfassern wirkt sich eine Beizbehandlung in flußsäurehaltigen Beizen bedeutend weniger nachteilig aus.

Verchromt man die in Natronlauge und anschließend in Nickelchlorürlösung gebeizten Stäbe, so ändert sich die Dauerfestigkeit trotz vorhandener Haarrisse nicht weiter (Versuch Nr. 4). Stärkere Schichten von 0,08 mm führen sogar zu einer geringen Verbesserung (Versuch Nr. 5). Scheidet man das Chrom nicht auf Nickelchlorür gebeizter Oberfläche sondern auf Natronlauge gebeizter oder Zinkat gebeizter ab, so führt die Verchromung ebenfalls zu keiner wesentlichen Änderung der Dauerfestigkeit im Vergleich zur gebeizten Oberfläche. (Vergl. hierzu Versuch Nr. 2 mit Nr. 15, bzw. Versuch Nr. 16 mit Nr. 17.)

Läßt man die verchromten Proben jedoch zwei Stunden bei 180° an, so sinkt die Dauerfestigkeit bedeutend ab (Versuch Nr. 6 und 7), und zwar ist der Abfall bei stärkerer Verchromung größer. Die Abhängigkeit von der Schichtstärke läßt annehmen, daß die Ursache für den Abfall der Dauerfestigkeit jedenfalls im Vorhandensein der Chromschicht mitbegründet ist. Dafür spricht auch die Tatsache, daß nach dem Ablösen der Chromschicht die Dauerfestigkeit wieder ansteigt (Versuch Nr. 8). Allerdings reicht der Anstieg nicht bis zum Wert des nickelchlorürgebeizten Materials an, was wiederum annehmen läßt, daß nicht nur die Chromschicht allein bei der Anlaßbehandlung den Abfall verursacht. Wie die Versuche Nr. 9 und 10 zeigen, bewirkt die Wärmebehandlung auch eine Verminderung der Dauerfestigkeit des Grundmaterials an sich.

Geht man nunmehr vom angelassenen Werkstoff aus, so führt die Beizbehandlung mit Nickelchlorür aus den gleichen Gründen wie sie beim Ausgangswerkstoff geschildert wurden zu keiner nennenswerten Herabsetzung der Dauerfestigkeit (Versuch Nr. 11). Verchromt man die gebeizte Fläche, so sinkt bei vorher wärmebehandeltem Material die Dauerfestigkeit um ein geringes ab (Versuch Nr. 12). Läßt man diese Stäbe an, so sinkt die Dauerfestigkeit weiter ab (Versuch Nr. 13). Dieser Abfall hat jedoch gegenüber den Versuchen Nr. 6 und 7 seine ausschließliche Ursache im Vorhandensein der Chromschicht, denn ein nochmaliges zweistündiges Anlassen des Ausgangsmaterials auf 180° führt zu keiner weiteren Veränderung der Dauerfestigkeit mehr (Versuch Nr. 14).

II. Folgerungen.

Man sieht, daß bei der Verchromung von Dural ein Abfall der ursprünglichen Dauerfestigkeit im Zusammenhang mit der Verchromung mehrere Ursachen haben kann.

Erstens wird die Dauerfestigkeit des Werkstoffes durch die vorhergehende Beizbehandlung beeinflußt, und zwar fällt sie gegenüber dem polierten Stab am wenigsten ab, wenn die Aufrauhung so dicht und gleichmäßig ist, daß sich keine Spannungspitzen am Grund der einzelnen Vertiefungen bilden können. Die Forderungen bezüglich der Aufrauhung sind somit im Hinblick auf die Dauerfestigkeit als auch auf die Haftfestigkeit und Pockenfreiheit der Chromschichten die gleiche.

Die Chromschicht selbst bringt gar keinen bzw. nur einen geringen Abfall der Dauerfestigkeit bei unseren Versuchen, d. h. also, bei kalt ausgehärtetem und auch warm ausgehärtetem Dural, sofern die verchromten Teile keiner Wärmebehandlung unterworfen werden. Das ist insofern eigenartig, da die Chromschichten von zahlreichen Haarrissen durchzogen sind und man von ihnen eine Kerbwirkung erwarten sollte, was auch bei Stahl in der Regel zutrifft. Erst nach einer Anlaßbehandlung, die außerdem auf die Dauerfestigkeit des Grundwerkstoffes nachteilig wirken kann, tritt ein offensichtlich schädlicher Einfluß der Chromschicht selbst ein.

Eine sichere Begründung für die letztgenannte Erscheinung kann auf Grund der bisherigen Versuche nicht mit Gewißheit gegeben werden. Eine geringe Verbreiterung der Haarrisse, wie sie nach der Wärmebehandlung auftritt, kann nach Ansicht des Verfassers nicht als alleiniger Grund für einen so krassen Abfall der Dauerfestigkeit angesehen werden, wie er sich etwa beim Vergleich der Versuche Nr. 5 und 7 zeigt.

Will man die Annahme, wie sie Wiegand macht, daß die Haarrisse die Ursache für den schädlichen Einfluß der Chrom-

[8]) H. Sutton und T. I. Peake, J. Inst. Metals Bd. 3 (1936), S. 243.



schicht sind, beibehalten, wobei man bedenken muß, daß diese Annahme zwar recht naheliegend, jedoch nicht direkt beweisbar ist, denn rißfreie Schichten kann man praktisch nicht erhalten, so ist das einzige, was man auf Grund der Versuche annehmen darf, folgendes: durch die Wärmebehandlung treten bisher noch nicht geklärte Änderungen entweder in der Chromschicht selbst oder in den Bindungsverhältnissen zwischen der Chromschicht und dem Grundmetall ein, die zur Folge haben, daß die Risse in der Chromschicht dann erst zur Auswirkung auf die Dauerfestigkeit gelangen.

Es erscheint dem Verfasser naheliegender, die Ursache dafür in der Bindung zwischen Chromschicht und Grundmetall zu vermuten. Bei Stahl kann man, wie schon gezeigt, aller Wahrscheinlichkeit nach eine stärkere atomare Bindung der Chromschicht vermuten als bei Leichtmetall. Demzufolge führen bei Stahl die Haarrisse auch ohne Anlaßbehandlung zu einem merklichen Abfall der Dauerfestigkeit. Bei Dural können wir kaum von einer atomaren Bindung der Chromschicht mit dem Leichtmetall sprechen. Der Einfluß der Haarrisse auf das Grundmetall ist auch praktisch unbedeutend. Durch ein Innigerwerden der Bindung etwa auf mechanischem Wege könnte man versuchen, die Tatsache erklären zu wollen, daß die Haarrisse erst nach dem Anlassen zur Verminderung der Dauerfestigkeit führen. Außerdem ist zu bedenken, daß Dural bei der Warmaushärtung eine bleibende Dehnung erfährt in der Größenordnung von 0,1%. Das kann zu zusätzlichen Spannungen zwischen Chromschicht und Grundmetall führen und außerdem zu einer Verstärkung der Bindung durch Verklemmung der Chromschicht in der aufgerauhten Leichtmetalloberfläche beitragen.

Die praktische Bedeutung des Abfalls der Dauerfestigkeit durch eine Wärmebehandlung ist bei hartverchromtem Leichtmetall viel geringer als bei Stahl und Eisen. Während man bei letzteren im Hinblick auf die Wasserstoffsprödigkeit des Grundmetalls eine nachfolgende Wärmebehandlung vornehmen muß, ist eine solche bei Leichtmetall nicht nötig. Der Wasserstoff kann praktisch in das Grundmetall nicht eindringen und seine mechanischen Eigenschaften verändern. Der in der Chromschicht eingeschlossene Wasserstoff hat auf diese ebenfalls keinerlei nachteiligen Einfluß. Die Gefahr, daß die Risse der Chromschicht eine nachteilige Wirkung auf die Dauerfestigkeit des Werkstoffes ausüben, besteht jedoch dann, wenn die verchromten Teile sich bei ihrer Anwendung, sei es durch Reibung oder aus anderen Gründen, erwärmen.

Für die Unterstützung bei der Durchführung der Versuche dankt der Verfasser Frl. Ing. L. Dörnickel und Herrn Ing. J. Theiner.

III. Zusammenfassung.

Bei verchromtem und keiner weiteren Wärmebehandlung ausgesetzten Dural ist die Dauerfestigkeit ausschließlich bedingt durch die Aufrauhung der Oberfläche vor der Verchromung. Um einen möglichst geringen Abfall der Dauerfestigkeit zu bekommen, muß die Aufrauhung dicht und gleichmäßig sein. Der Einfluß der Chromschicht selbst ist gegenüber dem der Aufrauhung des Grundwerkstoffes unbedeutend.

Wird verchromtes Dural nach der Verchromung einer Wärmebehandlung ausgesetzt, so treten zwei weitere Gründe für den Abfall der Dauerfestigkeit in Erscheinung: 1. Durch die Wärmebehandlung kann die Dauerfestigkeit des Grundmaterials an sich vermindert werden, 2. es tritt ein dauerfestigkeitvermindernder Einfluß der Chromschicht selbst in Erscheinung. Er wird um so größer, je stärker die Chromschicht ist.

Es wird versucht, die auftretenden Erscheinungen durch die Haarrisse in der Chromschicht zu begründen.

Tafel einiger Knickbiegefälle.

Zuschrift.

1. In der Arbeit in Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 86 bis 94 sowie in dem Aufsatz »Knick-Biege-Versuche« (Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 306 bis 313) ist der Begriff »passive Arbeit« verwendet. Wie mir nachträglich bekannt geworden ist, wurde dieser Begriff erstmalig durch Herrn Professor O. Flachsbart in seinen Vorlesungen an der Technischen Hochschule Hannover benutzt.
2. Das Ergebnis der Aufgabe Nr. 20 ist sehr einfach durch Zusammensetzen von Aufgabe 1 und 2 gewonnen, was man auch aus der Formulierung ersehen kann. Die Beziehungen haben dadurch den Charakter einer Näherung bekommen. Man kann die Näherung noch verbessern, indem man bei der Drehung der Kräfte um den Einspannungswinkel an der Stelle 1 die Komponenten der Längskraft in Richtung der Querkräfte berücksichtigt. Dadurch erhalten alle Glieder $P \cdot y_1'$ den Faktor $\operatorname{tg} \varphi/\varphi$. Der Ausdruck für das Moment an der Stelle 1 lautet unter Beseitigung einiger Druckfehler

$$M_{\textcircled{1}} = \frac{M_0/\cos \varphi + Q \cdot k \cdot \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi/\eta \cdot (1 - \eta/\operatorname{tg} \eta)}.$$

J. Cassens.

Luftfahrt-Forschung

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

Lfg. 11 enthält Arbeiten von: G. Cordes S. 373—377, A. Weigand S. 378—382, J. Meyer S. 383—386, E. Eckert S. 387—395

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 11 SEITE 373 BIS 396 | MÜNCHEN, 20. 11. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Das Werk erscheint in Monatslieferungen. Es kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Halbjahresbezugspreis RM. 9.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzelhefte: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzüglich Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangener Hefte erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Hefte werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Zeitschrift direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Jahrganges Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 20. November 1941 Lfg. 11

Die Rolle des Luftkraftmomentes in der Verstellschraubentechnik.

Von G. Cordes.

Bericht der Junkers Flugzeug- und -Motorenwerke, A.-G., Dessau, Otto-Mader-Werk.

Das Moment der auf einen Verstellschraubenflügel wirkenden Luftkräfte um die Blattdrehachse ist für die einwandfreie Funktion der Schraube bei automatischer Drehzahlregelung im Hinblick auf die zur Verfügung stehende Verstelleistung von großer Wichtigkeit. Es wird das Luftkraftmoment aus der Auftriebsverteilung längs des Blattes berechnet und die Extrapolationsmöglichkeit entsprechend dem Polarenverfahren für Luftschrauben untersucht. Weiter wird die Auswirkung des Momentes auf das Verhalten der Schraube in den verschiedenen Flugzuständen und seine Beeinflussung durch unterschiedliche Maßnahmen behandelt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Entwicklung der Luftschraube vom festen Propeller zur Verstellschraube hat das Augenmerk des Konstrukteurs in hohem Maße auf die durch äußere Kräfte am Luftschraubenblatt hervorgerufenen Momente um die Verstellachse gelenkt; denn diese »äußeren«, blattseitig bedingten, Momente unterstützen oder hemmen je nach ihrer Natur die Verstellung der Luftschraubenflügel, wie sie z. B. bei Regelung der Schraube auf konstante Drehzahl durch Änderung des Flugzustandes erforderlich wird, und müssen daher bei Festlegung der Größe der Verstellenergiequelle, welche die »inneren«, antriebsseitig bedingten, Momente liefern soll, bekannt sein. Die äußeren Momente haben dreierlei grundsätzlich verschiedene Ursachen:

1. Die Zentrifugalkraft. Sie versucht den Luftschraubenflügel stets in die Schraubenkreisebene, d. h. im normalen Betriebszustand auf kleine Steigung, zu drehen. Prinzipiell läßt sich dieses Zentrifugalmoment durch Anbringung eines Gegengewichtes am Blattfuß unter 90° zur Druckseite eines mittleren Blattprofils voll ausgleichen, so daß es für den Verstellmechanismus der Nabe nicht mehr in Erscheinung tritt.
2. Die Reibungskraft. Sie wirkt in der Flügellagerung und ruft am Blatt ein Moment hervor, welches stets der Drehbewegung des Luftschraubenblattes um seine Achse entgegengerichtet ist. Dieses Moment muß also auf jeden Fall von der Verstellenergie der Schraube überwunden werden.
3. Die Luftkraft. Sie bedingt ein Moment, das je nach dem Betriebszustand des Propellers, d. h. je nach dem c_a-Verlauf längs des Blattes, auf große oder kleine Steigung wirken und so die Verstellung hemmen oder fördern kann.

Während nun die rein mechanisch bedingten Momente 1. und 2. verhältnismäßig einfach zu bestimmen und in ihrer Wirkung abzuschätzen sind, ist das aerodynamisch bedingte Moment 3. wegen seiner starken Abhängigkeit vom Flugzustand nicht ganz so schnell zu übersehen. Da aber dieser Anteil am resultierenden äußeren Moment mit den stark zunehmenden Blattbreiten, wie sie die Entwicklung nach größeren Motorleistungen und Startgewichten der Flugzeuge mit sich bringt, immer wichtiger wird, erscheint es angebracht, ihn einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Diese soll sich auf Bestimmung, Größe und Auswirkung der Luftkraftmomente erstrecken.

II. Bestimmung der Luftkraftmomente.

Experimentelle Untersuchungen über die Größe der durch Luftkräfte um die Blattverstellachse hervorgerufenen Momente sind bisher nicht bekannt geworden. Da ihre Durchführung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, wäre eine Versuchsreihe nach dieser Richtung sehr erwünscht, um die bisher nur theoretisch bestimmbaren Werte einer Kontrolle unterziehen zu können.

a) Integrationsmethode.

Die Berechnung des Luftkraftmomentes erfolgt zunächst in naheliegender Weise, indem man von der Auftriebsverteilung längs des Luftschraubenblattes für den gegebenen Betriebszustand ausgeht. Die Bestimmung dieser c_a-Verteilung ist ohne weiteres möglich, wenn die Tragflügelpolaren der benutzten Luftschraubenprofile längs des Radius bekannt sind. Auf das Berechnungsverfahren, das sich der bekannten Formeln der Luftschrauben-Tragflügeltheorie bedient, braucht nicht mehr näher eingegangen zu werden.

Betrachten wir jetzt ein Element des Luftschraubenflügels (Bild 1), so erfährt dieses infolge der unter dem Druck-

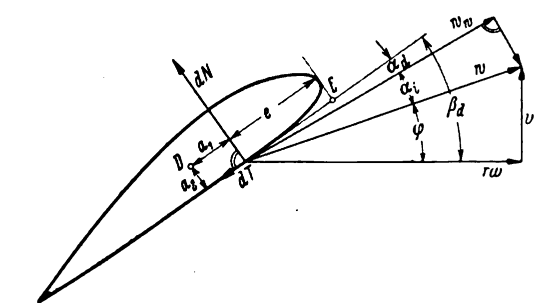


Bild 1. Geschwindigkeits- und Kräfteplan für ein Element einer freifahrenden Schraube.

seitenanstellwinkel α_d auftreffenden wirksamen Profilgeschwindigkeit w_w eine Normalkraft dN und eine Tangentialkraft dT. Diese Kräfte ergeben um den Drehpunkt D des Profils (Schnittpunkt von Blattdrehachse und Profilebene) ein Moment

$$d\,M_D = a_1\,d\,N - a_2\,d\,T \qquad (1)$$

oder mit Einführung der Normal- und Tangentialkraftbeiwerte c_n und c_t

$$d\,M_D = (a_1\,c_n - a_2\,c_t)\,\frac{\varrho}{2}\,w_w^2\,l\,d\,r \qquad (2)$$

Für den Fall, daß der Profildrehpunkt mit dem Flächenschwerpunkt S identisch ist, kann man setzen

$$a_1 = x_s - e, \qquad (3)$$

$$a_2 = y_s \qquad (4)$$

Hierbei stellt $x_s = k_1 l$ und $y_s = k_2 d$ den Schwerpunktsabstand von Profileintrittskante und Druckseite dar. k_1 und k_2 beziehen ihn auf Tiefe und Dicke des Profiles und sind für die Profilform charakteristische, vom Dickenverhältnis unabhängige, Konstanten. Damit wird

$$d\,M_S = \left(k_1\,c_n - \frac{e}{l}\,c_n - k_2\,\frac{d}{l}\,c_t\right)\frac{\varrho}{2}\,w_w^2\,l^2\,d\,r \qquad (5)$$

Nun ist $\frac{e}{l}\,c_n = c_m$ der in üblicher Weise auf den Schnittpunkt E von Druckseitenverlängerung und dazu senkrechter Tangente an die Eintrittskante bezogene Momentenbeiwert, wie er in Abhängigkeit von c_a in den Polardiagrammen enthalten ist. Weiter lassen sich c_n und c_t in der Form

$$c_n = c_a \cos\alpha_d + c_{wp} \sin\alpha_d \qquad (6)$$

$$c_t = - c_a \sin\alpha_d + c_{wp} \cos\alpha_d \qquad (7)$$

durch c_a und c_{wp} ersetzen.

Führt man schließlich $w_w = w \cos\alpha_i$ ein und integriert längs des ganzen Flügels, so erhält man als Ausdruck für das gesamte Luftkraftmoment

$$M_S = \frac{\varrho}{2}\int_0^R \left[\left(k_1 \cos\alpha_d + k_2\,\frac{d}{l}\,\sin\alpha_d\right) c_a + \left(k_1 \sin\alpha_d - k_2\,\frac{d}{l}\,\cos\alpha_d\right) c_{wp} - c_m\right] \times w^2 \cos^2\alpha_i\,l^2\,d\,r \qquad (8)$$

Bei gegebenem Luftschraubenflügel und Fortschrittsgrad ist k_1, k_2, d, l und w bekannt. Ebenso kennt man nach Berechnung der c_a-Verteilung auf Grund der Profilpolaren den Verlauf von c_{wp}, c_m und α_d und damit auch von α_i, so daß die Auswertung des Integrales ohne Schwierigkeiten durchzuführen ist.

Für den praktischen Gebrauch hat sich eine einfachere Form als völlig ausreichend erwiesen, die aus (1) durch Vernachlässigung des Beitrages $a_2\,dT$ und die Näherungen $c_n \approx c_a$ und $w_w \approx w$ entsteht:

$$M_S = \frac{\varrho}{2}\int_0^R (k_1\,c_a - c_m)\,w^2\,l^2\,d\,r \qquad (9)$$

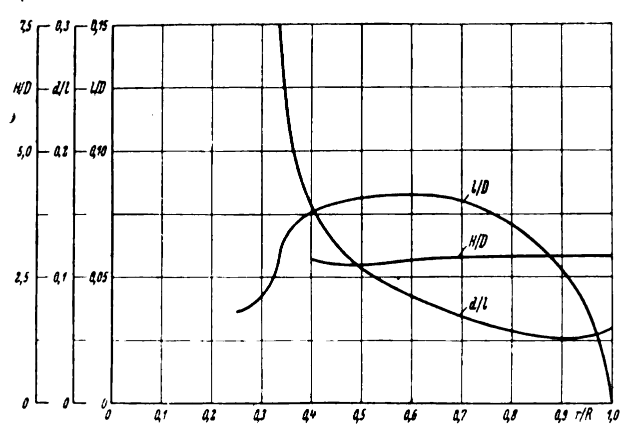


Bild 2. Steigungs-, Flügeldicken- und Flügeltiefenverlauf der nachgerechneten Luftschraube.

Um die Formeln (8) und (9) miteinander zu vergleichen, werden sie im folgenden für die Berechnung des Luftkraftmomentes einer vierflügligen Verstellschraube von 4 m Dmr. und 8% Blattbreite mit RAF-6-Profil angewendet, deren Flügelform durch Bild 2 gegeben ist. Die Nachrechnung erstreckt sich dabei auf vier sehr verschiedene Betriebszustände der Schraube, um die Gültigkeit der Gl. (9) in einem möglichst weiten Bereich zu prüfen und gleichzeitig ein Bild von der Veränderlichkeit des Gesamtmomentes und seiner Verteilung über den Schraubenradius zu geben. Der Zelleneinfluß bleibt in der Rechnung unberücksichtigt. Die untersuchten Betriebszustände sind Standlauf am Boden bei voller Motorleistung, Reiseflug in der Höhe bei verringerter Leistung, Abkippen zum Sturzflug bei niedriger Geschwindigkeit und leerlaufendem Motor, endlich Sturzflug bei Motorleerlauf. Im einzelnen wird angenommen:

Betriebszustand	Flughöhe	Fluggeschwindigkeit	Motorleistung	Druckseitensteigungswinkel
Stand	$H = 0$ km	$v = 0$ km/h	$N = 2000$ PS	$\beta_{d\,0{,}7\,R} = 29{,}6^\circ$
Reise	$H = 6$ km	$v = 600$ km/h	$N = 1480$ PS	$\beta_{d\,0{,}7\,R} = 47{,}1^\circ$
Abkippen	$H = 6$ km	$v = 300$ km/h	$N = -200$ PS	$\beta_{d\,0{,}7\,R} = 18{,}1^\circ$
Sturz	$H = 2$ km	$v = 700$ km/h	$N = -200$ PS	$\beta_{d\,0{,}7\,R} = 45{,}5^\circ$

Die angegebenen Druckseitensteigungswinkel sind dabei diejenigen, auf welche die drehzahlgeregelte Verstellschraube geht, um in allen vier Fällen eine eingestellte Luftschraubendrehzahl $n_P = 1130\ \text{min}^{-1}$ zu halten. Beim Abkippen und im Leerlaufsturz wurde mit einer negativen Leistung gerechnet in der Annahme, daß ein Windmühlenantrieb von der Schraube erforderlich ist, um den in seiner Leistung völlig gedrosselten Motor auf voller Drehzahl zu halten.

Bild 3 zeigt in der Auftragung $\frac{2}{\varrho}\,\frac{d\,M_S}{d\,r} = f(r)$ die Verteilung des Luftkraftmomentes über den Schraubenradius.

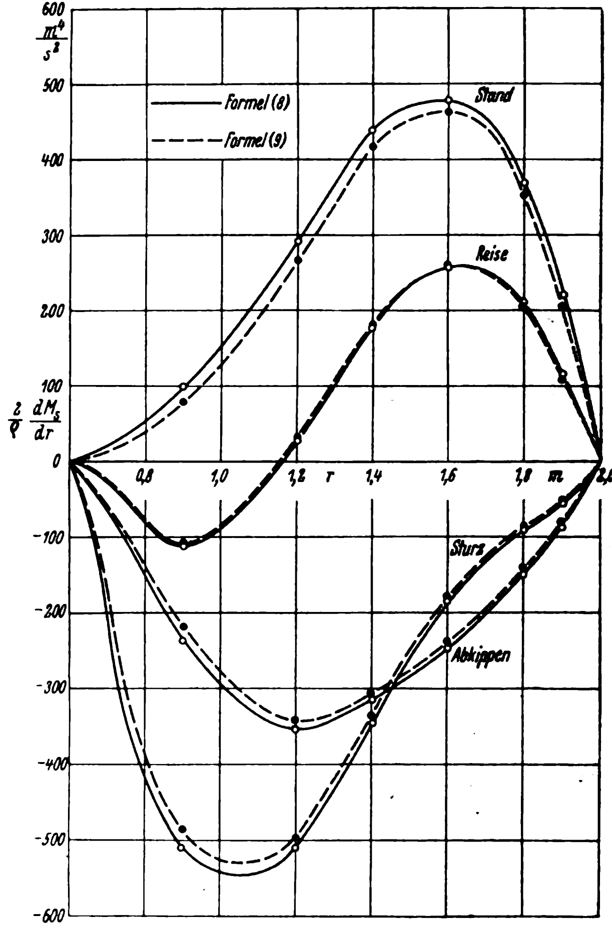


Bild 3. Luftkraftmomentenverteilung für vier verschiedene Betriebszustände.

Dabei ist ein auf große Steigung drehendes Moment positiv, ein auf kleine Steigung drehendes negativ gerechnet. Die nach Formel (8) erhaltenen Verteilungen sind ausgezogen, die nach Formel (9) gewonnenen gestrichelt gezeichnet. Man erkennt die geringe Abweichung beider Kurvenscharen voneinander und damit die Brauchbarkeit von Gl. (9).

Während wir am Stand für jeden Radius ein Drehmoment auf große Steigung haben, ergeben im Reiseflug die inneren Blattelemente bereits ein Moment auf kleine Steigung. Trotzdem ist das Gesamtmoment auch hier noch positiv. Ein negatives Moment sowohl für den ganzen Flügel als auch jedes einzelne Element erhalten wir dagegen beim Abkippen und im Sturzflug. Die resultierenden Momente von 22,8, 2,7, —10,4, —22,2 mkg in der obigen Reihenfolge zeigen, daß wir es hier mit Absolutbeträgen zu tun haben, die in der Tat bei der Aufstellung einer Leistungsbilanz für die Blattverstellung nicht mehr übersehen werden dürfen.

b) Verfahren der gleichwertigen Tragflügel-Polare.

Die geschilderte Berechnung des Luftkraftmomentes aus der c_a-Verteilung hat den Nachteil, einen immerhin ziemlich großen Arbeitsaufwand zu erfordern. Es ist daher naheliegend, das in der Industrie für Luftschraubenberechnungen vornehmlich verwendete Polarenverfahren, etwa in der v. Doeppschen Form[1]), auf die Bestimmung dieses Momentes auszudehnen.

Das Polarenverfahren beschreibt die Eigenschaften einer Luftschraubenfamilie gleichen Profils und Flügeltiefenverlaufes, aber verschiedener Steigung und Flügelfläche durch eine Abhängigkeit $\bar{c}_a = f\,(\bar{c}_{wp})$, wobei

$$\bar{c}_a = \frac{A}{q_{w\sigma} F} \quad \ldots\ldots\ldots\ (10)$$

und

$$\bar{c}_{wp} = \frac{W_p}{q_{w\sigma} F} \quad \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

Auftriebs- und Widerstandsbeiwert des gleichwertigen Tragflügels sind, der in Profil, Geschwindigkeit und Anstellwinkel mit dem Luftschraubenprofil am gleichwertigen Radius $r_\sigma = \sigma R$ übereinstimmt, die Fläche $F = \frac{l_\sigma D z}{4}$ hat und die gleiche Luftmasse wie der Propeller erfaßt. Der Staudruck $q_{w\sigma}$ der Profilgeschwindigkeit am gleichwertigen Radius ist dabei gleich der Summe der Staudrücke $q_{u\sigma}$ der Umfangsgeschwindigkeit am Radius r_σ und q_v der Fluggeschwindigkeit:

$$q_{w\sigma} = q_{u\sigma} + q_v \quad \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

Es ist nun naheliegend, in entsprechender Weise einen Momentenbeiwert

$$\bar{c}_{ms} = \frac{z\, M_s}{q_{w\sigma} F\, l_\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ (13)$$

für den gleichwertigen Tragflügel zu definieren und, wie allgemein bei Tragflügeln üblich, $\bar{c}_{ms}$ über $\bar{c}_a$ aufzutragen. Es ist zu erwarten, daß diese $\bar{c}_{ms}$-Kurve mit der gleichen Genauigkeit, mit der die Luftschraubeneigenschaften aus der gleichwertigen Polare berechnet werden können, nach Bestimmung des $\bar{c}_a$-Wertes den $\bar{c}_{ms}$-Wert und damit das Luftkraftmoment für einen bestimmten Betriebszustand gibt.

Während man bei der Aufstellung der Luftschraubenpolare normalerweise von den bei verschiedenen Fortschrittsgraden gemessenen Schüben und Drehmomenten ausgeht, sind Messungen von Luftkraftmomenten einstweilen nicht greifbar. Zur Aufstellung und Prüfung von $\bar{c}_{ms}$-Kurven müssen wir daher von Werten ausgehen, die nach der Integrationsmethode berechnet sind. Dementsprechend ist die Basis für die Aufstellung solcher Kurven verhältnismäßig schmal.

Bild 4 zeigt das Ergebnis der Auswertung von berechneten Luftkraftmomenten dreier sehr verschiedener Luftschrauben, einer dreiflügeligen und zweier vierflügeliger. Die Bestimmung der Momente aus der Auftriebsverteilung

[1]) Ph. v. Doepp, Luftschraubenrechnungen nach dem Verfahren der gleichwertigen Tragflügel-Polare. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), Lfg. 2.

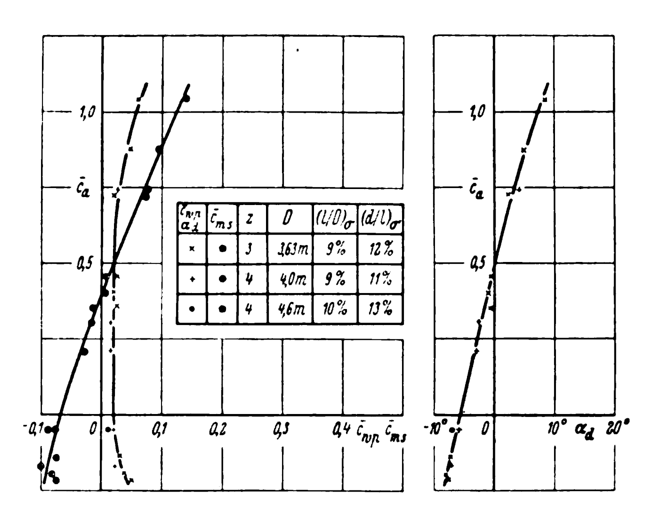


Bild 4. Polare, Momenten- und Auftriebswinkelkurve, errechnet für drei verschiedene Schrauben mit Profilen Göttingen 622—625.

erfolgte unter Zugrundelegung der Polaren für die Göttinger Profile 622 bis 625, so daß auch die Luftschraubenpolare und -momentenkurve nur für Schrauben mit diesen Profilen gilt. Es zeigt sich, daß die einzelnen errechneten Punkte gut auf den Kurven zusammenfallen, obwohl die drei Schrauben geringe Unterschiede im Profildickenverhältnis haben. Eine etwas größere Streuung der $\bar{c}_{ms}$-Werte im negativen $\bar{c}_a$-Bereich ist in erster Linie bedingt durch die in diesem Gebiet für die Rechnung erforderliche Extrapolation der Profilkennwerte über den gemessenen Bereich hinaus. Es muß daher möglich sein, auch umgekehrt die Momentenkurve zu benutzen, um rückwärts die Luftkraftmomente für andere Durchmesser, Blattbreiten und Betriebszustände zu bestimmen.

Es muß den Versuchsanstalten überlassen bleiben, das hier rechnungsmäßig gewonnene Resultat auf breiterer Grundlage auch experimentell sicherzustellen und weiter auszubauen, vor allem nach der Seite des Profileinflusses hin.

III. Größe und Auswirkung der Luftkraftmomente.

a) Verhalten bei verschiedenen Flugzuständen.

Für die Einregelung der Flügel einer drehzahlgeregelten Luftschraube bei Änderung des Betriebszustandes ergeben sich die günstigsten Verhältnisse, wenn Zentrifugalmoment und Luftkraftmoment nicht in Erscheinung treten, da sie im Gegensatz zum Reibungsmoment die Blattverstellung in der einen Richtung hemmen, in der anderen Richtung unterstützen und so eine Verschiedenheit in der Verstellgeschwindigkeit nach beiden Seiten hervorrufen. Ein Ausgleich des Zentrifugalmomentes ist leicht zu erzielen, da dieses bei gegebener Luftschraube nur vom Steigungswinkel und von der Drehzahl abhängig ist. Das Luftkraftmoment dagegen hängt außerdem noch von der Fluggeschwindigkeit ab, so daß es durch mechanische Mittel höchstens für einzelne Flugzustände eliminiert werden kann und auch das nur zum Teil, da es normalerweise dann in anderen Zuständen unterstützt wird und diese Unterstützung bei vollem Ausgleich zu stark würde.

Allgemein erkennt man aus Bild 4, daß im Startbereich (große $\bar{c}_a$-Werte) immer mit positivem, im Sturzflugbereich (verschwindende oder negative $\bar{c}_a$-Werte) immer mit negativem Luftkraftmoment zu rechnen ist. Im Reiseflugbereich (mittlere $\bar{c}_a$-Werte) dagegen wird es verschwindend klein. Von den beiden erstgenannten Bereichen ist derjenige des Sturzfluges der wichtigere; denn hier ist das negative Moment bei Beschleunigung des stürzenden Flugzeuges der Verstellbewegung der Flügel auf große Steigung zur Aufrechterhaltung der eingestellten Drehzahl entgegengerichtet, und es besteht die Gefahr des Durchgehens für den Motor infolge zu geringer Verstellgeschwindigkeit. Im Gegensatz hierzu unterstützt das Luftkraftmoment im Start die Be-

wegung der Luftschraubenflügel auf große Steigung, wenn die Maschine an Fahrt aufholt, und verringert nur die Verstellgeschwindigkeit auf kleine Steigung, was praktisch unwichtig ist.

Man wird infolgedessen bei der Ausschaltung des Luftkraftmomentes immer im wesentlichen an den Sturzflugzustand denken. Diese Ausschaltung kann etwa dadurch geschehen, daß das zum Ausgleich des Zentrifugalmomentes des Flügels benutzte Gegengewicht überbemessen und evtl. noch um einen gewissen Winkel gegenüber seiner Normallage versetzt wird, so daß das resultierende Zentrifugalmoment von Gewicht und Flügel dem Luftkraftmoment entgegen auf große Steigung zieht. Wir wollen die Auswirkung einer solchen Maßnahme, besonders auch im Hinblick auf die übrigen Flugzustände, an dem Flügel nach Bild 2 näher verfolgen.

Für die in Abschnitt II a betrachteten vier Betriebszustände sind die dort berechneten Luftkraftmomente M_s zusammen mit den zugehörigen Steigungswinkeln $\beta_{d\,0,7\,R}$ in Bild 5 eingetragen. Der Übersichtlichkeit halber wurden die vier Punkte durch eine Kurve verbunden (ausgezogen). Ferner ist das Zentrifugalmoment M_z des Flügels in Abhängigkeit vom Steigungswinkel eingezeichnet. Wird dieses durch ein Gegengewicht mit der Charakteristik M'_z genau ausgeglichen, so gibt die Luftkraftmomentenkurve gleichzeitig das resultierende Moment, welches dem antriebsseitig bedingten inneren Moment, abzüglich des Reibungsmomentes im Flügellager, gleich- oder entgegenwirkt. Letztere Differenz habe etwa die Größe von ± 30 mkg bei arbeitendem Motor und infolge eines größeren Reibungskoeffizienten bei fehlender Schwingungsbeanspruchung vom Motor her ± 20 mkg im Leerlauf. Tragen wir auch diese Grenzen in Bild 5 ein, so müssen für eine einwandfreie Funktion der Schraube zumindest der Stand- und der Reisepunkt unterhalb der schraffiert angelegten 30-mkg-Grenze, der Abkipp- und Sturzflugpunkt oberhalb der ebenfalls schraffiert angelegten 20-mkg-Grenze liegen. Für eine ausreichende Verstellgeschwindigkeit ist außerdem noch ein gewisser Abstand von diesen Linien erforderlich. Da diese Bedingung für den Sturzflugpunkt nicht erfüllt ist, wird man durch Vergrößerung des Ausgleichgewichtes — so daß etwa das Maximum von M'_z um 10 mkg wächst (Kurve a') — den Punkt nach oben zu schieben suchen. Damit ergibt sich für das resultierende Moment die neue Kurve a, d. h. der Punkt für Standbetrieb ist jetzt nach oben aus dem zulässigen Bereich ausgewandert. Um ihn wieder herunterzudrücken, kann man versuchen, das Gegengewicht um einen passenden Winkel ϑ (s. Bild 5) zu versetzen. Läßt man a' in b' übergehen (8° Versetzung zur Schraubenkreisebene hin), so zeigt die zugehörige Kurve b für das resultierende Moment, daß die Verhältnisse noch ungünstiger werden. Außer einer weiteren Verschlechterung des Standbetriebes ist auch der Sturz wieder schlecht geworden. Eine Winkelversetzung von 8° nach der anderen Seite, bei der a' in c' und a in c übergeht, hat dagegen den gewünschten Erfolg: In allen vier Betriebszuständen ist das resultierende Moment jetzt um mindestens 4 mkg kleiner als das antriebsseitig zur Verfügung stehende.

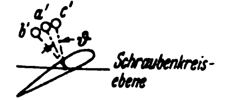
Man erkennt, daß im Einzelfall stets eine sorgfältige Untersuchung nötig ist, um mit kleinstmöglichem Gewicht einen möglichst günstigen Ausgleich zu erzielen. Natürlich wird man aber immer versuchen, von vornherein das Luftkraftmoment an sich zu beschränken.

b) Kleinhaltung des Luftkraftmomentes im Sturzflug.

Einen Hinweis, nach welcher Richtung wir hierbei vorzugehen haben, gibt uns die durch Einsetzen von F und Auflösung nach M_s umgeformte Gl. (13):

$$M_s = \bar{c}_{ms}\, q_{w\,0}\, \frac{l_a^2\, D}{4} \quad . . . . (14)$$

Bei gegebener Schraube, Sturzgeschwindigkeit und Drehzahl ist der negative Wert $\bar{c}_{ms}$, absolut genommen, möglichst



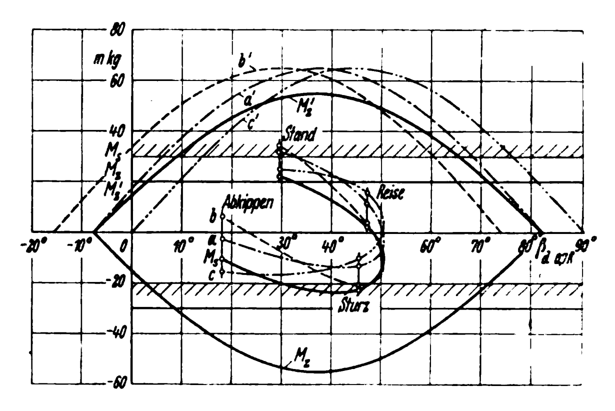


Bild 5. Momentenspiel am Luftschraubenflügel bei verschiedenem Ausgleich des Luftkraftmomentes.

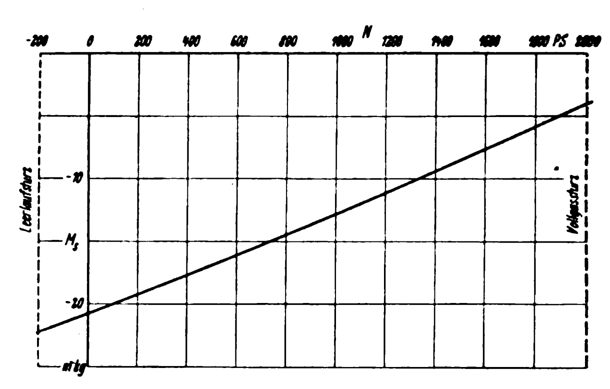


Bild 6. Luftkraftmoment im Sturzflug in Abhängigkeit von der Motorleistung.

$z = 4$, $D = 4$ m, $(l/D)_\sigma = 8\,\%$, Profil RAF 6,
$H = 2$ km,
$v = 700$ km/h,
$n_p = 1130$ min^{-1}.

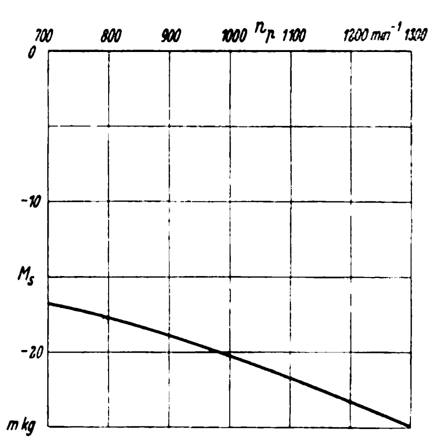


Bild 7. Luftkraftmoment im Leerlaufsturz in Abhängigkeit von der Schraubendrehzahl.

$z = 4$, $D = 4$ m, $(l/D)_\sigma = 8\,\%$, Profil RAF 6,
$H = 2$ km,
$v = 700$ km/h,
$N = -200$ PS.

klein zu halten, d. h. die Motorleistung ist hochzusetzen, um auf der Luftschraubenpolare möglichst weit oben zu liegen. So zeigt Bild 6 für die schon früher betrachtete Schraube nach Bild 2 das Luftkraftmoment im Sturzflug in Abhängigkeit von der Motorleistung. Wir haben im Leerlaufsturz ($N = -200$ PS) ein Moment von $-22{,}2$ mkg, bei Vollgassturz ($N = 2000$ PS) nur noch -4 mkg. Eine weitere Verkleinerung des Momentes ist durch Herabsetzung



der Schraubendrehzahl zu erzielen. Bild 7 zeigt diesen Einfluß für die gleiche Schraube bei Leerlaufleistung. Dabei wurde von einer Änderung dieser Leistung mit der Drehzahl abgesehen. Man erhält also im Bereich mittlerer Umläufe eine Momentenabnahme von rd. 1,5 mkg auf eine Drehzahlabnahme von 100 min^{-1}. Praktisch spielen die hier geschilderten beiden Möglichkeiten keine große Rolle, da im Hinblick auf möglichst große Bremswirkung der Schraube meistens niedrigste Motorleistung und höchste Regeldrehzahl erforderlich sind.

Ein dritter, praktisch wertvoller, Weg ist dagegen derjenige, von vornherein beim Schraubenentwurf durch Verwendung einer möglichst großen Flügelzahl und damit geringer Blattbreite kleine Luftkraftmomente, und zwar in allen Flugzuständen, anzustreben. Bei gegebenem Betriebszustand, Durchmesser und fester Gesamtblattbreite $\Theta = z l_\sigma$ ist das Moment M_s eines Flügels nach Gl. (14)

$$M_s = \text{const}\, l_\sigma^2 \quad \text{. . . . . (15)}$$

und das für die Verstelleistung der ganzen Schraube maßgebende Moment $z M_s$, welches wir bei veränderlicher Flügelzahl an Stelle von M_s betrachten müssen,

$$z M_s = \text{const}\, \frac{\Theta^2}{z} \quad \text{. . . . . (16)}$$

Das Gesamtmoment nimmt also umgekehrt proportional zur Flügelzahl ab, so daß von diesem Gesichtspunkt aus die Vielflügelschraube in der Tat anzustreben ist. Im übrigen soll hier auf das Für und Wider großer Flügelzahl nicht weiter eingegangen werden.

IV. Zusammenfassung.

Das für die Leistungsbilanz der Flügelverstellung bei Verstelluftschrauben wichtige Moment der Luftkräfte um die Blattachse läßt sich aus der Auftriebsverteilung längs des Flügels nach Gl. (8) oder der einfacheren, praktisch ebenso genauen, Gl. (9) berechnen. Die in Erweiterung des Polarenverfahrens für Luftschrauben durchgeführte Auswertung einiger hiernach bestimmter Luftkraftmomente in Form einer Momentenkurve für den der Schraube gleichwertigen Tragflügel scheint eine einfache Möglichkeit zur Extrapolation der Momente auf andere Schraubenabmessungen und Betriebszustände zu bieten. Zur Schaffung ausreichender Unterlagen für die Aufstellung derartiger Momentenkurven ist die Messung von Luftkraftmomenten im Fluge oder im Windkanal erwünscht.

Im Start wirkt das Luftkraftmoment auf große, im Sturzflug auf kleine Steigung; im Reiseflug ist es verschwindend klein. Soll es daher durch mechanische Mittel, z. B. Anbringung eines Gegengewichtes, ausgeglichen werden, so ist das Verhalten der Schraube in den verschiedensten Betriebszuständen zu prüfen, um die Verbesserung im einen Zustand nicht durch eine Verschlechterung im anderen zu erkaufen. Am besten hält man das Luftkraftmoment von vornherein klein, indem man vielflüglige Schrauben mit schmalen Blättern an Stelle wenigflügliger Schrauben großer Blattbreite verwendet. Eine an sich mögliche Beeinflussung durch Wahl entsprechender Betriebsbedingungen für die Schraube hat praktisch keine Bedeutung.

Schwingungen eines elastisch gelagerten Motors mit zweiflügliger Luftschraube.

Von A. Weigand.

Bericht des Instituts für Triebwerk-Mechanik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Die Ermittlung der kritischen Drehzahlen eines elastisch gelagerten Motors, der mit einer zweiflügligen Luftschraube gekuppelt ist, gelingt mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffes. Das Rechenverfahren wird an einigen Zahlenbeispielen erläutert.

Gliederung.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen eines elastisch gelagerten Flugmotors, der mit der Luftschraube gekuppelt ist, ist mit elementaren Hilfsmitteln möglich, solange es sich um eine mehr als zweiflüglige Schraube handelt, die einen symmetrischen Kreisel darstellt. Die Aufgabe führt auf ein System von zwei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die durch das Kreiselmoment der Luftschraube gekoppelt sind (s. [1]). Ist die Schraube jedoch zweiflüglig, so treten in den Bewegungsgleichungen Zusatzglieder auf, deren Koeffizienten periodische Funktionen der Zeit sind. Beschränkt man sich auf die Schwingungen von einem Freiheitsgrad, so erhält man eine Hillsche Differentialgleichung, die man in manchen Fällen durch eine Mathieusche ersetzen kann. Dieses Teilproblem wurde von J. Vogts gelöst (s. [2]). Für den allgemeinen Fall der Schwingung von zwei Freiheitsgraden liegt bis jetzt nur eine Untersuchung von J. Meyer vor. Es gelang ihm, beim symmetrischen Motor, der symmetrisch gelagert ist, für die erzwungenen Schwingungen eine überraschend einfache Partikularlösung zu finden (s. [1], S. 181/82). Man kann deshalb vermuten, daß auch der allgemeine Fall des unsymmetrischen Motors keine unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten bieten wird. Das ist tatsächlich der Fall, wie nun gezeigt werden soll.

I. Die Bewegungsgleichungen und ihre Lösung.

Die Schwingungen des elastisch gelagerten Motors werden von einem mit dem Flugzeug fest verbundenen Koordinatensystem aus betrachtet. Die y-Achse dieses Koordinatensystems sei parallel zu der Querachse, die z-Achse parallel der Hochachse des Flugzeugs. Mit Θ sei der augenblickliche Drehwinkel um die y-Achse, mit ψ der um die z-Achse bezeichnet. Ferner seien T_{My} bzw. T_{Mz} die Massenträgheitsmomente des Motors für die y-Achse bzw. z-Achse; der Beitrag der Luftschraubenmasse m_L ist in diesen Werten schon berücksichtigt. Die Hauptträgheitsmomente der Luftschraube seien A_L, B_L und C_L; für die mehr als zweiflügelige Schraube gilt $B_L = C_L$ und $A_L = 2\,B_L$, während bei der zweiflügeligen $C_L \approx 0$ und $A_L \approx B_L$ ist. Die Federkonstanten der elastischen Motoraufhängung seien c_y und c_z. Die Bewegungsgleichungen sind in [1] mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen abgeleitet. Bezeichnet man mit ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraube und nimmt an, daß die Schwingungen durch eine Kraft erregt werden, die mit der Schraubendrehzahl pulsiert, so lauten sie

$$\frac{d}{dt}\left[\dot\psi\left(T_{Mz}+\frac{B_L+C_L}{2}+\frac{B_L-C_L}{2}\cos 2\omega t\right) - \dot\Theta\,\frac{B_L-C_L}{2}\sin 2\omega t - \omega A_L \Theta\right]+c_z\psi = a\sin\omega t + b\cos\omega t \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\dot\Theta\left(T_{My}+\frac{B_L+C_L}{2}-\frac{B_L-C_L}{2}\cos 2\omega t\right) - \dot\psi\,\frac{B_L-C_L}{2}\sin 2\omega t + \omega A_L \psi\right]+c_y\Theta = c\sin\omega t + d\cos\omega t \quad \ldots\ldots (2)$$

Als unabhängige Veränderliche führt man statt der Zeit den Drehwinkel $\varphi = \omega t$ ein; die Differentiation nach φ wird durch einen Strich bezeichnet. Außerdem werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$T_z = T_{Mz}+\frac{B_L+C_L}{2} \qquad T_y = T_{My}+\frac{B_L+C_L}{2} \quad (3\,\mathrm{a})$$

$$\frac{c_z}{T_z}=\omega_z^2 \qquad \frac{c_y}{T_y}=\omega_y^2 \quad \ldots\ldots (3\,\mathrm{b})$$

ω_y und ω_z sind die Eigenkreisfrequenzen bei ruhender Luftschraube

$$\frac{T_z}{T_y}=\tau \qquad \frac{c_y}{c_z}=\gamma \qquad \gamma\tau=\frac{\omega_y^2}{\omega_z^2}=f \quad \ldots (3\,\mathrm{c})$$

$$\frac{A_L}{T_z}=k \qquad \frac{B_L-C_L}{2\,T_z}=2\,\varepsilon \quad \ldots\ldots (3\,\mathrm{d})$$

$$\frac{\omega_z^2}{\omega^2}=\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3\,\mathrm{e})$$

Die Grundgleichungen lauten jetzt mit $\alpha = \dfrac{a}{T_z\omega^2}$ usw.

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\psi'(1+2\,\varepsilon\cos 2\,\varphi)-\Theta'\cdot 2\,\varepsilon\sin 2\,\varphi\right] - k\,\Theta' + \lambda\,\varphi = \alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi \quad (1\,\mathrm{a})$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\Theta'(1-2\,\varepsilon\tau\cos 2\,\varphi)-\psi'\cdot 2\,\varepsilon\tau\sin 2\,\varphi\right] + k\,\tau\,\psi' + \lambda f\,\Theta = \gamma\cdot\sin\varphi+\delta\cos\varphi \quad (2\,\mathrm{a})$$

Setzt man noch

$$\psi = y_1', \quad \Theta = y_2' \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

und integriert beide Differentialgleichungen nach φ, so erhält man die endgültige Form der Bewegungsgleichungen

$$y_1''(1+2\,\varepsilon\cos 2\,\varphi) - y_2''\cdot 2\,\varepsilon\sin 2\,\varphi - k\,y_2' + \lambda\,y_1 = A\sin\varphi + B\cos\varphi \quad (1\,\mathrm{b})$$

$$y_2''(1-2\,\varepsilon\tau\cos 2\,\varphi) - y_1''\cdot 2\,\varepsilon\tau\sin 2\,\varphi + k\,\tau\,y_1' + \lambda f\,y_2 = C\sin\varphi + D\cos\varphi \quad (2\,\mathrm{b})$$

Die beiden Integrationskonstanten sind weggelassen, da sie unwesentlich sind.

Für die mehr als zweiflügelige Luftschraube ist $\varepsilon = 0$, da $B_L = C_L$ ist; die veränderlichen Glieder in den Bewegungsgleichungen fallen weg und es ergeben sich die ein-

fachen Differentialgleichungen für die Kreiselwirkung der Luftschraube, die in [1] ausführlich behandelt sind. In derselben Arbeit wurde für den Fall der zweiflügeligen Luftschraube eine Partikularlösung der Bewegungsgleichungen angegeben; sie gilt jedoch nur für den symmetrischen Motor, der symmetrisch gelagert ist. In diesem Sonderfall ist $T_y = T_z$ und $c_y = c_z$, so daß in (1 c) und (2 c) $\tau = 1$ und $f = 1$ zu setzen ist. Diese Voraussetzung braucht jedoch nicht immer erfüllt zu sein; bei einem Reihenmotor können die Federkonstanten der Aufhängung wesentlich voneinander verschieden sein. Deshalb ist eine allgemeine Lösung sehr erwünscht.

Die wichtigste Frage, die bei einem Schwingungsvorgang beantwortet werden muß, ist: Unter welchen Umständen treten besonders große Ausschläge auf? Im vorliegenden Fall wird man sich also fragen: Welche Drehzahlen der Luftschraube sind kritisch? Um diese Frage zu beantworten, macht man zur Lösung der Differentialgleichungen (1 b) und (2 b) den Ansatz:

$$y_1 = \sum_0^\infty (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) \quad \ldots \quad (5\,\mathrm{a})$$

$$y_2 = \sum_0^\infty (c_n \sin n\varphi + d_n \cos n\varphi) \quad \ldots \quad (5\,\mathrm{b})$$

Man setzt die Gl. (5 a) und (5 b) in (1 b) und (2 b) ein und formt die auftretenden Produkte der Kreisfunktionen nach den Formeln

$$2 \sin n\varphi \cos 2\varphi = \sin (n-2)\varphi + \sin (n+2)\varphi$$

usw. um. In den auf diese Weise erhaltenen Gleichungen setzt man die Faktoren von $\sin k\varphi$ und $\cos k\varphi$ gleich Null. Auf diese Weise erhält man vier Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen für die Unbekannten a_n, b_n, c_n und d_n. Die Systeme lauten

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda - 1 + \varepsilon)\, a_1 + (\varepsilon + k)\, d_1 - 3^2 \varepsilon a_3 - 3^2 \varepsilon d_3 = A \\
\tau(\varepsilon + k)\, a_1 + (\lambda f - 1 + \varepsilon\tau)\, d_1 + 3^2 \varepsilon\tau a_3 + 3^2 \varepsilon\tau d_3 = D \\
-\varepsilon a_1 + \varepsilon d_1 + (\lambda - 3^2)\, a_3 + 3 k d_3 - 5^2 \varepsilon a_5 - 5^2 \varepsilon d_5 = 0 \\
-\varepsilon\tau a_1 + \varepsilon\tau d_1 + 3 k\tau a_3 + (\lambda f - 3^2)\, d_3 + 5^2 \varepsilon\tau a_5 + 5^2 \varepsilon\tau d_5 = 0 \\
-3^2 \varepsilon a_3 + 3^2 \varepsilon d_3 + (\lambda - 5^2)\, a_5 + 5 k d_5 - 7^2 \varepsilon a_7 - 7 \varepsilon d_7 = 0 \\
-3^2 \varepsilon\tau a_3 + 3^2 \varepsilon\tau d_3 + 5 k\tau a_5 + (\lambda f - 5^2)\, d_5 + 7^2 \varepsilon\tau a_7 + 7^2 \varepsilon\tau d_7 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda - 1 - \varepsilon)\, b_1 + (\varepsilon - k)\, c_1 - 3^2 \varepsilon b_3 + 3^2 \varepsilon c_3 = B \\
\tau(\varepsilon - k)\, b_1 + (\lambda f - 1 - \varepsilon\tau)\, c_1 - 3^2 \varepsilon\tau b_3 + 3^2 \varepsilon\tau c_3 = C \\
-\varepsilon b_1 - \varepsilon c_1 + (\lambda - 3^2)\, b_3 \;\; 3 k c_3 - 5^2 \varepsilon b_5 + 5^2 \varepsilon c_5 = 0 \\
\varepsilon\tau b_1 + \varepsilon\tau c_1 - 3 k\tau b_3 + (\lambda f - 3^2)\, c_3 - 5^2 \varepsilon\tau b_5 + 5^2 \varepsilon\tau c_5 = 0 \\
-3^2 \varepsilon b_3 - 3^2 \varepsilon c_3 + (\lambda - 5^2)\, b_5 - 5 k c_5 - 7^2 e b_7 + 7^2 \varepsilon c_7 = 0 \\
3^2 \varepsilon\tau b_3 + 3^2 \varepsilon\tau c_3 - 5 k\tau b_5 + (\lambda f - 5^2)\, c_5 - 7^2 \varepsilon\tau b_7 + 7^2 \varepsilon\tau c_7 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda - 2^2)\, a_2 + 2 k d_2 - 4^2 \varepsilon a_4 - 4^2 \varepsilon d_4 = 0 \\
2 k\tau a_2 + (\lambda f - 2^2)\, d_2 + 4^2 \varepsilon\tau a_4 + 4^2 \varepsilon\tau d_4 = 0 \\
-2^2 \varepsilon a_2 + 2^2 \varepsilon d_2 + (\lambda - 4^2)\, a_4 + 4 k\tau d_4 - 6^2 \varepsilon a_6 - 6^2 \varepsilon d_6 = 0 \\
-2^2 \varepsilon\tau a_2 + 2^2 \varepsilon\tau d_2 + 4 k\tau a_4 + (\lambda f - 4^2)\, d_4 + 6^2 \varepsilon\tau a_6 + 6^2 \varepsilon\tau d_6 = 0 \\
-4^2 \varepsilon a_4 + 4^2 \varepsilon d_4 + (\lambda - 6^2)\, a_6 + 6 k\tau d_6 - 8^2 \varepsilon a_8 - 8^2 \varepsilon d_8 = 0 \\
-4^2 \varepsilon\tau a_4 + 4^2 \varepsilon\tau d_4 + 6 k\tau a_6 + (\lambda f - 6^2)\, d_6 + 8^2 \varepsilon\tau a_8 + 8^2 \varepsilon\tau d_8 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda - 2^2)\, b_2 - 2 k c_2 - 4^2 \varepsilon b_4 + 4^2 \varepsilon c_4 = 0 \\
-2 k\tau b_2 + (\lambda f - 2^2)\, c_2 - 4^2 \varepsilon\tau b_4 + 4^2 \varepsilon\tau c_4 = 0 \\
-2^2 \varepsilon b_2 - 2^2 \varepsilon c_2 + (\lambda - 4^2)\, b_4 - 4 k c_4 - 6^2 \varepsilon b_6 - 6^2 \varepsilon c_6 = 0 \\
2^2 \varepsilon\tau b_2 + 2^2 \varepsilon\tau c_2 - 4 k\tau b_4 + (\lambda f - 4^2)\, c_4 - 6^2 \varepsilon\tau b_6 + 6^2 \varepsilon\tau c_6 = 0 \\
-4^2 \varepsilon b_4 - 4^2 \varepsilon c_4 + (\lambda - 6^2)\, b_6 - 6 k c_6 - 8^2 \varepsilon b_8 + 8^2 \varepsilon c_8 = 0 \\
4^2 \varepsilon\tau b_4 + 4^2 \varepsilon\tau c_4 - 6 k\tau b_6 + (\lambda f - b^2)\, c_6 - 8^2 \varepsilon\tau b_8 + 8^2 \varepsilon\tau c_8 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Für die in den Gl. (5 a) und (5 b) noch vorkommenden Größen b_0 und d_0 gilt

$$\lambda b_0 - 4\varepsilon (b_2 - c_2) = 0 \qquad \lambda f d_0 + 4 \varepsilon\tau (a_2 + d_2) = 0 \quad (10)$$

Die kritischen Werte für λ bzw. die Winkelgeschwindigkeit ω der Luftschraube ergeben sich als Nullstellen der Determinanten der Systeme (6) bis (9), und zwar erhält man aus den Systemen (6) und (7) die in der Umgebung von $\lambda = 1$, 3^2, 5^2, ... liegenden kritischen Werte, während sich aus der Determinante der Systeme (8) und (9) die kritischen Werte in der Umgebung von $\lambda = 2^2$, 4^2, 6^2, ... ergeben.

Der Aufbau der Systeme (6) bis (9) legt folgende Umformung nahe: Man führt als neue Unbekannte die Summen und Differenzen der alten ein, und zwar setzt man

$$\left.\begin{array}{ll}
a_n + d_n = 2 S_n & b_n + c_n = 2 S_n' \\
a_n - d_n = 2 D_n & b_n - c_n = 2 D_n' \\
a_n = S_n + D_n & b_n = S_n' + D_n' \\
a_n = S_n - D_n & c_n = S_n' - D_n'
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Für die S_n usw. erhält man wieder lineare Gleichungssysteme, die jedoch wesentlich einfacher als die ursprünglichen gebaut sind. Sie lauten:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11} S_1 + a_{12} D_1 = A\tau + D \\
a_{21} S_1 + a_{22} D_1 + a_{23} S_3 = A\tau - D \\
a_{32} D_1 + a_{33} S_3 + a_{34} D_3 = 0 \\
a_{43} S_3 + a_{44} D_3 + a_{45} S_5 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (6\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11} D_1' + a_{12} S_1' = B\tau - C \\
a_{21}' D_1' + a_{22} S_1' + a_{23} D_3' = B\tau + C \\
a_{32} S_1' + a_{33} D_3' + a_{43} S_3' = 0 \\
a_{43} D_3' + a_{44} S_3' + a_{45} D_5' = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (7\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{array}{l}
b_{11} S_2 + b_{12} D_2 = 0 \\
b_{21} S_2 + b_{22} D_2 + b_{23} S_4 = 0 \\
b_{32} D_2 + b_{33} S_4 + b_{34} D_4 = 0 \\
b_{43} S_4 + b_{44} D_4 + b_{45} S_6 = 0 \\
\text{usw.}
\end{array}\right\} \quad (8\,\mathrm{a})$$

Das Gleichungssystem für D_2', S_2' usw. geht aus (8 a) hervor, indem man S_{2n} durch D_{2n}' und D_{2n} durch S_{2n}' ersetzt. Die Koeffizienten b_{ik} bleiben ungeändert. Sie ergeben sich nebst den Koeffizienten a_{ik} aus folgenden Gleichungen:



$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda(\tau+f) + 2k\tau + 4\varepsilon\tau - \tau - 1\\
a_{22} &= \lambda(\tau+f) - 2k\tau - \tau - 1\\
a_{33} &= \lambda(\tau+f) + 2\cdot 3k\tau - 3^2\tau - 3^2\\
a_{44} &= \lambda(\tau+f) - 2\cdot 3k\tau - 3^2\tau - 3^2\\
a_{55} &= \lambda(\tau+f) + 2\cdot 5k\tau - 5^2\tau - 5^2\\
a_{12} &= a_{21} = \lambda(\tau-f) - \tau + 1\\
a_{23} &= -4\cdot 3^2\varepsilon\tau \qquad a_{32} = -4\varepsilon\tau\\
a_{34} &= a_{43} = \lambda(\tau-f) - 3^2\tau + 3^2\\
a_{45} &= -4\cdot 5^2\varepsilon\tau \qquad a_{54} = a_{23}\\
a_{56} &= a_{65} = \lambda(\tau-f) - 5^2\tau + 5^2\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} \quad . . (12)$$

$$a_{11}' = \lambda(\tau+f) + 2k\tau - 4\varepsilon\tau - \tau - 1 \quad . . . . (13)$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{11} &= \lambda(\tau+f) + 4k\tau - 2^2 - 2^2\tau\\
b_{22} &= \lambda(\tau+f) - 4k\tau - 2^2 - 2^2\tau\\
b_{33} &= \lambda(\tau+f) + 2\cdot 4k\tau - 4^2 - 4^2\tau\\
b_{44} &= \lambda(\tau+f) - 2\cdot 4k\tau - 4^2 - 4^2\tau\\
b_{55} &= \lambda(\tau+f) + 2\cdot 6k\tau - 6^2 - 6^2\tau\\
b_{12} &= b_{21} = \lambda(\tau-f) - 2^2\tau + 2^2\\
b_{23} &= -4\cdot 4^2\varepsilon\tau \qquad b_{32} = -4\cdot 2^2\varepsilon\tau\\
b_{34} &= b_{43} = \lambda(\tau-f) - 4^2\tau + 4^2\\
b_{45} &= -4\cdot 6^2\varepsilon\tau \qquad b_{54} = b_{23}\\
b_{56} &= b_{65} = \lambda(\tau-f) - 6^2\tau + 6^2\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} \quad . . . (14)$$

Während die ursprünglichen Gleichungssysteme (6) bis (9) in jeder Gleichung vier bzw. sechs Unbekannte enthielten, kommen in den Systemen (6a) bis (8a) nur zwei bzw. drei Unbekannte in jeder Gleichung vor. Dies ist eine sehr große Vereinfachung. Man erhält nämlich die Nullstellen der Determinanten der Systeme (6a) bis (8a), d. h. die Eigenwerte mit Hilfe eines Kettenbruchs, der für Zahlenrechnungen sehr geeignet ist. Dies wurde für die Eigenwerte der Mathieuschen Differentialgleichung, deren Berechnung ebenfalls auf dreigliedrige Gleichungssysteme führt, von Goldstein und Ince gezeigt (s. [3], S. 34).

Der Zusammenhang zwischen den Nullstellen einer Determinante von der Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & \dots\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & \dots\\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots\\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dots \end{vmatrix} \quad . . . . . . (15)$$

und einem Kettenbruch kann leicht hergeleitet werden. Entwickelt man nämlich die Determinanten (15) nach Elementen der ersten Zeile, so erkennt man, daß die Gleichung $\Delta = 0$ gleichbedeutend mit

$$\alpha_{11} = \cfrac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22} - \cfrac{\alpha_{23}\alpha_{32}}{\alpha_{33} - \cfrac{\alpha_{34}\alpha_{43}}{\alpha_{44} - \dots}}} \quad . . . (16)$$

ist. Setzt man Gl. (12), (13) oder (14) in Gl. (16) ein, so erhält man die Gleichungen zur Berechnung der Eigenwerte λ bzw. der kritischen Drehzahlen. Die zahlenmäßige Auswertung wird in Abschnitt IV behandelt.

Die Schwingungen werden im allgemeinen durch eine Unwucht der Luftschraube erregt werden. In diesem Fall hat die rechte Seite der Bewegungsgleichungen (1) und (2) die spezielle Form $M\cos(\gamma - \omega t)$ bzw. $M\sin(\gamma - \omega t)$. Beachtet man noch, daß die Grundgleichungen (1 b) und (2 b) aus (1) und (2) durch Integration nach φ hervorgehen, so erkennt man, daß bei Unwuchterregung

$$A = D \qquad B = -C \quad . . . . . . (17)$$

gilt.

II. Der Sonderfall des symmetrischen Motors mit symmetrischer Lagerung.

Die Rechnung vereinfacht sich außerordentlich und wird völlig elementar, wenn der Motor symmetrisch ist und wenn außerdem die elastische Lagerung symmetrisch ist. In diesem Fall ist $T_{My} = T_{Mz}$ und nach Gl. (3a) auch $T_y = T_z$. Nach Gl. (3c) ist $\tau = 1$, $\gamma = 1$ und $f = 1$. Setzt man diese Werte in (12), (13) und (14) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
a_{11} &= 2(\lambda + k + 2\varepsilon - 1) & a_{12} &= a_{21} = 0\\
a_{22} &= 2(\lambda - k - 1) & a_{23} &= -4\cdot 3^2\varepsilon \quad a_{32} = -4\varepsilon\\
a_{33} &= 2(\lambda + 3k - 3^2) & a_{34} &= a_{43} = 0\\
a_{44} &= 2(\lambda - 3k - 3^2) & a_{45} &= -4\cdot 5^2\varepsilon \quad a_{54} = a_{23}\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} (12\,\text{a})$$

$$a_{11}' = 2(\lambda + k - 2\varepsilon - 1) \quad . . . . . (13\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{11} &= 2(\lambda + 2k - 2^2) & b_{12} &= b_{21} = 0\\
b_{22} &= 2(\lambda - 2k - 2^2) & b_{23} &= -4\cdot 4^2 e \quad b_{32} = -4\cdot 2^2\varepsilon\\
b_{33} &= 2(\lambda + 4k - 4^2) & b_{34} &= b_{43} = 0\\
b_{44} &= 2(\lambda - 4k - 4^2) & b_{45} &= -4\cdot 6^2\varepsilon \quad b_{54} = b_{23}\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} (14\,\text{a})$$

Mit diesen Werten gehen die Gl. (6a) bis (8a) unter Berücksichtigung von Gl. (17) über in

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda + k + 2\varepsilon - 1)\,S_1 &= A\\
(\lambda - k - 1)\,D_1 - 18\,\varepsilon\,S_3 &= 0\\
-2\,\varepsilon\,D_1 + (\lambda + 3k - 3^2)\,S_3 &= 0\\
(\lambda - 3k - 3^2)\,D_3 - 50\,\varepsilon\,S_5 &= 0\\
-18\,\varepsilon\,D_3 + (\lambda + 5k - 5^2)\,S_5 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . . (6\,\text{a}^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda + k - 2\varepsilon - 1)\,D_1' &= B\\
(\lambda - k - 1)\,S_1' - 18\,\varepsilon\,D_3' &= 0\\
-2\,\varepsilon\,S_1' + (\lambda + 3k - 3^2)\,D_3' &= 0\\
(\lambda - 3k - 3^2)\,S_3' - 50\,\varepsilon\,D_5' &= 0\\
-18\,\varepsilon\,S_3' + (\lambda + 5k - 5^2)\,D_5' &= 0\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} \quad . . (7\,\text{a}^*)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda + 2k - 2^2)\,S_2 &= 0\\
(\lambda - 2k - 2^2)\,D_2 - 32\,\varepsilon\,S_4 &= 0\\
-18\,\varepsilon\,D_2 + (\lambda + 4k - 4^2)\,S_4 &= 0\\
(\lambda - 4k - 4^2)\,D_4 - 72\,\varepsilon\,S_5 &= 0\\
-32\,\varepsilon\,D_4 + (\lambda + 6k - 6^2)\,S_5 &= 0\\
&\text{usw.}
\end{aligned}\right\} \quad . . (8\,\text{a}^*)$$

Die Determinanten dieser Gleichungssysteme sollen zunächst von Null verschieden sein, d. h. λ soll kein Eigenwert sein. Dann folgt aus (6a*) bis (8a*)

$$S_1 = \frac{A}{\lambda + k + 2\varepsilon - 1} \quad D_1 = 0 \quad S_3 = D_3 = 0 \quad S_5 = D_5 = 0 \quad \text{usw.}$$

$$D_1' = \frac{B}{\lambda + k - 2\varepsilon - 1} \quad S_1' = 0 \quad D_3' = S_3' = 0 \quad D_5 = S_5' = 0 \ \text{usw.}$$

$$S_2 = D_2 = S_4 = D_4 = \dots = 0.$$

Wegen (11) ist demnach

$$\begin{aligned}
a_1 &= d_1 = S_1 & a_3 &= d_3 = a_5 = d_5 = \dots = 0\\
b_1 &= -c_1 = D_1' & b_3 &= c_3 = b_5 = c_5 = \dots = 0\\
&& a_2 &= b_2 = c_2 = d_2 = \dots = 0\\
&& b_0 &= d_0 = 0.
\end{aligned}$$

Die Grundgleichungen (1b) und (2b) haben also für $\tau = f = 1$ die Partikularlösung

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{A}{\lambda + k + 2\varepsilon - 1}\sin\varphi + \frac{B}{\lambda + k - 2\varepsilon - 1}\cos\varphi\\
y_2 &= -\frac{B}{\lambda + k - 2\varepsilon - 1}\sin\varphi + \frac{A}{\lambda + k + 2\varepsilon - 1}\cos\varphi
\end{aligned}\right\} (18)$$

Für die zweiflügelige Schraube ist mit

$$T_{Mz} = T_{My} = T_M, \quad T = T_M + \frac{B_L + C_L}{2}$$

und $C_L = 0$, $A_L = B_L$ nach Gl. (3d)

$$k = \frac{A_L}{T} = \frac{A_L}{T_M + \frac{A_L}{2}}, \quad 2\varepsilon = \frac{A_L}{2T}$$

und folglich $k = 4\varepsilon$[1]). Demnach lauten die Gl. (18), wenn man noch Gl. (3e) berücksichtigt und $\omega_y^2 = \omega_z^2 = \frac{2c}{2T_M + A_L}$ setzt

[1]) Diese Beziehung gilt stets bei zweiflügliger Schraube, da $C_L \approx 0$ und $A_L \approx B_L$.

$$y_1 = \frac{A\,\omega^2 (A_L + 2\,T_M)}{2\,[c - \omega^2 (T_M - A_L)]} \sin\varphi + \frac{B\,\omega^2 (A_L + 2\,T_M)}{2\,(c - T_M\,\omega^2)} \cos\varphi$$

$$y_2 = -\frac{B\,\omega^2 (A_L + 2\,T_M)}{2\,(c - T_M\,\omega^2)} \sin\varphi + \frac{A\,\omega^2 (A_L + 2\,T_M)}{2\,[c - \omega^2 (T_M - A_L)]} \cos\varphi \quad \ldots\ldots (18\text{a})$$

Diese Partikularlösung wurde schon von J. Meyer (s. [1]) angegeben. Die beiden kritischen Drehzahlen ergeben sich aus

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{T_M}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{T_M - A_L}} \quad \ldots (19)$$

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, daß die in den Gl. (6a*) bis (8a*) vorkommenden Determinanten von Null verschieden sind. Diese Voraussetzung soll nun fallen gelassen werden. Es soll z. B. die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda - k - 1, & -18\,\varepsilon \\ -2\,\varepsilon, & \lambda + 3\,k - 9 \end{vmatrix}$$

verschwinden. Mit $k = 4\,\varepsilon$ erhält man für ihre in der Umgebung von $\lambda = 1 + k = 1 + 4\,\varepsilon$ gelegene Nullstelle

$$\lambda = 5 - 4\,\varepsilon - \sqrt{16 - 64\,\varepsilon + 100\,\varepsilon^2} \approx 1 + 4\,\varepsilon - 4{,}5\,\varepsilon^2 \quad (20)$$
(für kleine ε)

Weitere Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen der in den Gleichungen (6a*) bis (8a*) vorkommenden Determinanten. Auf sie soll nicht näher eingegangen werden, da sie praktisch gegenüber den aus den Gl. (19) berechneten kritischen Drehzahlen nicht in Frage kommen. Wie man aus den Gl. (6a*) bis (8a*) erkennt, fehlt vor allem die Energie liefernde Erregung, die zum Aufschaukeln der Schwingungen notwendig ist. Höchstens kann die aus Gl. (20) berechnete Kritische noch bemerkbar sein; das Auftreten der in der Umgebung von $\omega = \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{3} \ldots$ gelegenen Kritischen wird durch die stets vorhandene Dämpfung fast mit Sicherheit verhindert. Es bleibt also im wesentlichen bei den aus Gl. (19) zu berechnenden Kritischen, die zuerst von J. Meryer angegeben wurden.

III. Ermittlung der kritischen Drehzahlen im allgemeinen Fall.

Die Eigenwerte bzw. die kritischen Drehzahlen ergeben sich aus Gl. (16), in die für α_{ik} die Werte a_{ik} bzw. a'_{11} aus Gl. (12) bzw. (13) oder b_{ik} auf Gl. (14) einzusetzen sind. Es sollen hier nur die Eigenwerte berechnet werden, die für kleine ε in der Umgebung von $\lambda = 1$ liegen. In diesem Falle kommen für die zahlenmäßige Auswertung der Gl. (16) nur die Werte a_{ik} bzw. a'_{11} nach Gl. (12) bzw. (13) in Frage.

Die Zahlenrechnungen wurden für einen symmetrischen Motor ($\tau = 1$) durchgeführt. Unter dieser Voraussetzung erhält man mit $k = 4\,\varepsilon$ aus den Gl. (12) und (13)

$$\left.\begin{array}{lll}
a_{11} = (1+f)\,\lambda + 12\,\varepsilon - 2 & a_{12} = a_{21} = (1-f)\,\lambda & \\
a_{22} = (1+f)\,\lambda - 8\,\varepsilon - 2 & a_{23} = -36\,\varepsilon & a_{32} = -4\,\varepsilon \\
a_{33} = (1+f)\,\lambda + 24\,\varepsilon - 18 & a_{31} = a_{43} = a_{12} & \\
a_{44} = (1+f)\,\lambda - 24\,\varepsilon - 18 & a_{45} = -100\,\varepsilon & a_{54} = a_{23} \\
a_{55} = (1+f)\,\lambda - 40\,\varepsilon - 50 & a_{56} = a_{65} = a_{12} & \\
a_{66} = (1+f)\,\lambda - 40\,\varepsilon - 50 & a_{67} = -196\,\varepsilon & a_{76} = a_{45} \\
\text{usw.} & &
\end{array}\right\} \quad (21)$$

$$a_{11}' = (1+f)\,\lambda + 4\,\varepsilon - 2 \quad \ldots\ldots (22)$$

Benutzt man zur Berechnung der Eigenwerte die in (21) angegebenen Ausdrücke, so erhält man als periodische Lösung der homogenen Grundgleichungen (1b) und (2b)

$$y_1 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} a_n \sin n\,\varphi \qquad y_2 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} d_n \cos n\,\varphi \quad \ldots (23)$$

Ersetzt man a_{11} aus Gl. (21) durch a'_{11} gemäß Gl. (22) und läßt alle anderen Größen ungeändert, so findet man für die periodische Lösung

$$y_1 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} b_n \cos n\,\varphi \qquad y_2 = \sum_{1,3,5\ldots}^{\infty} c_n \sin n\,\varphi \quad \ldots (24)$$

Die beiden Lösungen (23) und (24), deren Koeffizienten a_n und d_n bzw. b_n und c_n aus den Gl. (6a) bzw. 6b) mit $A = B = C = D = 0$ und aus (11) zu berechnen sind, sollen im folgenden mit (a, d)-Lösung bzw. (b, c)-Lösung bezeichnet werden.

Bei der zahlenmäßigen Ermittlung der Eigenwerte muß man den unendlichen Kettenbruch (16) näherungsweise durch einen endlichen ersetzen. Ist $f = 0{,}9$ oder $f = 0{,}8$, so zeigte es sich, daß man für $\varepsilon \leq 0{,}15$ ausreichend genaue Ergebnisse erhält, wenn man von

$$\frac{a_{11}}{a_{11}'} = \cfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{22} - \cfrac{a_{23}\,a_{32}}{a_{33}}}$$

ausgeht. Für $\varepsilon \leq 0{,}50$ ($\varepsilon = 0{,}5$ ist der größte Wert, den ε überhaupt annehmen kann; er wird erreicht, wenn das Trägheitsmoment T_M des Motors verschwindet. Dieser Fall kann bei einer Schraube mit Fernantrieb auftreten, wenn sich hinter der Luftschraubennabe ein Schwingungsknoten bildet) genügt es, wenn man noch den Nenner a_{55} berücksichtigt.

Ist f wesentlich von 1 verschieden, so wird man mehr Glieder des Kettenbruchs berücksichtigen müssen. Wieviel, das hängt von der gewünschten Genauigkeit ab. Man muß die Näherung so weit treiben, bis sich der zu berechnende Eigenwert nur noch wenig ändert, wenn man von einer Näherung zur nächsten übergeht.

Das Ergebnis der Rechnung ist in Zahlentafel 1 und Bild 1 zusammengestellt.

Die von dem Punkt $\lambda = 1$ der λ-Achse ausgehenden Kurven mit arabischer Bezifferung verlaufen für $\varepsilon \geq 0{,}15$ fast geradlinig nach den Punkten $\varepsilon = \frac{1}{6}$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ der ε-Achse; deshalb wurden die auf diesen Linien liegenden λ-Werte in der Zahlentafel nicht ausdrücklich angegeben.

In Bild 1 sind auch die Geraden $\lambda = 1 - 6\,\varepsilon$, $\lambda = 1 - 2\,\varepsilon$ und die aus Gl. (20) zu berechnende Hyperbel angegeben, die für den symmetrischen Fall ($f = 1$) gelten.

Zahlentafel 1. Eigenwerte λ in Abhängigkeit von ε für $\tau = 1$ (symmetrischer Motor).

ε	$f = 0{,}9$		$f = 0{,}8$		$f = 1{,}25$	
	λ	λ'	λ	λ'	λ	λ'
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1,111	1,111	1,25	1,250	0,800	0,800
0,025	0,886	0,985	0,911	1,00	1,023	1,044
	1,169	1,177	1,279	1,303	0,73	0,799
0,05	0,734	0,940	0,765	0,968	1,087	1,105
	1,257	1,261	1,359	1,382	0,615	0,774
0,075	0,577	0,890	0,665	0,923	1,154	1,170
	1,344	1,349	1,443	1,462	0,485	0,738
0,100	0,421	0,839	0,442	0,874	1,216	1,231
	1,421	1,425	1,520	1,538	0,354	0,699
0,125	0,263	0,788	0,280	0,82	1,27	—
	1,487	1,491	1,588	1,608	—	—
0,150	0,105	0,735	0,112	0,770	1,314	1,327
	1,541	1,543	1,642	1,658	—	0,616
0,175	—	0,683	—	—	1,345	—
	1,579	1,583	1,682	—	—	—
0,200	—	0,631	—	—	1,362	—
	1,601	1,604	1,703	1,717	—	—
0,25	—	—	—	—	1,346	—
	1,583	—	1,681	1,695	—	—
0,30	—	—	—	—	1,245	—
	1,466	—	1,555	1,568	—	
0,35	—	—	—	—	1,654	—
	1,245	—	1,318	1,329	—	—
0,40	—	—	—	—	0,775	—
	0,916	—	0,969	—	—	—
0,45	—	—	—	—	—	—
	0,50	—	0,524	—	—	—
0,50	—	—	—	—	—	—
	0	—	0	—	—	—

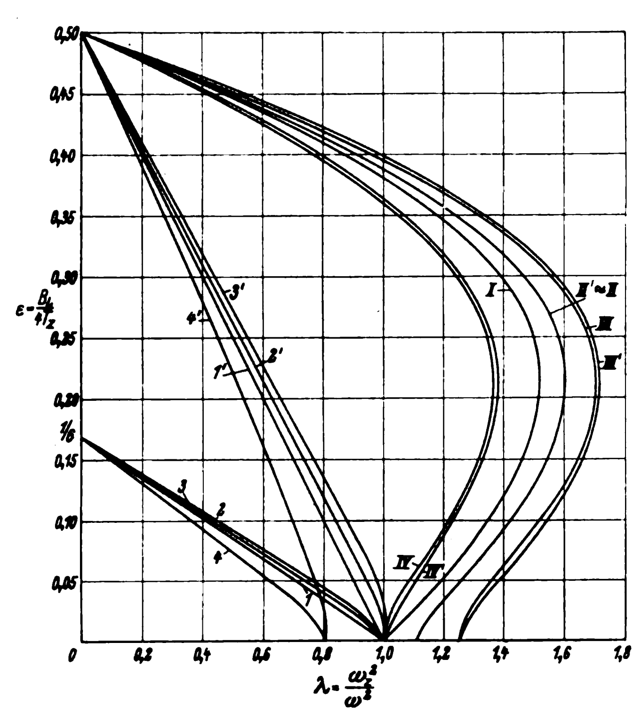


Bild 1. Eigenwerte λ in Abhängigkeit von ε für $\tau = 1$.

$1 : f = 1$, $2 : f = 0{,}9$, $3 : f = 0{,}8$, $4 : f = 1{,}25$ } (a, d)-Lösung; $1' : f = 1$, $2' : f = 0{,}9$, $3' : f = 0{,}8$, $4' : f = 1{,}25$ } (b, c)-Lösung

$I : f = 1$, $II : f = 0{,}9$, $III : f = 0{,}8$, $IV : f = 1{,}25$ } (a, d)-Lösung; $I' = I$, $II' \approx II$, $III' : f = 0{,}8$, $IV' : f = 1{,}25$ } (b, c)-Lösung

Bei rheolinearen Schwingungsvorgängen treten bekanntlich Instabilitätsgebiete auf; liegt die Drehzahl in einem solchen Gebiet, so wachsen auch bei den freien Schwingungen die Ausschläge nach einer e-Funktion der Zeit an. Statt fester kritischer Drehzahlen treten ganze Drehzahlbereiche auf, in denen die Maschine unruhig läuft.

Für den symmetrischen Fall ($\tau = f = 1$) wurde die Stabilität untersucht. Man macht hierbei zur Lösung der homogenen Differentialgleichungen (1b) und (2b) den Ansatz

$$y_1 = e^{\mu\varphi} \sum_0^\infty (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) \quad . \; . \; . \quad (25)$$

$$y_2 = e^{\mu\varphi} \sum_0^\infty (c_n \sin n\varphi + d_n \cos n\varphi) \quad . \; . \; . \quad (26)$$

Für μ erhält man zwei Bedingungsgleichungen von der Form

$$\Delta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Dabei sind mit Δ Determinanten bezeichnet, deren Form hier nicht ausdrücklich angegeben werden soll.

Haben die Gl. (27) reelle Wurzeln, so ist die Schwingung instabil. Das wichtigste Ergebnis der Untersuchung ist, daß der von den Geraden $\lambda = 1 - 2\,\varepsilon$ und $\lambda = 1 - 6\,\varepsilon$ begrenzte Bereich labil ist. M. a. W. ist der ganze Drehzahlbereich labil, der durch die aus Gl. (19) berechneten Frequenzen begrenzt wird. Aus Stetigkeitsgründen kann man für den allgemeinen Fall schließen, daß die Bereiche, die in Bild 1 zwischen den Kurven 2 und 2', 3 und 3' usw. liegen, ebenfalls labil sind. Die übrigen labilen Bereiche sind sehr schmal und bedeutungslos.

IV. Zusammenfassung.

Die Bewegungsgleichungen eines elastisch gelagerten Motors, der mit einer zweiflügligen Luftschraube gekuppelt ist, enthalten Glieder mit Koeffizienten, die periodische Funktionen der Zeit sind. Die kritischen Drehzahlen wurden bis jetzt nur für den Fall der Schwingung von einem Freiheitsgrad ermittelt (s. [2]). Außerdem wurde ein Sonderfall des Problems von J. Meyer [1] gelöst; es gelang ihm, für den symmetrischen Motor, der auch symmetrisch gelagert ist, eine Partikularlösung für die erzwungenen Schwingungen zu finden.

In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenwerte des Differentialgleichungssystems, d. h. die kritischen Drehzahlen für den allgemeinen Fall bestimmt. Die Lösung gelingt mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffs. Als Bestimmungsgleichungen für die Eigenwerte ergeben sich unendliche Kettenbrüche. Die Gleichung zur Ermittlung der in der Umgebung von $\lambda = 1$ gelegenen Eigenwerte (aus ihnen ergeben sich die wichtigsten kritischen Drehzahlen) wird für einige Fälle zahlenmäßig ausgewertet. Soweit dem Verfasser bekannt ist, ist damit zum erstenmal ein Beispiel für rheolineare Koppelschwingungen zahlenmäßig durchgerechnet worden, in dem nicht vorausgesetzt ist, daß die rheolinearen Glieder der Bewegungsgleichungen klein gegenüber den übrigen sind. Bis jetzt wurde bei der Behandlung derartiger Aufgaben stets die Störungsrechnung verwendet, so z. B. bei der Ermittlung der kritischen Drehzahlbereiche von Kurbelwellen unter Berücksichtigung der periodischen Veränderlichkeit der Drehmassen (s. a. Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrt-Forschung, H. 5, S. 59 u. 60). Die Störungsrechnung läßt sich in ihrer einfachen Form jedoch nur anwenden, wenn die rheolinearen Glieder klein sind.

V. Schrifttum.

[1] J. Meyer, Die Verlagerung der Eigenfrequenzen eines elastisch aufgehängten Flugmotors infolge der Kreiselwirkung der Luftschraube. Jahrb. 1938 d. dtsch. Luftfahrt-Forschung, S. II 179.

[2] N. Scheubel, Diskussionsbeitrag auf der 5. Wissenschaftssitzung d. Dtsch. Akad. d. Luftf.-Forschg. am 13. Januar 1939. Schriften d. Dtsch Akad. d. Luftf.-Forschg., H. 5, S. 57.

[3] M. J. O. Strutt, Lamésche-Mathieusche und verwandte Funktionen. Berlin, Springer 1932.

Die Beanspruchung der Luftschraubenflügel bei periodischer Verlagerung der Schraubenwelle.

Von J. Meyer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerkmechanik.

Untersucht werden die durch periodische Verlagerung der Schraubenwelle hervorgerufenen Beanspruchungen der Luftschraubenflügel und die Möglichkeit ihrer Beseitigung durch elastische Verbindung von Motor und Luftschraube.

Gliederung.

I. Einleitung.

Ein wirksames Mittel, die Luftschraube von Biegewechselmomenten zu bewahren, ist die allseitig elastische Verbindung von Motor und Luftschraube. Jedoch gibt es eine derartige Ausführung, die allen Anforderungen genügt, der konstruktiven Schwierigkeiten wegen bis heute noch nicht. Eine ideale Lösung wären allseitig gelenkig angebrachte Luftschraubenblätter [1], wie sie der Hubschrauber besitzt. Für normale Schrauben ist aber dieser Weg wegen der hohen Belastung der Gelenke nicht ohne weiteres gangbar. Um im besonderen die Kopplung der Luftschrauben-Biegeschwingungen mit den Kurbelwellen-Drehschwingungen herabzusetzen, sind als teilweise elastische Verbindungen der Torsionsstab und das federnde Getriebe entwickelt worden. Da andererseits auch die Drehschwingungen der Kurbelwellen z. B. durch Einbau von Fliehkraftpendeln und Dämpfern erfolgreich bekämpft worden sind, so kann die Gefahr einer Überbeanspruchung der Schraube durch Blattschwingungen, die einem Drehschwingungsmoment der Kurbelwelle das Gleichgewicht halten müssen, in vielen Fällen als beseitigt gelten.

Neuerdings sind nun Luftschraubenbrüche aufgetreten, die offensichtlich durch Kippbewegungen des ganzen Motors hervorgerufen worden sind. Die Bewegung der Schraube als Ganzes kann hierbei zerlegt werden in eine Verschiebung innerhalb der Schraubenkreisebene und in eine Taumelbewegung um den Schraubenschwerpunkt. Während die erstere Massenkräfte bzw. -momente innerhalb der Schraubenkreisebene hervorruft, verursacht die letztere senkrecht dazu Kreiselwechselmomente, die beide zu Biegeeigenschwingungen der Blätter Anlaß geben können. In Amerika sind diese Erscheinungen schon seit längerer Zeit Gegenstand eingehender Untersuchungen [5]. Die Erregung dieser Schwingungen ist gegeben motorseitig durch Gas- und Massenkräfte oder auch luftschraubenseitig durch Luftkräfte, z. B. Vorbeischlagen der Schraubenblätter an Strömungshindernissen. Im folgenden sollen die beiden eben genannten Momente aus der Motor- bzw. Schraubenbewegung hergeleitet werden.

II. Beanspruchung bei einer Schwingung der Schraubenwelle um eine zu ihr senkrechte Achse.

Im folgenden Rechnungsgang bedeuten

ωt Drehwinkel des Schraubenflügels um die Rotationsachse,

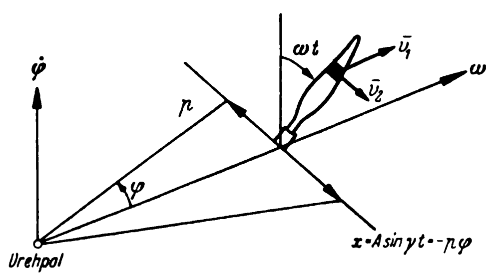


Bild 1. Zur Ableitung der durch die Schraubenwellenverlagerung am Flügel hervorgerufenen Trägheitskräfte.

φ Drehwinkel der Schraubenwelle um eine Achse senkrecht dazu,

m die Masse des Flügels,

s Schwerpunktsabstand vom Flügelfuß,

$J = \int_{r_1}^{R} r^2 \,\mathrm{dm} - r_1 \int_{r_1}^{R} r \,\mathrm{dm}$ mit r_1 als Bezugsradius für den Flügelfuß

Für die Berechnung betrachtet (Bild 1) man zweckmäßig ein Massenelement des Schraubenflügels und berechnet dessen Geschwindigkeit v aus den beiden Drehgeschwindigkeiten ω und $\dot\varphi$. Hieraus gewinnt man durch Differentiation nach der Zeit die Beschleunigung und damit die Trägheitskraft des Massenelementes. Diese über das ganze Blatt integriert ergibt das auf den Flügelfuß wirkende Biegemoment.

Die Beschleunigung senkrecht zur Schraubenkreisebene spalten wir zunächst in zwei Teile:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt}$$

wobei

$$v_1 = r \sin \omega t \cdot \dot\varphi; \quad v_2 = r \cos \omega t \cdot \omega$$

hieraus folgt

$$\frac{dv_1}{dt} = r\,(\omega\,\dot\varphi \cos \omega t + \ddot\varphi \sin \omega t)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = r \cos \omega t \cdot \omega \cdot \dot\varphi; \quad \text{wegen } \frac{d\bar v_2}{dt} = v_2 \frac{d\bar\varphi}{dt}.$$

Damit ergibt sich das Biegemoment zu

$$M_\varphi = J\,(\ddot\varphi \sin \omega t + 2\,\omega\,\dot\varphi \cos \omega t).$$

Für φ können wir schreiben $\varphi = \Phi \sin \gamma t$, womit der obige Ausdruck die Form annimmt:

$$M_\varphi = -J\,\gamma^2 \Phi \left\{\sin \gamma t \sin \omega t - 2\,\frac{\omega}{\gamma} \cos \gamma t \cos \omega t\right\}$$

$$= \frac{J}{2}\,\gamma^2 \Phi \left\{\left[1 + 2\,\frac{\omega}{\gamma}\right] \cos(\gamma + \omega)\,t - \left[1 - 2\,\frac{\omega}{\gamma}\right] \cos(\gamma - \omega)\,t\right\}.$$

Im besonderen, wenn $\gamma = \omega$ ist, folgt

$$M_\varphi = \frac{J}{2}\,\gamma^2 \Phi \left\{3 \cos 2\,\omega t + 1\right\}.$$

Diesem Biegemoment senkrecht zur Schraubenkreisebene überlagert sich ein von den Massenkräften herrühren-

des, das durch die Schwerpunktsbewegung der Schraube ausgelöst wird. Die Amplitude dieser Schwingung ist gegeben durch $A = -p \cdot \Phi$, wobei p die Entfernung bis zum Drehpol ist. Somit kann gesetzt werden $x = A \cdot \sin \gamma t$. Damit wird das Biegemoment in der Schraubenkreisebene

$$M_x = -m s \gamma^2 A \sin \gamma t \cos \omega t$$
$$= -\frac{m}{2} s \gamma^2 A \left\{\sin (\gamma + \omega) t + \sin (\gamma - \omega) t\right\}.$$

Im besonderen wird, wenn $\gamma = \omega$ ist,

$$M_x = -\frac{m}{2} s \gamma^2 A \sin 2 \omega t.$$

III. Beanspruchung bei Schwingungen der Schraubenwelle um zwei zu ihr senkrechte Achsen.

Schwingt die Schraubenwelle außerdem noch um die zweite zu ihr senkrechte Achse mit dem Ausschlag

$$\psi = \Psi \cos \gamma t,\ B = p \cdot \Psi,\ y = B \cos \gamma t,$$

so daß der Schraubenmittelpunkt anstatt einer Geraden allgemein eine Ellipse beschreibt, so ermittelt sich das Biegemoment senkrecht zur Schraubenkreisebene zu

$$M_{\varphi,\psi} = J \left\{\ddot\varphi \sin \omega t + 2 \omega \dot\varphi \cos \omega t + 2 \omega \dot\psi \sin \omega t - \ddot\psi \cos \omega t\right\}$$
$$M_{\varphi,\psi} = J \left\{-\gamma^2 [\Phi \sin \gamma t \sin \omega t - \Psi \cos \gamma t \cos \omega t] + 2 \omega \gamma [\Phi \cos \gamma t \cos \omega t - \Psi \sin \gamma t \sin \omega t]\right\}$$
$$M_{\varphi,\psi} = J \left\{\frac{\Phi + \Psi}{2} [\gamma^2 + 2 \omega \gamma] \cos (\gamma + \omega) t - \frac{\Phi - \Psi}{2} [\gamma^2 - 2 \omega \gamma] \cos (\gamma - \omega) t\right\}.$$

Das Massenmoment wird entsprechend

$$M_{x,y} = m s \left\{\ddot x \cos \omega t - \ddot y \sin \omega t\right\}$$
$$M_{x,y} = -m s \gamma^2 \left\{A \sin \gamma t \cos \omega t - B \cos \gamma t \sin \omega t\right\}$$
$$M_{x,y} = -m s \gamma^2 \left\{\frac{A - B}{2} \sin (\gamma + \omega) t + \frac{A + B}{2} \sin (\gamma - \omega) t\right\}.$$

Im Sonderfall einer Kreisschwingung, d. h. $\Phi = \Psi$, $A = -B$ (Präzession im Gegenlauf), werden

$$M_{\varphi,\psi} = J \gamma^2 \Phi \left\{\left[1 + 2 \frac{\omega}{\gamma}\right] \cos (\gamma + \omega) t\right\}$$
$$M_{x,y} = -m s \gamma^2 A \sin (\gamma + \omega) t.$$

Bei Präzession im Gleichlauf, d. h. $\Phi = -\Psi$ und $A = +B$, folgt

$$M_{\varphi,\psi} = -J \gamma^2 \Phi \left\{\left[1 - 2 \frac{\omega}{\gamma}\right] \cos (\gamma - \omega) t\right\}$$
$$M_{x,y} = -m s \gamma^2 A \sin (\gamma - \omega) t.$$

Demnach sind die Größtwerte der Wechselbiegemomente bei der Kreisschwingung gerade doppelt so groß als bei einem Freiheitsgrad.

Solange nun die Schraube von der Antriebswelle getragen wird, ist eine allseitig elastische Befestigung der ersteren nicht möglich, da sie unter Wirkung des Eigengewichtes durchhängen würde. Die von der Schraubenwelle vorgeschriebene Verschiebung muß daher von der Schraube immer mitgemacht werden. Jedoch wäre eine Befestigung denkbar, bei der die Schraube wenigstens nicht gezwungen wäre, die Taumelbewegung in vollem Maße mitzumachen. Wie aus obigen Ausdrücken zu ersehen ist, sind die beiden Wechselmomente in beiden Fällen um 90° phasenversetzt, so daß sich der Momentenvektor im Flügelfuß während einer Schwingungsperiode einmal um 360° dreht. Da die Dauerfestigkeit, zumindest für isotrope Stoffe, nur von der Größe der Wechselmomente und nicht davon abhängt, ob diese über eine oder über alle Richtungen des Querschnittes wirken, so wäre mit einer Beseitigung der Kreiselmomente jedoch nur gedient, wenn sie die Massenmomente wesentlich überträfen. Zum Vergleich setzen wir für das Trägheitsmoment des Flügels wegen seiner praktisch linearen Massenverteilung $J = m \frac{l^2}{6}$, wobei l die Flügellänge bedeutet, und $s = \frac{l}{3}$. Damit werden im ungünstigen Fall

$$M_{\varphi,\psi} = J \gamma^2 \Phi \left(1 + 2 \frac{\omega}{\gamma}\right) = -\frac{m}{6} l^2 \gamma^2 \frac{A}{p} \left(1 + 2 \frac{\omega}{\gamma}\right)$$
$$M_{x,y} = -m s \gamma^2 A = -\frac{m}{3} l \gamma^2 A$$
$$\frac{M_{\varphi,\psi}}{M_{x,y}} = \frac{\left(1 + 2 \frac{\omega}{\gamma}\right) l}{2 p}.$$

Dieses Verhältnis wird auch für größere Werte von γ größer als 1, wenn es sich um Sternmotoren mit großer Untersetzung also mit großen Luftschrauben handelt, weil dann l groß gegenüber p ist. Besonders in dem sehr häufigen Fall, daß die Schwingung durch eine Unwucht der Schraube erregt wird, d. h. $\gamma = \omega$ ist, kann dieses Verhältnis sehr groß werden:

$$\frac{M_{\varphi,\psi}}{M_{y,x}} = \frac{1{,}5\, l}{p} \sim 4.$$

Noch andere Gründe sprechen indessen für eine Beseitigung der Kreiselmomente. Über alle Flügel summiert vereinigen sie sich nämlich in ihrer Wirkung auf die Schraubenwelle und suchen sie zu verbiegen, wogegen sich die Massenmomente gegenseitig aufheben und nur die Schraubenwelle mehr oder weniger stark gegen ihr Lager pressen. Endlich scheint diese Art von Beanspruchung für Holzflügel bezüglich ihrer Befestigung in der Stahlhülse ungünstig zu sein, was jedoch durch Versuche erst erwiesen werden müßte.

Bei allem ist zu beachten, daß die oben errechneten Biegemomente bei gegebener Schraubenverlagerung Φ, Ψ bzw. A, B die Mindestwerte darstellen, also durch Resonanzerhöhung in Wirklichkeit ein Vielfaches davon betragen können.

Aus obigen Überlegungen geht somit hervor, daß eine Zusatzfederung, die die Luftschraube vor Kreiselwechselmomenten bewahrt, ihre Vorteile hat, sofern sie sich mit geringem Gewichtsaufwand verwirklichen läßt. Im folgenden sollen daher noch die Fragen nach Bemessung dieser Zusatzfederung und neu auftretenden Resonanzgebieten geklärt werden.

IV. Berechnung einer Zusatzfederung zwischen Motor und Luftschraube.

Bei der Bemessung der Federung muß davon ausgegangen werden, daß hierdurch keine neuen kritischen Drehzahlen im Betriebszahlbereich entstehen dürfen und daß außerdem das beim Kurvenflug auftretende Kreiselmoment die Schraube nicht mehr als 10° gegenüber dem Flugzeug neigt. Im folgenden soll untersucht werden, ob sich beide Forderungen gleichzeitig befriedigen lassen.

Bild 2 zeigt schematisch das durch die elastische Verbindung gebildete Schwingungssystem. Im folgenden bezeichnen

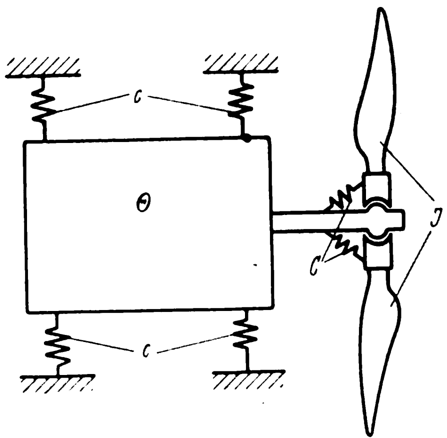


Bild 2. Schematische Darstellung des Schwingungssystems des Motors mit elastisch befestigter Schraube.

Θ_1 das Trägheitsmoment des Motors samt Schraubenmasse um die Hochachse,
Θ_2 das Trägheitsmoment des Motors samt Schraubenmasse um die Querachse,
c_1 die Federung des Motors um die Hochachse,
c_2 die Federung des Motors um die Querachse,
C die Federung der Nabe (um alle Achsen gleich),
J_p das polare und
J das äquatoriale Trägheitsmoment der Schraube,
ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraube,
$\overline{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs in der Kurve,
γ die Schwingungsfrequenz,
φ und α Winkelausschläge des Motors bzw. Schraube um die Hochachse,
ψ und β Winkelausschläge des Motors bzw. Schraube um die Querachse.

Mit diesen Bezeichnungen lauten die Bewegungsgleichungen für das in Bild 1 schematisch gezeichnete Schwingungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \Theta_1 \ddot{\varphi} + c_1 \varphi + C(\varphi - \alpha) = 0 \\ \text{II.} & \Theta_2 \ddot{\psi} + c_2 \psi + C(\psi - \beta) = 0 \\ \text{III.} & J \ddot{\alpha} + C(\alpha - \varphi) - J_p \omega \dot{\beta} = 0 \\ \text{IV.} & J \ddot{\beta} + C(\beta - \psi) + J_p \omega \dot{\alpha} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi = \Phi \sin \gamma t \qquad \alpha = A \sin \gamma t$$
$$\psi = \Psi \cos \gamma t \qquad \beta = B \cos \gamma t$$

ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & (c_1 + C - \Theta_1 \gamma^2)\,\Phi = C A \\ \text{II.} & (c_2 + C - \Theta_2 \gamma^2)\,\Psi = C B \\ \text{III.} & (C - J\gamma^2)\,A + J_p \omega \gamma B = C \Phi \\ \text{IV.} & (C - J\gamma^2)\,B + J_p \omega \gamma A = C \Psi \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Multipliziert man in (2) die Gl. (I) und (II) mit C und setzt (III) und (IV) ein, so folgt

$$\left.\begin{array}{l} \{c_1 + C - \Theta_1 \gamma^2\}\,\{(C - J\gamma^2)\,A + J_p \omega \gamma B\} = C^2 A \\ \{c_2 + C - \Theta_2 \gamma^2\}\,\{(C - J\gamma^2)\,B + J_p \omega \gamma A\} = C^2 B \end{array}\right\} (3)$$

Die vier Eigenfrequenzen erhält man dann aus der Gleichung 8. Grades für γ, die sich durch Elimination von A und B aus (3) ergibt. Der Einfachheit halber setzen wir $c_1 = c_2 = c$ und $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$, was für Sternmotoren annähernd richtig ist, und erhalten aus (3), weil dann $A = \pm B$

$$\gamma^4 - \gamma^2 \left\{\frac{C}{J} + \frac{c + C}{\Theta}\right\} + \frac{c\,C}{J\,\Theta} \pm 2\,\omega\,\gamma \left(\gamma^2 - \frac{c + C}{C}\right) = 0\,. \quad (4)$$

Hieraus sind die vier Eigenfrequenzen zu berechnen, aus deren Lage die Größe C zu bestimmen ist. Sie sollen möglichst so liegen, daß die entsprechenden kritischen Drehzahlen weit unterhalb des Betriebsdrehzahlbereichs liegen. Es ist jedoch zunächst nicht nötig, die Gl. (4) streng zu lösen. Es steht ja fest, daß C mindestens so weich sein soll, daß die Schraube die Kippbewegungen des Motors kaum noch mitmacht, d. h. die Kopplung zwischen den Gleichungspaaren (I), (II) und (III), (IV) in (1) sehr lose ist. Wie bei einem Zweimassensystem gilt für den Kopplungsfaktor $K = \sqrt{\frac{C}{c + C}}$, der hier von der Größenordnung $< 0{,}3$ sein muß. Dann sind jedoch die sich einstellenden Koppelfrequenzen nicht viel von den sich aus den ungekoppelten Gleichungen ergebenden Eigenfrequenzen verschieden. Diese ergeben sich aus (1), wenn im ersten Gleichungspaar α und β, und im zweiten φ und ψ gleich 0 gesetzt werden. Für den vereinfachten Fall, daß die ungekoppelten Kippschwingungen des Motors um Hoch- und Querachse einander gleich sind, kann dann Gl. (4) geschrieben werden

$$\left\{\gamma^2 - \frac{c + C}{\Theta}\right\} \left\{\gamma^2 \pm 2\,\omega\,\gamma - \frac{C}{J}\right\} = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

Damit werden die Eigenschwingungen

$$\gamma_{1,2} = \sqrt{\frac{c + C}{\Theta}} \qquad \gamma_{3,4} = \sqrt{\frac{C}{J}}\,\sqrt{\frac{v}{v \pm 2}}$$

wobei $v = \frac{\gamma}{\omega}$. Wenn k_L die Erregerordnung luftschraubenseitig und k_M motorseitig ist, so ist im ersten Fall $v = k_L$ und im zweiten Fall $v = k_M \cdot i$, mit i als Untersetzungsverhältnis. Je größer demnach v ist, desto weniger weichen γ_3 und γ_4 voneinander ab.

Nun zur Bemessung der Größe C. Die größte auftretende Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs in der Kurve sei mit $\overline{\omega}_{max}$ bezeichnet, das Kreiselmoment mit M_k. Soll sich die Schraube auch bei der höchsten Drehzahl ω_{max} nicht mehr als 10° gegen ihre Normallage neigen, so muß sein

$$C = \frac{M_{k\,max}}{0{,}175} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wobei $\qquad M_{k\,max} = J_p \cdot \omega_{max} \cdot \overline{\omega}_{max}$.

Damit werden die beiden Eigenfrequenzen der Schraube

$$\gamma_{3,4} = 3{,}4\,\sqrt{\omega_{max} \cdot \overline{\omega}_{max}}\,\sqrt{\frac{v}{v \pm 2}}.$$

Die so bestimmten Eigenfrequenzen sind also von der Größe der Schraube selbst nur insoweit abhängig, als der Wert ω_{max} von dieser bestimmt wird.

Als Beispiel wählen wir einen 1500-PS-Motor mit $i = 1{,}6$ und $\omega_{max} = 150\ \text{s}^{-1}$. Bild 2 zeigt hierfür die Abhängigkeit der beiden Eigenfrequenzen n_3 und n_4 min^{-1} von der Größe v für einen Wert von $\overline{\omega}_{max} = 2\ \text{s}^{-1}$. Die Eigenfrequenzen n_M des elastisch aufgehängten Motors selbst wird man etwa in die Nähe von $n_M = 1000$ min^{-1} legen, so daß alle kritischen Drehzahlen weit genug unter den Betriebsdrehzahlbereich fallen.

Als niedrigste Erregerordnung käme in Frage $k_L = 3$ schraubenseitig und $k_M = 1{,}5$ motorseitig, da $v > 2$ sein muß, soll sich die obere der beiden Eigenfrequenzen der Schraube überhaupt erregen können. Aus Bild 3 ist zu ersehen, daß die obere Eigenfrequenz für $v = 1{,}5 \cdot 1{,}6 = 2{,}4$ noch reichlich hoch liegt. Liegen die Verhältnisse so, daß mit dieser Erregerordnung gerechnet werden muß, so muß die Größe C erniedrigt werden. Da sich dann aber die Schraube während des Kurvenflugs schon bei Werten von $\overline{\omega}_{max} < 2\ s^{-1}$ mehr als 10° neigen würde, müßten Anschläge vorgesehen werden, die dies verhinderten. Für Erregerordnungen > 3 schraubenseitig und > 2 motorseitig würden jedoch alle kritischen Drehzahlen auch bei härterer

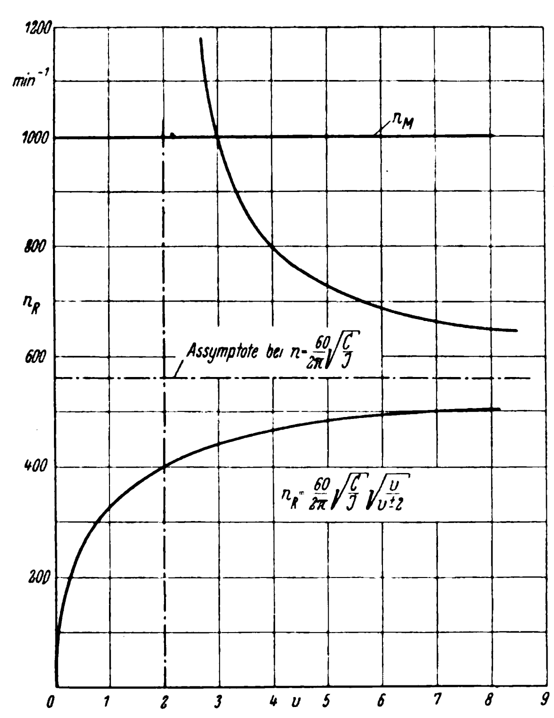


Bild 3. Die Resonanzfrequenzen n_R der elastisch befestigten Schraube für die verschiedenen Erregerordnungen $v = k_L$ bzw. $i \cdot k_M$.

Federung C weit genug unter den Betriebsdrehzahlbereich fallen.

Zum Schluß noch eine kurze Nachprüfung der Größe C im Hinblick auf den von ihr gebildeten Kopplungsfaktor. Nach Gl. (6) ergibt sich mit $J_p = 400$ kgcms², $\omega_{max} = 150\ s^{-1}$ und $\overline{\omega}_{max} = 2\ s^{-1}$ ein Wert von

$$C = 685000 \text{ cmkg}.$$

Wenn $n_M = 1000\ min^{-1}$ sein soll, d. h.

$$\gamma_M = \sqrt{\frac{c}{\Theta}} = 105\ s^{-1}$$

so folgt mit $\Theta = 1300$ cmkgs² und $c = 1300 \cdot 11000 = 14300000$ cmkg

$$K = \sqrt{\frac{C}{c+C}} = 0{,}214.$$

Damit ist die Entkopplung von Motor- und Schraubenkippschwingung gewährleistet und die Berechtigung für die obige genäherte Berechnung der Eigenschwingungszahlen nachgewiesen.

V. Zusammenfassung.

Behandelt werden verschiedene Schwingungsbeanspruchungen der Luftschraube und deren Bekämpfung durch elastische Verbindung von Schraube und Motor. Anschließend wird eine Maßnahme besprochen, die die Schraube vor Taumelbewegungen und damit vor den dadurch geweckten Kreiselwechselmomenten bewahren soll. Dazu werden die entsprechenden Schwingungsgleichungen aufgestellt und hieraus auf die Größe der anzubringenden Federung geschlossen.

VI. Schrifttum.

[1] Havers-Meyer, Fliehkraftschwingungen von án der Nabe allseitig gelenkig angebrachten Luftschraubenblättern. Jahrbuch 1938 d. dtsch. Luftfahrtforschung. S. I 420.

[2] O. Kraemer, Schwingungstilgung durch das Taylor-Pendel. Z. VDI, Bd. 82 (1938), Nr. 45, S. 1297.

[3] Stieglitz, Beeinflussung von Drehschwingungen durch pendelnde Massen. Jahrbuch 1938 d. dtsch. Luftfahrtforschung, S. III 164.

[4] Schick, Wirkung und Abstimmung von Fliehkraftpendeln am Mehrzylindermotor. Ing. Archiv Bd. 10 (1939), Nr. 5, S. 303.

[5] Kearns, Vibration Characteristics of Aircraft Engine-Propeller-Systems. SAE-Journal Dez. 1939.

[6] J. Meyer, Verlagerung der Eigenfrequenzen eines elastisch aufgehängten Motors durch die Kreiselwirkung der Luftschraube. Jahrbuch 1938 d. dtsch. Luftfahrtforschung. S. II 179.

[7] G. Bock, Die Kreiselmomente der Luftschraube. Luftwissen Bd. 8 (1941), Nr. 3.

[8] Grammel, Die Trägheitswirkungen in der Luftschraube des kurvenden Flugzeugs. Schriften d. Dtsch. Akad. d. Luftfahrt-Forschung, H. 36.

Ähnlichkeitsbetrachtungen an Strömungsmaschinen für Gase.

Von E. Eckert.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Die Ähnlichkeitstheorie vermag bei der Entwicklung der Strömungsmaschinen wichtige Dienste zu leisten. Entsprechend der wachsenden Bedeutung dieser Maschinengattung für die Flugzeugtriebwerke werden daher die Ähnlichkeitsbedingungen für den Strömungsvorgang, für die Beanspruchung der umlaufenden Maschinenteile und für die Lager zusammengestellt.

Gliederung.

1. Einleitung.

Durch das Bestreben, die Fluggeschwindigkeit und die Gipfelhöhe der Flugzeuge zu steigern, treten Strömungsmaschinen als Teile von Flugzeugtriebwerken immer stärker in den Vordergrund, und zwar sowohl als Lader wie auch als Turbinen (Turbolader). Da an die Flugzeugtriebwerke sehr hohe Anforderungen in bezug auf niedrigen Brennstoffverbrauch und günstiges Leistungsgewicht gestellt werden müssen, wird eine Weiterentwicklung der Strömungsmaschine auf günstigen Wirkungsgrad und niedriges Baugewicht hin auch bei dem heutigen Stande noch angestrebt. Für eine systematische Erforschung der Vorgänge in solchen Maschinen, die die Voraussetzung für diese Weiterentwicklung ist, bietet die Ähnlichkeitsmechanik ein wertvolles Hilfsmittel [1][1]). Sie wird daher im Strömungsmaschinenbau schon seit längerer Zeit verwendet, allerdings nicht für alle Maschinengattungen in dem gleichen Maße. Während sie beispielsweise für die Entwicklung von Wasserturbinen unentbehrlich geworden ist [2] und heute auch für Pumpen [3] und Verdichter, vor allem für Axialverdichter [4] herangezogen wird, ist sie dem Dampfturbinenbau verhältnismäßig fremd geblieben. Erst in neuester Zeit zeigt sich das Bestreben, sie auch dort einzuführen [5]. Da durch die oben skizzierte Entwicklung der Flugzeugtriebwerke auch der Motorenbauer, dem die Ähnlichkeitstheorie ferner liegt, an der Entwicklung der Strömungsmaschine immer stärker interessiert ist, sollen im folgenden zusammenfassend sowohl für Lader wie auch für Turbinen die Ähnlichkeitsbeziehungen abgeleitet werden, deren Einhaltung bei hydraulischer Ähnlichkeit, bei Ähnlichkeit in bezug auf die Spannungen in den umlaufenden Maschinenteilen und bei Ähnlichkeit der Schmiervorgänge in den Lagern gefordert werden muß. Es wird sich dabei zeigen, daß durch eine derartige zusammenfassende Betrachtung auch verschiedene neue Gesichtspunkte für die Entwicklung der Strömungsmaschinen als Bestandteile von Flugzeugtriebwerken gewonnen werden können.

2. Hydraulische Ähnlichkeit.

Den größten Einfluß auf das Arbeiten einer Strömungsmaschine hat naturgemäß der Strömungsvorgang des Gases selbst. Es soll daher zunächst untersucht werden, wann der Strömungsvorgang in zwei Maschinen der gleichen Bauart ähnlich verläuft. Wie bei allen Ähnlichkeitsbetrachtungen ergibt sich, daß eine Reihe dimensionsloser Kennzahlen für beide Maschinen den gleichen Zahlenwert haben müssen, wenn die Strömungsvorgänge in beiden ähnlich verlaufen sollen [6]. Diese Kennzahlen sind naturgemäß von der gleichen Art wie bei allen Strömungsvorgängen. Da die Kenntnis der Kennzahlen für Strömungsvorgänge wohl allgemein verbreitet ist, sollen sie nur an einem einfachen Beispiel in Erinnerung gebracht und sodann an die speziellen Verhältnisse bei Strömungsmaschinen angepaßt werden. Zu diesem Zweck betrachten wir die Strömung um zwei tragflügelförmige Profile *I* und *II* von verschiedener Größe, wie sie in Bild 1 dargestellt sind. Damit der Strömungsvorgang um beide Profile ähnlich ist, müssen wir zunächst geometrische Ähnlichkeit für beide Profile fordern, d. h. wenn die Flügeltiefe t die Größe der beiden betrachteten Flügel festlegt, müssen sämtliche übrigen Abmessungen der Flügel, geteilt durch die Flügeltiefe, für beide Profile den gleichen Zahlenwert ergeben. Beispielsweise muß das Verhältnis d/t, der Flügeldicke d zur Flügeltiefe t bei beiden Profilen die gleiche Größe haben ($d/t = d'/t'$). Wenn die Flügel nicht als unendlich lang angesehen werden können, gilt das gleiche natürlich auch für die Flügelbreite b. Die geometrische Ähnlichkeit muß sich auch auf die Feingestaltung der Flügeloberfläche erstrecken. Wenn etwa die Rauhigkeit durch eine mittlere Höhe der Rauhigkeitserhebungen k gekennzeichnet wird, muß wieder das Verhältnis k/t bei beiden Flügeln den gleichen Zahlenwert annehmen. Als zweites muß gefordert werden, daß das Geschwindigkeitsfeld in großer Entfernung vom Tragflügel für beide Fälle *I* und *II* ähnlich ist, d. h. wenn wir wieder den Maßstab für die Geschwindigkeiten durch eine herausgegriffene Geschwindigkeit c_0 an einem in beiden Fällen geometrisch ähnlich liegenden Punkte kennzeichnen, so muß das Verhältnis c/c_0 der Geschwindigkeit c zur Bezugsgeschwindigkeit c_0 jeweils auch für die übrigen ähnlich liegenden Punkte der Berandung des Strömungsfeldes in beiden Fällen ebenfalls den gleichen Wert haben ($c/c_0 = c'/c_0'$). Wir können diese Forderung auch so ausdrücken, daß wir ver-

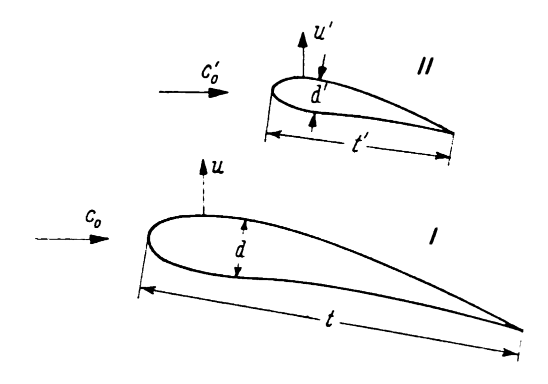


Bild 1. Strömung um zwei ähnliche Tragflügel.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende des Aufsatzes hin.

langen, daß das gesamte Strömungsfeld, das in beiden Fällen vorhanden ist, wenn wir den Tragflügel wegnehmen, in seiner ganzen Ausdehnung für beide Fälle ähnlich sein muß. Zur Berandung des Strömungsfeldes haben wir auch noch die Oberfläche des Tragflügels selbst zu rechnen. Wenn der Tragflügel in Ruhe ist, sind die Strömungsgeschwindigkeiten an seiner Oberfläche Null. Die Ähnlichkeitsbedingung ist dann für die Oberfläche des Tragflügels von vornherein erfüllt und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden. Bewegt sich dagegen der Tragflügel selbst mit der Geschwindigkeit u etwa senkrecht zur Strömungsrichtung, so muß auch das Geschwindigkeitsverhältnis u/c_0 für die beiden verglichenen Fälle denselben Zahlenwert haben ($u/c_0 = u'/c_0'$).

Wenn die genannten Voraussetzungen erfüllt sind und außerdem noch die Reynoldssche Kennzahl für die Strömung um die Tragflügel a und b gleich ist, ist die Strömung von unzusammendrückbaren Flüssigkeiten in allen ihren Einzelheiten für beide Fälle ähnlich. Die Reynoldssche Kennzahl kann mit einer beliebig herausgegriffenen Geschwindigkeit und Länge gebildet werden, im vorliegenden Fall ist es wohl zweckmäßig, c_0 als Geschwindigkeit und die Tragflügeltiefe t als Längenmaß einzusetzen. Die Reynoldssche Kennzahl Re erhält damit die Form $c_0\, t/\nu$ (ν kinematische Zähigkeit). Die letzte Ähnlichkeitsbedingung lautet dann $c_0\, t/\nu = c_0'\, t'/\nu'$. Zu den unzusammendrückbaren Flüssigkeiten lassen sich auch die Gase zählen, solange die auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten klein sind gegen die Schallgeschwindigkeit.

Bei rasch strömenden Gasen dagegen kommen zu den geschilderten noch weitere Bedingungen hinzu [7]. Die folgenden Betrachtungen sollen auf ideale Gase beschränkt werden, da bei diesen die Ähnlichkeitsbedingungen sehr viel einfacher zu erfüllen sind. Die Beschränkung auf ideale Gase bedeutet im vorliegenden Fall nur eine sehr kleine Einschränkung des Gültigkeitsbereiches unserer Betrachtungen, denn so groß, daß sich Abweichungen des Verhaltens der durchströmenden Gase von einem idealen Gas merkbar machen würden, sind die Druckunterschiede in einer Stufe einer Strömungsmaschine nicht. Nur Strömungsmaschinen, die Dämpfe in der Nähe des Sättigungszustandes verarbeiten, können abweichende Verhältnisse zeigen. Da bei veränderlicher Dichte die Geschwindigkeiten auch von den Temperaturen abhängen, muß nunmehr außer der Ähnlichkeit des Geschwindigkeitsfeldes an den Berandungen auch noch gefordert werden, daß das Feld der absoluten Temperaturen T an der Berandung ähnlicher Fälle ähnlich ist. Außerdem muß die Machsche Kennzahl Ma, das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit den gleichen Zahlenwert haben, wobei die Strömungsgeschwindigkeit und die Schallgeschwindigkeit wieder an ähnlich gelegenen Punkten zu betrachten sind. Im vorliegenden Falle wird man wieder zweckmäßig die Machsche Zahl in der Weise bilden, daß man die Anströmgeschwindigkeit c_0 durch die Schallgeschwindigkeit des Gases c_s beim Anströmzustand teilt. Weiter darf man nur die Strömung von Gasen gleicher Atomzahl im Molekül miteinander vergleichen. Da sowohl die Prandtlsche Kennzahl $Pr = \nu/a$ (a Temperaturleitfähigkeit) als auch der Adiabatenexponent $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ (c_p spezifische Wärme bei konstantem Druck, c_v spezifische Wärme bei konstantem Volumen) bei idealen Gasen nur von der Atomzahl eines Moleküls abhängt, kann die letzte Bedingung auch so ausgesprochen werden, daß die Prandtlsche Kennzahl oder die Kennzahl $\varkappa$ für ähnliche Vorgänge den gleichen Zahlenwert haben muß.

Dies sind alle notwendigen Voraussetzungen für die Ähnlichkeit der Strömungen um die beiden Tragflügel auch bei zusammendrückbaren Gasen; bei ihrer Erfüllung sind auch alle Wirkungen, die durch die Strömung hervorgerufen werden, in beiden Fällen die gleichen. Wenn es z. B. zu einer Ablösung der Strömung am Tragflügel kommt, so liegt der Ablösungspunkt bei beiden Tragflügeln an der gleichen Stelle. Auch die Druckverteilung um die Profile ist in beiden Fällen die gleiche. Ebenso sind die Kraftwirkungen, die die Strömung auf die Tragflügel ausübt, ähnlich. Im allgemeinen erfährt der Tragflügel einen Auftrieb A quer zur Anströmrichtung und einen Widerstand W in Anströmrichtung. Wenn wir beide Kräfte in der üblichen Weise dimensionslos machen, indem wir sie durch den Staudruck q und eine vereinbarte Fläche F, etwa $t\,b$, dividieren, so haben die auf diese Weise gewonnenen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte

$$c_A = \frac{A}{q\,F} \text{ und } c_W = \frac{W}{q\,F}$$

für beide Tragflügel je den gleichen Zahlenwert. Allgemein gilt daher für einen beliebig angeströmten Tragflügel eine Kenngrößenbeziehung

$$c_A = f\,(d/t,\; c/c_0,\; u/c_0\; T/T_0,\; Re,\; Ma,\; Pr) \quad . \; . \; . \; (1)$$

und ebenso für den Widerstand

$$c_W = g\,(d/t,\; c/c_0,\; u/c_0\; T/T_0,\; Re,\; Ma,\; Pr) \quad . \; . \; . \; (2)$$

Dabei treten zu der ersten Kenngröße d/t noch andere gleichartige, wenn die geometrische Ähnlichkeit noch von anderen Längenabmessungen abhängt. Das gleiche gilt für die nächsten zwei Kenngrößen, die die Ähnlichkeit des Geschwindigkeitsfeldes an den Berandungen und für die vierte, die jene des Temperaturfeldes vorschreibt. Die angegebenen Kenngrößen lassen sich auch beliebig durch andere ersetzen. Wenn wir uns beispielsweise aus der zweiten Kenngrößenbeziehung das Geschwindigkeitsverhältnis u/c_0 ausgerechnet und in die erste Gleichung eingesetzt denken, erhalten wir die Beziehung

$$c_A = f\,(d/t,\; c/c_0,\; c_W,\; T/T_0,\; Re,\; Ma,\; Pr) \quad . \; . \; . \; (3)$$

In gleicher Weise können wir jede Kenngröße in Gleichung (1) oder (2) durch eine beliebige andere ersetzen. Wesentlich ist dabei nur, daß bei einer solchen Transformation die Anzahl der Kenngrößen erhalten bleiben muß.

Die im vorstehenden in Erinnerung gebrachten Ähnlichkeitsbeziehungen sollen nunmehr auf die Strömungsmaschine übertragen werden. Bild 2 zeigt den Schnitt durch eine einstufige Strömungsmaschine für axialen Durchfluß. Die Maschine besteht in Bild 2 aus einem Leitrad a und einem Laufrad b. Das Leitrad kann im übrigen vor oder nach dem Laufrad angeordnet sein, es kann auch überhaupt fehlen. Ebenso ist es für die folgenden Betrachtungen gleichgültig, ob die Maschine für axialen Durchfluß, wie in Bild 2, oder als Radialmaschine gebaut ist. Auch für mehrstufige Maschinen lassen sich die gleichen Ähnlichkeitsbeziehungen aufstellen, obgleich sie meist nur für eine Stufe angestellt werden, da sich die mehrstufige Maschine dann einfach aus dem Aneinanderfügen einer Anzahl von Maschinenstufen ergibt[2]). Zur Ableitung der Ähnlichkeitsbeziehungen denken wir uns die Strömungsmaschine nach Bild 2 in zwei Ausführungen vorgegeben, von denen die eine durch eine Maßstabsvergrößerung aus der zweiten hervorgegangen ist. Beide betrachteten Maschinen sind also geometrisch ähnlich. Die Ähnlichkeit muß sich wieder auf sämtliche Abmessungen

[2]) Die Beziehungen, die zwischen dem Wirkungsgrad und der Druckzahl einer Stufe und einer mehrstufigen Maschine bestehen, behandelt F. Weinig, Motortechn. Z., Bd. 3 (1941), S. 223.

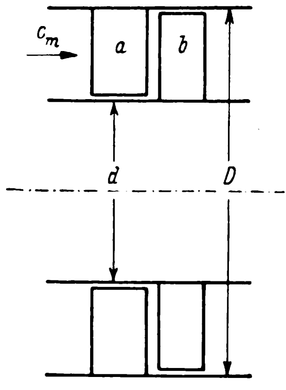


Bild 2. Stufe einer Strömungsmaschine. a Leitrad, b Laufrad.

der Maschine erstrecken, unter anderem auch auf die axialen und radialen Spalte zwischen Laufrad und Leitapparat und auf die Oberflächenrauhigkeit. Da die Ähnlichkeit in bezug auf die Oberflächengüte verlangt, daß das Verhältnis der Rauhigkeitserhebungen k zu irgendeiner kennzeichnenden Maschinenabmessung, etwa dem Durchmesser D, bei der ähnlichen Verkleinerung der Maschine ungeändert bleibt, setzt dies für kleine Maschinen sehr gut bearbeitete Oberflächen voraus. Bei einer starken Verkleinerung der Maschinen können daraus Schwierigkeiten erwachsen. Die Strömungslehre lehrt allerdings, daß wir die letztere Forderung geometrischer Ähnlichkeit nicht immer aufrecht erhalten müssen. Es zeigt sich nämlich, daß eine Oberfläche für Strömungsvorgänge als vollkommen glatt angesehen werden kann, wenn ihre Rauhigkeiten innerhalb der an der Oberfläche sich bildenden laminaren Haut in der Grenzschicht bleiben [8]. Die Grenzschichtdicke hängt im wesentlichen von der Reynoldsschen Kennzahl ab. Es gibt daher für jede Reynoldssche Kennzahl eine bestimmte Oberflächengüte, unter die nicht gegangen zu werden braucht. Für die bei Strömungsmaschinen üblicherweise vorkommenden Reynoldsschen Zahlen läßt sich durch Schleifen oder Polieren auch bei sehr kleinen Maschinen die nötige Oberflächengüte erzielen [9]. Auch die Forderung, daß das Verhältnis der Spalthöhen zum Maschinendurchmesser bei einer Verkleinerung der Maschine unverändert bleiben muß, bringt bei einer starken Verkleinerung gewisse Schwierigkeiten mit sich, da es aus Herstellungsgründen schwierig ist, die gleichen relativen Spiele bei kleinen Abmessungen einzuhalten wie bei großen. Einen guten Anhalt dafür, was sich bearbeitungsmäßig erzielen läßt, geben die Passungsnormen. In diesen ist die Passungseinheit i (in μ) für zusammengehörige Bohrungen und Wellen in folgender Weise vom Wellendurchmesser d (in mm) abhängig gemacht

$$i = 0{,}45 \sqrt[3]{d} + 0{,}001 \cdot d \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Bei kleineren Abmessungen kann das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung vernachlässigt werden. Wenn wir eine Passung gleicher Güte für zwei verschieden große Wellen vorschreiben, ändern sich also die zulässigen Toleranzen im Spiel zwischen Bohrung und Welle mit der dritten Wurzel aus dem Wellendurchmesser. Wenn wir umgekehrt das gleiche relative Spiel fordern, ist für die kleine Welle eine genauere Passung erforderlich als für die große. So müssen wir von Qualität 11 auf Qualität 8 der ISA-Passung übergehen, wenn wir für eine Welle von 1 cm Dmr. das gleiche relative Spiel verlangen wie für eine Welle von 10 cm Dmr. Bei einer noch stärkeren Verkleinerung ist es dann wohl überhaupt nicht mehr möglich, das gleiche relative Spiel aufrecht zu erhalten. Für die zulässigen radialen Spiele an der Strömungsmaschine werden sinngemäß die gleichen Verhältnisse gelten. Die dadurch einer ähnlichen Verkleinerung entgegenstehenden Schwierigkeiten machen sich erst bei großen Maßstabsänderungen geltend.

Ähnliche Geschwindigkeiten an den Berandungen des Strömungsfeldes sind bei der Strömungsmaschine vorhanden, wenn beide Maschinen am Einlauf gleiche Geschwindigkeitsverteilung haben und wenn ein bestimmtes Geschwindigkeitsverhältnis c/u eingehalten wird, da die Laufschaufeln sich mit der Umfangsgeschwindigkeit u drehen. Als Umfangsgeschwindigkeit wird meist die am äußeren Durchmesser D des Laufrades in diese Kenngröße eingeführt. Als Strömungsgeschwindigkeit ist es üblich, die Axialkomponente c_m der mittleren Zuströmgeschwindigkeit zu wählen, da sich diese aus der freien Durchtrittsfläche

$$\frac{D^2 \pi}{4} - \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{D^2 \pi}{4} \delta$$

(d Nebendurchmesser, δ Verengungsfaktor) und dem die Maschine in der Zeiteinheit durchströmenden Flüssigkeitsvolumen V leicht berechnen läßt:

$$c_m = \frac{V}{\frac{D^2 \pi}{4} \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Kenngröße c_m/u wird **Durchflußzahl** (bei Gebläsen auch Lieferzahl oder Liefergrad) genannt und mit dem Buchstaben φ bezeichnet.

Bei Strömungsmaschinen für Gase müssen nach dem vorstehenden auch die Temperaturfelder am Einlauf ähnlich sein. Falls irgendwelche Bauteile der Maschine gekühlt werden (Schaufelkühlung), muß überdies das Verhältnis der Oberflächentemperatur des gekühlten Bauteiles zu einer charakteristischen Temperatur am Einlauf für ähnliche Fälle den gleichen Zahlenwert haben. Wenn zunächst von einer solchen Bauteilkühlung abgesehen und die geometrische Ähnlichkeit, sowie die Ähnlichkeit der Geschwindigkeits- und Temperaturfelder am Einlauf erfüllt ist, was bei Versuchen an Strömungsmaschinen fast stets zutrifft, hängt die Strömung durch die Maschine von den Kenngrößen φ, Re, Ma, Pr ab. Haben diese 4 Kenngrößen den gleichen Zahlenwert, so ist die Strömung durch die beiden verglichenen Maschinen in allen Einzelheiten ähnlich, also nicht nur die Hauptströmung durch die Verschaufelung, sondern auch die Strömung durch die Spalte und auch die Umlaufströmung am Läufer, die die Ventilationsverluste bedingt. Auch die Verluste in den Lagern sind mit eingeschlossen, wenn es sich dort um flüssige Reibung handelt und auch für die Strömung des Ölfilms die angegebenen Kennzahlen eingehalten werden. Da sich die letztere Forderung bei Versuchen jedoch selten erfüllen läßt, sollen die Lagerverluste im vorliegenden Abschnitt ausgeschaltet werden. Die Ähnlichkeitsbedingungen für die Lager werden im späteren getrennt behandelt. Der innere Wirkungsgrad η_i der Maschine (ohne Lagerreibung) hängt damit von den obigen Kenngrößen ab. Ebenso lassen sich alle übrigen für die Strömung charakteristischen Daten als Funktion dieser Kenngrößen angeben. Besonders wichtig ist bei Strömungsmaschinen die **Druckzahl** ψ, die das adiabatische Wärmegefälle h_{ad} der Maschine mit der kinetischen Energie bei Umfangsgeschwindigkeit vergleicht:

$$\psi = h_{ad} \Big/ \frac{u^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

(g Erdbeschleunigung.) Bei kleinen Druckunterschieden Δp vor und hinter der Strömungsmaschine ist das adiabatische Gefälle $h_{ad} = \Delta p/\gamma$ (γ = spezifisches Gewicht des strömenden Gases). Bei größeren Druckgefällen ist es aus der Gleichung $h_{ad} = \int dp/\gamma$ zu berechnen. Für die Druckzahl ähnlicher Maschinen gilt also die Beziehung:

$$\psi = f(\varphi, Re, Ma, Pr), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

ebenso für den Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta_i = g(\varphi, Re, Ma, Pr) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In den Ausdrücken (7) und (8) hat erfahrungsgemäß die Durchflußzahl φ das größte Gewicht, während die übrigen Kenngrößen hinter dieser in ihrer Bedeutung zurücktreten. Dies rührt daher, daß durch die Durchflußzahl der Anströmwinkel des strömenden Gases gegen die Turbinenverschaufelung gegeben ist, und daß es daher in erster Linie von der Größe dieser Kennziffer abhängt, ob die Strömung an irgendeiner Stelle der Verschaufelung abreißt. Die Reynoldssche Kennzahl hat dagegen im allgemeinen nur auf die Reibungsverluste in den Grenzschichten Einfluß, und da die Grenzschichten in den Strömungsmaschinen abgesehen von sehr kleinen Einheiten fast stets turbulent sind, ist ihre Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl nicht groß. Diese Tatsache führt dazu, daß es z. B. bei Wasserturbinen möglich ist, Wirkungsgrade und Druckzahlen, die an kleinen Modellen gemessen wurden, ohne weiteres auf Großausführungen zu übertragen, die durch eine Maßstabsvergrößerung bis zum 30-fachen aus dem Modell hervorgehen. Bei Wasserturbinen fällt nach dem früher Gesagten in den Kenngrößenbeziehungen (7) und (8) die Machsche und die Prandtlsche Kennzahl heraus, der Einfluß der Reynoldsschen Kennzahl ist so klein, daß er bei der genannten Maßstabsvergrößerung nur eine geringe Zunahme des Wirkungsgrades von wenigen Prozenten bedingt[3]). Für diese Zunahme wurden aus Erfahrungs-

[3]) Die bei Flüssigkeiten unter bestimmten Bedingungen auftretende Kaviation wird hierdurch allerdings nicht erfaßt. Doch ist sie für die vorliegenden Betrachtungen nicht von Interesse.

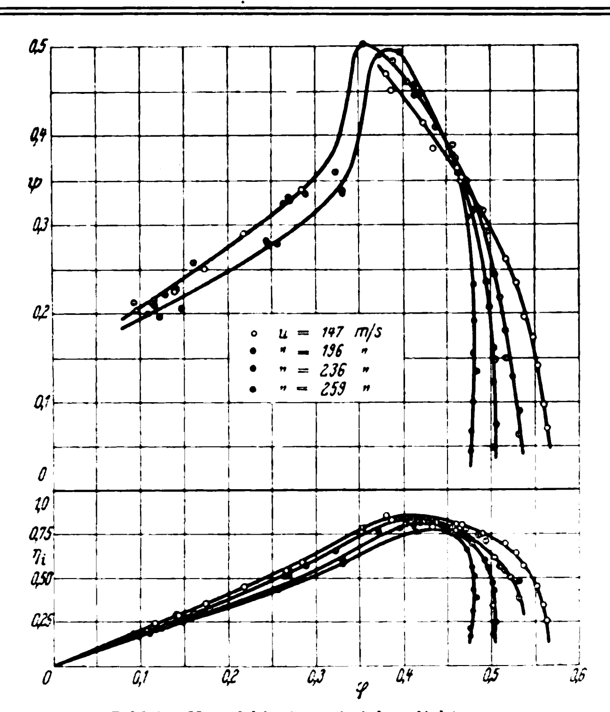


Bild 3. Kennfeld eines Axialverdichters.
φ Durchflußzahl, ψ Druckzahl, η_i innerer Wirkungsgrad, u Umfangsgeschwindigkeit.

material Formeln entwickelt, die es gestatten, gemessene Wirkungsgrade kleiner Modelle auf Großausführungen umzurechnen [2]. Für Strömungsmaschinen mit unzusammendrückbarem Arbeitsmittel bestehen also mit großer Näherung einfache Beziehungen

$$\psi = f(\varphi), \quad \eta_i = g(\varphi) \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Hierzu gehören auch Strömungsmaschinen, die mit Gasen bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten und kleinen Druckunterschieden arbeiten. Bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten tritt noch die Abhängigkeit von der Machschen und von der Prandtlschen Kenngröße hinzu. Die Bedingung konstanter Prandtlscher Zahl verlangt, daß die beiden verglichenen Maschinen von dem gleichen Gase oder zumindest von Gasen gleicher Atomzahl durchströmt werden. Doch ist anzunehmen, daß der Einfluß dieser Kennzahl auf die Strömungsvorgänge nicht sehr groß ist. Es wurden daher auch schon Modellversuche mit Luft zur Klärung der Strömungsvorgänge in Dampfturbinen ausgeführt [10]. Dagegen kann bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten, zumal wenn sie die Schallgeschwindigkeit überschreiten, der Einfluß der Machschen Kennzahl beträchtlich werden. Dieser Einfluß läßt sich am besten so feststellen, daß mit der gleichen Strömungsmaschine Versuche bei verschiedenen Drehzahlen und verschiedenen Zulaufgeschwindigkeiten ausgeführt werden. Da in diesem Falle die Änderung der Reynoldsschen Kennzahl verhältnismäßig klein ist, zeigt die dimensionslose Auftragung der Meßergebnisse unmittelbar den Einfluß der Machschen Kennzahl auf. Die dimensionslos aufgetragenen Meßergebnisse für die verschiedenen Drehzahlen müßten in eine einzige Kurve zusammenfallen, wenn ein Einfluß der Machschen Kennzahl nicht vorhanden wäre. Bild 3 bis 5 zeigen derartige Meßergebnisse an einem Axiallader, einem Radiallader und zwei Abgasturbinen. Die Kennlinien des Axialladers wurden in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen von Herrn Encke im Jahre 1929 aufgenommen (A. Betz: Jahrb. 1938 d. Deutsch. Luftfahrtforschung, Teil II, S. 183), Bild 4 wurde nach Messungen bei der Fa. Daimler-Benz [K. Kollmann: Luftwissen Bd. 7 (1940), S. 54] und Bild 5 nach Versuchen bei den Junkers-Motorenwerken gezeichnet. Bei den Abgasturbinen wurde der Wirkungsgrad über der Wurzel aus der Druckzahl aufgetragen[4]). Die Bilder zeigen, daß der Einfluß der Mach-

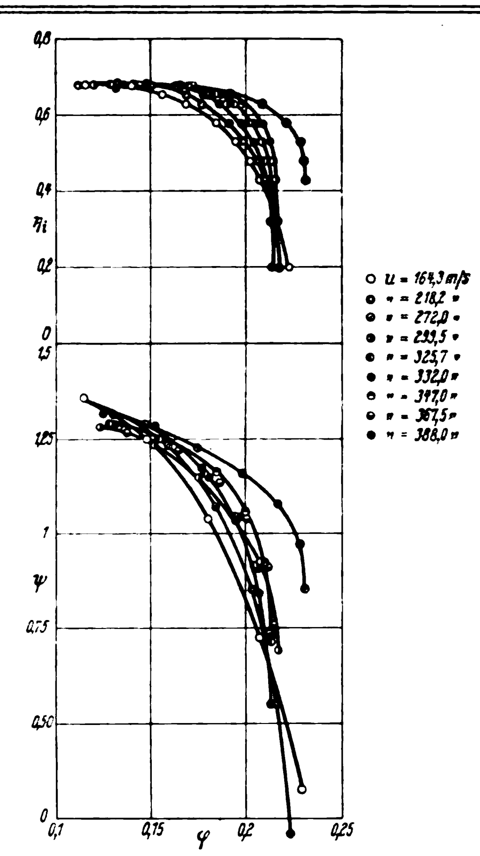


Bild 4. Kennfeld des Radialladers zum Flugmotor DB 600.
φ Durchflußzahl, ψ Druckzahl, η_i innerer Wirkungsgrad, u Umfangsgeschwindigkeit.

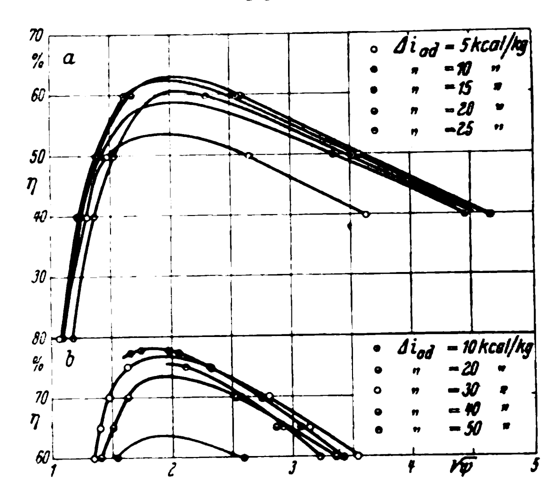


Bild 5. Kennfeld zweier Abgasturbinen zum Flugmotor Jumo 207.
a Gleichdruckturbine, b Überdruckturbine, ψ Druckzahl, η ges. Wirkungsgrad, Δi_{ad} verarbeitetes Wärmegefälle.

schen Kennzahl in dem untersuchten Drehzahlenbereich noch ziemlich klein ist. Vor allem fallen bei den Ladern die Druckzahlen einigermaßen gut in eine einzige Kurve zusammen, wenn man jeweils von der größten Umfangsgeschwindigkeit absieht. Dies überrascht vor allem bei dem Radiallader, der im Laufrad mit recht großen Druckunterschieden arbeitet, bei dem sich also das spezifische Gewicht der Luft beim Durchströmen recht beträchtlich ändert. Es ist dabei zu beachten, daß bei Radialmaschinen im Laufrad beachtliche Druckunterschiede entstehen können, auch wenn die relativen Durchströmgeschwindigkeiten w klein bleiben, da für die Druckänderungen im Laufrad die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{dp}{\varrho} + d\left(\frac{w^2}{2}\right) - d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

[4]) Bei der Gleichdruckturbine entspricht dies im wesentlichen dem Verhältnis der Austrittsgeschwindigkeit aus dem Leitapparat c_1 zur Umfangsgeschwindigkeit, da abgesehen von einem kleinen Verlust die Gleichung besteht $c_1 = c_{ad} = \sqrt{2\,g\,h_{ad}}$. Bei der Überdruckturbine ist die Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse nur ein durch den Reaktionsgrad gegebener Bruchteil von c_{ad}.

Nach dieser Gleichung entstehen also im Laufrad Druckunterschiede infolge einer Veränderung der Umfangsgeschwindigkeit u, auch wenn die relative Durchströmgeschwindigkeit unverändert bleibt. Ein Einfluß der veränderlichen Dichte, der durch die Machsche Kennzahl charakterisiert wird, kann also in diesem Falle auch schon bei kleinen Relativgeschwindigkeiten w vorhanden sein[8]). Der Wirkungsgrad von Strömungsmaschinen wird nach Bild 3 bis 5 von der Machschen Kennzahl etwas stärker beeinflußt als die Druckzahl. Zu beachten ist hier, daß die Wirkungsgrade in Bild 3 und 4 innere Wirkungsgrade sind, während die in Bild 5 auch die Lagerreibung einschließen, die nach dem vorstehenden eigentlich ausgeschaltet werden müßte. Dies ist neben einem kleinen Einfluß der Reynoldsschen Kennzahl vor allem der Grund dafür, daß in Bild 5 der Wirkungsgrad auch bei abnehmender Drehzahl von einer bestimmten Grenze an wieder absinkt und bei sehr kleinen Drehzahlen bzw. Wärmegefällen zum Teil beträchtlich niedriger liegt. Für einen ersten Überblick über das Verhalten einer Strömungsmaschine braucht nach dem Gesagten nur der Einfluß der Durchflußzahl φ untersucht zu werden, während für genauere Betrachtungen auch die übrigen Kennzahlen mit zu berücksichtigen sind.

An Stelle der Durchflußzahl wird im Strömungsmaschinenbau oft eine andere Kenngröße, die »spezifische Drehzahl«, verwendet. Diese erhält man aus der Durchflußzahl φ und der Druckzahl ψ, wenn man den Ausdruck $\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt[4]{\psi^3}}$ bildet. Er ergibt sich, wenn man noch die Drehzahl n mit Hilfe der Gleichung $u = D\pi n$ und das Durchflußvolumen aus Gl. (5) sowie das Wärmegefälle aus Gl. (6) einführt, zu

$$\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt[4]{\psi^3}} = \sqrt{\frac{\pi\sqrt{2}}{\delta}}\;\frac{n\sqrt{V}}{\sqrt[4]{(g\,h_{ad})^3}} \quad \ldots\ldots (11)$$

Da für ähnliche Strömungsvorgänge sowohl φ als auch ψ einen konstanten Zahlenwert hat, muß das gleiche auch für den Ausdruck in Gl. (11) gelten. Für geometrisch ähnliche Maschinen hat δ einen unveränderlichen Wert, so daß auch die Größe $\frac{n\sqrt{V}}{\sqrt[4]{(g\cdot h_{ad})^3}}$ eine Kenngröße darstellt. Sie hat den Vorteil, daß sie aus lauter Maßgrößen zusammengesetzt ist, die beim Entwurf einer Maschine vorgegeben sind. Die spezifische Drehzahl entsteht aus ihr, wenn im Nenner die Erdbeschleunigung g, die an sich stets als konstant angenommen werden kann, weggelassen wird. Die so übrigbleibende spezifische Drehzahl $n_s = \frac{n\sqrt{V}}{\sqrt[4]{h_{ad}^3}}$ hat allerdings den Nachteil, daß sie nicht mehr dimensionslos ist. Sie hat auch nicht die Dimension einer Drehzahl; ihre Bezeichnung ist daher etwas irreführend. Die spezifische Drehzahl stimmt nur ihrem Zahlenwert nach mit der Drehzahl einer Maschine überein, die die Durchflußmenge 1 bei einem adiabatischen Gefälle 1 verarbeitet. Durch diese Kennzahl kann in den vorstehenden Gl. (7) und (8) eine beliebige Kenngröße, beispielsweise die Kenngröße φ, ersetzt werden. Auch die für angenäherte Ähnlichkeit geltenden Beziehungen (9) lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$\psi = f(n_s),\quad \eta_i = g(n_s) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Darüber hinaus wird die spezifische Drehzahl auch noch zur Charakterisierung einer Strömungsmaschine bestimmter Form verwendet, indem man die spezifische Drehzahl, bei der die Maschine ihr Wirkungsgradmaximum erreicht, als ihre spezifische Drehzahl schlechthin bezeichnet. Hierdurch läßt sich bei Strömungsmaschinen eine bestimmte Bauart (Schnelläufer, Langsamläufer) durch eine Zahlenangabe kennzeichnen. Die Übertragung dieser bei Wasserturbinen schon lange üblichen Kennzeichnung auf Gebläse wurde von C. Keller [4] und auf Dampfturbinen von E. Sörensen [5] vorgenommen.

Zu beachten ist bei den in diesem Abschnitt entwickelten Beziehungen, daß die Gl. (7) und (8), die die Bedingungen für strenge Ähnlichkeit der Strömungsvorgänge in ähnlichen Maschinen angeben, aus der allgemeinen Ähnlichkeitstheorie abgeleitet sind und daher stets gelten müssen, auch einer Bestätigung durch Versuche gar nicht bedürfen. Dagegen sind die Beziehungen für angenäherte Ähnlichkeit in den späteren Gleichungen immer wieder durch Experimente zu prüfen.

8. Ähnlichkeit der Werkstoffbeanspruchungen.

Durch den im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Strömungsvorgang wird der Wirkungsgrad, d. h. der Brennstoffverbrauch, bestimmt. Bei Flugzeugtriebwerken ist es aber von ebenso großer Bedeutung, auch ein niedriges Leistungsgewicht zu erzielen. Das niedrigste Leistungsgewicht der Maschine wird dann erreicht, wenn die Spannungen in allen Teilen gerade den zulässigen Wert annehmen. Bei Strömungsmaschinen für gasförmige Mittel, die mit nicht zu hohen Drücken arbeiten, sind die durch Fliehkräfte beanspruchten, umlaufenden Teile diejenigen, die das meiste Gewicht benötigen. Es wird daher im folgenden untersucht, welche Ähnlichkeitsbedingungen für den Spannungszustand von Maschinenteilen angegeben werden können, die unter dem Einfluß von Massenkräften (Fliehkraft) und von elastischen Kräften stehen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Stoff, aus dem die betrachteten Teile bestehen, dem Hookeschen Gesetz folgt, daß also die Formänderungen den auftretenden Spannungen verhältnisgleich sind. Unter dieser Voraussetzung besteht Ähnlichkeit für das Spannungsfeld in zwei geometrisch ähnlichen, durch Trägheitskräfte beanspruchten Teilen, wenn zwei Kennzahlen den gleichen Zahlenwert haben, und zwar die Poissonsche Zahl m, d. i. das Verhältnis der Längsdehnung zur Querkürzung und die Cauchysche Kennzahl $Ca = \frac{v^2}{E/\varrho}$ [12]. Dabei ist v die Geschwindigkeit des Bauteiles an irgendeinem Bezugspunkt, E der Elastizitätsmodul des Stoffes und ϱ seine Dichte. Wenn für zwei geometrisch ähnliche Bauteile die Konstanz dieser beiden Kennzahlen erfüllt ist, muß auch der Verlauf der Spannungen in beiden Teilen ähnlich sein. Wenn wir die Spannung σ in geeigneter Weise dimensionslos machen, beispielsweise durch Teilung mit dem Produkt ϱv^2, muß die dimensionslose Größe $\sigma/\varrho v^2$ dann für beide Teile an ähnlich gelegenen Punkten den gleichen Zahlenwert annehmen. Allgemein besteht also für geometrisch ähnliche Bauteile die Beziehung:

$$\frac{\sigma}{\varrho\cdot v^2} = f\left(\frac{v^2}{E/\varrho},\, m\right) \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Die Poissonsche Zahl m hat für alle Metalle nahezu den gleichen Zahlenwert. Wenn daher nur Bauteile aus Metallen untereinander verglichen werden, braucht man die Poissonsche Zahl nicht weiter zu beachten. Jeder durch Massenkräfte beanspruchte Bauteil kann in Schwingungen geraten und hat daher einen kritischen Zustand, in dem die Spannungen σ an jeder Stelle ihren Höchstwert erreichen. Damit muß auch die dimensionslose Größe $\frac{\sigma}{\varrho v^2}$ in diesem Zustand einen ausgezeichneten Wert annehmen; daher ist für eine bestimmte Poissonsche Zahl der durch eine Geschwindigkeit v_{krit} gekennzeichnete kritische Zustand durch eine bestimmte Größe der Kennzahl $\frac{v_{krit}^2}{E/\varrho}$ festgelegt. Die Gl. (13) läßt sich nunmehr durch Einführen dieser Größe umformen in:

$$\frac{\sigma}{\varrho v^2} = f\left(\frac{v}{v_{krit}},\, m\right) \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Der Einfluß der Kennzahl $\frac{v}{v_{krit}}$ macht sich erfahrungsgemäß nur in der Nähe des kritischen Zustandes geltend, so daß für Betriebszustände, die genügend weit hiervon ent-

[8]) An Stelle der Machschen Kennzahl kann auch das Verhältnis der spezifischen Volumen an charakteristischen Punkten als Kenngröße eingeführt werden, wie dies E. Sörensen vorschlug [11].

fernt sind, die dimensionslose Größe $\frac{\sigma}{\varrho v^2}$ nur mehr eine Funktion der Poissonschen Zahl m allein ist

$$\frac{\sigma}{\varrho v^2} = f(m) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

In dieser Form werden die Spannungen in den Handbüchern mitgeteilt [13]. Bei umlaufenden Teilen wird als Bezugsgeschwindigkeit zweckmäßig die größte Umfangsgeschwindigkeit u eingeführt. Die Gleichung (13) sagt dann aus, daß die Spannungen in zwei geometrisch ähnlichen umlaufenden Teilen verschiedener Größe aus dem gleichen Material dann an allen Punkten die gleiche Größe haben, wenn die Umlaufgeschwindigkeit u für beide Teile die gleiche ist. Auch die »kritische Umfangsgeschwindigkeit u_{krit}« hat dann nach dem oben Gesagten in beiden Fällen den gleichen Zahlenwert. Dagegen liegt die kritische Drehzahl n_{krit} entsprechend der Gleichung $n_{\text{krit}} = \frac{u_{\text{krit}}}{D\pi}$ (D = Außendurchmesser) für die größere Ausführung niedriger. Wenn wir also einen beliebig geformten umlaufenden Maschinenteil so bemessen haben, daß die zulässigen Spannungen an keiner Stelle überschritten werden und auch der kritische Zustand entsprechend entfernt von der Betriebsdrehzahl liegt, so ist es nur nötig, bei einer geometrisch ähnlichen Vergrößerung dieses Teiles die Umfangsgeschwindigkeit unverändert zu lassen, um die Gewähr dafür zu haben, daß auch in dem vergrößerten Teil die Spannungen an keiner Stelle die zulässigen Grenzen überschreiten und daß auch in bezug auf den kritischen Zustand keine Bedenken bestehen. Bei umlaufenden Teilen aus verschiedenen Werkstoffen mit gleicher Poissonscher Zahl ist, abgesehen vom kritischen Zustand, für die höchstzulässige Umfangsgeschwindigkeit nach Gl. (15) nur das Verhältnis der zulässigen Beanspruchung σ_{zul} zur Dichte maßgebend. Dies ist der Grund dafür, daß Bauteile aus Elektron, Duralumin und vergüteten Stählen etwa die gleichen zulässigen Umfangsgeschwindigkeiten haben, obwohl die zulässige Beanspruchung der Stähle bedeutend höher liegt als die der Leichtmetalle.

Für gewisse Bauteile läßt sich noch eine andere Vergrößerung vornehmen, bei der der Spannungszustand zwar nicht mehr genau, aber doch angenähert in seiner Größe erhalten bleibt. Es ist dies bei Bauteilen möglich, die nur auf Zug beansprucht sind. Das soll am Beispiel einer Turbinenschaufel gezeigt werden, die einen über die Höhe h unveränderlichen Querschnitt F hat (Bild 6). Wenn die Schaufel auf einem Laufrad vom Durchmesser D (gerechnet bis Schaufelmitte) mit der Umfangsgeschwindigkeit u umläuft, ist die Fliehkraft P, die den Querschnitt 1—1 auf Zug beansprucht, $P = \varrho F h \frac{2 u^2}{D}$. Unter der Voraussetzung, daß die Spannung über den Querschnitt konstant ist, ergibt sich ihre Größe daher zu $\sigma = \frac{P}{F} = \varrho \frac{2h}{D} u^2$. Die Kennzahl $\frac{\sigma}{\varrho u^2}$ ist dann

$$\frac{\sigma}{\varrho u^2} = \frac{2h}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

In Übereinstimmung mit dem früher Gesagten bleibt bei einer geometrisch ähnlichen Vergrößerung, für die sich das Verhältnis $\frac{2h}{D}$ nicht ändert, die Kenngröße $\frac{\sigma}{\varrho u^2}$ konstant. Aus der Gleichung ist aber auch noch zu ersehen, daß es für die Größe der Spannung nicht auf den Querschnitt F ankommt. Das gleiche gilt für beliebig geformte Läufer, sofern für sie nur die Voraussetzung aufrechterhalten werden kann, daß die Spannung in koaxialen Zylinderflächen konstant ist. Dies sieht man z. B. sofort an den in den Handbüchern angegebenen Formeln für die Spannungen umlaufender Scheiben von verschiedener Form. Für umlaufende Scheiben gleicher Festigkeit, bei denen die durch Fliehkräfte hervorgerufenen Spannungen in jeder Entfernung von der Drehachse den gleichen Wert haben, seien die Verhältnisse etwas genauer betrachtet. Scheiben gleicher Festigkeit sind besonders für solche Strömungsmaschinen, bei denen es auf geringes Gewicht ankommt, von großer Bedeutung. Der

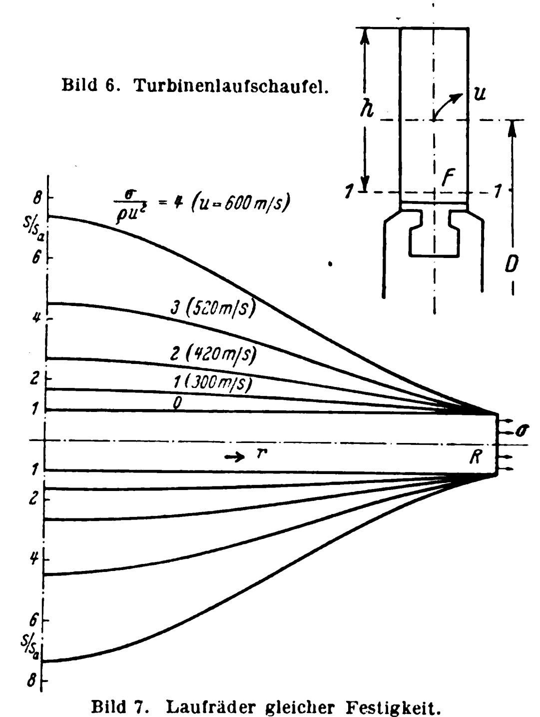


Bild 6. Turbinenlaufschaufel.

Bild 7. Laufräder gleicher Festigkeit.
s halbe Wandstärke in der Entfernung r von der Achse, s_a halbe Wandstärke am Außenradius R, σ Randspannung, ϱ Dichte des Werkstoffes, u Umfangsgeschwindigkeit (die eingeklammerten Werte geben die Umfangsgeschwindigkeit für eine Reißlänge von 10 km an).

Dickenverlauf einer solchen Scheibe ist durch die folgende Formel gegeben [13]

$$s/s_a = e^{\frac{\varrho u^2}{2\sigma}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

in der $2s$ die Dicke in der Entfernung r von der Drehachse und $2s_a$ die Dicke am Außenhalbmesser R bedeutet. Erwartungsgemäß tritt in dieser Formel im Exponenten wieder die Kennzahl $\frac{\sigma}{\varrho u^2}$ auf. In Bild 7 ist der Meridianschnitt solcher Scheiben für einige Werte der Kennzahl $\frac{\sigma}{\varrho u^2}$ zusammengestellt. Es wurde bereits erwähnt, daß der Bruch $\sigma_{\text{zul}}/\varrho$ für Stahl wie für Leichtmetalle etwa die gleiche Größe hat. Im technischen Schrifttum wird statt auf die Dichte meist auf die Wichte γ bezogen. Der Bruch σ_B/γ (σ_B Bruchspannung) hat die Dimension einer Länge und heißt Reißlänge. Seine Größe ist für hochwertige Baustoffe etwa 10 km. Legt man den Zahlenwert σ/γ fest, so entspricht jeder Kennzahl $\frac{\sigma}{\varrho u^2}$ eine bestimmte Umfangsgeschwindigkeit. Diese ist in Bild 7 für eine Reißlänge von 10 km mit angegeben. Aus Gl. (17) geht hervor, daß bei Scheiben gleicher Festigkeit der Dickenverlauf verhältnisgleich der Scheibendicke am Außenrand ist. Die letztere hängt davon ab, welche Fliehkräfte der Verschaufelung von der Scheibe aufgenommen werden müssen, ohne daß die zulässige Spannung überschritten wird. Wenn bei einer Vergrößerung einer Strömungsmaschine daher nur die Schaufellängen proportional dem Läuferdurchmesser vergrößert werden, dagegen die Schaufelquerschnitte und die Schaufelteilung ungeändert bleiben, genügt es auch für den Läufer, nur die radialen Abmessungen ähnlich zu vergrößern und die Umfangsgeschwindigkeit beizubehalten. Bei einer solchen Vergrößerung bleiben die Spannungen in ihrer ursprünglichen Größe erhalten. Die gleichen Betrachtungen lassen sich für Läufer beliebiger Form anstellen. Die axialen Abmessungen können dann in ihrer ursprünglichen Größe belassen werden. Eine solche Vergrößerung im Maßstab 1:2 ist in Bild 8 dargestellt. Der Schaufelquerschnitt und der Abstand der einzelnen Schaufeln in Umfangsrichtung muß dabei ungeändert bleiben damit sich die Umfangsbelastung am Außendurchmesser nicht ändert; die Zahl der Laufschaufeln ist natürlich bei der größeren Ausführung

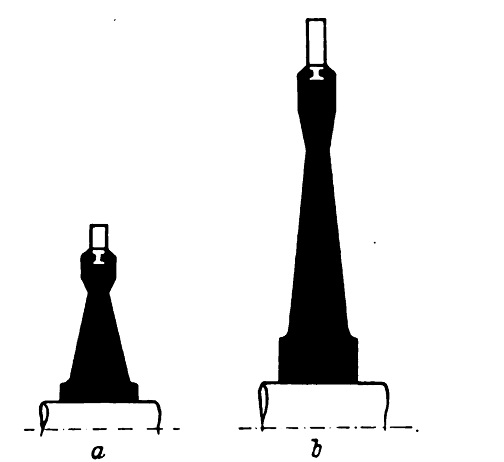


Bild 8. Zwei Laufräder, die bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit dieselbe Festigkeit haben.

entsprechend größer. Während bei der exakt ähnlichen Vergrößerung das Gewicht des Bauteiles mit der dritten Potenz des Durchmessers anwächst, steigt sie nach der Vergrößerung in Bild 8 nur mit der zweiten Potenz des Durchmessers. Gewichtlich ist also die letztere Vergrößerung die günstigere.

Sobald die Beanspruchung eines Bauteiles nicht durch reinen Zug erfolgt, läßt sich aber die letztere Art der Vergrößerung nicht mehr anwenden. Dies ist beispielsweise bei Turbinenschaufeln dann der Fall, wenn die Biegebeanspruchung durch den Gasstrom eine merkbare Größe annimmt, gegebenenfalls in der Form, daß der kritische Zustand für die Biegeschwingungen in der Nähe des Betriebszustandes liegt. Dann läßt sich nur mehr bei exakt ähnlicher Vergrößerung der Schaufeln der gleiche Spannungszustand aufrecht erhalten. Auch der Läufer selbst muß dann als Folge der Vergrößerung der Schaufelquerschnitte wegen der größeren Umfangsbelastung am Außendurchmesser exakt geometrisch ähnlich vergrößert werden. Für Flugzeugtriebwerke, wo man das Gewicht möglichst drücken will, wird man von vornherein die Schaufel so auszubilden trachten, daß sie auch im Hinblick auf die Biegebeanspruchung knapp dimensioniert ist, eventuell durch Verwendung von Hohlschaufeln. In diesem Fall bleibt daher nur die exakte geometrisch ähnliche Vergrößerung übrig, und man muß damit rechnen, daß das Gewicht des Bauteils mit der dritten Potenz des Durchmessers ansteigt.

4. Ähnlichkeit der Vorgänge in den Lagern.

Da der Aufbau schnellaufender Strömungsmaschinen auch durch die Ausbildung der Lager stark beeinflußt wird, sollen diese ebenfalls in den Kreis der Betrachtungen eingeschlossen werden. Die folgenden Untersuchungen befassen sich dabei in erster Linie mit Gleitlagern, denn die Verhältnisse in Wälzlagern sind sehr viel unübersichtlicher und wenig geklärt. Die Belastbarkeit und die Wärmeentwicklung eines Lagers ist durch den Strömungsvorgang des Schmiermittels in ihm bedingt. Es müssen deshalb hierfür im wesentlichen die gleichen Ähnlichkeitsbeziehungen gelten, die in Abschnitt 2 angegeben wurden. Wenn man die Stoffwerte als temperaturunabhängig ansehen kann, hängt der Strömungsvorgang daher von der Reynoldsschen Kennzahl ab. Die Belastbarkeit ist durch die Druckkräfte im Schmierfilm bedingt. Bei zwei geometrisch ähnlichen Lagern gilt demnach für die Drücke an ähnlich liegenden Punkten die folgende Beziehung, in der der Druck p durch Division mit der kinetischen Energie, die der Umfangsgeschwindigkeit des Lagerzapfens u entspricht, dimensionslos gemacht wurde.

$$\frac{p}{\varrho u^2/2} = f(Re) = f\left(\frac{u d}{\nu}\right) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

ϱ ist hierbei die Dichte und ν die kinematische Zähigkeit des Öles. Als Bezugslänge ist der Zapfendurchmesser d eingeführt. Im allgemeinen können für den Strömungsverlauf des Ölfilms die Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeits- und Druckkräften vernachlässigt werden. Die Ähnlichkeitsmechanik lehrt, daß mit dieser Voraussetzung die Gl. (18) in die folgende Beziehung übergeht:

$$\frac{p}{\varrho u^2/2} \cdot \frac{u d}{\nu} = 2 \frac{p d}{\eta u} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

in der $\eta = \varrho \nu$ die dynamische Zähigkeit bedeutet. Die Kenngröße $\frac{p d}{\eta u}$ wird nach einem Vorschlag von ten Bosch[6]) Gümbelsche Kennzahl genannt und mit $Gü$ bezeichnet. Der Strömungsverlauf durch zwei geometrisch ähnliche Lager ist daher ähnlich, wenn die Gümbelsche Kennzahl für beide Lager den gleichen Zahlenwert hat. Von den Lagerabmessungen sind von vornherein sämtliche durch die Konstruktion festgelegt, mit Ausnahme der Verlagerung des Zapfens aus der Mitte, die sich im Betrieb selbsttätig nach den Belastungsverhältnissen einstellt. Es muß daher für die Verlagerung, oder was das gleiche ist, für die kleinste im Schmierfilm auftretende Schichtdicke h_0 eine Beziehung bestehen: $\frac{h_0}{d} = f(Gü)$. Wenn man nach der Bearbeitungsgenauigkeit des Zapfens und der Lagerschale eine bestimmte, kleinst zulässige Schichtdicke $\frac{h_0}{d}$ festlegt, ist damit auch für die Gümbelsche Kennzahl in einem Lager ein Grenzwert vorgeschrieben.

Die oben gemachte Voraussetzung, daß die Stoffwerte des Schmieröls als konstant angesehen werden können, ist in Wahrheit allerdings recht schlecht erfüllt, da vor allem die Zähigkeit von Öl sehr stark temperaturabhängig und nach neuen Forschungen auch etwas druckabhängig ist. Für eine exakte Ähnlichkeitsbetrachtung muß daher die Veränderlichkeit der Zähigkeit berücksichtigt werden. Damit treten neue Kenngrößen zu den obigen hinzu, in der gleichen Weise wie in Abschnitt 2 bei raschströmenden Gasen infolge der veränderlichen Stoffwerte auch eine Erweiterung der Kennzahlen nötig war. Zunächst muß an die Öle in den beiden verglichenen Lagern selbst eine bestimmte Forderung gestellt werden, damit sich überhaupt Ähnlichkeit der Vorgänge in beiden Lagern erzielen läßt. Es muß nämlich die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur eine solche sein, daß die Temperaturfelder und die Zähigkeitsfelder in beiden Lagern gleichzeitig ähnlich sein können. Dies ist zum Beispiel erfüllt, wenn sich die Zähigkeit in dem in Frage kommenden Bereich als Potenzfunktion der Temperatur ϑ ($\eta = \eta_0 \vartheta^n$) oder als e-Potenz ($\eta = \eta_0 e^{-a\vartheta}$) darstellen läßt. Dabei kann der Nullpunkt, von dem die Temperatur gezählt wird und an dem die Zähigkeit η_0 ist, noch beliebig gewählt werden. Im übrigen müssen dann in beiden Lagern die gleichen Kennzahlen, wie sie auf Seite 2 angegeben wurden, übereinstimmen, wobei nur die Machsche Zahl in Wegfall kommen kann, da die Dichte für Öl praktisch konstant ist. An die Stelle dieser Kennzahl tritt eine andere, die die Wärmeentwicklung durch innere Reibung berücksichtigt[7]). Für die Lagerforschung läßt sie sich am zweckmäßigsten in der folgenden Form anschreiben, wenn ϑ eine dem Ölfilm durch die Randbedingungen von außen aufgeprägte Temperaturdifferenz bedeutet: $\frac{\eta u^2}{\lambda \vartheta}$. λ ist darin die Wärmeleitfähigkeit des Öles. Die Zahl der somit eine Rolle spielenden Kennzahlen ist, wie man sieht, recht beträchtlich, so daß bisher wohl noch kein Versuch gemacht wurde, den Vorgang im Schmierfilm unter Heranziehung aller dieser Kennzahlen zu klären, zumal sich auch die Randbedingungen, die für die Ausbildung des Temperaturfeldes im Lager maßgebend sind, nur schwer genau formulieren lassen [14].

Aus diesem Grunde begnügt man sich bis heute mit der angenäherten Ähnlichkeit, die die Konstanz der Stoffwerte voraussetzt, zumal die bisherigen Versuche ergeben haben, daß sich auch mit ihr die Verhältnisse in Lagern bis zu recht hohen Umfangsgeschwindigkeiten richtig beschreiben lassen. So findet Rumpf die Beziehung (19) in Trag-

[6]) M. ten Bosch, Schweiz. Bauztg. Bd. 99 (1932), S. 321.
[7]) E. Eckert und W. Weise, Forschg. Ing.-Wes. Bd. 12 (1941), Heft 1, und E. Eckert und O. Drewitz, Forschg. Ing.-Wes. Bd. 11 (1940), S. 116.

lagern bei Umfangsgeschwindigkeiten bis zu 30 m/s sehr gut bestätigt [15].

Bei schnellaufenden Lagern ist neben der durch Gl. (19) festgelegten Belastbarkeit die durch innere Wärmeentwicklung entstehende Übertemperatur von besonderer Bedeutung. Bei der folgenden Untersuchung des Lagers im Hinblick auf diese Erscheinung wird der Einfluß der Stoffwerte nicht mehr mit untersucht, d. h. es werden nur mehr Lager miteinander verglichen, in denen das Öl die gleichen Stoffwerte hat. Für die Übertemperatur läßt sich dann in folgender Weise eine angenäherte Beziehung gewinnen: Die Wärmeentwicklung Q_r im Lager ist durch die Gleichung $Q_r = \mu P u$ gegeben, wenn μ die Reibungszahl, P die Belastung des Lagers und u die Umfangsgeschwindigkeit bedeuten. Diese Wärme wird zum Teil durch Leitung aus dem Ölfilm an die Lagerschale abgeführt, zum Teil wird sie mit dem Ölstrom aus dem Lager entfernt. Für den Teil Q_l dieser Wärme, der innerhalb des Ölfilms durch Wärmeleitung abgeführt wird, gilt eine Gleichung von der Form $Q_l = \lambda \frac{F}{l} \vartheta$. λ ist die Wärmeleitfähigkeit des Öles. Wenden wir diese Gleichung nur auf ähnliche Lager an, so kann für l irgendeine Bezugslänge, für F irgendeine Bezugsfläche und für ϑ irgendeine Übertemperatur eingeführt werden. Verwenden wir wieder den Zapfendurchmesser d als Länge und drücken die Fläche ebenfalls durch ihn aus, so nimmt die Gleichung die Form an: $Q_l = a_1 \lambda \vartheta d$. a_1 ist darin eine dimensionslose Größe, die für ähnliche Lager einen unveränderlichen Zahlenwert hat. Ein anderer Teil der Wärme wird mit dem Ölstrom durch Konvektion mitgeführt. Er ist durch die Gleichung $Q_k = a_2 c w F \vartheta$ gegeben. Hierin ist c die spezifische Wärme und w, wie oben, irgendeine Bezugsgeschwindigkeit im Ölstrom, a_2 ist wieder eine für ähnliche Fälle feste Größe. Einem schnelllaufenden Lager gibt man zur Kühlung einen starken Öldurchfluß. Dabei wird die Wärme vor allem von dem Teil des Ölstroms mitgenommen, der durch den unbelasteten Teil des Spaltes zwischen Zapfen und Lagerschale fließt, da hier der Öldurchfluß wesentlich größer ist als im tragenden Ölfilm. Wenn wir den Druck, unter dem das Öl dem Lager zufließt, für die verglichenen Lager so wählen, daß für die Strömung des Kühlöles die Reynoldssche Kennzahl konstant bleibt, wird mit der obigen Voraussetzung, daß auch die Zähigkeit ungeändert bleibt, die Ölgeschwindigkeit umgekehrt verhältnisgleich der Abmessung des Lagers. Damit ergibt sich auch für die vom Kühlöl abgeführte Wärmemenge die Gleichung $Q_k = a_3 c \frac{F}{l} \vartheta$ oder, wenn als Bezugslänge wieder der Durchmesser d gewählt wird, $Q_k = a_4 c \vartheta d$, die die gleiche Form hat wie die Gleichung für Q_l. Es gilt daher für die gesamte, abgeführte Wärmemenge $Q = Q_l + Q_k$ eine Gleichung von der Form $Q = a_5 \vartheta d$. a_5 ist eine Größe, die für ähnliche Lager und gleiche Stoffwerte des Öles konstant ist. Durch Gleichsetzen der abgeführten Wärmemenge Q und der erzeugten Q_r erhalten wir damit für die im Beharrungszustand eintretende Übertemperatur des Lagers ϑ die Beziehung $\vartheta = a_6 \mu \frac{P u}{d}$. Der Reibungsbeiwert μ läßt sich nach Versuchen von Rumpf [15] durch eine Gleichung folgender Form ausdrücken:

$$\mu = a + b \frac{\eta u}{p d} = a + b \frac{\eta u d}{P};$$

a und b sind dabei zwei Konstante. Wird dieser Ausdruck in die Beziehung für die Übertemperatur eingeführt, so ergibt sich schließlich für diese eine Gleichung von der Form

$$\vartheta = a' \frac{P u}{d} + b' u^2 \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

a' und b' haben für ähnliche Lager mit gleichem Öl unveränderliche Zahlenwerte. Für Lager mit großer Umfangsgeschwindigkeit ist in dieser Gleichung das zweite Glied das ausschlaggebende. Die Gleichung besagt damit, daß die Übertemperatur schnellaufender Lager im wesentlichen von der Umfangsgeschwindigkeit abhängt. Nur durch das erste Glied, das aber bei schnellaufenden Lagern verhältnismäßig wenig ausmacht, kommt ein kleiner Einfluß der Belastung und der Lagerabmessungen hinzu. Diese Folgerungen aus der Gl. (20) werden durch die praktischen Erfahrungen sowohl an Gleitlagern wie auch an Wälzlagern bestätigt[8]). Bekanntlich sieht man für derartige Lager vor, daß das Produkt aus Zapfendurchmesser d und Drehzahl n einen bestimmten Grenzwert nicht überschreitet. Da die Umfangsgeschwindigkeit durch die Gleichung $u = d \pi n$ gegeben ist, heißt dies nichts anderes, als daß die Umfangsgeschwindigkeit eine bestimmte Grenze nicht überschreiten darf.

Die Lager in schnellaufenden Strömungsmaschinen werden vor allem durch Fliehkräfte beansprucht, die durch eine Unwucht der umlaufenden Teile entstehen. Wenn daher der Läufer mit dem Lager geometrisch ähnlich vergrößert wird, ergeben sich für die Belastung der Lager die folgenden Verhältnisse. Die das Lager belastende Fliehkraft P ist durch den folgenden Ausdruck festgelegt

$$P = C \varrho l^3 \frac{u^2}{l} = C \varrho l^2 u^2,$$

wenn ϱ die Dichte des Werkstoffes, aus dem der Läufer besteht, l die kennzeichnende Längenabmessung und C eine Zahl ist, die für ähnliche Läufer einen unveränderlichen Wert hat. Führt man diese Kraft P in die Gümbelsche Kennzahl ein, so nimmt diese die Form $\frac{\varrho u l}{\eta}$ also die Form einer Reynoldschen Kennzahl an. Nach dem früher Gesagten ist ein Lager seiner Grenzbelastung um so näher, je größer die Gümbelsche Kennzahl ist. Dies bedeutet, daß von zwei ähnlichen Maschinen, die beide mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit umlaufen, das Lager der größeren näher an der Grenzbelastung ist als das der kleineren Maschine. Für die kleinere Maschine liegt also kein Grund zu Bedenken hinsichtlich der zulässigen Belastung der Lager vor, obwohl die Drehzahl der kleinen Maschine sehr viel höher liegen kann als die der großen. Hinsichtlich der zulässigen Übertemperatur der Lager kommt es, wie oben gezeigt wurde, im wesentlichen nur auf die Umfangsgeschwindigkeit an. In dieser Hinsicht sind also die Lager der beiden ähnlichen Maschinen gleich günstig belastet.

5. Das Zusammenwirken sämtlicher Ähnlichkeitsbedingungen.

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten die Ähnlichkeitsbedingungen für die Strömung des Arbeitsmittels durch die Maschine, für die Festigkeitsverhältnisse der umlaufenden Teile und für die Verhältnisse im Lager im einzelnen untersucht wurden, bleibt nunmehr noch das Zusammenwirken sämtlicher Ähnlichkeitsbedingungen zu betrachten. Dies interessiert, wenn man vor die Frage gestellt ist, eine kleine durchentwickelte Maschine nun für größere Leistungen zu bauen oder für die Frage, ob es bei Flugzeugtriebwerken vorteilhafter ist, die geforderte Leistung einer Strömungsmaschine in einer einzigen Maschine zu verarbeiten oder sie auf mehrere Einheiten aufzuteilen. Die Beantwortung der letzten Frage hängt natürlich auch sehr stark von betrieblichen Umständen ab, etwa von der Forderung der Betriebssicherheit. Diese läßt sich jedoch im vorliegenden Zusammenhang nicht mit in die Untersuchungen einbeziehen. Es soll daher lediglich nachgeprüft werden, ob die Aufteilung in mehrere Maschineneinheiten mit Rücksicht auf den Brennstoffverbrauch und auf das Leistungsgewicht günstig oder ungünstig ist. Die Untersuchung läuft darauf hinaus, zu überprüfen, ob hinsichtlich Wirkungsgrad und Leistungsgewicht eine kleine oder eine große Maschine Vorteile bietet. Im Abschnitt 3 wurde gezeigt, daß zwei verschieden große ähnliche Maschinen dann die gleichen Spannungen in den umlaufenden Teilen erleiden, wenn die Umfangsgeschwindigkeit für beide Maschinen die gleiche ist. Auch die Lager lassen sich nach dem vorhergehenden Ab-

[8]) G. Getzlaff, Jahrb. 1938 der Deutschen Luftfahrt-Forschung. S. II 110.



schnitt im wesentlichen ähnlich vergrößern. Für den vorliegenden Vergleich bleiben auch die Innendrücke in der Maschine bei der Vergrößerung ungeändert. Damit ändern sich auch die Spannungen in den vor allem durch den Überdruck beanspruchten Maschinengehäusen bei der ähnlichen Vergrößerung nicht, da zwar die Kräfte mit der zweiten Potenz der Längenabmessungen anwachsen, im gleichen Maße aber auch die Materialquerschnitte zunehmen. Bei dem vorstehenden Vergleich bleibt natürlich auch das adiabatische Gefälle h_{ad} für die Maschine bei der Vergrößerung ungeändert. Dies bedeutet, daß sich auch die Strömungsgeschwindigkeit durch die Maschine und damit die Machsche Zahl nicht ändert. Der Wirkungsgrad kann sich somit nur mehr in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Kennzahl, die bei der großen Ausführung größer ist als bei der kleinen, ändern. Die Abhängigkeit von der Reynoldsschen Kennzahl ist aber, wie wir sahen, im allgemeinen gering, so daß bei der hier vorgesehenen Vergrößerung der Maschinen nur ein kleiner Anstieg des Wirkungsgrades zu erwarten ist. Das Gewicht der Maschine wächst bei der ähnlichen Vergrößerung mit der dritten Potenz der Längenabmessungen. Die Leistung ist wegen der Konstanz des adiabatischen Gefälles proportional der durchströmenden Menge und damit dem Quadrat der Längenabmessungen. Hieraus folgt, daß das Leistungsgewicht (das Gewicht der Maschine je Leistungseinheit) bei der Vergrößerung linear mit der Abmessung der Maschine ansteigt. Eine kleine Maschine hat demnach ein günstigeres Leistungsgewicht als eine große, und es ist von diesem Gesichtspunkt aus vorteilhaft, die verlangte Gesamtleistung auf mehrere kleinere Maschinen aufzuteilen. Auf die gleiche Gesetzmäßigkeit bei Kolbenmaschinen machte Lutz aufmerksam [16]. Sie wird bei Flugmotoren durch die weitgehende Aufteilung der Gesamtleistung auf eine Vielzahl von Zylindern erfüllt. Natürlich wird es eine untere Grenze geben, von der ab aus konstruktiven Gründen eine ähnliche Verkleinerung nicht mehr möglich ist, von der ab auch der Wirkungsgrad stärker abfällt. Wo diese Grenze liegt, kann nur eine genauere rechnerische und konstruktive Durcharbeitung für den Einzelfall entscheiden. Doch ist damit zu rechnen, daß bei größeren Maschinen die Tendenz des ansteigenden Leistungsgewichtes um so klarer in Erscheinung tritt, je sorgfältiger die Maschinen auf niedriges Gewicht hin durchkonstruiert sind, d. h. gerade für Flugzeugtriebwerke wird man die angeführte Erkenntnis besonders beachten müssen.

6. Zusammenfassung.

Da Strömungsmaschinen als Teile von Flugzeugtriebwerken eine wachsende Bedeutung erlangen und die Beachtung der Ähnlichkeitstheorie die Entwicklung dieser Maschinen stark fördern kann, werden die Ähnlichkeitsbedingungen für die Strömung des Arbeitsmittels, für die Beanspruchung der umlaufenden Maschinenteile und für die Lager zusammenfassend dargestellt. Hieraus lassen sich Gesichtspunkte ableiten, die bei der Frage zu beachten sind, wie weit eine vorgeschriebene Leistung auf mehrere Maschineneinheiten aufgeteilt werden soll.

7. Schrifttum.

[1] M. Weber, Die spezifischen Drehzahlen und die anderen Kenngrößen der Wasserturbinen, Kreiselpumpen, Windräder und Propeller als dimensionsfreie Kenngrößen der Ähnlichkeitsphysik. Z. Schiffbau u. Schiffahrt Bd. 31 (1930), S. 73.
[2] W. Spannhake, Kreiselräder als Pumpen und Turbinen. Bd. I, J. Springer, Berlin 1931.
[3] C. Pfleiderer, Die Kreiselpumpen. J. Springer, Berlin 1932.
[4] C. Keller, Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Mitteilg. a. d. Inst. f. Aerodynamik. ETH Zürich 1934.
[5] E. Sörensen, Hydraulische Ähnlichkeit von Dampfturbinenstufen. Z. VDI Bd. 78 (1934), S. 1403.
[6] M. Weber, Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik und sein Zusammenhang mit der Dimensionslehre und der Modellwissenschaft. Jahrb. Schiffbautechn. Ges. 1930, J. Springer, Berlin.
[7] A. Busemann, Gasdynamik in Wien-Harms: Handb. d. Exp. Physik Bd. IV/1, Akad. Verlagsges., Leipzig 1931, S. 360.
[8] H. Schlichting, Widerstand und Austausch in turbulenter Strömung. Feuerungstechnik Bd. 28 (1940), S. 225.
[9] E. Sörensen, Wandrauhigkeitseinfluß bei Strömungsmaschinen. Forschg. Ing.-Wes. Bd. 8 (1937), S. 25.
[10] J. Ackeret, C. Keller u. F. Salzmann, Die Verwendung von Luft als Untersuchungsmittel für Probleme des Dampfturbinenbaues. Escher Wyss Mitt. Bd. 7 (1934), S. 143.
[11] E. Sörensen, Einheitsdiagramme für Dampfturbinen. Z. VDI Bd. 83 (1939), S. 565.
[12] W. Hermann, Über die Bedingungen für dynamische Ähnlichkeit. Z. VDI Bd. 75 (1931), S. 611/16.
[13] Hütte, 26. Aufl., Bd. I, Berlin 1936.
[14] G. Vogelpohl, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forschg.-Heft 386.
[15] A. Rumpf, Reibung und Temperaturverlauf im Gleitlager. VDI-Forschg.-Heft 393, Berlin 1938, VDI-Verlag.
[16] O. Lutz, Ähnlichkeitsbetrachtungen bei Brennkraftmaschinen. Ing.-Arch. Bd. 4 (1933), S. 373.

Luftfahrt-Forschung

Diese Lieferung enthält den Bandtitel und das Jahresinhaltsverzeichnis von Band 18

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

LUFTF.-FORSCHG. BAND 18 | LFG. 12 SEITE 397 BIS 424 | MÜNCHEN, 29. 12. 1941

INHALT:

Mitteilungen sind an die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters, Berlin-Adlershof, zu richten. — Fernruf: 638446 und 638524 — Drahtanschrift: Zetwebelufo Adlershof.

Erscheinungsweise: Die Schriftenreihe erscheint in Monatslieferungen. Sie kann vom Verlag, durch die Post und den Buchhandel bezogen werden.

Bezugspreise: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement: Halbjahresbezugspreis RM. 12.— einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr. — Ausland: 1. Halbjahresbezugspreis RM. 9 — einschließlich 24 Pf. Zeitungsgebühr und 4 Pf. Verpackungsgebühr zuzüglich Zustellgebühr in Ländern, bei welchen der Postbezug zugelassen ist. 2. Bei unmittelbarem Bezug vom Verlag unter Kreuzband beträgt der Jahresbezugspreis RM. 18.— zuzüglich Postgebühr. — Einzellieferung: Deutsches Reich einschließlich Protektorat Böhmen und Mähren und Generalgouvernement RM. 2.50 zuzügl. Postgebühr, Ausland: RM. 1.90 zuzügl. Postgebühr.

Lieferungsbedingungen: Der Bezugspreis wird bei Postbezug durch das Postamt halbjährlich erhoben. Bei Bezug vom Verlag und durch den Buchhandel erfolgt die Berechnung jahresweise. Der Bezugspreis ist zahlbar in Reichsmark oder in der in Betracht kommenden Landeswährung, gerechnet nach dem Umrechnungskurs des Zahlungstages. Rechnungsstellung erfolgt diesfalls 4 Wochen vor Beginn eines Jahrganges. Einzellieferung erfolgt gegen Voreinsendung des Betrages von RM. 2.50 beziehungsweise RM. 1.90 zuzüglich Postgebühr. Die Lieferung geschieht auf Gefahr des Empfängers. Kostenlose Nachlieferung verlorengegangenen Bandes erfolgt nicht. Überweisungen gehen zu Lasten des Bestellers. Falsch bestellte Einzellieferungen werden nicht zurückgenommen.

Bezugsbedingungen: Deutsches Reich: Postbezug und direkte Bestellungen beim Verlag erneuern sich von Halbjahr zu Halbjahr ohne förmliche Neubestellung. Ausland: Bei Postbezug ist die Neubestellung stets 14 Tage vor Ablauf des Kalenderhalbjahres zu erneuern. Bezieher, welche die Schriftenreihe direkt vom Verlag erhalten, bekommen 4 Wochen vor Ende eines jeden Bandes Rechnung für das kommende Jahr zugestellt. Beträge, welche innerhalb eines Monats nach Rechnungsausstellung nicht eingehen, werden zuzüglich Spesen durch Nachnahme erhoben. Abbestellungen für das Ende eines Berechnungszeitraumes können nur dann anerkannt werden, wenn sie spätestens bis zum Ersten des letzten Monats des Berechnungszeitraumes erfolgen. Bei Bezug durch das Postzeitungsamt sind Beschwerden wegen Unregelmäßigkeit der Zustellung nicht beim Verlag, sondern beim zuständigen Postamt zu führen. Bei Wohnungswechsel ist an das Postamt der alten Wohnung rechtzeitig der Antrag auf Umleitung an die neue Wohnung unter Zahlung der Überweisungsgebühr (RM. —.50) zu richten.

Überweisungen: Bezugsgebühr: in bar an den Verlag (Abt. Zeitschriften) oder auf Postscheck-Konto: München 4627.
Einzellieferungen in bar an Zeitschriften-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4627.
Anzeigen- und Beilagegebühren in bar an Anzeigen-Abteilung oder auf Postscheck-Konto München 4853.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg, München 1, Schließfach 31 — Für den Anzeigenteil und die Beilagen verantwortlich: Jakob Bauer, München.
Printed in Germany.

Luftfahrt-Forschung

Band 18 | 29. Dezember 1941 | Lfg. 12

Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Umströmung.

Von J. Pretsch.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e. V., Institut für Forschungsflugbetrieb und Flugwesen.

Um den Unterschied zwischen der Reibungsschichtströmung an zylindrischen und Rotationskörpern von gleichem Querschnitt und gleicher Druckverteilung aufzuzeigen, wurde die laminare Reibungsschicht nach dem Pohlhausenschen Verfahren für elliptische Längsschnitte bei symmetrischer Umströmung berechnet.

Gliederung.

I. Aufgabenstellung.

Die theoretische Untersuchung des Widerstandes des Tragflügels und des Rumpfes eines Flugzeuges führt zu der Frage, wie sich die für den Widerstand maßgebliche Reibungsschicht an beiden Flugzeugbauteilen entwickelt. In diesem Zusammenhang schien es wünschenswert, die spezialisierte Aufgabe zu betrachten, wie sich die Reibungsschichten in ebener und rotationssymmetrischer Strömung voneinander unterscheiden, wenn die umströmten Längsschnitte dieselbe geometrische Gestalt und auch dieselbe Form der Druckverteilung besitzen. Diese Bedingungen werden im Falle symmetrischer Anströmung gerade beim elliptischen Zylinder und beim Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse in Anströmrichtung liegt, erfüllt.

II. Die Potentialgeschwindigkeit an elliptischen Zylindern und an Rotationsellipsoiden bei symmetrischer Umströmung.

Wir bezeichnen mit a die in Anblasrichtung liegende Ellipsenachse, Bild 1, mit b die andere. In der Parameterdarstellung

$$x = a\cos\varphi;\quad y = b\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

läßt sich die Potentialgeschwindigkeit am elliptischen Zylinder bei symmetrischer Umströmung mit Hilfe der Abkürzung:

$$k = \frac{b}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

in der Form schreiben:

$$\frac{u_0}{u_\infty} = \frac{1+k}{\sqrt{1+k^2\operatorname{cotg}^2\varphi}} \quad \text{für } k \gtreqless 1 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Da wir für die Reibungsschichtberechnung die Geschwindigkeitsverteilung längs der Bogenlänge s kennen müssen, geben wir noch die Zuordnung von s und φ, wobei wir s auf die Tiefe $t = 2a$ beziehen:

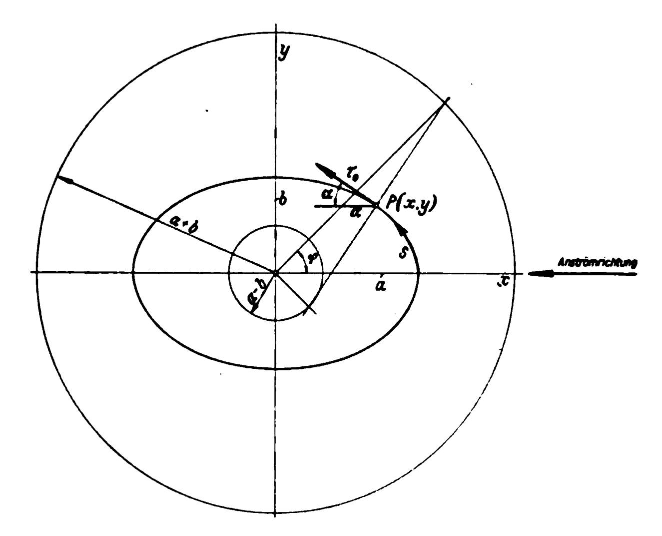


Bild 1. Bezeichnungen.

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{2}\left[\mathsf{E}(\beta) - E\left(\beta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right];\quad \beta = \arcsin\sqrt{1-k^2} \quad \text{für } k < 1$$

$$\frac{s}{t} = \frac{\varphi}{2} \qquad \text{für } k = 1$$

$$\frac{s}{t} = \frac{k}{2}E(\gamma, \varphi);\qquad \gamma = \arcsin\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} \quad \text{für } k > 1$$

$$\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierbei bezeichnet E das vollständige und E das unvollständige elliptische Integral zweiter Gattung.

Um bei der späteren Auftragung von Rechenergebnissen über der Bogenlänge eine übersichtliche Darstellung zu erreichen, empfiehlt es sich, die Bogenlänge für diesen Zweck auf den halben Ellipsenumfang:

$$\frac{U}{2} = 2a\,\mathsf{E}(\beta) \text{ bzw. } \frac{U}{2} = 2b\,\mathsf{E}(\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

zu beziehen. Die Geschwindigkeitsmaxima, vgl. Bild 2,

$$\left(\frac{u_0}{u_\infty}\right)_{\max} = 1 + k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

liegen dann z. B. einheitlich bei $s\Big/\frac{U}{2} = 0{,}5$.

Für die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge, Bild 3, die gleichfalls in die Berechnung der Reibungsschicht eingeht, erhält man:

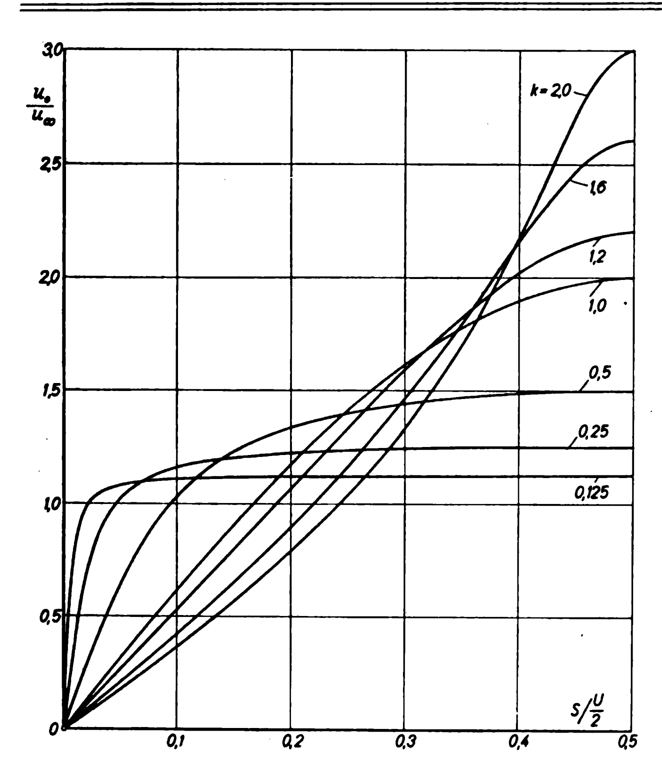


Bild 2. Die Potentialgeschwindigkeit an elliptischen Zylindern bei symmetrischer Umströmung.

$$\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}} = \frac{2\,(1+k)\,k^2\cos\varphi}{(\sin^2\varphi + k^2\cos^2\varphi)^2} \text{ für } k \gtrless 1 \quad . \; . \; . \; (7)$$

In der Nähe des Staupunktes, für kleine Winkel φ, ist es zweckmäßig, die Näherungsformel

$$\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}} \sim \frac{2\,(1+k)}{k^2}\left[1+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{k^2}\right)\varphi^2\right] \quad . \; . \; . \; (8)$$

zu benutzen, die man aus der Reihenentwicklung von (7) erhält.

Aus (8) erkennt man auch sofort, daß der Wert von $\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}}$ für $k < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ in Staupunktnähe mit wachsender Bogenlänge abnimmt, während er für $k > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ dort wächst. Im letzten Fall hat die Geschwindigkeitsverteilung außer im Staupunkt noch einen Wendepunkt, dessen Argument φ_w sich aus der Beziehung:

$$\cos\varphi_w = \frac{1}{\sqrt{3\,(k^2-1)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

ergibt. Dieser Wendepunkt ist im allgemeinen Fall nicht von höherer Ordnung, indem dort die dritte Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge von Null verschieden ist. Nur für $k = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, wo dieser Wendepunkt in den Staupunkt rückt, verschwindet dort auch die dritte Ableitung der Geschwindigkeit, ohne daß jedoch wie bei der einfachen Staupunktströmung $u_0 \sim s$ etwa auch alle höheren Differentialquotienten verschwinden. Wir kommen auf die Besonderheit dieses Staupunktes in bezug auf das Anwachsen der Reibungsschicht weiter unten noch einmal zurück.

Für das Rotationsellipsoid, dessen Umdrehungsachse in Anströmrichtung liegt, erhält man nach A. F. Zahm [1] und L. B. Tuckermann [2] die Potentialgeschwindigkeit zu:

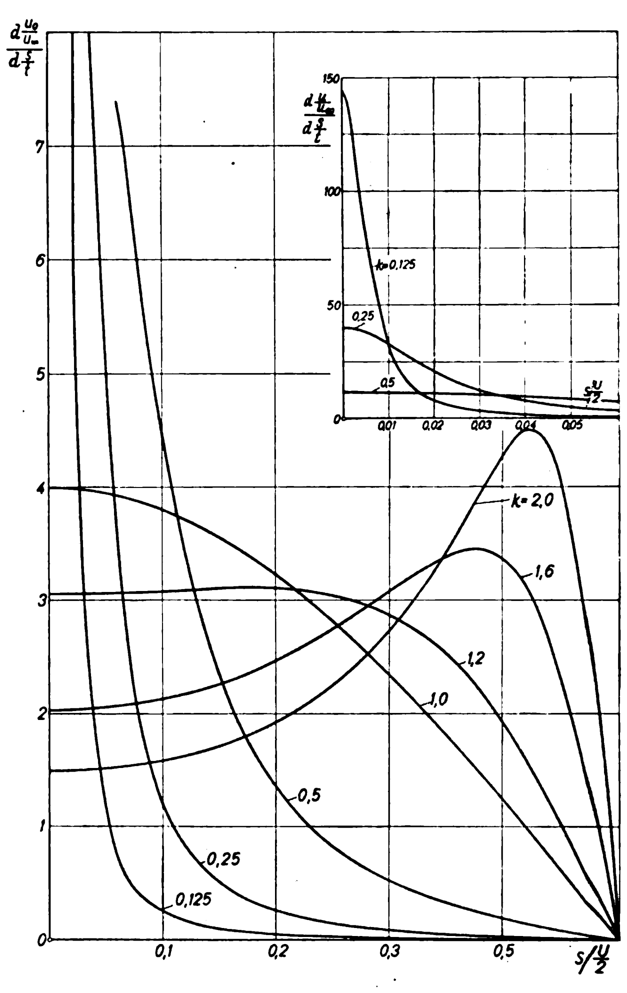


Bild 3. Die erste Ableitung der Potentialgeschwindigkeit nach der Bogenlänge an elliptischen Zylindern.

$$\frac{u_0}{u_\infty} = \frac{A}{\sqrt{1+k^2\,\text{cotg}^2\,\varphi}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

wo $A = \left(\frac{u_0}{u_\infty}\right)_{\max}$ eine Funktion von k ist, die durch die Gleichung definiert wird:

$$A = \frac{2}{2-\alpha_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

mit

$$\alpha_0 = \frac{2\,k^2}{\sqrt{(1-k^2)^3}}\left[K\left(\arcsin\sqrt{1-k^2}\right) - E\left(\arcsin\sqrt{1-k^2}\right)\right] \quad \text{für } k \leq 1 \quad (12)$$

oder

$$\alpha_0 = \frac{2}{k\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^3}}\left(k\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} - \arcsin\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right) \quad \text{für } k \geq 1. \quad (13)$$

Hier bezeichnet K das vollständige elliptische Integral erster Gattung.

Die Geschwindigkeitsverteilung (10) am Rotationsellipsoid mit dem Achsenverhältnis $k = \frac{b}{a}$ unterscheidet sich also von der des elliptischen Zylinders (3) mit demselben Achsenverhältnis nur um den konstanten Faktor $\frac{A}{1+k}$, Bild 4.

Da die Zuordnung von Bogenlänge s und Argument φ dieselbe ist wie beim elliptischen Zylinder, unterscheidet sich auch die Ableitung $\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}}$ von der am elliptischen Zylinder nur um diesen Faktor.

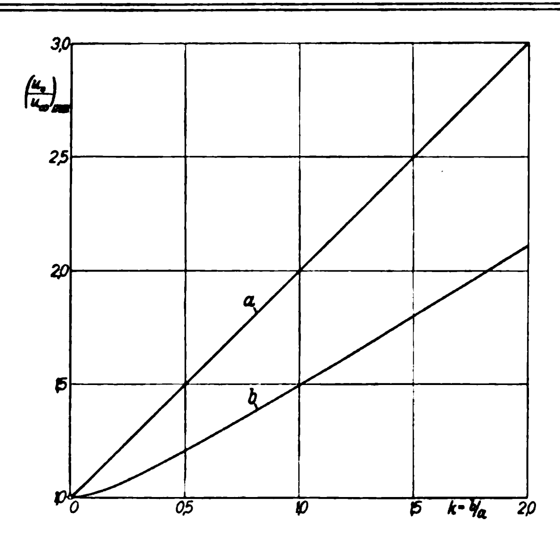


Bild 4. Die Maximalgeschwindigkeit an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden.
a) elliptischer Zylinder. b) Rotationsellipsoid.

Die Tatsache, daß die Geschwindigkeitsverteilungen am elliptischen Zylinder und am Rotationsellipsoid bei Geradanströmung lediglich affin verzerrt sind, hat eine für den Vergleich der Reibungsschichten interessante Folge. Durch Steigerung der Anblasgeschwindigkeit am Rotationsellipsoid auf das $\frac{1+k}{A}$fache derjenigen des Zylinders kann man den Einfluß, den der rotationssymmetrische Charakter für sich allein genommen auf die Reibungsschicht hat, herausschälen, da in diesem Falle die Druckverteilungen an beiden Körpern gleicher Querschnittsumrißform auch in ihren Absolutbeträgen gleich sind.

III. Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und an Rotationsellipsoiden.

Für die Berechnung der laminaren Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und an Rotationsellipsoiden verwenden wir den von K. Pohlhausen [3, 4] zunächst nur für die ebene Strömung vorgeschlagenen und von S. Tomotika [5, 6] später auf die rotationssymmetrische Strömung übertragenen Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung u in der Reibungsschicht:

$$\frac{u}{u_0}=\left[1-\left(1+\frac{n}{\delta}\right)\left(1-\frac{n}{\delta}\right)^3\right]+\frac{\lambda}{6}\frac{n}{\delta}\left(1-\frac{n}{\delta}\right)^3, \quad (14)$$

wo n die Normale zur Bogenlänge, δ die Grenzschichtdicke und λ den Formparameter

$$\lambda=\frac{d u_0}{d s}\frac{\delta^2}{\nu}=Re\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}}\left(\frac{\delta}{t}\right)^2;\quad Re=\frac{u_\infty}{\nu}t=\frac{2\,a\,u_\infty}{\nu} \quad (15)$$

bezeichnet. Für die Impulsdicke ϑ und die Schubspannung τ_0 an der Wand leitet man aus (14) die Beziehung ab:

$$\frac{\vartheta}{t}=\frac{\delta}{t}\left(\frac{37}{315}-\frac{\lambda}{945}-\frac{\lambda^2}{9072}\right)\quad (16)$$

und

$$\frac{\tau_0}{\varrho/2\,u_\infty^2}Re=\left(4+\frac{\lambda}{3}\right)\frac{1}{\delta/t}\quad (17)$$

Als Rechenverfahren benutzen wir die von H. Holstein und T. Bohlen [7] mit Hilfe der Impulsgleichung gewonnene bequeme Integrationsmethode, bei der man nicht mehr die zweite Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge vorzugeben braucht.

Als unmittelbare Ergebnisse der Rechnung sind in Bild 5, 6, 7 über der Bogenlänge der Formparameter λ, die Impulsdicke $\sqrt{Re}\,\frac{\vartheta}{t}$ und die Schubspannung $\sqrt{Re}\,\frac{\tau_0}{\varrho/2\,u_\infty^2}$ für die elliptischen Zylinder und die Rotationsellipsoide gemeinsam aufgetragen.

Für die ebene Strömung beginnen die Formparameterkurven im Staupunkt bei $\lambda = 7{,}052$, für die rotationssymmetrische bei $\lambda = 4{,}716$. Dieser Unterschied rührt daher, daß das ebene Staupunktprofil (exakt von Hiemenz berechnet) völliger ist als das rotationssymmetrische Staupunktprofil (exakt von Homann berechnet). Für $k < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ fallen die λ-Kurven monoton entsprechend der Tatsache, daß der Geschwindigkeitsgradient längs der Bogenlänge monoton abnimmt. Für $k > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ hingegen wächst der Formparameter zunächst entsprechend dem andersartigen Verlauf des Geschwindigkeitsgradienten und fällt erst in der Nähe des Wendepunktes der Geschwindigkeitsverteilung.

Es ist auffallend, daß sich in der Umgebung des Geschwindigkeitsmaximums $\left(s\Big/\frac{u}{2} = 0.5;\, \lambda = 0\right)$ die Kurven des Formparameters für die ebene und rotationssymmetrische Strömung nur wenig voneinander unterscheiden. Das ist folgendermaßen zu erklären: An der Stelle der Höchstgeschwindigkeit, bei der maximalen Dicke des Rotationskörpers, erfolgt gerade der Übergang von dem Auseinanderfließen auf der »Luvseite« zum Zusammenfließen auf der »Leeseite«, d. h. man hat dort auf dem größten Kreise senkrecht zur Anströmrichtung eine parallel gerichtete Strömung wie an dem entsprechenden elliptischen Zylinder. Für große Werte des Achsenverhältnisses $k = \frac{b}{a}$, wo wegen des starken Druckanstiegs bald hinter dem Druckminium die Ablösung der Laminarschicht ($\lambda = -12$) eintreten muß, hat diese Tatsache zur Folge, daß die Ablösung praktisch bei demselben Wert der Bogenlänge s_a einsetzt wie in ebener Strömung, Bild 8.

Für elliptische Zylinder mit $k > 2$ würde man im Gebiet des Druckgefälles bald λ-Werte größer als $+12$ erreichen, bei denen das Pohlhausensche Verfahren versagt; aus diesem Grunde wurden Querschnitte mit $k > 2$ nicht untersucht.

Die Impulsdicke $\sqrt{Re}\,\frac{\vartheta}{t}$, Bild 6, weist ebenfalls einen verschiedenartigen Verlauf je nach dem Verhalten des Geschwindigkeitsgradienten auf. Für $k > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ fällt die Impulsdicke von ihrem Staupunktwert zunächst auf einen

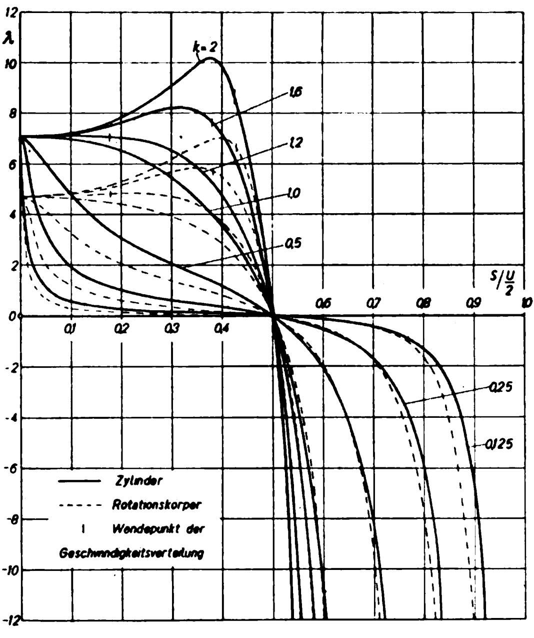


Bild 5. Der Pohlhausensche Formparameter λ an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden.

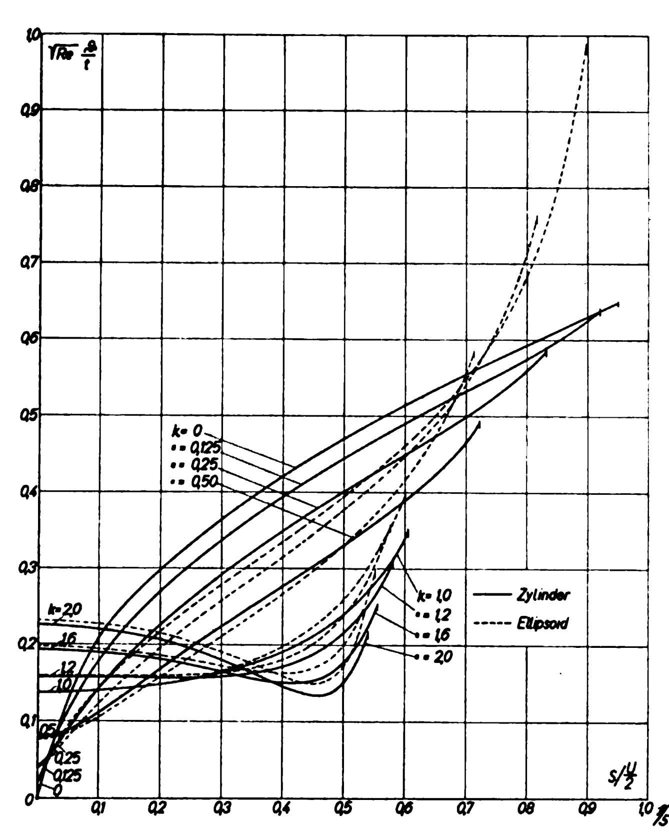


Bild 6. Die Impulsdicke der laminaren Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden.

Kleinstwert, der zwischen Wendepunkt und Druckminimum erreicht wird, und steigt dann. Für $k < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ wächst die Impulsdicke monoton. Auch wenn man die Impulsdicke bei einem und demselben Querschnitt für ebene und rotationssymmetrische Strömung vergleicht, scheint der Wert $k = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ eine Grenzscheide zu bilden, indem nämlich für $k > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ die Impulsdicke in der rotationssymmetrischen Strömung bei gleicher Reynoldsscher Zahl in Staupunktnähe immer größer, für $k < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ dagegen kleiner ist als bei der ebenen Strömung.

Man kann das auch unmittelbar aus der folgenden einfachen Rechnung einsehen.

Im Staupunkt des Rotationskörpers bestimmt sich die Impulsdicke nach [7] aus der Gleichung:

$$\left(\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}}\right)_{s=0\,\mathrm{rot}} \cdot Re\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^2_{0\,\mathrm{rot}} = 0{,}05708, \quad (18)$$

im Staupunkt des Zylinders aus der Gleichung:

$$\left(\frac{d\frac{u_0}{u_\infty}}{d\frac{s}{t}}\right)_{s=0\,\mathrm{Zyl.}} \cdot Re\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^2_{0\,\mathrm{Zyl.}} = 0{,}077, \quad (19)$$

so daß wegen der Beziehung

$$u_{0\,\mathrm{rot}} = \frac{A}{1+k}\, u_{0\,\mathrm{Zyl.}} \quad (20)$$

das Verhältnis der Impulsdicken im Staupunkt ausgedrückt wird durch:

$$\left(\frac{\vartheta_{\mathrm{rot}}}{\vartheta_{\mathrm{Zyl.}}}\right)_0 = 0{,}861\sqrt{\frac{1+k}{A}} \quad (21)$$

Wie man aus Bild 9 erkennt, ist dieses Verhältnis gleich 1 für $k \sim \frac{2}{3}\sqrt{3}$, so daß man zu der Vermutung geführt

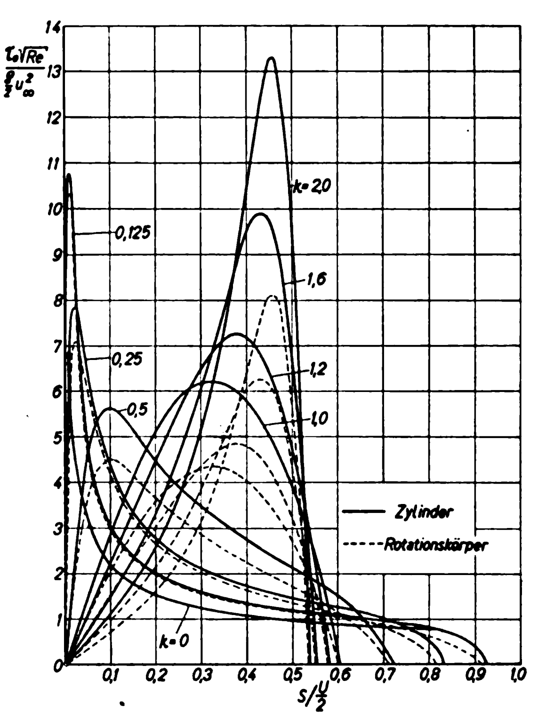


Bild 7. Die Schubspannung der laminaren Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden.

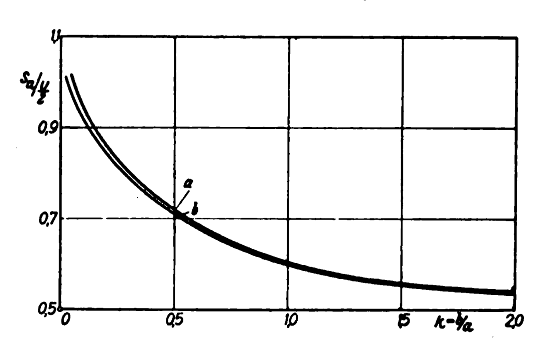


Bild 8. Ablösungspunkte der laminaren Reibungsschicht. a) elliptischer Zylinder. b) Rotationsellipsoid.

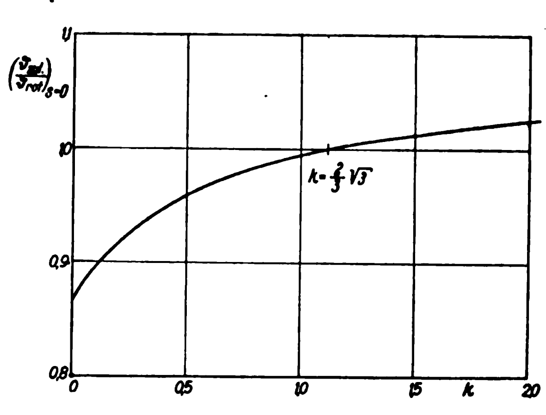


Bild 9. Verhältnis der Impulsdicke im Staupunkt von elliptischen Zylindern und Rotationsellipsoiden bei gleicher Reynoldsscher Zahl.

werden könnte, daß bei gleicher Reynoldsscher Zahl die Impulsdicken im Staupunkt des Rotationsellipsoides und des elliptischen Zylinders gerade dann gleich sind, wenn im Staupunkt auch die dritte Ableitung der Geschwindigkeit nach der Bogenlänge verschwindet.

Nimmt k von dem Wert $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ an ab, so werden die Abweichungen zwischen den Impulsdicken im ganzen Strömungsbereich zunächst größer; für $k \to 0$ müssen die Ver-

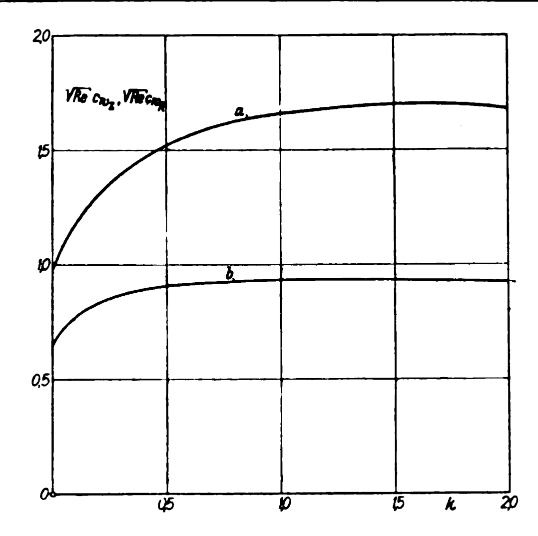


Bild 10. Widerstandsbeiwerte für den ersten Quadranten der Zylinder- und Ellipsoidschalen.
a) elliptischer Zylinder. b) Rotationsellipsoid.

teilungen der Impulsdicke am elliptischen Zylinder und am Rotationsellipsoid sich jedoch wieder einander nähern und für $k = 0$ in die bekannte Blasiussche Parabelverteilung längs der ebenen Platte bzw. längs des dünnen Fadens

$$\sqrt{Re}\,\frac{\vartheta}{t} = 0{,}664\sqrt{s\Big/\frac{U}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

übergehen.

Die Schubspannung τ_0, Bild 7, ist bei gleicher Reynoldsscher Zahl am Ellipsoid durchweg geringer als am elliptischen Zylinder. Ihr Verlauf über der Bogenlänge ist an beiden Körpern im übrigen ganz ähnlich, insbesondere liegen die Maxima der Schubspannung bei demselben Wert der Bogenlänge.

Den Reibungswiderstand der bis zu einem bestimmten Wert der Bogenlänge s benetzten Oberfläche erhält man für den Zylinder der Länge l nach der Beziehung (Bild 1):

$$W_z = l\int_0^s \tau_0 \cos\alpha\, d\,s = l\int_0^x \tau_0\, d\,x, \quad \ldots \quad (23)$$

für das Rotationsellipsoid nach der Formel

$$W_R = 2\,\pi\int_0^s \tau_0 \cos\alpha\, y\, d\,s = 2\,\pi\int_0^x \tau_0\, y\, d\,x, \quad \ldots \quad (24)$$

wo y der halbe Durchmesser des Rotationskörpers an der Stelle x ist.

Da die Schubspannung in den Betrag des Widerstandes des Rotationskörpers mit einem von der Bogenlänge abhängigen Gewicht (y) eingeht, ist der Vergleich der integralen Widerstände in ebener Strömung mit denen in rotationssymmetrischer Strömung in sinnfälliger Weise nicht möglich. In Bild 10 sind auch die Widerstände W_{Qu} für den ersten Quadranten ($0 < \varphi < 90^0$) der Zylinder- bzw. Ellipsoidschale in verschiedener Weise dimensionslos gemacht:

$$\sqrt{Re}\,c_{w_z} = \frac{W_{z\,Qu}}{\varrho/2\,u_\infty^2\,l\,\frac{U}{2}} = \int_0^{0,5}\left(\frac{\tau_0\sqrt{Re}}{\varrho/2\,u_\infty^2}\right)\cos\alpha\, d\,s\Big/\frac{U}{2}, \quad \ldots \quad (25)$$

$$\sqrt{Re}\,c_{w_R} = \frac{W_{R\,Qu}}{\pi\,\varrho/2\,u_\infty^2\,U\,b} = \int_0^{0,5}\left(\frac{\tau_0\sqrt{Re}}{\varrho/2\,u_\infty^2}\right)\cos\alpha\,\sin\varphi\, d\,s\Big/\frac{U}{2}. \quad (26)$$

Für $k = 0$, d. h. für die ebene Platte bzw. für den dünnen Faden, erhält man mit

$$\delta = 5{,}84\sqrt{\frac{\nu\,x}{u_\infty}}\,;\quad \frac{\tau_0\sqrt{Re}}{\varrho/2\,u_\infty^2} = \frac{4}{5{,}84}\,\frac{1}{\sqrt{s\Big/\frac{U}{2}}} = \frac{0{,}685}{\sqrt{s\Big/\frac{U}{2}}} \quad (27)$$

die Beiwerte

$$\sqrt{Re}\,c_{w_z}^{(0)} = 0{,}685\int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt{s\Big/\frac{U}{2}}}\,d\,s\Big/\frac{U}{2} = 0{,}685\sqrt{2} = 0{,}97 \quad (28)$$

und

$$\sqrt{Re}\,c_{w_R}^{(0)} = 0{,}685\int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt{s\Big/\frac{U}{2}}}\left(1 - 2\,s\Big/\frac{U}{2}\right)d\,s\Big/\frac{U}{2} = 0{,}685\,\frac{2}{3}\sqrt{2} = 0{,}646. \quad (29)$$

Die am Schluß von Kapitel I aufgeworfene Frage, wie sich die Reibungsschichten in ebener und rotationssymmetrischer Strömung bei gleicher Form des umströmten Querschnitts und absolut gleicher Geschwindigkeitsverteilung unterscheiden, beantworten wir, indem wir den Kennwert (ϑ, τ_0) der Reibungsschicht am elliptischen Zylinder bei einer bestimmten Reynoldsschen Zahl Re durch den Wert am entsprechenden Ellipsoid bei der Reynolsschen Zahl $\frac{1+k}{A}\,Re$ dividieren, Bild 11, 12:

$$\Theta = \frac{\vartheta_{\text{rot}}\left(\frac{1+k}{A}\cdot Re\right)}{\vartheta_{\text{Zyl.}}(Re)} = \frac{\vartheta_{\text{rot}}(Re)}{\vartheta_{\text{Zyl.}}(Re)}\left(\frac{1+k}{A}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

und

$$T = \frac{\tau_{0\,\text{rot}}\left(\frac{1+k}{A}\,Re\right)}{\tau_{0\,\text{Zyl.}}(Re)} = \frac{\tau_{0\,\text{rot}}(Re)}{\tau_{0\,\text{Zyl.}}(Re)}\left(\frac{1+k}{A}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \quad (31)$$

Für den Staupunkt $s = 0$ folgt aus (30) und (21) unmittelbar:

$$\Theta_0 = 0{,}861.$$

Das Verhältnis der Schubspannungen im Staupunkt ergibt sich mit (16) und (17) zunächst zu:

$$T_0 = \lim_{s\to 0}\frac{\tau_{0\,\text{rot}}(Re)}{\tau_{0\,\text{Zyl.}}(Re)} = \frac{12 + 4{,}716}{12 + 7{,}052}\,\frac{\left(\frac{\vartheta}{\delta}\right)_{\lambda = 4,716}}{\left(\frac{\vartheta}{\delta}\right)_{\lambda = 7,052}} \times \lim_{s\to 0}\frac{u_{0\,\text{rot}}}{\vartheta_{\text{rot}}}\,\frac{\vartheta_{\text{Zyl.}}}{u_{0\,\text{Zyl.}}}, \quad (32)$$

woraus man mit (3), (10) und (21) den Wert

$$T_0 = 1{,}070 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

erhält.

Man erkennt aus Bild 11 und 12, daß bei absolut gleicher Druckverteilung am elliptischen Zylinder und Rotationsellipsoid die Impulsdicke am Rotationskörper vom Staupunkt bis zum Druckminimum durchweg kleiner ist als beim Zylinder, aber hinter dem Druckminimum so stark wächst, daß sie im Ablösungspunkt stets größer ist. Die Schubspannung dagegen ist am Rotationskörper dementsprechend vor dem Druckminimum stets größer als am Zylinder und sinkt erst hinter dem Druckminimum unter den Zylinderwert.

IV. Zusammenfassung.

Wenn man die laminare symmetrische Strömung um einen elliptischen Zylinder und ein Rotationsellipsoid (Umdrehungsachse a in Anblasrichtung) von gleichem Achsenverhältnis $k = \frac{b}{a}$ vergleicht, ist die Wandschubspannung bei gleicher Reynoldsscher Zahl $Re = \frac{2\,a\,u_\infty}{\nu}$ am Ellipsoid stets kleiner als am Zylinder, die Impulsdicke indessen weist ein verschiedenartiges Verhalten auf, je nachdem ob das Achsenverhältnis k größer oder kleiner als $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ist, d. h. die Geschwindigkeitsverteilung längs der Bogenlänge einen Wendepunkt hat oder nicht. Für $k > \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ist die

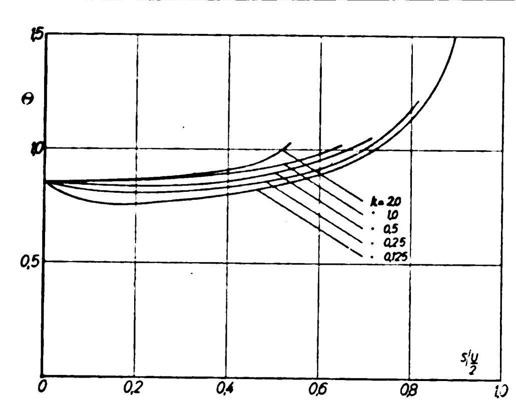


Bild 11. Verhältnis der Impulsdicke am Ellipsoid zu derjenigen am elliptischen Zylinder bei absolut gleicher Geschwindigkeitsverteilung.

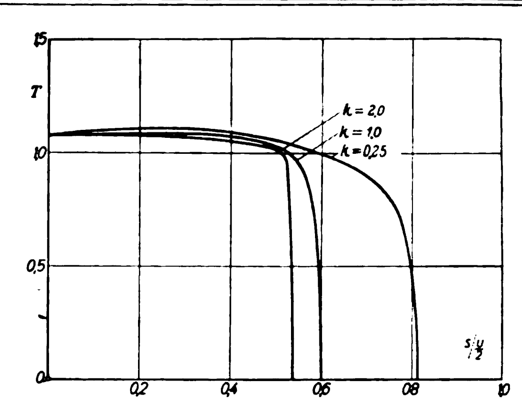
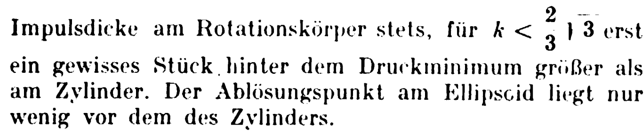


Bild 12. Verhältnis der Schubspannung am Ellipsoid zu derjenigen am elliptischen Zylinder bei absolut gleicher Geschwindigkeitsverteilung.



Impulsdicke am Rotationskörper stets, für $k < \frac{2}{3}\sqrt{3}$ erst ein gewisses Stück hinter dem Druckminimum größer als am Zylinder. Der Ablösungspunkt am Ellipsoid liegt nur wenig vor dem des Zylinders.

Da die Verteilungen der Potentialgeschwindigkeit an beiden Körperformen lediglich affin verzerrt sind, läßt sich die Frage untersuchen, wie sich die Reibungsschichten bei absolut genommen gleicher Geschwindigkeitsverteilung und gleicher Form des umströmten Querschnitts in ebener und rotationssymmetrischer Strömung unterscheiden. Die Schubspannung am Rotationskörper ist in diesem Fall vor dem Druckminimum größer und die Impulsdicke dementsprechend kleiner als am Zylinder; auf dem Wege zum Ablösungspunkt kehrt sich dieses Verhalten um und zwar um so später und stärker, je schlanker der Körper ist, d. h. je kleiner sein Achsenverhältnis k ist.

Der Beiwert des Reibungswiderstandes am Rotationsellipsoid und am elliptischen Zylinder wird für den ersten Quadranten abhängig vom Achsenverhältnis dargestellt.

V. Schrifttum.

[1] A. F. Zahm, Flow and force equations for a body revolving in a fluid. NACA Rep. 323, 1928.
[2] L. B. Tuckerman, Inertia factors of ellipsoids for use in airship design. NACA Rep. 210, 1925.
[3] K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Z angew. Math. und Mech. Bd. 1 (1921), S. 252.
[4] J. Pretsch, Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. I 60.
[5] S. Tomotika, Laminar boundary layer on the surface of a sphere in a uniform stream. ARC Rep. 1678, 1936.
[6] S. Tomotika, I. Imai, On the transition from laminar to turbulent flow in the boundary layer of a sphere. Rep. of the Aeron. Research Inst. Tokio Imper. Univ. Nr. 167, 1938.
[7] H. Holstein, T. Bohlen, Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen (noch nicht veröffentlicht).

Die erregenden Biegekräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung.

Von A. Kimmel.

Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Der Einfluß der mittelbaren Nebenpleuelanlenkung auf die erregenden Biegekräfte bei Stern- und V-Motoren wird rechnerisch untersucht, wobei neben den Gasbiegekräften auch die Massenbiegekräfte höherer Ordnung miteinbezogen werden. Die Ergebnisse werden an Hand eines durchgerechneten Beispiels erläutert.

Gliederung.

I. Einleitung.

Ähnlich wie früher die Drehkräfte[1]) sollen nunmehr auch die für die Erregung der Biegeschwingungen wichtigen Biegekräfte von Flugmotoren (insbesondere Sternmotoren) unter Berücksichtigung der mittelbaren Nebenpleuelanlenkung rechnerisch allgemein untersucht werden, wobei besonders auch die Massenkräfte höherer Ordnung miteinbezogen werden sollen. Hierzu wird ein Lösungsweg verwendet, der für den Fall der unmittelbaren Pleuelanlenkung (z. B. Hauptzylinder von Sternmotoren) bereits früher ausführlich angegeben wurde[2]) und der darauf beruht, daß die gesamte Kinematik des Kurbeltriebs durch Fourierreihen dargestellt und die erregenden Gas- und Massenkräfte mit Hilfe der Arbeitsgleichung hergeleitet werden.

Die Ergebnisse dieser allgemeinen Rechnungen werden sodann an Hand eines durchgerechneten Zahlenbeispiels erläutert. Ferner wird noch die Güte verschiedener Näherungsrechnungen geprüft[3]).

II. Die Kinematik des Kurbeltriebs mit mittelbar angelenktem Nebenpleuel.

Zur besseren Übersicht sollen die wichtigsten in Mitteilung II hergeleiteten kinematischen Beziehungen nochmals kurz zusammengefaßt werden. Hierbei werden wieder, damit der Rechenaufwand erträglich bleibt, jeweils nur so viele Glieder mitgeführt, daß in den Endformeln die Glieder 4. Ordnung in λ, λ_n, ϱ_n usw. noch enthalten sind. Bei den Gleichungen für die Biegekräfte werden jedoch die Glieder 4. Ordnung in λ, λ_n, ϱ_n weggelassen, die mit einer Beizahl kleiner als $1/4$ behaftet sind und die bei der späteren Summation über den ganzen Sternmotor nicht wieder eine größere Beizahl erhalten. Bei den kinematischen Untersuchungen dagegen sind die Glieder 4. Ordnung durchweg noch genau.

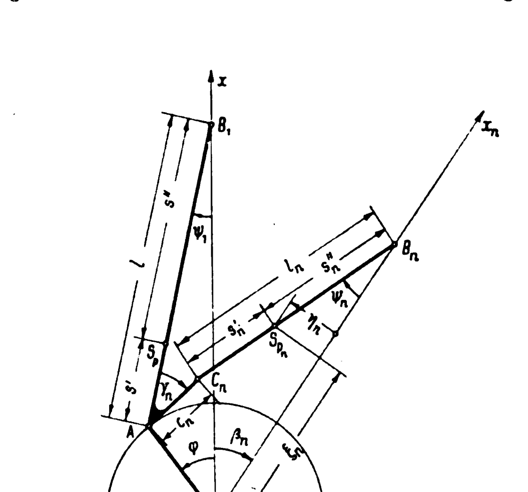


Bild 1. Kurbeltrieb mit mittelbarer Pleuelanlenkung.

1. Verwendete Abkürzungen.

Zunächst seien mit den Bezeichnungen von Bild 1 die dimensionslosen Beiwerte

$$\lambda = \frac{r}{l}, \quad \lambda_n = \frac{r}{l_n}, \quad \varrho_n = \frac{c_n}{l} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

eingeführt, die als kleine Größen 1. Ordnung betrachtet werden. Ferner sei zur Abkürzung

$$\delta_n = \gamma_n - \beta_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sowie

$$\mu_n = \varrho_n \cos \delta_n \quad \text{und} \quad \tau_n{}^3 = \varrho_n \sin \delta_n \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

gesetzt. Da der Winkel δ_n bei ausgeführten Motoren immer sehr klein ist, hat die Größe μ_n ungefähr dieselbe Größenordnung wie ϱ_n. Die Größe $\sin \delta_n$ wird bei den folgenden Untersuchungen durchweg als eine von 2. Ordnung kleine Größe behandelt; die Abkürzung $\tau^3{}_n$ stellt daher eine von 3. Ordnung kleine Größe dar. Schließlich seien noch die weiteren Abkürzungen

$$\sigma_n' = \frac{s_n'}{l_n}, \quad \sigma_n'' = \frac{s_n''}{l_n} \quad (\sigma_n' + \sigma_n'' = 1)$$

sowie

$$\sigma_n^* = \frac{k_{P_n}}{l_n} \quad \ldots \quad (4)$$

eingeführt, wo k_{P_n} der Trägheitshalbmesser des Nebenpleuels in bezug auf seinen Schwerpunkt ist.

[1]) A. Kimmel, Die erregenden Drehkräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkung. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 262. Diese Arbeit wird im folgenden kurz als Mitteilung II bezeichnet.

[2]) A. Kimmel, Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 229. Diese Arbeit wird im folgenden als Mitteilung I bezeichnet.

[3]) Bei den vorliegenden Untersuchungen hat Herr M. Läpple mitgewirkt.

2. Die Bewegung des Kolbens.

Die Fourierentwicklung für die Koordinate x_n des Kolbenbolzens B_n lautet

$$x_n = r\left[\mathfrak{A}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\mathfrak{A}_\nu}{\nu^2}\cos\nu\varphi + \frac{\mathfrak{B}_\nu}{\nu^2}\sin\nu\varphi\right)\right] \quad . \; . \; (5)$$

mit den folgenden Abkürzungen, wobei die großen deutschen Buchstaben keine Vektoren, sondern reine Zahlenwerte darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0 &= \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{4} - \frac{3}{64}\lambda_n^3\right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{64}\lambda^3\right)\mu_n \\
&\quad + \left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{3}{16}\lambda_n^3\right)\mu_n\cos\beta_n - \frac{\lambda_n}{4}\mu_n^2, \\
\mathfrak{A}_1 &= \cos\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\sin\beta_n, \\
\mathfrak{A}_2 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{4}\right)\cos 2\beta_n + \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{4}\right)\mu_n \\
&\quad - \left(2\lambda_n + \frac{3}{4}\lambda_n^3\right)\mu_n\cos\beta_n + \lambda_n\mu_n^2 - \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n\cos 3\beta_n, \\
\mathfrak{A}_3 &\approx 0, \\
\mathfrak{A}_4 &= -\frac{\lambda_n^3}{4}\cos 4\beta_n - \frac{\lambda^3}{4}\mu_n + \lambda_n^3\mu_n\cos 3\beta_n, \\
&\;\;\vdots \\
\mathfrak{B}_1 &= -\sin\beta_n - \tau_n^3 + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\cos\beta_n - \mu_n), \\
\mathfrak{B}_2 &= \left(-\lambda_n - \frac{\lambda_n^3}{4}\right)\sin 2\beta_n + \left(2\lambda_n + \frac{3}{4}\lambda_n^3\right)\mu_n\sin\beta_n \\
&\quad + \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n\sin 3\beta_n, \\
\mathfrak{B}_3 &\approx 0, \\
\mathfrak{B}_4 &= \frac{\lambda_n^3}{4}\sin 4\beta_n - \lambda_n^3\mu_n\sin 3\beta_n, \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(Die Größen $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ enthalten nur Glieder, die von höherer als 4. Ordnung klein sind.) Hieraus erhält man durch zweimalige Ableitung nach der Zeit t unter Voraussetzung gleichförmiger Drehschnelle ω die Kolbenbeschleunigung

$$\ddot{x}_n = -r\,\omega^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{A}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{B}_\nu\sin\nu\varphi) \quad . \; . \; . \; (7)$$

3. Die Bewegung des Pleuels.

Aus Bild 1 folgt für die Koordinaten des Schwerpunkts S_{Pn} des Nebenpleuels

$$\left.\begin{aligned}
\xi_n &= x_n - s_n''\cos\psi_n, \\
\eta_n &= s_n''\sin\psi_n
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

mit x_n (5) sowie den folgenden Reihen für $\cos\psi_n$ und $\sin\psi_n$:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\psi_n &= \left[1 - \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{3}{64}\lambda_n^4 + \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16}\lambda_n^4\right)\mu_n\cos\beta_n - \frac{\lambda_n^2\mu_n^2}{4}\right] \\
&\quad + \cos\varphi\cdot\left[\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\tau_n^3\sin\beta_n\right] \\
&\quad + \cos 2\varphi\cdot\left[\left(\frac{\lambda_n^2}{4} + \frac{\lambda_n^4}{16}\right)\cos 2\beta_n - \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16}\lambda_n^4\right)\mu_n\cos\beta_n \right.\\
&\qquad\left. + \frac{\lambda_n^2\mu_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^4}{16}\mu_n\cos 3\beta_n\right] \\
&\quad + \cos 3\varphi\cdot 0 \\
&\quad + \cos 4\varphi\cdot\left[-\frac{\lambda_n^4}{64}\cos 4\beta_n + \frac{\lambda_n^4}{16}\mu_n\cos 3\beta_n\right] \\
&\quad + \sin\varphi\cdot\left[\frac{\lambda_n^2}{\lambda}\tau_n^3(\cos\beta_n - \mu_n)\right] \\
&\quad + \sin 2\varphi\cdot\left[\left(-\frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^4}{16}\right)\sin 2\beta_n \right.\\
&\qquad\left. + \left(\frac{\lambda_n^2}{2} + \frac{3}{16}\lambda_n^4\right)\mu_n\sin\beta_n + \frac{\lambda_n^4}{16}\mu_n\sin 3\beta_n\right] \\
&\quad + \sin 3\varphi\cdot 0 \\
&\quad + \sin 4\varphi\cdot\left[\frac{\lambda_n^4}{64}\sin 4\beta_n - \frac{\lambda_n^4}{16}\mu_n\sin 3\beta_n\right],
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\psi_n &= -\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + \lambda_n\sin\beta_n\cos\varphi \\
&\quad - \frac{\lambda\lambda_n}{4}\tau_n^3\cos 2\varphi + \lambda_n(\cos\beta_n - \mu_n)\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Komponenten $\ddot{\xi}_n$ und $\ddot{\eta}_n$ der Beschleunigung des Schwerpunkts S_{Pn}, die nicht ausführlich angeschrieben seien, erhält man rasch durch zweimalige Ableitung von ξ_n, η_n (8) unter Berücksichtigung von x_n (5), $\cos\psi_n$ (9) und $\sin\psi_n$ (10).

Die Reihe für den Neigungswinkel ψ_n des Nebenpleuels gegen die Achse seines Zylinders lautet

$$\psi_n = \mathfrak{C}_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\nu^2}\cos\nu\varphi + \frac{\mathfrak{D}_\nu}{\nu^2}\sin\nu\varphi\right) \quad . \; . \; (11)$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{C}_0 &= -\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4}\right), \\
\mathfrak{C}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64}\lambda_n^5 + \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n^2\right)\sin\beta_n - \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n\sin 2\beta_n, \\
\mathfrak{C}_2 &= -\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\lambda^2 - \lambda_n^2\cos 2\beta_n), \\
\mathfrak{C}_3 &= -\left(\frac{3}{8}\lambda_n^3 + \frac{27}{128}\lambda_n^5\right)\sin 3\beta_n \\
&\quad + \frac{9}{8}\lambda_n^3\mu_n(\sin 2\beta_n - \mu_n\sin\beta_n), \\
\mathfrak{C}_4 &\approx 0, \\
\mathfrak{C}_5 &= \frac{15}{128}\lambda_n^5\sin 5\beta_n, \\
&\;\;\vdots \\
\mathfrak{D}_1 &= \left(\lambda_n + \frac{\lambda_n^3}{8} + \frac{3}{64}\lambda_n^5 + \frac{3}{8}\lambda_n^3\mu_n^2\right)\cos\beta_n \\
&\quad - \frac{\lambda_n^3}{8}\mu_n\cos 2\beta_n - \lambda_n\mu_n\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right), \\
\mathfrak{D}_2 &= -\frac{\lambda_n^3}{\lambda}\tau_n^3\sin 2\beta_n, \\
\mathfrak{D}_3 &= -\left(\frac{3}{8}\lambda_n^3 + \frac{27}{128}\lambda_n^5\right)\cos 3\beta_n \\
&\quad + \frac{9}{8}\lambda_n^3\mu_n(\cos 2\beta_n - \mu_n\cos\beta_n), \\
\mathfrak{D}_4 &\approx 0, \\
\mathfrak{D}_5 &= \frac{15}{128}\lambda_n^5\cos 5\beta_n, \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Zweimalige Ableitung von ψ_n nach der Zeit t ergibt

$$\ddot{\psi}_n = -\omega^2\sum_{\nu=1}^{\infty}(\mathfrak{C}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{D}_\nu\sin\nu\varphi) \quad . \; . \; . \; (13)$$

III. Die Gasbiegekraft.

Die Gasbiegekraft R_{Gn} eines Nebenzylinders mit mittelbarer Pleuelanlenkung wird, wie bei der unmittelbaren Anlenkung, zweckmäßig mit der Arbeitsgleichung aus der Gaskolbenkraft P_n berechnet. Diese liefert entsprechend wie in Mitteilung I, wenn man wieder die Biegekraft positiv in Richtung gegen die Kurbelwellenachse annimmt und die Gaskolbenkraft positiv rechnet, wenn sie als Druckkraft auf den Kolben wirkt,

$$R_{Gn} = P_n\frac{\partial x_n}{\partial r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Den Ausdruck $\frac{\partial x_n}{\partial r}$ erhält man durch partielle Ableitung von x_n (5) nach r zu

$$\frac{\partial x_n}{\partial r} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\mathfrak{J}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{K}_\nu\sin\nu\varphi) \quad . \; . \; . \; . \; (15)$$

mit den Abkürzungen



$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{J}_0 &= -\left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{3}{16}\lambda_n^3\right) + \left(\lambda_n + \frac{3}{4}\lambda_n^3\right)\mu_n \cos\beta_n \\
&\quad - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{16}\lambda^3 + \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\right)\mu_n, \\
\mathfrak{J}_1 &= \cos\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3 \sin\beta_n, \\
\mathfrak{J}_2 &= \left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n^3}{4}\right)\cos 2\beta_n - \left(\lambda_n + \frac{3}{4}\lambda_n^3\right)\mu_n \cos\beta_n \\
&\quad - \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n \cos 3\beta_n + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\right)\mu_n, \\
\mathfrak{J}_3 &\approx 0, \\
\mathfrak{J}_4 &= -\frac{\lambda_n^3}{16}\cos 4\beta_n + \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n \cos 3\beta_n - \frac{\lambda^3}{16}\mu_n, \\
&\;\vdots \\
\mathfrak{K}_1 &= -\sin\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\cos\beta_n - \mu_n) - \tau_n^3, \\
\mathfrak{K}_2 &= -\left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n^3}{4}\right)\sin 2\beta_n + \left(\lambda_n + \frac{3}{4}\lambda_n^3\right)\mu_n \sin\beta_n \\
&\quad + \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n \sin 3\beta_n, \\
\mathfrak{K}_3 &\approx 0, \\
\mathfrak{K}_4 &= \frac{\lambda_n^3}{16}\sin 4\beta_n - \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n \sin 3\beta_n, \\
&\;\vdots
\end{aligned}
\right\} \quad (16)
$$

Damit wird die Gasbiegekraft endgültig

$$R_{G_n} = P_n \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{J}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{K}_\nu \sin\nu\varphi) \quad . \; . \; . \quad (17)$$

mit $\mathfrak{J}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$ (16).

Da die auf den Kolben wirkende Gaskraft P_n nicht analytisch gegeben ist, hat man zur Berechnung der Gasbiegekraft R_{G_n} nach (17) die Kraft P_n für verschiedene, etwa von 10 zu 10° fortschreitende Kurbelwinkel φ aus dem Indikatordiagramm zu entnehmen. Da die Beiwerte $\mathfrak{J}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu$ mit wachsendem Fußzeichen sehr rasch kleiner werden, kann die in der Klammer von (17) stehende Reihe je nach der verlangten Genauigkeit abgebrochen werden. Falls ein pV-Diagramm des Hauptzylinders näherungsweise auch für die Nebenzylinder verwendet werden soll, ist auf die richtige Zuordnung des Kurbelwinkels φ und des aus dem Indikatordiagramm zu entnehmenden Drucks zu achten, wobei noch die infolge der mittelbaren Pleuelanlenkung auftretende Hubänderung und Totpunktverschiebung zu berücksichtigen ist.

Für den Sonderfall der regelmäßigen Nebenpleuelanlenkung, wo der Anlenkwinkel γ_n gleich dem zugehörigen Zylinderwinkel β_n, also nach (2) $\delta_n = 0$ ist, gilt (17) unverändert, jedoch vereinfachen sich die Ausdrücke $\mathfrak{J}_\nu$, $\mathfrak{K}_\nu$ (16), da nunmehr nach (3) $\mu_n = \varrho_n$ und $\tau_n^3 = 0$ werden.

Zur Berechnung der gesamten Gasbiegekraft des Hauptzylinders und sämtlicher Nebenzylinder eines Sternmotors hat man zunächst für jeden Kurbelwinkel φ die Gasbiegekräfte der einzelnen Zylinder zu ermitteln und diese einzelnen Anteile für jeden Kurbelwinkel zu addieren. Eine anschließende harmonische Analyse des so ermittelten Verlaufs der Gasbiegekraft liefert schließlich die Harmonischen der gesamten Gasbiegekraft des Sternmotors.

Zum Vergleich sei noch die gesamte Gasbiegekraft sämtlicher z Zylinder eines Sterns unter der Annahme berechnet, daß alle Pleuel unmittelbar am Hubzapfen angreifen. Wie üblich seien die Zylinder gleichmäßig über den Umfang verteilt, außerdem seien sämtliche Pleuel gleich lang. Die Gasbiegekraft eines Zylinders sei nach der in Mitteilung I angegebenen Vorschrift berechnet zu

$$
\left.
\begin{aligned}
R_G &= R_0 + R_1 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \vartheta_1\right) + R_2 \sin\left(2\frac{\varphi}{2} + \vartheta_2\right) + \ldots \\
&\quad + R_h \sin\left(h\frac{\varphi}{2} + \vartheta_h\right) + \ldots
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

Die Scheitelwerte der Harmonischen der Gasbiegekräfte der übrigen Zylinder sind genau gleich groß, lediglich die Phasen sind verschieden.

Es läßt sich nun — etwa mit Hilfe von Vektorsternen — zeigen, daß bei unmittelbarer Pleuelanlenkung die gesamte Gasbiegekraft eines z-Zylinder-Sternmotors von der Form

$$
\begin{aligned}
R_G &= z R_0 + z R_z \sin\left(z\frac{\varphi}{2} + \vartheta_z\right) \\
&\quad + z R_{2z} \sin\left(2z\frac{\varphi}{2} + \vartheta_{2z}\right) + \ldots \quad (19)
\end{aligned}
$$

ist. Es verschwinden also sämtliche Harmonischen mit Ausnahme der »ausgezeichneten« Harmonischen, die in z-facher Größe erscheinen. Bei einem 7-Zylinder-Sternmotor mit unmittelbarer Anlenkung z. B. bleibt somit nur die 7., 14., 21., ... Harmonische bzw. die 3½te, 7., 10½te, ... Ordnung der Erregenden übrig.

IV. Die Massenbiegekraft für einen Nebenzylinder.

1. Die vom Kolben herrührende Massenbiegekraft. Entsprechend wie bei der unmittelbaren Anlenkung des Pleuels (vgl. Mitteilung I) erhält man hier nach der Arbeitsgleichung für die vom Kolben herrührende Massenbiegekraft

$$R_{K_n} = \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial r} m_{K_n}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

wo m_{K_n} die Masse des Kolbens ist. Setzt man in (20) die Fourierreihe für $\ddot{x}_n$ aus (7) sowie für $\frac{\partial x_n}{\partial r}$ aus (15) ein und multipliziert diese beiden Reihen nach den im Anhang von Mitteilung I angegebenen Formeln, so erhält man schließlich die Massenbiegekraft des Kolbens bei beliebiger Pleuelanlenkung

$$R_{K_n} = m_{K_n} r \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{M}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{N}_\nu \sin\nu\varphi) \quad . \; . \quad (21)$$

mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_0 &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda_n^2}{4} + \left\langle\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right) + \lambda_n\mu_n\left(\lambda_n\cos\beta_n - \frac{\lambda}{2}\cos 2\beta_n\right)\left\langle + \lambda_n\mu_n^2\left[\lambda\cos\beta_n - \lambda_n\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\beta_n\right)\right] - \frac{\lambda^2}{4}\mu_n^2\right\rangle \\
&\quad - \tau_n^3\left(1\left\langle + \frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\right\rangle\right)\sin\beta_n, \\
\mathfrak{M}_1 &= -\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right)\cos\beta_n + \lambda_n\mu_n\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\beta_n\right) \\
&\quad - \frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n)\cos\beta_n\left\langle + \frac{3}{8}\lambda_n^3\mu_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\left(\frac{5}{4}\lambda_n\sin\beta_n - \frac{3}{4}\lambda\sin 2\beta_n\right)\right\rangle, \\
\mathfrak{M}_2 &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle - \frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle\right)\cos 2\beta_n + \frac{\lambda_n}{2}\mu_n(\lambda\langle + 3\lambda_n\mu_n\rangle)(1 + \cos 2\beta_n) \\
&\quad - \frac{\lambda_n^2}{2}\mu_n(3\cos\beta_n + \cos 3\beta_n)\left\langle + \lambda\mu_n^2\left(\frac{\lambda}{2} - 2\lambda_n\cos\beta_n\right)\right\rangle + \frac{1}{\lambda}\tau_n^3[-\lambda_n\sin 2\beta_n + (\lambda\langle + \lambda_n\mu_n\rangle)\sin\beta_n], \\
\mathfrak{M}_3 &= -\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{3}{32}\lambda_n^3\right)\cos 3\beta_n + \frac{3}{2}\lambda_n\mu_n\cos 2\beta_n - \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n)\cos\beta_n \\
&\quad \left\langle + \frac{1}{4}\lambda_n^3\mu_n\cos 4\beta_n + \frac{3}{4}\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\lambda\sin 2\beta_n - \lambda_n\sin 3\beta_n)\right\rangle,
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{M}_4 = -\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)\cos 4\beta_n + \lambda_n\mu_n\left(\lambda_n\cos 3\beta_n - \frac{\lambda}{2}\cos 2\beta_n\right)\left\langle-\mu_n^2\left(+\frac{\lambda^2}{4} - \lambda\lambda_n\cos\beta_n + \frac{3}{2}\lambda_n^2\cos 2\beta_n\right)\right\rangle,$$

$$\mathfrak{M}_5 = \frac{5}{32}\lambda_n^3\cos 5\beta_n\left\langle-\frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\cos 4\beta_n\right\rangle,$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{N}_1 = \left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right)\sin\beta_n + \frac{\lambda_n}{2}\mu_n\sin 2\beta_n - \frac{5}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n)\sin\beta_n$$
$$\left\langle-\frac{7}{16}\lambda^3\mu_n\sin\beta_n + \frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3\left[\frac{5}{4}\lambda_n\cos\beta_n - \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos 2\beta_n\right)\right]\right\rangle,$$

$$\mathfrak{N}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle-\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle\right)\sin 2\beta_n - \frac{\lambda_n}{2}\mu_n(\lambda\langle+3\lambda_n\mu_n\rangle)\sin 2\beta_n$$
$$+\frac{\lambda_n^2}{2}\mu_n(3\sin\beta_n + \sin 3\beta_n)\langle+\lambda\lambda_n\mu_n^2\sin\beta_n\rangle + \frac{1}{\lambda}\tau_n^3[-\lambda_n\cos 2\beta_n + (\lambda\langle+\lambda_n\mu_n\rangle)\cos\beta_n],$$

$$\mathfrak{N}_3 = \left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{3}{32}\lambda_n^3\right)\sin 3\beta_n - \frac{3}{2}\lambda_n\mu_n\sin 2\beta_n + \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n)\sin\beta_n$$
$$\left\langle-\frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n\sin 4\beta_n + \frac{13}{32}\lambda^3\mu_n\sin\beta_n + \frac{3}{4}\frac{\lambda_n}{\lambda}\tau_n^3(\lambda\cos 2\beta_n - \lambda_n\cos 3\beta_n)\right\rangle,$$

$$\mathfrak{N}_4 = \left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)\sin 4\beta_n + \frac{\lambda_n}{2}\mu_n(\lambda\langle+3\lambda_n\mu_n\rangle)\sin 2\beta_n - \lambda_n^2\mu_n\sin 3\beta_n\langle-\lambda\lambda_n\mu_n^2\sin\beta_n\rangle,$$

$$\mathfrak{N}_5 = -\frac{5}{32}\lambda_n^3\sin 5\beta_n\left\langle+\frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\sin 4\beta_n\right\rangle,$$

$$\vdots \qquad (22)$$

Bei der zahlenmäßigen Auswertung von (21) ist zu beachten, daß die Ausdrücke $\mathfrak{M}_\nu$ und $\mathfrak{N}_\nu$ ganz ähnlich gebaut sind. Bei weniger großen Anforderungen an die Genauigkeit können die Glieder 4. Ordnung in λ, λ_n usw. weggelassen werden. Zur Erleichterung der Zahlenrechnung sind daher hier und in allen späteren Gleichungen die Glieder 4. Ordnung mit einer geknickten Klammer $\langle\ldots\rangle$ versehen, wobei ausdrücklich darauf hingewiesen sei, daß dieses Zeichen kein Rechenzeichen darstellen soll. Es zeigt sich übrigens, daß die Gleichungen durch die Erweiterung um eine weitere Ordnung in λ, λ_n, ϱ_n beträchtlich umfangreicher werden.

2. Die vom Pleuel herrührende Massenbiegekraft.

Für die vom Pleuel herrührende Massenbiegekraft erhält man mit den in Bild 1 eingetragenen Bezeichnungen entsprechend wie bei der unmittelbaren Anlenkung des Pleuels (Mitt. I (30))

$$R_{P_n} = m_{P_n}\left(\ddot{\xi}_n\frac{\partial\xi_n}{\partial r} + \ddot{\eta}_n\frac{\partial\eta_n}{\partial r} + k_{P_n}^2\ddot{\psi}_n\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\right), \qquad (23)$$

wo m_{P_n} die Masse des Pleuels und k_{P_n} sein Trägheitshalbmesser in bezug auf den Schwerpunkt sind. Setzt man in (23) die nach (8) zu ermittelnden Fourierreihen für $\ddot{\xi}_n$, $\ddot{\eta}_n$, $\frac{\partial\xi_n}{\partial r}$, $\frac{\partial\eta_n}{\partial r}$ sowie die Reihe (13) für $\ddot{\psi}_n$ und die aus (11) folgende Reihe für $\frac{\partial\psi_n}{\partial r}$ ein, so erhält man nach Multiplikation der zusammengehörigen Reihen und geeigneter Zusammenfassung für die Massenbiegekraft des Pleuels unter Berücksichtigung seiner Drehträgheit bei beliebiger Anlenkung

$$R_{P_n} = m_{P_n}\,r\,\omega^2\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mathfrak{P}_\nu\cos\nu\varphi + \mathfrak{Q}_\nu\sin\nu\varphi) \quad . \; . \quad (24)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{P}_0 = -\frac{1}{2}(1 + \sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}) - \left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) + \lambda\lambda_n\mu_n\sigma_n'\left(-\frac{1}{2}\cos 2\beta_n\langle+\mu_n\cos\beta_n\rangle\right)$$
$$+\lambda_n^2\mu_n(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\left[\cos\beta_n\left\langle-\mu_n\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\beta_n\right)\right\rangle\right]$$
$$+\mu_n(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\left(\cos\beta_n - \frac{\mu_n}{2}\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}\mu_n^2\right\rangle - \tau_n^3\left(1\left\langle+\frac{\lambda_n}{\lambda}\mu_n\sigma_n'\right\rangle\right)\sin\beta_n,$$

$$\mathfrak{P}_1 = -\left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right)\sigma_n'\cos\beta_n + \lambda_n\mu_n\sigma_n'\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\beta_n\left\langle+\frac{3}{8}\lambda_n^2\right\rangle\right)$$
$$-\frac{\mu_n}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n\sigma_n')\cos\beta_n\left\langle+\frac{1}{4\lambda}\tau_n^3[5\lambda_n^2(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\sin\beta_n - 3\lambda\lambda_n\sigma_n'\sin 2\beta_n + \lambda^2(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\sin\beta_n]\right\rangle,$$

$$\mathfrak{P}_2 = \left\{-\frac{1}{2}[1 - (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})] + \left(\frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle+\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle\right)(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\right\}\cos 2\beta_n + \lambda\lambda_n\mu_n\sigma_n'\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta_n)\langle-2\mu_n\cos\beta_n\rangle\right]$$
$$-\frac{\lambda_n^2}{2}\mu_n(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})[3\cos\beta_n + \cos 3\beta_n\langle-3\mu_n(1 + \cos 2\beta_n)\rangle] + \mu_n(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\left(-\cos\beta_n + \frac{\mu_n}{2}\right)\left\langle+\frac{\lambda^2}{2}\mu_n^2\right\rangle$$
$$+\frac{1}{\lambda}\tau_n^3[-\lambda_n\sigma_n'\sin 2\beta_n + (\lambda\langle+\lambda_n\mu_n\sigma_n'\rangle)\sin\beta_n],$$

$$\mathfrak{P}_3 = -\left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{3}{32}\lambda_n^3\right)\sigma_n'\cos 3\beta_n + \frac{3}{2}\lambda_n\mu_n\sigma_n'\cos 2\beta_n - \frac{3}{4}\mu_n(\lambda + \lambda_n\mu_n\sigma_n')\cos\beta_n$$
$$\left\langle+\frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n\sigma_n'\cos 4\beta_n + \frac{3}{4}\frac{\tau_n^3}{\lambda}[-\lambda_n^2(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\sin 3\beta_n + \lambda\lambda_n\sigma_n'\sin 2\beta_n + \lambda^2(\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\sin\beta_n]\right\rangle,$$

$$\mathfrak{P}_4 = -\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\cos 4\beta_n - \lambda\lambda_n\mu_n\sigma_n'\left(\frac{1}{2}\cos 2\beta_n\langle-\mu_n\cos\beta_n\rangle\right)$$
$$+\lambda_n^2\mu_n(\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\left(\cos 3\beta_n\left\langle-\frac{3}{2}\mu_n\cos 2\beta_n\right\rangle\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}\mu_n^2\right\rangle,$$

$$\mathfrak{P}_5 = \frac{5}{32}\lambda_n^3\sigma_n'\cos 5\beta_n\left\langle-\frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\sigma_n'\cos 4\beta_n\right\rangle,$$

$$\vdots \qquad (25)$$

$$\mathfrak{L}_1 = \left(\frac{\lambda_n}{4} + \frac{\lambda_n^3}{16}\right) \sigma_n' \sin\beta_n + \frac{\lambda_n}{2} \mu_n \sigma_n' \sin 2\beta_n - \mu_n \left(\frac{5}{4}\lambda + \frac{5}{4}\lambda_n \mu_n \sigma_n' \left\langle + \frac{7}{16}\lambda^3 \right\rangle\right) \sin\beta_n$$
$$\left\langle + \frac{1}{\lambda}\tau_n^3 \left[\frac{5}{4}\lambda_n^2 (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) \cos\beta_n - \lambda\lambda_n\sigma_n' \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos 2\beta_n\right) - \frac{5}{4}\lambda^2 (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}) \cos\beta_n\right]\right\rangle,$$
$$\mathfrak{L}_2 = \left\{\frac{1}{2}\left[1 - (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2})\right] - \left(\frac{\lambda_n^2}{2} \left\langle + \frac{13}{32}\lambda_n^4 \right\rangle\right) (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2})\right\} \sin 2\beta_n + \lambda\lambda_n\mu_n\sigma_n' \left(-\frac{1}{2}\sin 2\beta_n \langle + \mu_n \sin\beta_n\rangle\right)$$
$$+ \frac{\lambda_n^2}{2}\mu_n (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) (3\sin\beta_n + \sin 3\beta_n \langle - 3\mu_n \sin 2\beta_n\rangle)$$
$$+ \mu_n (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}) \sin\beta_n - \frac{1}{\lambda}\tau_n^3 \left[\lambda_n\sigma_n' \cos 2\beta_n - (\lambda \langle + \lambda_n\mu_n\sigma_n'\rangle) \cos\beta_n\right],$$
$$\mathfrak{L}_3 = \left(\frac{3}{4}\lambda_n + \frac{3}{32}\lambda_n^3\right) \sigma_n' \sin 3\beta_n - \frac{3}{2}\lambda_n\mu_n\sigma_n' \sin 2\beta_n + \mu_n \left[\frac{3}{4}(\lambda + \lambda_n\mu_n\sigma_n') \left\langle + \frac{13}{32}\lambda^3 \right\rangle\right] \sin\beta_n \left\langle - \frac{\lambda_n^3}{4}\mu_n\sigma_n' \sin 4\beta_n\right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\frac{\tau_n^3}{\lambda}\left[-\lambda_n^2 (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) \cos 3\beta_n + \lambda\lambda_n\sigma_n' \cos 2\beta_n + \lambda^2 (\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}) \cos\beta_n\right]\right\rangle,$$
$$\mathfrak{L}_4 = \left(\frac{\lambda_n^2}{4} \left\langle + \frac{5}{16}\lambda_n^4 \right\rangle\right) (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) \sin 4\beta_n + \lambda\lambda_n\mu_n\sigma_n' \left(\frac{1}{2}\sin 2\beta_n \langle - \mu_n \sin\beta_n\rangle\right)$$
$$- \lambda_n^2\mu_n (\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}) \left(\sin 3\beta_n \left\langle - \frac{3}{2}\mu_n \sin 2\beta_n \right\rangle\right),$$
$$\mathfrak{L}_5 = -\frac{5}{32}\lambda_n^3\sigma_n' \sin 5\beta_n \left\langle + \frac{5}{8}\lambda_n^3\mu_n\sigma_n' \sin 4\beta_n \right\rangle,$$
$$\vdots$$

Zum Vergleich mit dem in (24) und (25) gefundenen Ergebnis für die Massenbiegekraft eines Nebenpleuels unter Berücksichtigung seiner wirklichen Bewegung sei noch kurz eine Näherungsrechnung angegeben, die die Drehträgheit des Nebenpleuels außer acht läßt. Dabei wird die Masse des Nebenpleuels in bekannter Weise durch eine punktförmige Masse $\sigma_n' m_{P_n}$ im Kolbenbolzen B_n und in eine zweite $\sigma_n'' m_{P_n}$ in der Anlenkachse C_n (Bild 1) so ersetzt, daß Gewicht und Schwerpunkt des Pleuels erhalten bleiben.

Der im Kolbenbolzen vereinigt gedachte Massenanteil $\sigma_n' m_{P_n}$ des Pleuels liefert einen Beitrag zur Massenbiegekraft entsprechend dem des Kolbens nach (21) und (22); es wird also näherungsweise

$$R_{P_n}^{(N)'} = \sigma_n' m_{P_n} r \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{M}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{N}_\nu \sin\nu\varphi) \qquad (26)$$

mit den Abkürzungen $\mathfrak{M}_\nu$ und $\mathfrak{N}_\nu$ (22).

Die in der Anlenkachse angebrachte Ersatzmasse macht die Bewegung des Hauptpleuels mit; sie (sowie die Ersatzmassen der übrigen etwa noch am Hauptpleuel angreifenden Nebenpleuel) muß bei der Berechnung der Massenbiegekraft des Hauptpleuels bei der Masse, der Schwerpunktslage und dem Trägheitsmoment des Hauptpleuels mitberücksichtigt werden, was jedoch einen verhältnismäßig großen Rechenaufwand erfordert. Die in der Anlenkachse angebrachte Ersatzmasse $\sigma_n'' m_{P_n}$ wird daher vielfach einfach als rein umlaufende Masse mit dem durch die Fliehkraft bedingten (von der Kurbelwellenachse weggerichteten) festen Biegekraftanteil $-\sigma_n'' m_{P_n} r \omega^2$ betrachtet, wobei die Berichtigung beim Hauptpleuel fortfällt. Die vom Nebenpleuel herrührende Massenbiegekraft wird also in diesem Falle insgesamt

$$R_{P_n}^{(N)} = m_{P_n} r \omega^2 \left\{-\sigma_n'' + \sigma_n' \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{M}_\nu \cos\nu\varphi + \mathfrak{N}_\nu \sin\nu\varphi)\right\}. \quad (27)$$

Auf die Genauigkeit dieser Näherungsrechnungen wird bei der Besprechung des durchgerechneten Beispiels eingegangen.

V. Die Massenbiegekraft sämtlicher Nebenzylinder eines Sternmotors.

Bei der Ermittlung der Massenbiegekraft eines Sternmotors ist es nicht zweckmäßig, die Massenbiegekraft jedes einzelnen Nebenzylinders zahlenmäßig auszurechnen und dann die gefundenen entsprechenden Fourierreihen zu addieren. Es ist vielmehr erheblich einfacher, die Gesamtmassenbiegekraft sämtlicher Nebenzylinder sofort allgemein zu berechnen und die Massenbiegekraft für den Hauptzylinder, für den die Zahlenrechnung leicht mit den in Mitteilung I angegebenen Zahlentafeln durchgeführt werden kann, am Schluß zahlenmäßig durch Addition der zusammengehörigen sin- und cos-Glieder mit einzubeziehen.

Für die folgenden Untersuchungen seien die Zylinder eines Sterns, mit dem Hauptzylinder beginnend, mit 1, 2, ... z beziffert, wo z die Gesamtzahl der Zylinder im Stern, also $z-1$ die Zahl der Nebenzylinder allein bedeutet. Der Winkel β sei der durchweg gleiche Winkel zwischen zwei benachbarten Zylinderachsen, so daß also für den n-ten Zylinder

$$\beta_n = (n-1)\,\beta \text{ mit } n = 2, 3, \ldots z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wird und außerdem die Beziehung

$$\beta_{z+2-n} = -\beta_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

gilt. Ferner werde die praktisch immer zutreffende Annahme gemacht, daß die dem Hauptpleuel angehörenden Anlenkachsen C_n (Bild 1) bezüglich der Achse AB_1 des Hauptpleuels symmetrisch liegen. Es gelten somit die weiteren Beziehungen:

$$\varrho_{z+2-n} = \varrho_n \text{ und } \delta_{z+2-n} = -\delta_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Schließlich sei noch angenommen, daß sämtliche Kolben und Pleuel der Nebenzylinder genau gleich ausgebildet seien.

1. Die von sämtlichen Nebenkolben herrührende Massenbiegekraft.

Die Summe der von sämtlichen Nebenkolben eines Sterns herrührenden Massenbiegekräfte ergibt sich aus (21) mit (22) zu

$$R_K^* = \sum_{n=2}^{z} R_{K_n} = m_{K_n} r \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{M}_\nu^* \cos\nu\varphi + \mathfrak{N}_\nu^* \sin\nu\varphi), \quad (31)$$

wobei

$$\mathfrak{M}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{M}_\nu^{(n)} \text{ und } \mathfrak{N}_\nu^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{N}_\nu^{(n)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

ist, mit den Größen $\mathfrak{M}_\nu^{(n)}$ und $\mathfrak{N}_\nu^{(n)}$ (22)[4].

Zur Durchführung der Summation in (32) verwendet man die Beziehungen[5])

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=2}^{z} \cos h\,(n-1)\,\beta = \begin{cases} -1 \text{ für } h\beta \neq 2k\pi \\ z-1 \text{ für } h\beta = 2k\pi \end{cases} \\ \text{und} \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{z} \sin h\,(n-1)\,\beta = 0 \\ \qquad\qquad \text{mit } h = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \quad (33)$$

[4]) In (22) sind die in (32) vorübergehend eingeführten oberen Beizeichen (n) weggelassen.

[5]) Vgl. etwa K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 368.

Führt man für die auftretenden Summenausdrücke die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} t_h &= \sum_{n=2}^{z} \mu_n \cos h\,(n-1)\,\beta, \\ u_h &= \sum_{n=2}^{z} \mu_n^2 \cos h\,(n-1)\,\beta, \\ v_h &= \sum_{n=2}^{z} \tau_n^3 \sin h\,(n-1)\,\beta, \\ w_h &= \sum_{n=2}^{z} \mu_n\,\tau_n^3 \sin h\,(n-1)\,\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34)$$

ein, so findet man mit (33) sowie unter Beachtung von (28) bis (30) die Beiwerte $\mathfrak{M}_\nu^*$ und $\mathfrak{N}_\nu^*$ (32) für den Fall beliebiger Anlenkung der Nebenpleuel

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_0^* &= -(z-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)-\lambda\lambda_n\left(\frac{t_2}{2}\langle-u_1\rangle\right) \\ &\quad +\lambda_n^2\left[t_1\left\langle-\left(u_0+\frac{u_2}{2}\right)\right\rangle\right]\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}u_0\right\rangle-v_1\left\langle-\frac{\lambda_n}{\lambda}w_1\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_1^* &= \frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}+\lambda_n\left(t_0-\frac{t_2}{2}-\frac{u_1}{4}\right) \\ &\quad -\frac{\lambda}{4}t_1\left\langle+\frac{3}{8}\lambda_n^3 t_0+\frac{5}{4}\frac{\lambda_n^2}{\lambda}v_1-\frac{3}{4}\lambda_n v_2\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_2^* &= \frac{1}{2}-\frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle-\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle+\frac{\lambda\lambda_n}{2}\left(t_0+t_2\langle-4\,u_1\rangle\right) \\ &\quad -\frac{\lambda_n^2}{2}\left[3\,t_1+t_3\langle-3\,(u_0+u_2)\rangle\right]\left\langle+\frac{\lambda^2}{2}u_0\right\rangle \\ &\quad +v_1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\left(v_2\langle-w_1\rangle\right), \\ \mathfrak{M}_3^* &= \frac{3}{4}\lambda_n+\frac{3}{32}\lambda_n^3+\frac{3}{2}\lambda_n\left(t_2-\frac{u_1}{2}\right) \\ &\quad -\frac{3}{4}\lambda\,t_1\left\langle+\frac{\lambda_n^3}{4}t_4-\frac{3}{4}\frac{\lambda_n^2}{\lambda}v_3+\frac{3}{4}\lambda_n v_2\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_4^* &= \frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle-\frac{\lambda\lambda_n}{2}\left(t_2\langle-2\,u_1\rangle\right) \\ &\quad +\lambda_n^2\left(t_3\left\langle-\frac{3}{2}u_2\right\rangle\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}u_0\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_5^* &= -\frac{5}{32}\lambda_n^3\left\langle-\frac{5}{8}\lambda_n^3 t_4\right\rangle, \\ &\;\vdots \\ \mathfrak{N}_1^* &= \mathfrak{N}_2^* = \ldots = \mathfrak{N}_5^* = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Hierbei sind wieder die Glieder 4. Ordnung in λ, λ_n usw. zwischen geknickten Klammern eingeschlossen.

Wie die Beziehungen (33) zusammen mit (22) zeigen, gelten hier sowie in allen späteren Gleichungen, bei denen die Massenbiegekräfte über sämtliche Nebenzylinder summiert werden, die Absolutglieder und die Glieder 1. Ordnung (bezogen auf die Kurbelwellenumdrehung) für Sternmotoren mit Zylinderzahlen $z > 2$, diejenigen 2. Ordnung für $z > 3$, diejenigen 3. und 4. Ordnung für $z > 4$ und diejenigen 5. Ordnung für $z > 5$. Da somit durch diese Gleichungen alle praktisch vorkommenden Sternmotorenbauarten genügend genau erfaßt werden, wurde darauf verzichtet, die Glieder auch für kleinere Zylinderzahlen anzuschreiben, was aber mit Hilfe der Gl. (22) bzw. (25) sowie (33) ohne weiteres möglich wäre.

Aus den Ausdrücken (35) folgen sofort die entsprechenden Ausdrücke für den Sonderfall der regelmäßigen Nebenpleuelanlenkung, bei dem die Anlenkwinkel γ_n jeweils gleich den zugehörigen Zylinderwinkeln β_n und ferner alle Anlenkhalbmesser c_n einander gleich sind; es ist also nach (2) $\delta_n = 0$ sowie nach (1) $\varrho_n = \varrho$ und nach (3) $\mu_n = \mu = \varrho$ und $\tau_n^3 = 0$ zu setzen. Damit wird unter Beachtung von (33) die **Massenbiegekraft sämtlicher Nebenkolben bei regelmäßiger Anlenkung**

$$\overline{R}_K = m_{K_n}\,r\,\omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\overline{\mathfrak{M}}_\nu \cos\nu\varphi+\overline{\mathfrak{N}}_\nu \sin\nu\varphi\right) \quad . \ (31\,\mathrm{a})$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}}_0 &= -(z-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)+\frac{\lambda\lambda_n}{2}\varrho-\lambda_n^2\varrho \\ &\quad \left\langle-\varrho^2\left[\frac{1}{2}(2\,z-3)\,\lambda_n^2+\lambda\lambda_n+\frac{1}{4}(z-1)\,\lambda^2\right]\right\rangle, \\ \overline{\mathfrak{M}}_1 &= \frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}+\frac{1}{2}(2\,z-1)\,\lambda_n\varrho \\ &\quad +\frac{\varrho}{4}(\lambda+\lambda_n\varrho)\left\langle+\frac{3}{8}(z-1)\,\lambda_n^3\varrho\right\rangle, \\ \overline{\mathfrak{M}}_2 &= \frac{1}{2}-\frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle-\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle+\lambda_n\varrho\left[\frac{\lambda}{2}(z-2)+2\,\lambda_n\right] \\ &\quad \left\langle+\varrho^2\left[\frac{3}{2}\lambda_n^2(z-2)+2\,\lambda\lambda_n+\frac{\lambda^2}{2}(z-1)\right]\right\rangle, \\ \overline{\mathfrak{M}}_3 &= \frac{3}{4}\lambda_n+\frac{3}{32}\lambda_n^3-\frac{3}{2}\lambda_n\varrho+\frac{3}{4}\varrho(\lambda+\lambda_n\varrho)\left\langle-\frac{\lambda_n^3}{4}\varrho\right\rangle, \\ \overline{\mathfrak{M}}_4 &= \frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle+\lambda_n\varrho\left(\frac{\lambda}{2}-\lambda_n\right) \\ &\quad \left\langle+\varrho^2\left[\frac{3}{2}\lambda_n^2-\lambda\lambda_n-\frac{\lambda^2}{4}(z-1)\right]\right\rangle, \\ \overline{\mathfrak{M}}_5 &= -\frac{5}{32}\lambda_n^3\left\langle+\frac{5}{8}\lambda_n^3\varrho\right\rangle, \\ &\;\vdots \\ \overline{\mathfrak{N}}_1 &= \overline{\mathfrak{N}}_2 = \ldots = \overline{\mathfrak{N}}_5 = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (35\,\mathrm{a})$$

Die für die regelmäßige Anlenkung hergeleiteten Ausdrücke (31a) und (35a) sowie die später angegebenen entsprechenden Ausdrücke (36a) und (38a) für die Nebenpleuel liefern auch für alle praktisch vorkommenden Anlenkverhältnisse, bei denen die Anlenkwinkel nicht genau gleich den Zylinderwinkeln und außerdem die Anlenkhalbmesser etwas voneinander verschieden sind, sehr gute Näherungen für die Massenbiegekräfte. Man hat hierzu in (35a) für ϱ den Mittelwert über die Größen ϱ_n einzusetzen.

Aus (31a) und (35a) folgt mit $\varrho = 0$ die **Massenbiegekraft sämtlicher Nebenkolben eines Sterns** (also ohne Hauptkolben!) **bei unmittelbarer Anlenkung**, wobei die Pleuellänge durchweg l sein soll, zu

$$\mathfrak{M}_{K^{(0)}} = m_{K_n}\,r\,\omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\mathfrak{M}_\nu^{(0)}\cos\nu\varphi+\mathfrak{N}_\nu^{(0)}\sin\nu\varphi\right) \quad (31\,\mathrm{b})$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_0^{(0)} &= -(z-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda^4\right\rangle\right), \\ \mathfrak{M}_1^{(0)} &= \frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda^3}{16}, \\ \mathfrak{M}_2^{(0)} &= \frac{1}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\left\langle-\frac{13}{32}\lambda^4\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_3^{(0)} &= \frac{3}{4}\lambda+\frac{3}{32}\lambda^3, \\ \mathfrak{M}_4^{(0)} &= \frac{\lambda^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda^4\right\rangle, \\ \mathfrak{M}_5^{(0)} &= -\frac{5}{32}\lambda^3, \\ &\;\vdots \\ \mathfrak{N}_1^{(0)} &= \mathfrak{N}_2^{(0)} = \ldots = \mathfrak{N}_5^{(0)} = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (35\,\mathrm{b})$$

Die für die Massenbiegekraft sämtlicher Nebenkolben eines Sterns bei unmittelbarer Anlenkung ermittelten Ausdrücke (35b) sind — mit Ausnahme des konstanten Gliedes $\mathfrak{M}_0^{(0)}$ — dieselben wie die in Mitteilung I (28) für die Massenbiegekraft **eines** Kolbens bei unmittelbarer Pleuelanlenkung gefundenen, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen. Dies besagt, daß die »schwingenden« Glieder der Gesamtmassenbiegekraft sämtlicher Kolben eines Sterns (einschließlich Hauptkolben) bei unmittelbarer Anlenkung verschwinden, falls die Abmessungen des Hauptkolbens dieselben sind wie die der Nebenkolben; lediglich die Ordnungen $\nu = z$ (z = gesamte Zylinderzahl des Sternmotors) treten — wie eine entsprechende Betrachtung wie bei den Gasbiegekräften zeigt — in z-facher Größe gegenüber dem einzelnen Kurbeltrieb auf. Diese Ordnungen werden aber, wie aus der Bemerkung im Anschluß an (35) hervorgeht, durch die vorliegenden Untersuchungen nicht mehr erfaßt. Entsprechendes ergibt sich später bei der Massenbiegekraft der Pleuel.

2. Die von sämtlichen Nebenpleueln herrührende Massenbiegekraft.

Ganz entsprechend wie die Massenbiegekraft der Kolben ergibt sich die von sämtlichen Nebenpleueln eines Sterns herrührende Massenbiegekraft bei beliebiger Anlenkung aus (24) und (25) zu

$$R_P^* = \sum_{n=2}^{z} R_{P_n} = m_{P_n}\, r\, \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{P}_\nu^* \cos \nu\varphi + \mathfrak{Q}_\nu^* \sin \nu\varphi), \quad \ldots \quad (36)$$

wobei

$$\mathfrak{P}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{P}_\nu^{(n)} \text{ und } \mathfrak{Q}_\nu^* = \sum_{n=2}^{z} \mathfrak{Q}_\nu^{(n)} \quad \ldots \quad (37)$$

sind, mit den Größen $\mathfrak{P}_\nu^{(n)}$ und $\mathfrak{Q}_\nu^{(n)}$ (25). Man findet schließlich unter Beachtung von (33) und mit den Abkürzungen (34)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0^* &= -\frac{1}{2}(z-1)(1+\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2}) - (z-1)(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right) - \lambda\lambda_n\sigma_n'\left(\frac{t_2}{2}\langle-u_1\rangle\right)\\
&\quad + \lambda_n^2(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(t_1\left\langle-u_0-\frac{u_2}{2}\right\rangle\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}u_0\right\rangle + (\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\left(t_1-\frac{u_0}{2}\right) - v_1\left\langle-\frac{\lambda_n}{\lambda}\sigma_n' w_1\right\rangle,\\
\mathfrak{P}_1^* &= \sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}\right) + \lambda_n\sigma_n'\left(t_0-\frac{t_2}{2}-\frac{u_1}{4}\right) - \frac{\lambda}{4}t_1\left\langle+\frac{3}{8}\lambda_n^3\sigma_n' t_0 + \frac{5}{4}\frac{\lambda_n^2}{\lambda}v_1(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}) - \frac{3}{4}\lambda_n\sigma_n' v_2 + \frac{\lambda}{4}v_1(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\right\rangle,\\
\mathfrak{P}_2^* &= \frac{1}{2}[1-(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})] - (\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle+\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle\right) + \frac{\lambda\lambda_n}{2}\sigma_n'(t_0+t_2\langle-4u_1\rangle)\\
&\quad - \frac{\lambda_n^2}{2}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})[3t_1+t_3\langle-3(u_0+u_2)\rangle]\left\langle+\frac{\lambda^2}{2}u_0\right\rangle - (\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\left(t_1-\frac{u_0}{2}\right) + v_1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\sigma_n'(v_2\langle-w_1\rangle),\\
\mathfrak{P}_3^* &= \sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n+\frac{3}{32}\lambda_n^3\right) + \frac{3}{2}\lambda_n\sigma_n'\left(t_2-\frac{u_1}{2}\right) - \frac{3}{4}\lambda t_1\left\langle+\frac{\lambda_n^3}{4}\sigma_n' t_4 + \frac{3}{4}\left[-\frac{\lambda_n^2}{\lambda}(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})v_3 + \lambda_n\sigma_n' v_2\right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \lambda(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})v_1\right]\right\rangle,\\
\mathfrak{P}_4^* &= (\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right) - \lambda\lambda_n\sigma_n'\left(\frac{t_2}{2}\langle-u_1\rangle\right) + \lambda_n^2(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(t_3\left\langle-\frac{3}{2}u_2\right\rangle\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}u_0\right\rangle,\\
\mathfrak{P}_5^* &= -\frac{5}{32}\lambda_n^3\sigma_n'\left\langle-\frac{5}{8}\lambda_n^3\sigma_n' t_4\right\rangle,\\
&\;\vdots\\
\mathfrak{Q}_1^* &= \mathfrak{Q}_2^* = \ldots = \mathfrak{Q}_5^* = \ldots = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Bei regelmäßiger Nebenpleuelanlenkung wird die von sämtlichen Nebenpleueln herrührende Massenbiegekraft nach (36) und (38) mit (33) zu

$$\overline{R}_P = m_{P_n}\, r\, \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\overline{\mathfrak{P}}_\nu \cos \nu\varphi + \overline{\mathfrak{Q}}_\nu \sin \nu\varphi) \quad \ldots \quad (36\text{a})$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{P}}_0 &= -\frac{1}{2}(z-1)(1+\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2}) - (z-1)(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right)\\
&\quad + \frac{\lambda\lambda_n}{2}\varrho\,\sigma_n'(1\langle-2\varrho\rangle) - \lambda_n^2\varrho(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left[1\left\langle+\frac{\varrho}{2}(2z-3)\right\rangle\right] - \varrho(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\left[1+\frac{\varrho}{2}(z-1)\right]\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}\varrho^2(z-1)\right\rangle,\\
\overline{\mathfrak{P}}_1 &= \sigma_n'\left(\frac{\lambda_n}{4}+\frac{\lambda_n^3}{16}\right) + \lambda_n\varrho\,\sigma_n'\left[\frac{1}{2}(2z-1) + \frac{\varrho}{4}\left\langle+\frac{3}{8}(z-1)\lambda_n^2\right\rangle\right] + \frac{\lambda}{4}\varrho,\\
\overline{\mathfrak{P}}_2 &= \frac{1}{2}[1-(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})] - (\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\left\langle+\frac{13}{32}\lambda_n^4\right\rangle\right)\\
&\quad + \lambda\lambda_n\varrho\,\sigma_n'\left[\frac{1}{2}(z-2)\langle+2\varrho\rangle\right] + \lambda_n^2\varrho(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left[2\left\langle+\frac{3}{2}(z-2)\varrho\right\rangle\right]\\
&\quad + \varrho(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})\left[1+\frac{\varrho}{2}(z-1)\right]\left\langle+\frac{\lambda^2}{2}\varrho^2(z-1)\right\rangle,\\
\overline{\mathfrak{P}}_3 &= \sigma_n'\left(\frac{3}{4}\lambda_n+\frac{3}{32}\lambda_n^3\right) - \lambda_n\varrho\,\sigma_n'\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\varrho\left\langle+\frac{\lambda_n^2}{4}\right\rangle\right) + \frac{3}{4}\lambda\varrho,\\
\overline{\mathfrak{P}}_4 &= (\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda_n^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda_n^4\right\rangle\right) + \lambda\lambda_n\varrho\,\sigma_n'\left(\frac{1}{2}\langle-\varrho\rangle\right) - \lambda_n^2\varrho(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(1\left\langle-\frac{3}{2}\varrho\right\rangle\right)\left\langle-\frac{\lambda^2}{4}\varrho^2(z-1)\right\rangle,\\
\overline{\mathfrak{P}}_5 &= -\frac{5}{32}\lambda_n^3\sigma_n'\left\langle+\frac{5}{8}\lambda_n^3\varrho\,\sigma_n'\right\rangle,\\
&\;\vdots\\
\overline{\mathfrak{Q}}_1 &= \overline{\mathfrak{Q}}_2 = \ldots = \overline{\mathfrak{Q}}_5 = \ldots = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (38\text{a})$$

Aus (36a) und (38a) folgt mit $\varrho = 0$ die Massenbiegekraft sämtlicher Nebenpleuel eines Sterns (also ohne Hauptpleuel) bei mittelbarer Anlenkung, wenn wieder die Pleuellänge durchweg l sein soll, zu

$$R_P^{(0)} = m_{P_n}\, r\, \omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{P}_\nu^{(0)} \cos \nu\varphi + \mathfrak{Q}_\nu^{(0)} \sin \nu\varphi) \quad \ldots \quad (36\text{b})$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0^{(0)} &= -\frac{1}{2}(z-1)(1+\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2}) \\
&\quad -(z-1)(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2})\left(\frac{\lambda^2}{4}\left\langle+\frac{3}{16}\lambda^4\right\rangle\right), \\
\mathfrak{P}_1^{(0)} &= \left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda^3}{16}\right)\sigma_n', \\
\mathfrak{P}_2^{(0)} &= \frac{1}{2}[1-(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})]-\left(\frac{\lambda^2}{2}\left\langle+\frac{13}{32}\lambda^4\right\rangle\right)(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}), \\
\mathfrak{P}_3^{(0)} &= \left(\frac{3}{4}\lambda+\frac{3}{32}\lambda^3\right)\sigma_n', \\
\mathfrak{P}_4^{(0)} &= \left(\frac{\lambda^2}{4}\left\langle+\frac{5}{16}\lambda^4\right\rangle\right)(\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}), \\
\mathfrak{P}_5^{(0)} &= -\frac{5}{32}\lambda^3\sigma_n', \\
&\vdots \\
\mathfrak{Q}_1^{(0)} &= \mathfrak{Q}_2^{(0)} = \ldots \mathfrak{Q}_5^{(0)} = \ldots = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (38\,b)$$

Nachdem die Massenbiegekraft der Kolben und Pleuel sämtlicher Zylinder des Sterns (einschließlich Hauptzylinder) ermittelt ist, erhält man schließlich die Gesamtbiegekraft des Sterns aus der Gasbiegekraft und den Massenbiegekraftanteilen von Kolben und Pleuel durch algebraische Addition der Einzelanteile.

VI. Durchrechnung eines Beispiels.

Als Beispiel wurde der Bramo 323-Neunzylinder-Sternmotor gewählt. Dieser Motor hat folgende für die vorliegenden Untersuchungen wesentlichen Kenngrößen:

Zylinderbohrung $d = 154$ mm,
Kurbelhalbmesser $r = 80$ mm.

Hauptzylinder:

Pleuellänge $l = 330$ mm,
Schwerpunktsabstände (vgl. Bild 1) $s' = 41{,}3$ mm und $s'' = 288{,}7$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda = r/l = 0{,}2424$,
Gewicht des Hauptpleuels $G_P = 10{,}54$ kg,
Trägheitsmoment des Hauptpleuels bezogen auf den Schwerpunkt $m_P k_P^2 = 1{,}25$ cmkgs²,
Gewicht des vollständigen Kolbens $G_K = 2{,}972$ kg,
Anlenkhalbmesser: $c_2 = c_9 = 69{,}65$ mm,,
$c_3 = c_8 = 71{,}26$ mm,
$c_4 = c_7 = 70{,}60$ mm,
$c_5 = c_6 = 68{,}82$ mm.

Die Anlenkachsen sind über dem Umfang gleichmäßig verteilt; es ist also nach (2) $\delta_n = 0$.

Nebenzylinder:

Pleuellänge $l_n = 261{,}5$ mm,
Schwerpunktsabstände $s_n' = 138{,}5$ mm und $s_n'' = 123$ mm,
Schubstangenverhältnis $\lambda_n = r/l_n = 0{,}3059$,
Gewicht des Nebenpleuels $G_{Pn} = 1{,}42$ kg,
Trägheitsmoment des Nebenpleuels, bezogen auf den Schwerpunkt $m_{Pn} k_{Pn}^2 = 0{,}144$ cmkgs²,
Gewicht des vollständigen Kolbens $G_{Kn} = 2{,}972$ kg.

Die Untersuchungen sind auf die Drehzahl $n = 2100$ U/min sowie einen mittleren indizierten Druck $p_{mi} = 11{,}1$ kg/cm² bezogen.

Die wichtigsten für dieses Beispiel gefundenen Ergebnisse sind in Bild 2 bis 8 sowie in Zahlentafel 1 bis 5 zusammengestellt.

1. Die Ergebnisse für einen Nebenzylinder.

Bild 2 zeigt für einen Nebenzylinder, und zwar für Zylinder 3 den Verlauf der nach (17) ermittelten Gasbiegekraft sowie der nach (21) und (24) berechneten Massenbiegekraft und außerdem noch der daraus durch Überlagerung gefundenen Gesamtbiegekraft. Durch rechnerische harmonische Anlayse mit 72 Ordinaten wurden sodann die Harmonischen der Gasbiegekraft (bezogen auf das Viertaktarbeitsspiel) bestimmt und in Bild 3 dargestellt, wo zum Vergleich auch noch die Harmonischen der Gasbiegekraft des Hauptzylinders angegeben sind.

Die Untersuchung der Harmonischen der Massenbiegekraft desselben Nebenzylinders bei der Motordrehzahl $n = 2100$ U/min ergibt zunächst die in Zahlentafel 1 zusammengestellten, nach (22) ermittelten dimensionslosen Fourierbeiwerte $\mathfrak{M}_\nu$, $\mathfrak{N}_\nu$ und die zugehörigen Scheitelwerte $\sqrt{\mathfrak{M}_\nu^2 + \mathfrak{N}_\nu^2}$ für die Massenbiegekraft des Kolbens sowie die nach (25) bestimmten entsprechenden Werte $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{Q}_\nu$ und $\sqrt{\mathfrak{P}_\nu^2 + \mathfrak{Q}_\nu^2}$ für das Pleuel. Zum Vergleich zeigt Zahlentafel 1 noch die entsprechenden aus Mitteilung I entnommenen Beiwerte für Kolben und Pleuel des Hauptzylinders. Der Vergleich der Scheitelwerte ergibt, daß man für die Kolben von Haupt- und Nebenzylinder trotz der voneinander abweichenden Bewegungsverhältnisse fast dieselben Werte erhält; beim Pleuel dagegen treten starke Abweichungen auf.

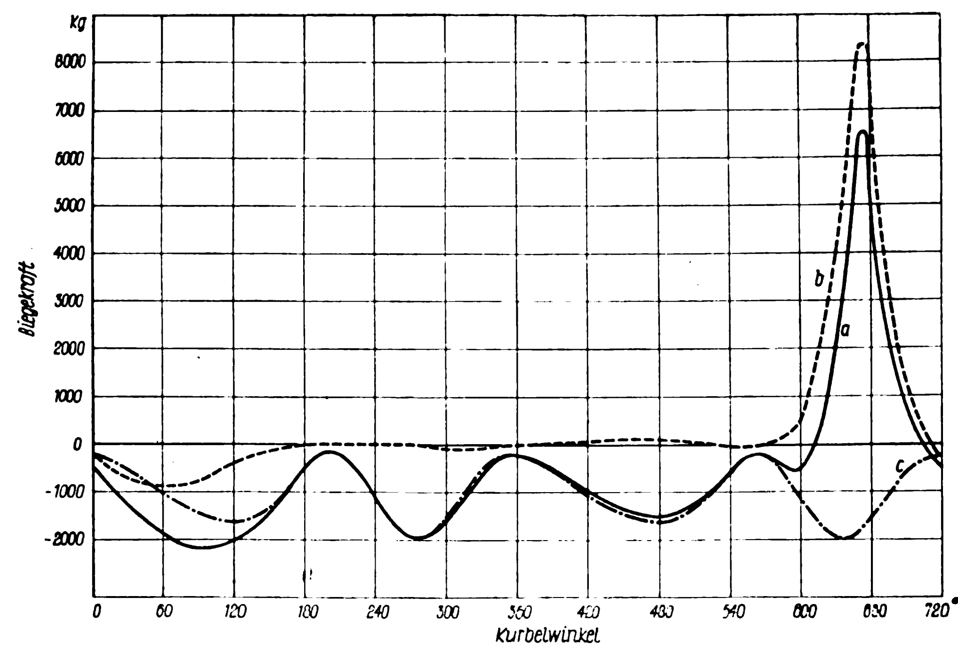


Bild 2. Verlauf der erregenden Biegekraft eines Nebenzylinders (Zylinder 3).
a Gesamtbiegekraft, *b* Gasbiegekraft, *c* Massenbiegekraft.

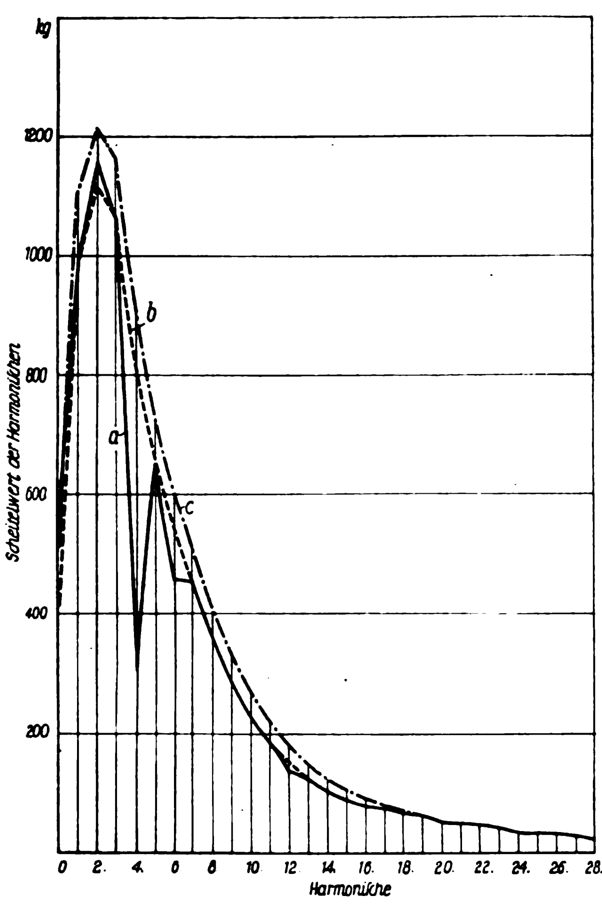
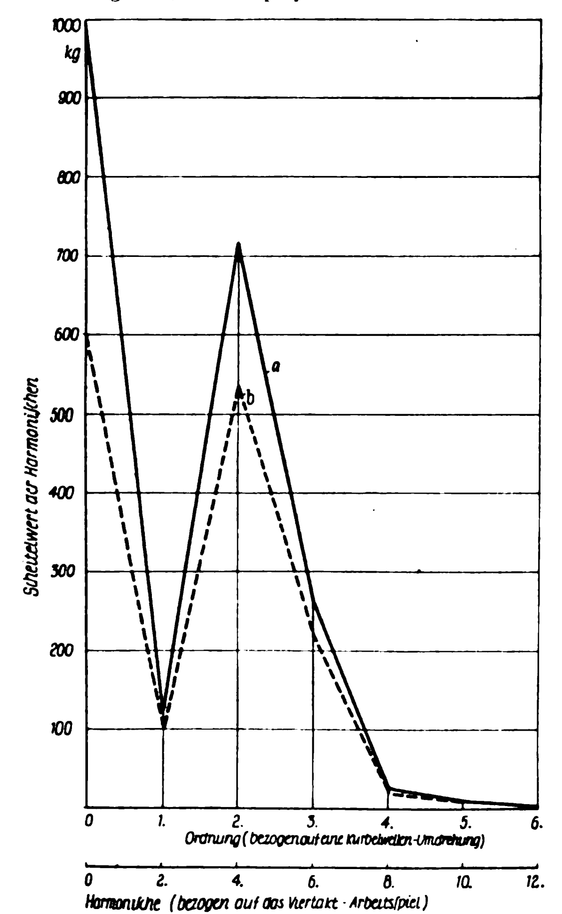


Bild 3. Die Harmonischen der Gas- und Gesamtbiegekraft von Zylinder 3.
a Gesamtbiegekraft,
b Gasbiegekraft,
c Gasbiegekraft des Hauptzylinders.



Zahlentafel 1. Vergleich der Fourierbeiwerte der Massenbiegekraft eines Nebenzylinders (Zylinder 3) mit denen des Hauptzylinders.

$$R_{K_n} = m_{K_n} r w^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{M}_\nu \cos \nu \varphi + \mathfrak{N}_\nu \sin \nu \varphi);$$

$$R_K = m_K r w^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu \cos \nu \varphi$$

$$R_{P_n} = m_{P_n} r w^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathfrak{P}_\nu \cos \nu \varphi + \mathfrak{Q}_\nu \sin \nu \varphi);$$

$$R_P = m_P r w^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu \cos \nu \varphi$$

Beiwerte von	Kolben		Pleuel	
	Nebenzylinder	Hauptzylinder	Nebenzylinder	Hauptzylinder
$\cos \nu \varphi$	$\mathfrak{M}_\nu$	G_ν	$\mathfrak{P}_\nu$	L_ν
1	— 0,5164	— 0,5147	— 0,6851	— 0,9379
$\cos \varphi$	0,0830	— 0,0615	0,0429	— 0,0077
$\cos 2\varphi$	0,4234	— 0,4692	0,2733	— 0,0601
$\cos 3\varphi$	0,0154	— 0.1832	0,0050	— 0,0229
$\cos 4\varphi$	— 0,0165	— 0,0158	— 0,0066	— 0,0019
$\cos 5\varphi$	0,0005	0,0023	0,0003	0,0003
$\sin \nu \varphi$	$\mathfrak{N}_\nu$	—	$\mathfrak{Q}_\nu$	—
$\sin \varphi$	0,0056	—	— 0,0278	—
$\sin 2\varphi$	0,1721	—	0,1867	—
$\sin 3\varphi$	— 0,1839	—	— 0,0788	—
$\sin 4\varphi$	0,0035	—	0,0015	—
$\sin 5\varphi$	— 0,0054	—	— 0,0028	—
$\sin (\nu \varphi + \varepsilon_\nu)$	$\sqrt{\mathfrak{M}_\nu^2 + \mathfrak{N}_\nu^2}$	G_ν	$\sqrt{\mathfrak{P}_\nu^2 + \mathfrak{Q}_\nu^2}$	L_ν
1	0,5164	0,5147	0,6851	0,9379
$\sin (\varphi + \varepsilon_1)$	0,0832	0,0615	0,0511	0,0077
$\sin (2\varphi + \varepsilon_2)$	0,4570	0,4692	0,3310	0,0601
$\sin (3\varphi + \varepsilon_3)$	0,1845	0,1832	0,0790	0,0229
$\sin (4\varphi + \varepsilon_4)$	0,0169	0,0158	0,0068	0,0019
$\sin (5\varphi + \varepsilon_5)$	0,0054	0,0023	0,0028	0,0003

Die Harmonischen der Massenbiegekraft desselben Zylinders — für Kolben und Pleuel getrennt — sind außerdem noch in Bild 4 wiedergegeben. Dabei ergibt sich, daß der Kolben den überwiegenden Beitrag zur Massenbiegekraft eines Nebenzylinders liefert. Sodann sind diese Harmonischen der Massenbiegekraft noch in Bild 3 unter Berücksichtigung des Phasenwinkels denen der Gasbiegekraft überlagert worden.

Diese Überlagerung zeigt Zahlentafel 2, die außerdem noch einige Näherungen für die Harmonischen der Massenbiegekraft eines Nebenzylinders enthält. Außer den Werten, die nach den vollständigen, unter Berücksichtigung der wirklichen Bewegungsverhältnisse hergeleiteten Gleichungen berechnet sind (in den Zahlentafeln sind diese Ergebnisse der vollständigen Rechnung immer dann gemeint, wenn nichts Besonderes bemerkt ist), enthält diese Zahlentafel noch die Harmonischen der Massenbiegekraft $(R_{K_n} + R_{P_n})'$, bei deren Berechnung nur Glieder bis zur dritten Ordnung in λ, λ_n usw. mitgeführt wurden. Diese Näherung ist im allgemeinen sehr gut und dürfte für die meisten praktischen Zwecke genügen. Als weitere Näherung zeigt Zahlentafel 2 noch die Harmonischen der Massenbiegekraft $R_{K_n} + R_{P_n}^{(N)}$, bei deren Ermittlung das Pleuel entsprechend (27) durch je eine punktförmige Masse im Kolbenbolzen und in der Anlenkachse ersetzt und die letztgenannte Masse als rein umlaufend betrachtet wurde. Diese Näherung ist bereits weniger gut; wie sich später ergeben wird, werden sich diese Fehler bei der Summation über den ganzen Stern noch vergrößern.

Bild 4. (links) Die Harmonischen der Massenbiegekraft von Zylinder 3.
a Kolben + Pleuel,
b Kolben allein.



Zahlentafel 2. Die Harmonischen der Gas-, Massen- und Gesamtbiegekraft e i n e s Nebenzylinders (Zylinder 3). (Bei der Gasbiegekraft und der Gesamtbiegekraft sind nur die Harmonischen angegeben, bei denen auch Harmonische der Massenbiegekraft auftreten!)

Beiwerte von	Gasbiegekraft R_{G_n} kg	Massenbiegekraft: Kolben R_{K_n} kg	Massenbiegekraft: Pleuel R_{P_n} kg	Massenbiegekraft: Kolben + Pleuel $R_{K_n} + R_{P_n}$ kg	Massenbiegekraft: Kolben + Pleuel (nur Glieder bis λ^3) $(R_{K_n} + R_{P_n})'$ kg	Massenbiegekraft: Kolben + Pleuel (mit Näherung $R_{P_n}^{(N)}$ (27) f.d. Pleuel) $R_{K_n} + R_{P_n}^{(N)}$ kg	Gesamtbiegekraft $R_n = R_{G_n} + R_{K_n} + R_P$ kg
1	414,9	— 605,3	— 383,7	— 989,0	— 983,1	— 1021,9	— 574,1
cos φ	254,9	97,2	24,0	121,2	117,8	121,9	376,1
cos 2 φ	— 557,4	496,3	153,0	649,3	652,8	621,9	91,9
cos 3 φ	— 476,8	18,1	2,8	20,9	19,1	22,7	— 455,9
cos 4 φ	42,8	— 19,4	— 3,7	— 23,1	— 28,5	— 24,3	19,7
cos 5 φ	220,0	0,6	0,2	0,7	5,0	0,7	220,7
sin φ	— 1085,8	6,5	— 15,5	— 9,0	— 7,6	8,2	— 1094,8
sin 2 φ	— 595,2	201,7	104,6	306,3	307,9	252,8	— 288,9
sin 3 φ	263,1	— 215,6	— 44,1	— 259,7	— 262,6	— 270,2	3,4
sin 4 φ	355,2	4,1	0,8	4,9	7,5	5,1	360,1
sin 5 φ	52,0	— 6,3	— 1,6	— 7,9	— 4,2	— 7,9	44,1

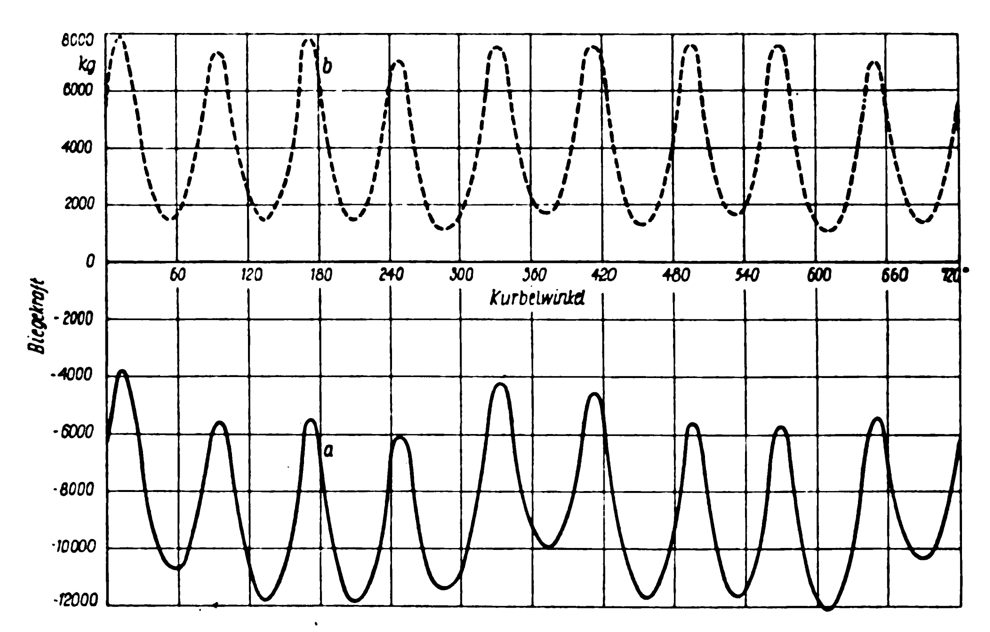


Bild 5. Verlauf der erregenden Biegekraft sämtlicher Zylinder abhängig vom Kurbelwinkel.
a Gesamtbiegekraft, *b* Gasbiegekraft.

2. Die Ergebnisse für den ganzen Sternmotor.

Den Verlauf der Gasbiegekraft sowie der Gesamtbiegekraft für den ganzen Stern, abhängig vom Kurbelwinkel, zeigt Bild 5. Der kennzeichnende Verlauf der Gesamtbiegekraft unterscheidet sich nicht sehr stark von dem der Gasbiegekraft, jedoch sind die beiden Schaulinien im ganzen infolge des durch die Fliehkraft bedingten Absolutgliedes der Massenbiegekraft stark auseinandergerückt.

Sodann wurden in Bild 6 die nach (31) mit (35) und nach (36) mit (38) ermittelte Massenbiegekraft sämtlicher Nebenzylinder sowie die nach Mitteilung I (27) und (34) berechnete Massenbiegekraft des Hauptzylinders und schließlich die durch Überlagerung dieser beiden Anteile erhaltene Gesamtmassenbiegekraft des ganzen Sterns jeweils in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel gesondert dargestellt. Die Massenbiegekraft des ganzen Sterns wird in ihrem Grundverlauf durch e i n e Vollschwingung je Motorumlauf dargestellt, die um eine verhältnismäßig große negative, also von der Kurbelwellenachse weggerichtete mittlere Biegekraft schwankt.

Aus der Gasbiegekraft für den ganzen Stern wurden durch rechnerische harmonische Analyse die zugehörigen Harmonischen ermittelt und in Bild 7 sowie in Zahlentafel 3 dargestellt.

Die Harmonischen der Massenbiegekraft des Hauptzylinders, sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns sind — für Kolben und Pleuel getrennt — in Zahlentafel 4 zusammengestellt. Die Harmonischen der Massenbiegekraft sämtlicher Zylinder sind außerdem in Bild 8 wiedergegeben. Wie schon aus Bild 6 zu schließen ist, überwiegt bei der Massenbiegekraft sämtlicher Zylinder das Glied 1. Ordnung alle übrigen Glieder. Die Glieder 2. Ordnung sind, wie ebenfalls bereits aus Bild 6 zu erkennen ist, beim Hauptzylinder und bei sämtlichen Nebenzylindern wohl sehr groß, jedoch von verschiedenem Vorzeichen, so daß schließlich nach der Überlagerung nur ein verhältnismäßig kleiner Wert für sämtliche Zylinder übrigbleibt.

Diese Harmonischen der Massenbiegekraft sind sodann noch in Bild 7 unter Berücksichtigung des Phasenwinkels den Harmonischen der Gasbiegekraft überlagert worden.

Einen Vergleich der Genauigkeit verschiedener Näherungsrechnungen für die Harmonischen der Massenbiegekraft sämtlicher Zylinder des Sterns zeigt Zahlentafel 5. Die nach der vollständigen Rechnung (35) und (38) ermittelten Werte sind in Spalte 2 wiedergegeben. Spalte 3 zeigt die nach derselben Rechnung ermittelten Werte, wobei jedoch die in den geknickten Klammern stehenden, von 4. Ordnung kleinen Glieder weggelassen wurden. Die Werte



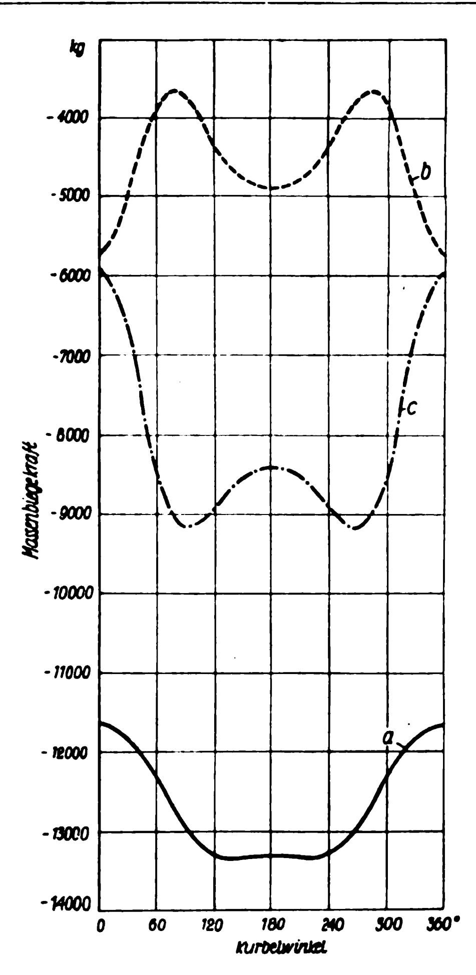


Bild 6. Verlauf der Massenbiegekraft des Hauptzylinders, der Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns abhängig vom Kurbelwinkel.
a Sämtliche Zylinder, *b* Hauptzylinder, *c* Sämtliche Nebenzylinder.

von Spalte 4 sind nach den Formeln (35a) und (38a) für die regelmäßige Anlenkung ermittelt, wobei für die Größen ϱ_n (1) ein Mittelwert eingesetzt wurde. Spalte 5 enthält die

Zahlentafel 3. Die Harmonischen der Gasbiegekraft für sämtliche Zylinder.

$$R_G = R_0 + \sum_h \left(r_h \cos h \frac{\varphi}{2} + \varrho_h \sin h \frac{\varphi}{2} \right) = R_0 + \sum_h R_h \sin \left(h \frac{\varphi}{2} + \vartheta_h \right)$$

Harmonische	cos-Beiwert r_h kg	sin-Beiwert ϱ_h kg	Scheitelwert $R_h = \sqrt{r_h^2 + \varrho_h^2}$ kg	Scheitelwert in % von p_{mi}	Phasenwinkel δ_h
0.	3866,4	—	3866,4	187,01	—
1.	— 6,9	36,7	37,3	1,81	349° 25′
2.	26,6	215,5	217,2	10,50	7° 05′
3.	— 19,7	28,2	34,4	1,66	325° 00′
4.	318,4	71,2	326,3	15,78	77° 25′
5.	— 57,2	— 89,3	106,0	5,13	32° 40′
6.	— 16,4	— 39,8	43,0	2,08	22° 30′
7.	233,9	270,2	357,4	17,28	40° 55′
8.	10,9	— 23,8	26,2	1,27	155° 20′
9.	1576,8	2410,4	2880,3	139,31	33° 05′
10.	0,9	18,3	18,3	0,88	2° 45′
11.	— 201,9	— 228,0	304,6	14,73	221° 30′
12.	6,4	28,9	29,6	1,43	12° 25′
13.	71,9	217,1	228,7	11,06	18° 20′
14.	— 6,7	— 86,1	86,4	4,18	184° 30′
15.	— 9,7	— 62,0	62,8	3,04	188° 50′
16.	— 50,4	137,9	146,8	7,10	339° 55′
17.	14,5	— 17,9	23,0	1,11	141° 00′
18.	— 244,6	558,0	609,2	29,47	336° 20′
19.	4,1	5,3	6,7	0,33	37° 25′
20.	35,5	— 120,9	126,0	6,09	163° 40′
21.	5,6	48,3	48,6	2,35	6° 40′
22.	— 49,4	112,8	123,1	5,95	336° 20′
23.	13,1	— 79,1	80,2	3,88	170° 35′
24.	6,9	— 53,7	54,1	2,62	172° 40′
25.	— 72,2	8,0	72,6	3,51	276° 20′
26.	— 7,1	— 10,5	12,6	0,61	214° 00′
27.	— 157,0	17,1	158,0	7,64	263° 50′
28.	3,4	23,8	24,0	1,16	8° 10′

auf gleiche Art wie in Spalte 4 ermittelten Werte, wobei aber die Glieder 4. Ordnung weggelassen wurden. Spalte 6 zeigt die Näherungswerte, die man erhält, wenn man jedes Nebenpleuel durch zwei Ersatzmassen darstellt und die in den Anlenkachsen C_n (Bild 1) angebrachten Ersatzmassen bei Ge-

Zahlentafel 4. Die Harmonischen der Massenbiegekraft sämtlicher Nebenzylinder sowie sämtlicher Zylinder des Sterns.

Beiwerte von	Kolben			Pleuel			Kolben + Pleuel		
	Hauptzylinder kg	sämtliche Nebenzylinder kg	sämtliche Zylinder kg	Hauptzylinder kg	sämtliche Nebenzylind. kg	sämtliche Zylinder kg	Hauptzylinder kg	sämtliche Nebenzylind. kg	sämtliche Zylinder kg
1	— 603,3	— 4982,8	— 5586,1	— 3898,6	— 3202,6	— 7101,2	— 4501,8	— 8185,4	— 12687,3
cos φ	— 72,1	781,6	709,5	— 32,0	201,1	169,1	— 104,1	982,7	878,6
cos 2φ	— 550.0	707,4	157,4	— 249,8	288,6	38,8	— 799,8	996,0	196,2
cos 3φ	— 214,7	204,1	— 10,6	— 95,2	61,6	— 33,6	— 309,9	265,7	— 44,2
cos 4φ	— 18,5	16,2	— 2,3	— 7,9	1,9	— 6,0	— 26,4	18,1	— 8,3
cos 5φ	2,6	— 0,9	1,7	1,2	— 0,2	1,0	3,8	— 1,1	2,7

Zahlentafel 5. Vergleich der nach verschiedenen Näherungen berechneten Harmonischen der Massenbiegekraft sämtlicher Zylinder des Sterns.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Beiwerte von	Nach den vollständigen Formeln (35) und (38) mit Gliedern bis λ^4 kg	Wie Spalte 2, jedoch nur mit Gliedern bis λ^3 kg	Nach den Formeln (35a) und (38a) für die regelmäßige Anlenkung mit Gliedern bis λ^4 kg	Wie Spalte 4, jedoch nur mit Gliedern bis λ^3 kg	Näherung mit je zwei Ersatzmassen für die Nebenpleuel nach (26) und Berücksichtigung der Ersatzmassen in den Anlenkachsen beim Hauptpleuel kg	Näherung mit je zwei Ersatzmassen für die Nebenpleuel nach (27) (ohne Berücksichtigung der Ersatzmassen in den Anlenkachsen beim Hauptpleuel) kg	Rechnung mit unmittelbarer Anlenkung und dem Schubstangenverhältnis λ kg	Rechnung mit unmittelbarer Anlenkung und dem Schubstangenverhältnis λ_n kg
1	— 12687,3	— 12610,5	— 12690,3	— 12612,9	— 12958,2	— 14231,3	— 12425,0	— 12534,5
cos φ	878,6	851,8	876,1	850,3	878,9	875,5	— 13,8	10,9
cos 2φ	196,2	112,2	200,9	115,2	193,0	86,5	— 79,8	— 107,5
cos 3φ	— 44,2	— 42,1	— 32,2	— 30,1	— 44,2	— 54,5	— 40,9	31,1
cos 4φ	— 8,3	— 8,5	— 11,1	— 9,8	— 7,8	— 6,3	— 4,1	10,5
cos 5φ	2,7	— 2,7	2 8	— 2.7	2,4	2,5	0,6	— 2,7

Zahlentafel 6. Rechenblatt zur Ermittlung der Massen-

Massenbiegekraft der Kolben / Pleuel sämtlicher Nebenzylinder

	Glieder bis dritter Ordnung in λ usw.									
Spalte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Parameter-produkte	1 *1*	1 *1*	λ_n *0,30593*	λ_n^2 *0,09359*	λ_n^3 *0,02863*	$\lambda_n \varrho$ *0,06497*	$\lambda \lambda_n \varrho$ *0,01575*	$\lambda_n^2 \varrho$ *0,01988*	$\lambda \varrho$ *0,05148*	$\lambda_n \varrho^2$ *0,01380*
Statische Beiwerte	$1+(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})$ *1,36672*	$1-(\sigma_n''^2+\sigma_n^{*2})$ *0,63328*	σ_n' *0,52964*	$\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}$ *0,42600*	σ_n' *0,52964*	σ_n' *0,52964*	σ_n' *0,52964*	$\sigma_n'^2+\sigma_n^{*2}$ *0,42600*	1 *1*	σ_n' *0,52964*
1	$-\frac{1}{2}(z-1)$ *— 4*			$-\frac{1}{4}(z-1)$ *— 2*			$+\frac{1}{2}$ *+ 0,5*	— 1 *— 1*		
	— 4,0 *— 5,46688*			*— 0,18718* *— 0,07974*			*+ 0,00788* *+ 0,00417*	*— 0,01988* *— 0,00847*		
$\cos \varphi$			$+\frac{1}{4}$ *+ 0,25*		$+\frac{1}{16}$ *+ 0,0625*	$+\frac{1}{2}(2z-1)$ *+ 8,5*			$+\frac{1}{4}$ *+ 0,25*	$+\frac{1}{4}$ *+ 0,25*
			+ 0,07648 *+ 0,04051*		*+ 0,00179* *+ 0,00095*	*+ 0,55224* *+ 0,29249*			*+ 0,01287* *+ 0,01287*	*+ 0,00345* *+ 0,00183*
$\cos 2\varphi$		$+\frac{1}{2}$ *+ 0,5*		$-\frac{1}{2}$ *— 0,5*			$+\frac{1}{2}(z-2)$ *+ 3,5*	+ 2 *+ 2*		
		+ 0,5 *+ 0,31664*		*— 0,04680* *— 0,01994*			*+ 0,05512* *+ 0,02919*	*+ 0,03976* *+ 0,01694*		
$\cos 3\varphi$			$+\frac{3}{4}$ *+ 0,75*		$+\frac{3}{32}$ *+ 0,09375*	$-\frac{3}{2}$ *— 1,5*			$+\frac{3}{4}$ *+ 0,75*	$+\frac{3}{4}$ *+ 0,75*
			+ 0,22945 *+ 0,12153*		*+ 0,00268* *+ 0,00142*	*— 0,09746* *— 0,05162*			*+ 0,03861* *+ 0,03861*	*+ 0,01035* *+ 0,00548*
$\cos 4\varphi$				$+\frac{1}{4}$ *+ 0,25*			$+\frac{1}{2}$ *+ 0,5*	— 1 *— 1*		
				+ 0,02340 *+ 0,00997*			*+ 0,00788* *+ 0,00417*	*— 0,01988* *— 0,00847*		
$\cos 5\varphi$					$-\frac{5}{32}$ *— 0,15625*					
					— 0,00447 *— 0,00237*					

…kräfte bei regelmäßiger Nebenpleuelanlenkung.

…i regelmäßiger Anlenkung:

$$\overline{R}_K = m_{K_n} r\omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{M}_\nu \cos \nu\varphi$$

$$\overline{R}_P = m_{P_n} r\omega^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu \cos \nu\varphi$$

nur für Pleuel		Glieder vierter Ordnung						$m_{K_n}\cdot r\omega^2 =$ 1172,102 kg	$m_{P_n}\cdot r\omega^2 =$ 560,021 kg
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ϱ 0,21237	ϱ^2 0,04510	λ_n^4 0,00876	$\lambda_n^3 \varrho$ 0,00608	$\lambda_n^2 \varrho^2$ 0,00422	$\lambda\lambda_n \varrho^2$ 0,00334	$\lambda^2 \varrho^2$ 0,00265	Σ aus Spalte 1 bis 17	$m_{K_n} r\omega^2 \cdot \mathfrak{M}_\nu$ kg	$m_{P_n} r\omega^2 \cdot \mathfrak{P}_\nu$ kg
$\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}$ 0,36672	$\sigma_n''^2 + \sigma_n^{*2}$ 0,36672	$\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}$ 0,42600	σ_n' 0,52964	$\sigma_n'^2 + \sigma_n^{*2}$ 0,42600	σ_n' 0,52964	1 1	$\mathfrak{M}_\nu$ $\mathfrak{P}_\nu$		
—1 —1	—½ (z—1) —4	—3/16 (z—1) —1,5		½(2z—3) —7,5	—1 —1	—¼ (z—1) —2			
—— —0,07788	—— —0,06616	—0,01314 —0,00560		—0,03165 —0,01348	—0,00334 —0,00177	—0,00530 —0,00530	—4,25261 —5,72111	—4984,5	—3203,9
			+3/8 (z—1) +3						
			+0,01824 +0,00966				+0,66507 +0,35831	+779,5	+200,7
+1 +1	+½ (z—1) +4	—13/32 —0,40625		+3/2 (z—2) +10,5	+2 +2	+½ (z—1) +4			
—— +0,07788	—— +0,06616	—0,00356 —0,00152		+0,04431 +0,01888	+0,00668 +0,00354	+0,01060 +0,01060	+0,60611 +0,51837	+710,4	+290,3
			—¼ —0,25						
			—0,00152 —0,00081				+0,18211 +0,11461	+213,5	+64,2
		+5/16 +0,3125		+3/2 +1,5	—1 —1	—¼ (z—1) —2			
		+0,00274 +0,00117		+0,00633 +0,00270	—0,00334 —0,00177	—0,00530 —0,00530	+0,01183 +0,00247	+13,9	+1,4
			+5/8 +0,625						
			+0,00380 +0,00201				—0,00067 —0,00036	—0,8	—0,2

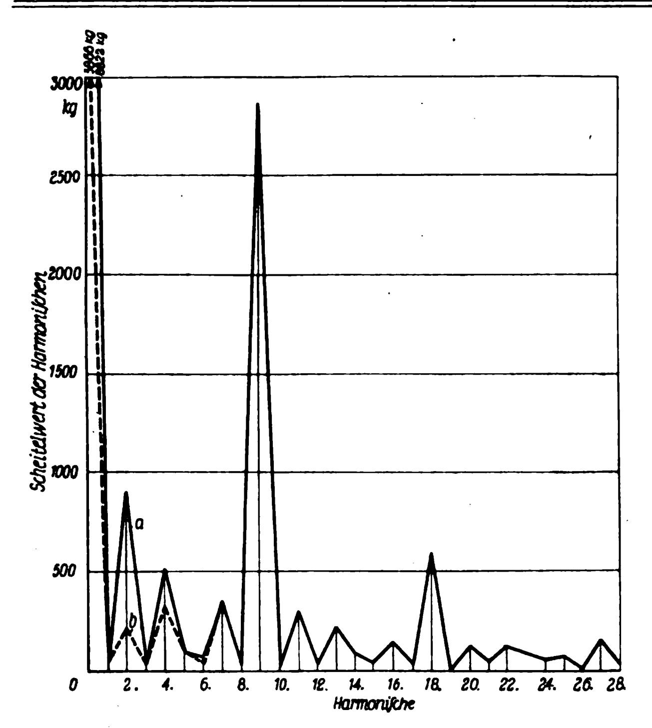


Bild 7. Die Harmonischen der Gas- und Gesamtbiegekraft sämtlicher Zylinder.
a Gesamtbiegekraft,
b Gasbiegekraft.

wicht und Schwerpunktslage des Hauptpleuels berücksichtigt. Spalte 7 enthält das Ergebnis der entsprechenden Näherungsrechnung wie in Spalte 6, wobei jedoch die in den Anlenkachsen C_n angebrachten Ersatzmassen als rein umlaufend betrachtet werden. Die in den Spalten 3 bis 6 stehenden Näherungswerte sind hinreichend genau; die bei den höheren Harmonischen entstehenden relativen Fehler sind belanglos, da diese Glieder absolut genommen klein sind. Durchschnittlich weniger genau sind die Näherungswerte von Spalte 7.

Spalte 8 zeigt die Werte, die man erhält, wenn sämtliche Nebenpleuel als unmittelbar angelenkt angesehen werden und wenn als Schubstangenverhältnis der Wert λ des Hauptzylinders eingesetzt wird. Spalte 9 enthält die in gleicher Weise ermittelten Werte, wobei jedoch das Schubstangenverhältnis λ_n der Nebenzylinder eingesetzt wurde. Wie ein Vergleich mit den nach der vollständigen Rechnung ermittelten Werten der Spalte 2 ergibt, sind die Näherungswerte der Spalten 8 und 9 unbrauchbar, sie können überhaupt nicht mehr als Näherung angesprochen werden. Um dies zu verdeutlichen, sind die Werte von Spalte 9 als Beispiel noch in Bild 8 mit eingetragen.

Zusammenfassend ergibt der Vergleich der verschiedenen Näherungen folgendes:

Wenn von der Durchführung der vollständigen Rechnung abgesehen werden soll, sind auch bei beliebiger Pleuelanlenkung zur Ermittlung der Harmonischen der Massenbiegekraft die Formeln (35a) und (38a) für die regelmäßige Anlenkung zu empfehlen, wobei für die Werte ϱ_n (1) ein Mittelwert einzusetzen ist. Das Mitführen der in den geknickten Klammern stehenden Glieder 4. Ordnung erhöht noch die Genauigkeit und verursacht nur unbedeutende Mehrarbeit. Der erforderliche Zeitaufwand ist bei dieser Näherungsrechnung klein und die erreichte Genauigkeit für die praktischen Bedürfnisse durchaus hinreichend, zumal sich bei ausgeführten Sternmotoren die Anlenkhalbmesser c_n und damit die Werte ϱ_n nur um wenige Hundertteile voneinander unterscheiden und außerdem der Winkel δ_n (2) möglichst zu null oder aber mindestens sehr klein gemacht wird. (Im vorliegenden Zahlenbeispiel ist $\delta_n = 0$.) Diese Näherungsrechnung hat vor der nach (26), wo jedes Nebenpleuel durch zwei Ersatzmassen dargestellt wird und wobei die in den Anlenkachsen angebrachten Ersatzmassen bei Gewicht und Schwerpunktslage des Hauptpleuels berücksichtigt werden, den Vorteil, daß man die Harmonischen für den Hauptzylinder und für die Nebenzylinder getrennt in richtiger Größe erhält, während bei der letztgenannten Rechnung die Massenbiegekraft des Hauptzylinders noch einen Teil der Massenwirkung der Nebenpleuel enthält.

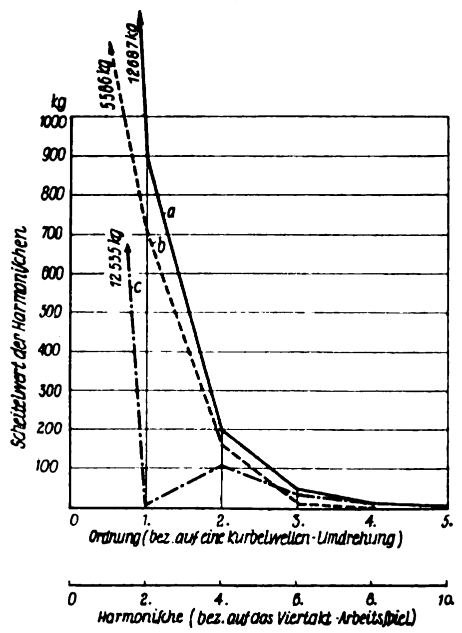


Bild 8. Die Harmonischen der Massenbiegekraft sämtlicher Zylinder.
a Kolben + Pleuel,
b Kolben allein,
c Kolben + Pleuel bei unmittelbarer Pleuelanlenkung.

Da in den angegebenen Endformeln mehrere zu bildende Ausdrücke innerhalb derselben Gleichung sowie auch bei den entsprechenden Gleichungen für Kolben und Pleuel in ähnlicher Form auftreten, wird man bei praktischen Rechnungen durch Anlegung geeigneter Rechenblätter eine bedeutende Verkleinerung des Rechenaufwands erreichen. Zahlentafel 6 zeigt als Beispiel ein Rechenblatt zur gleichzeitigen Berechnung der Harmonischen der Massenbiegekraft der Kolben und der Pleuel sämtlicher Nebenzylinder nach den Formeln (35a) und (38a). Zu diesem leichtverständlichen Rechenblatt sei noch bemerkt, daß die für jedes Beispiel neu einzutragenden Werte im Gegensatz zu den vorgedruckten, allgemein gültigen Werten der Rechentafel kursiv gedruckt sind. Die oberste Zahl eines Feldes zeigt jeweils den zu dem betreffenden Parameterprodukt gehörigen Zahlenbeiwert in allgemeiner Form und die zweite Zahl in zahlenmäßiger Auswertung. Die dritte Zahl jedes Feldes entsteht durch Multiplikation dieses zweiten Zahlenbeiwerts mit dem zu der betreffenden Spalte gehörenden Parameterprodukt; die vierte Zahl entsteht wiederum aus der dritten durch Multiplikation mit dem zu dieser Spalte gehörenden statischen Beiwert. Die Summation der in einer waagerechten Zeile stehenden dritten Zahlen jedes Feldes liefert die Werte $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$, die der vierten Zahlen die Werte $\overline{\mathfrak{P}}_\nu$. Die Spalten 11 und 12 werden nur für die Pleuel, nicht aber für die Kolben gebraucht.

VII. Zusammenfassung.

Zur Untersuchung der Erregung der Biegeschwingungen bei Flugmotoren mit mittelbarer Pleuelanlenkung (insbesondere Sternmotoren) wurden Rechenunterlagen geschaffen, die im Hinblick auf die Entwicklung der Motoren zu größerer Schnelläufigkeit neben den Gasbiegekräften auch die Massenbiegekräfte höherer Ordnung erfassen. Außer der vollständigen Rechnung wurden noch einige für die praktischen Bedürfnisse ausreichend genaue Näherungsrechnungen angegeben.

Zur Erläuterung der allgemeinen Rechenergebnisse und zur Prüfung der Genauigkeit der angegebenen Näherungsrechnungen wurden für einen Neunzylinder-Sternmotor die zugehörigen Zahlenrechnungen durchgeführt und deren Ergebnisse eingehend erörtert.

Korrosionsermüdung einiger Aluminium-Knetlegierungen bei Einwirkung heißer Flüssigkeiten.

Von F. Bollenrath und W. Bungardt.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

An verschiedenen gewalzten und gepreßten Aluminium-Knetlegierungen der Gattungen: Al-Cu-Mg, Al-Mg-Si, Al-Zn-Mg, Al-Mg und Al-Mg-Zn werden Korrosionsermüdungsversuche in destilliertem Wasser von 90 bis 95° und wasserfreiem Methanol von 60 bis 63° in einer Schenckschen Rundbiegemaschine durchgeführt. In heißem Wasser verhalten sich spannungskorrosionsbeständige, zinkfreie und zinkhaltige Al-Mg-Legierungen neuerer Herstellungsweise, in heißem Methanol kaltausgelagerte Al-Cu-Mg-Legierungen am günstigsten.

Gliederung.

Nachfolgend wird über Korrosionsermüdungsversuche an einigen wichtigen Aluminium-Knetlegierungen berichtet; als Korrosionsmittel wurde destilliertes Wasser (t = 90 bis 95°) und reines, wasserfreies Methanol (t = 60 bis 63°) verwendet.

I. Versuchsstoffe und Versuchsgestaltung.

Untersucht wurden die in Zahlentafel 1 zusammengestellten Aluminiumlegierungen der Gattungen: Al-Cu-Mg, Al-Mg-Si, Al-Zn-Mg, Al-Mg und Al-Mg-Zn; die Untersuchung umfaßt sowohl Walz- als auch Preßhalbzeuge[1]).

Die Werkstoffe 1 bis 4, 6, 8 und 10 bis 13 lagen als Bleche von 13 bis 15 mm Dicke, die Legierungen 5, 7 und 9 als Preßstangen mit 20 mm Durchmesser vor. Um die Versuchsergebnisse auf praktisch vorkommende Fälle übertragen zu können, wurden die Bleche vorwiegend unter verschärften Bedingungen, d. h. im zusätzlich kaltverfestigten Zustand geprüft. Die Al-Cu-Mg-Legierungen 1 und 2 wurden von den Herstellern im kaltausgelagerten Zustand um 10%, die Al-Mg-Si-Legierung um 15% und die übrigen halbharten Werkstoffe 6, 8 und 10 bis 13 durch Walzen um 7 bis 10% kaltverfestigt. Eine Ausnahme macht nur die kupferärmere Al-Cu-Mg-Legierung 3 mit 2,2% Kupfer. Da sie im kaltausgelagerten Zustand nicht spannungskorrosionsbeständig ist, wurde nur der gegen Spannungskorrosion beständige warmausgehärtete Zustand untersucht. Von einer zusätzlichen Kaltverfestigung wurde wegen des verhältnismäßig geringen Formänderungsvermögens dieser Legierung nach Warmauslagerung abgesehen. Durch besondere Spannungskorrosionsversuche im DVL-Wechseltauchgerät bei Verwendung von künstlichem Seewasser als Korrosionsmittel wurde nachgewiesen, daß nach Homogenisieren bei 505° (Glühdauer 25 Min.), Wasserabschreckung und anschließender 50stündiger Warmauslagerung bei 180° ein vollständig spannungskorrosionsbeständiger Gefügezustand erreicht wird. Legierung 3 wurde daher nur in diesem Behandlungszustand geprüft.

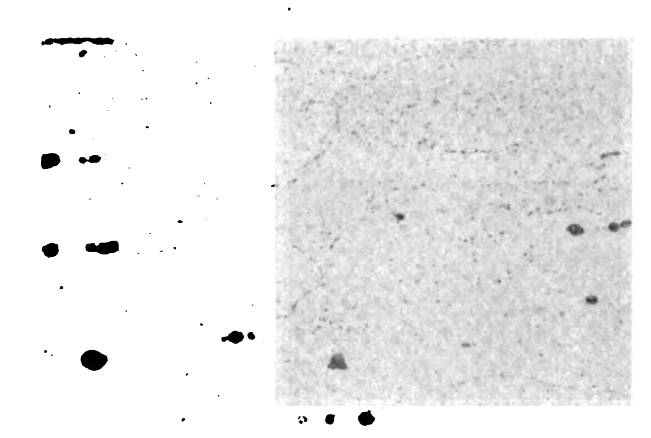


Bild 1. Gefügeaufbau der zinkhaltigen Al-Mg-Legierung 12. Vergr. 500fach.

Die beiden zinkhaltigen Al-Mg-Legierungen 12 und 13 mit gleicher chemischer Zusammensetzung unterscheiden sich nur durch unterschiedliche Herstellungsbedingungen, die nach Bild 1 und 2 im Gefüge zum Ausdruck kommen. Während Legierung 12 einen schwach heterogenen Gefügeaufbau mit »perlschnurartiger« Anordnung der ausgeschiedenen β-Kristallart auf den Korngrenzen aufweist, ist die Legierung 13 wesentlich heterogener. Vorwiegend im Innern der Kristallkörner sind viele punktartige β-Ausscheidungen festzustellen, während die Korngrenzen selbst verhältnismäßig schwach angedeutet sind. Wie aus einem Vergleich der beiden in Bild 1 und 2 wiedergegebenen Gefügebilder hervorgeht, ist bei der Legierung 13 der Übersättigungsgrad des α-Mischkristalls merklich geringer als bei dem Werkstoff 12. Aus diesem Grunde und ferner wegen der Keimwirkung der zahlreichen, punktartigen Ausscheidungen der β-Kristallart für den weiteren Zerfall des Mischkristalls bei Temperaturerhöhung, ist bei der Gefügeausbildung des Bleches 3 die Gefahr der Ausbildung zusammenhängender, bandartiger Korngrenzenausscheidungen sehr gering. Die nach diesem Verfahren, das sich im übrigen von der bisher üblichen Herstellungsweise im wesentlichen nur durch geänderte Walz- und Glühbedingungen unterscheidet, hergestellten Halbzeuge aus Al-Mg-Legierungen sind sehr anlaßbeständig und daher auch wenig empfindlich gegen Spannungskorrosion. Besondere Versuche sowohl an den hier untersuchten Legierungen als auch an dünnen Blechen von 1 mm Dicke haben insbesondere bei Anlaßtemperaturen über 100° und längeren Glühzeiten jedesmal eine deutliche Überlegenheit der Legierungen mit einer durch Bild 2 gekennzeichneten Gefügebeschaffenheit ergeben.

[1]) Die Verfasser sind folgenden Leichtmetallherstellern: Dürener Metallwerke A.G., Berlin-Borsigwalde, Vereinigte Leichtmetallwerke A.G., Hannover, Hirsch, Kupfer- und Messingwerke A.G., Finow (Mark), I. G. Farbenindustrie A.G., Bitterfeld und Leipziger Leichtmetallwerk Rackwitz, Rackwitz, für bereitwillige kostenlose Überlassung von Versuchsmaterial zu Dank verpflichtet.

Zahlentafel 1. Versuchswerkstoffe.

Nr.	Zustand	Chemische Zusammensetzung in %												Bemerkungen
		Cu	Mg	Mn	Si	Fe	Zn	Ti	Ni	Ca	Cr	V	Al	
1	kaltausgehärtet u. etwa 10% kaltgewalzt	3,84	0,66	0,61	0,38	0,29	Spur	0,012	—	—	—	—	Rest	
2	kaltausgehärtet u. etwa 10% kaltgewalzt	4,60	1,08	1,05	0,54	0,42	—	—	—	—	—	—	»	Legierungsgattung: Al-Cu-Mg
3	vergütet: 505° (25 Min) Wasserabschreckung bei 180° 50 h warmausgeh.	2,20	1,90	0,50	0,50	—	—	—	—	—	—	—	»	
4	kaltausgehärtet u. etwa 15% kaltgewalzt	<0,02	0,63	0,64	0,91	0,21	0,02	0,016	Spur	—	—	—	»	Legierungsgattung: Al-Mg-Si
5	gepreßt, kaltausgehärtet	0,32	3,80	0,49	0,34	0,54	4,45	—	—	—	—	0,07	»	Legierungsgattung: Al-Zn-Mg
6	gewalzt, halbhart	Spur	4,84	0,21	0,22	0,22	Spur	—	—	—	—	—	»	
7	gepreßt	<0,03	4,81	0,26	0,16	0,47	Spur	Spur	—	—	—	—	»	
8	gewalzt, halbhart	<0,03	6,97	0,16	0,12	0,36	Spur	Spur	—	—	—	—	»	Legierungsgattung: Al-Mg
9	gepreßt	0,06	6,76	0,21	0,13	0,70	Spur	Spur	—	—	—	—	»	
10	gewalzt, halbhart	—	7,93	0,19	0,12	0,38	—	—	—	0,05	0,05	—	»	
11	gewalzt, halbhart	Spur	5,82	0,15	0,16	0,30	0,93	Spur	—	—	—	—	»	
12	gewalzt, halbhart	Spur	7,75	0,16	0,14	0,34	0,90	Spur	—	—	—	—	»	Legierungsgattung: Al-Mg-Zn
13		—	7,77	0,20	0,13	0,37	0,90	—	—	0,024	0,055	—	»	

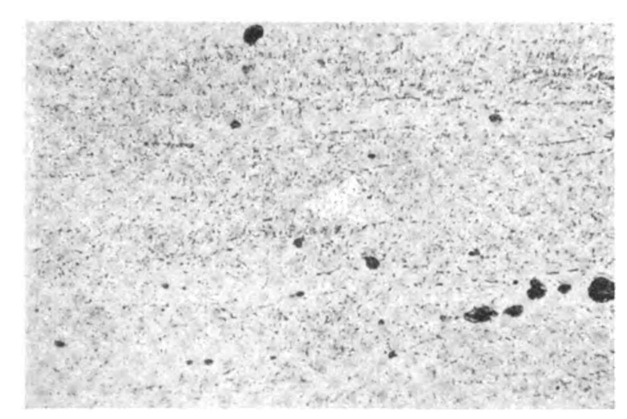


Bild 2. Gefügeaufbau der zinkhaltigen Al-Mg-Legierung 13. Vergr. 500fach.

Der Gefügeaufbau der übrigen Walz- und Preßlegierungen auf Al-Mg-Basis ähnelt — bis auf Legierung 10, die ebenfalls wie Legierung 13 aufgebaut war, — weitgehend Bild 1.

Unter den untersuchten Preßlegierungen verdient Legierung 5 auf Al-Zn-Mg-Basis besondere Beachtung. Dieser praktisch kupferfreie Werkstoff, der im Institut für Werkstofforschung entwickelt wurde[2]), entspricht nach Wasserabschreckung von 450° und Kaltauslagerung festigkeitsmäßig den bekannten Al-Cu-Mg-Legierungen. Er ist, wie an Preßhalbzeugen gesondert nachgewiesen wurde[3]), auch nach längerem Anlassen bei erhöhten Temperaturen ausreichend spannungskorrosionsbeständig.

Zur weiteren Kennzeichnung der Versuchswerkstoffe dienen die in Zahlentafel 2 zusammengestellten statischen Festigkeitswerte.

II. Versuchsdurchführung.

Die Versuche wurden auf einer Schenckschen Rundbiegemaschine in Luft bei etwa 20° und in heißem destillierten Wasser von 90 bis 95° bzw. reinem Methanol von 60 bis 63° durchgeführt. Die Temperaturen der Korrosionsmittel lagen also in der Nähe der Siedetemperaturen dieser Flüssigkeiten. Die Prüfmaschine wurde mit einer besonderen Zusatzeinrichtung versehen, durch welche die Korrosionsflüssigkeit erhitzt und auf den Probestab aufgespritzt werden konnte. Um seitliche Wärmeverluste auf ein Kleinstmaß herabzudrücken, wurden polierte Probestäbe mit ausgebohrten Köpfen nach Bild 3 verwendet, die sich bereits bei einer früheren Untersuchung[4]) gut bewährt hatten. Die angegebenen Zeitfestigkeits- bzw. Korrosionsfestigkeitswerte beziehen sich einheitlich auf $10 \cdot 10^6$ ertragene Lastwechsel. Die Prüfmaschine lief mit 5000 U/min.

Die Arbeitsweise der Versuchsanlage geht aus Bild 4 hervor. Die Korrosionsflüssigkeit wird mittels einer Eintauchpumpe *1* aus dem Sammelgefäß durch ein Heizrohr-

[2]) W. Bungardt und G. Schaitberger, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), Lfg. 1, S. 26/31.

[3]) Veröffentlichung demnächst.

[4]) Vgl. hierzu K. Bungardt, Z. Metallkde. Bd. 30 (1938), S. 236.



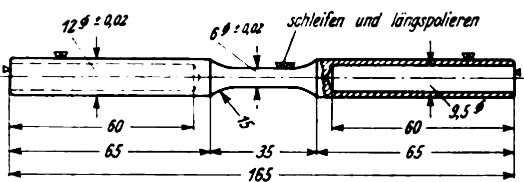


Bild 3. Probestab mit hohlgebohrten Köpfen.

Zahlentafel 2. Statische Festigkeitseigenschaften der Versuchswerkstoffe im Prüfzustand.

Nr.	Statische Festigkeitseigenschaften Streckgrenze (0,2 %) kg/mm²	Zugfestigkeit kg/mm²	Dehnung (δ_{10}) %
1	29,6	41,1	14,9
2	43,2	52,9	9,5
3	36,5	40,7	8,4
4	15,8	24,9	19,6
5	34,9	48,8	11,7
6	20,3	28,4	15,5
7	10,0	27,2	25,3
8	28,1	37,7	14,4
9	14,3	33,3	29,0
10	27,0	41,3	15,4
11	24,3	35,1	16,6
12	24,5	39,4	20,8
13	29,8	43,6	13,6

Bild 4. Versuchseinrichtung.

1 Pumpe
2 Heizrohr
3 Spritzdüse
4 Heizkörper (1000 W)
5 Regelthermometer
6 Spritzkasten
7 Rücklaufkühler
8 Thermometer
9 Beleuchtung
10 Schauglas
11 Wasserabschluß
12 Nachfülltrichter
13 Wasserstandsglas
14 Isolation (Glaswolle)

system *2* hindurchgedrückt und schließlich durch acht Düsen *3* von je 0,8 mm Durchmesser auf den Probestab gleichmäßig aufgespritzt. Das ablaufende Korrosionsmittel fließt danach in das Sammelgefäß zurück. Die Erwärmung des Korrosionsmittels in dem Rohrsystem *2* geschieht durch eine elektrische Heizung *4* unter Verwendung von Öl als Wärmeüberträger. Ein eingebautes Regelthermometer *5* sorgt für gute Temperaturkonstanz. Das Heizgefäß, sämtliche Zuleitungen sowie der Spritzkasten *6* sind durch Glaswolle *14* thermisch isoliert. Der Rückflußkühler *7*, der zur Kondensierung der besonders bei höheren Versuchstemperaturen entstehenden Dämpfe im Sammelgefäß dient, und das Sammelgefäß selbst werden mit fließendem Leitungswasser gekühlt. Die Versuchstemperatur kann durch ein in den Spritzkasten eingebautes Quecksilberthermometer *8* laufend überprüft werden.

Das gesamte System enthielt etwa 3 l Korrosionsflüssigkeit; die täglichen Verdampfungsverluste von etwa 1 l wurden laufend durch Nachfüllen frischer Flüssigkeit ausgeglichen. Die Gesamtfüllung wurde wöchentlich erneuert.

Um die praktischen Beanspruchungsverhältnisse, denen die Legierungen genügen sollten, in etwa nachzuahmen, wurden die Wöhlerkurven unter Einhaltung des in Bild 5 wiedergegebenen Prüfplanes aufgenommen. Jeder Prüfstab wurde daher in der vorgesehenen Laststufe täglich nur 1 h der Einwirkung des heißen Korrosionsmittels ausgesetzt. In Anschluß hieran wurde der unbelastete Probestab 7 h der Korrosionseinwirkung des kalten Korrosionsmittels ausgesetzt und endlich 16 h in ruhender Luft von Raumtemperatur aufbewahrt. Diese Reihenfolge wiederholte sich täglich bis zum Bruch des Stabes. In der täglich zur Verfügung stehenden Arbeitszeit konnten je Prüfmaschine gleichzeitig acht Proben bei verschiedener Belastung geprüft werden.

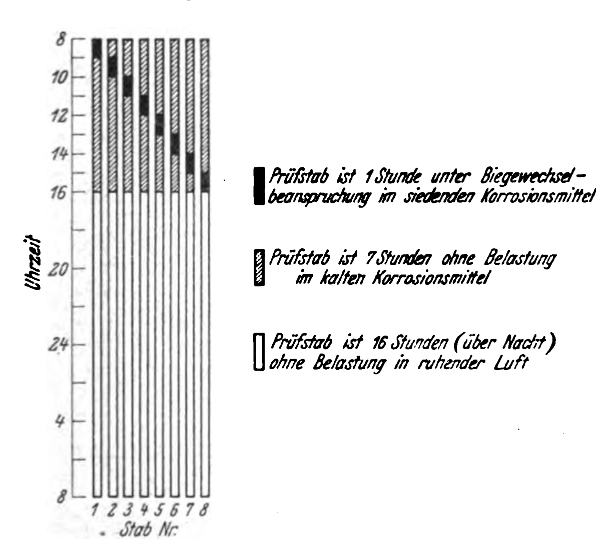


Bild 5. Zeitlicher Prüfplan.

Diese Art der Versuchsdurchführung trägt dem hier besonders interessierenden Umstand Rechnung, daß eine gleichzeitige Korrosionseinwirkung und mechanische Beanspruchung nur in verhältnismäßig wenigen Betriebsstunden erfolgt. Während der Betriebspausen unterliegt der nicht belastete Werkstoff nur der Korrosion durch das kalte Korrosionsmittel bzw. der umgebenden Luft. Die bei den Versuchen eingehaltene zeitliche Bemessung dieser verschiedenen Korrosionsarten stimmt mit den zu erwartenden mittleren, betrieblichen Beanspruchungszeiten größenordnungsmäßig überein.

Erfolgte der Bruch des Versuchsstabes z. B. nach $10 \cdot 10^6$ Lastwechseln, so war die Probe insgesamt etwa 33 h der Einwirkung des heißen Korrosionsmittels unter Last, im unbelasteten Zustand etwa 230 h der kalten Korrosionsflüssigkeit und 528 h der Luft ausgesetzt.

Die vergleichsweise in Luft aufgenommenen Wöhlerkurven wurden in der üblichen Weise, d. h. ohne Belastungspausen, bestimmt, die bekanntlich ohne Einfluß auf die bis zum Bruch ertragene Lastwechselzahl sind[5]).

III. Versuchsergebnisse.

Die insgesamt erhaltenen 38 Wöhlerkurven sind in Bild 6a bis n dargestellt, wobei zum besseren Vergleich für jeden Werkstoff die in Luft, heißem Wasser und Methanol gemessenen Werte jeweils in ein Bild zusammengefaßt wurden. Jede Kurve ist durch eine größere Anzahl von Einzelbeobachtungen gut belegt. Alle Versuchsergebnisse sind schließlich in Zahlentafel 3 und Bild 7 übersichtlich zusammengestellt.

Die in Luft für die verschiedenen Legierungsgattungen erhaltenen Biegewechselfestigkeiten stehen mit sonstigen Beobachtungen gut im Einklang. Die höchsten Werte werden von der Al-Cu-Mg-Legierung 2 mit höheren Mangan-

[5]) Vergl. F. Bollenrath und H. Cornelius: Z. VDI Bd. 84 (1940), S. 295/99 und H. Cornelius, Luftfahrtforschung Bd. 18 (1941), S. 285/8.

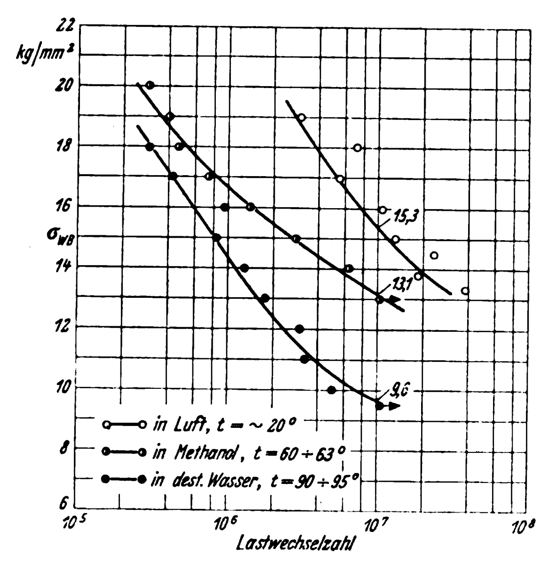


Bild 6a. Legierung 1.

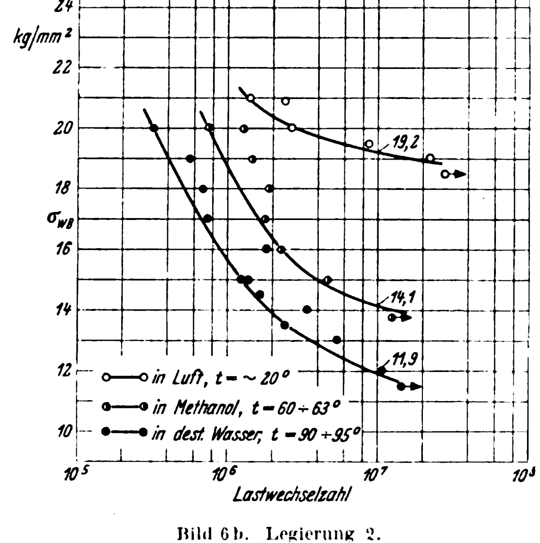


Bild 6b. Legierung 2.

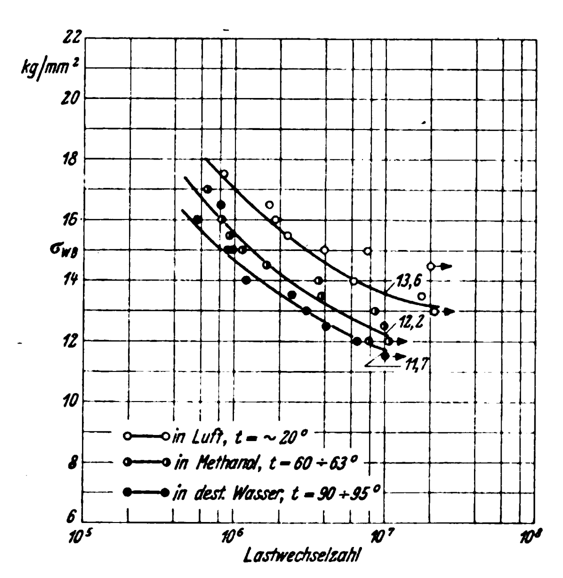


Bild 6c. Legierung 3.

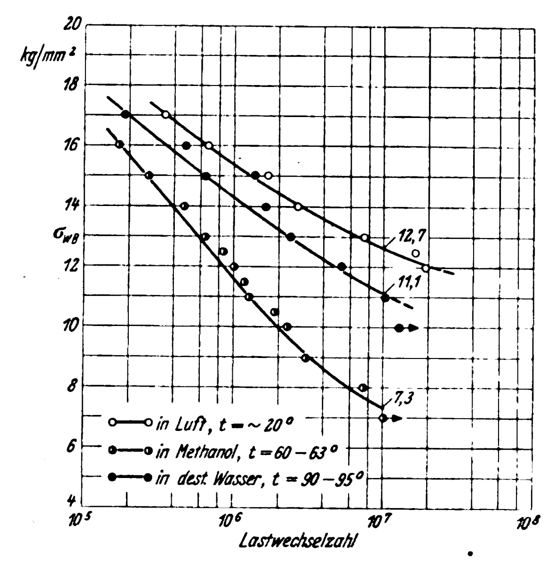


Bild 6d. Legierung 4.

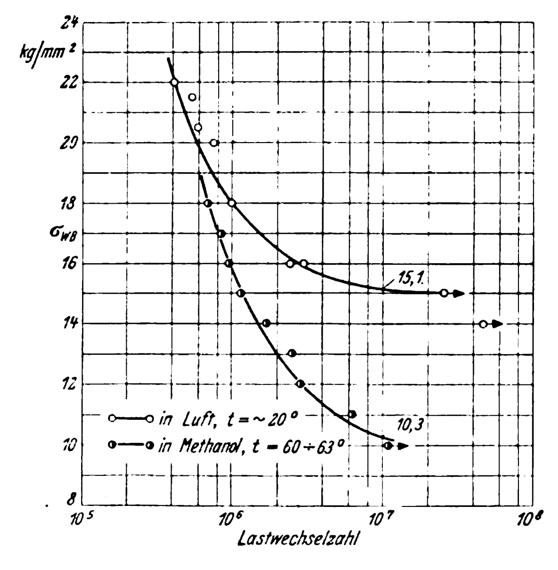


Bild 6e. Legierung 5.

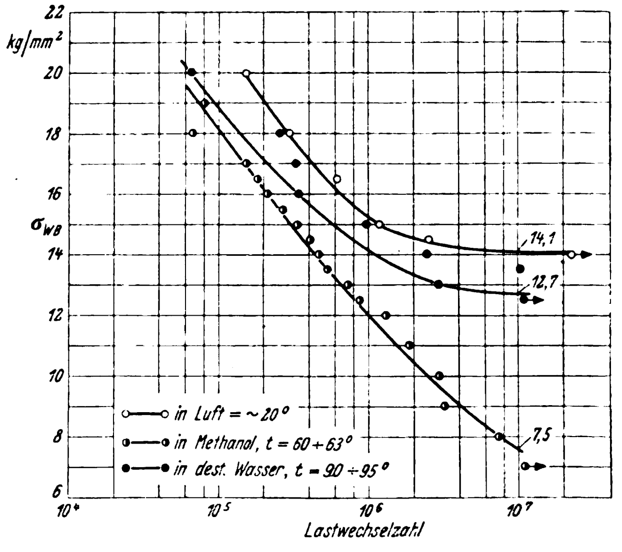


Bild 6f. Legierung 6.

Bild 6a bis n. Versuchsergebnisse in Luft, heißem Wasser und Methanol.

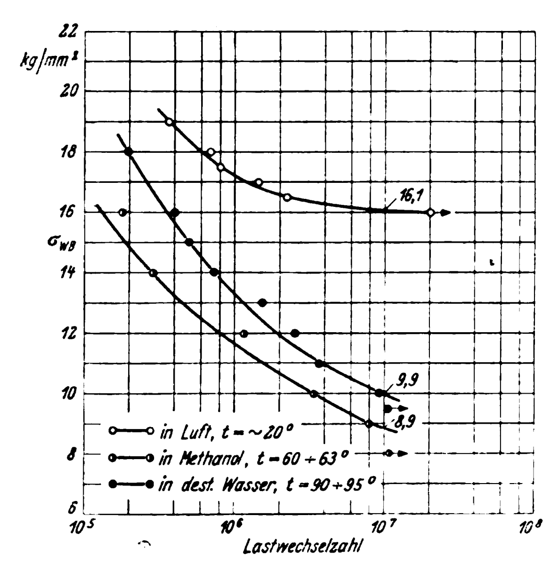


Bild 6g. Legierung 7.

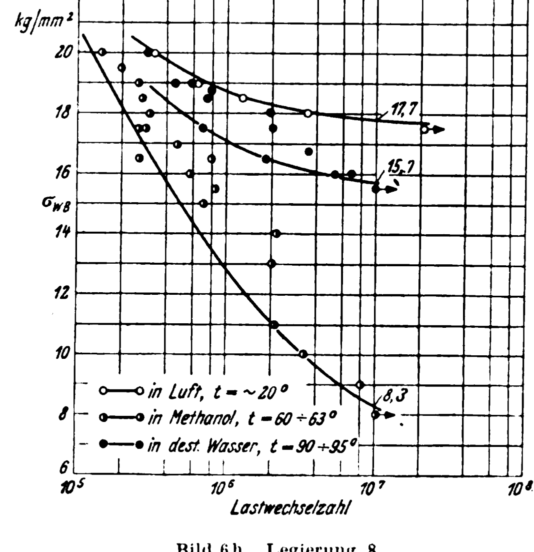


Bild 6h. Legierung 8.

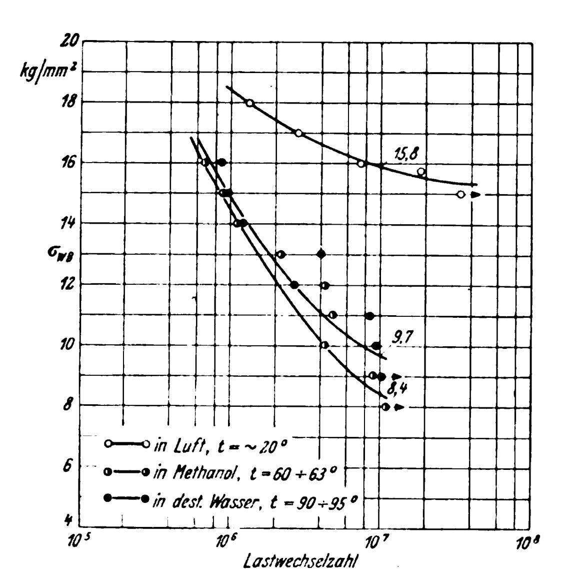


Bild 6i. Legierung 9.

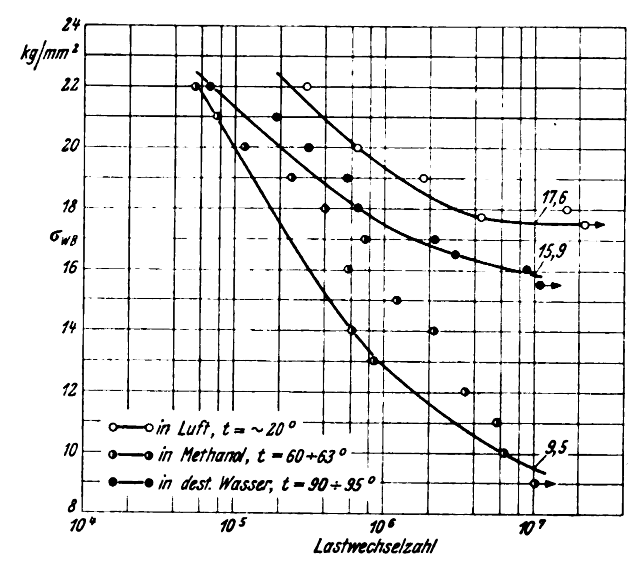


Bild 6k. Legierung 10.

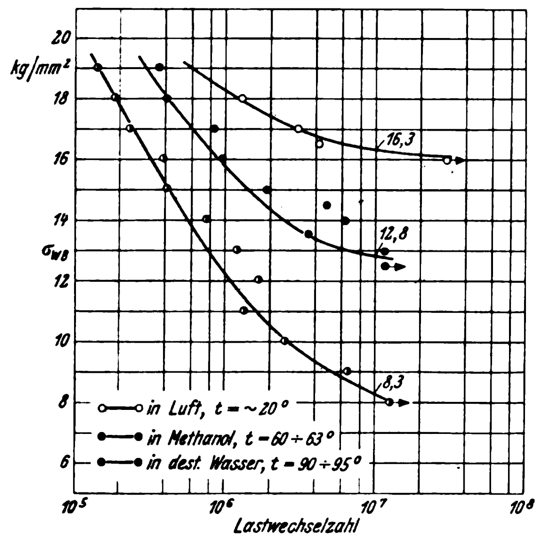


Bild 6l. Legierung 11.

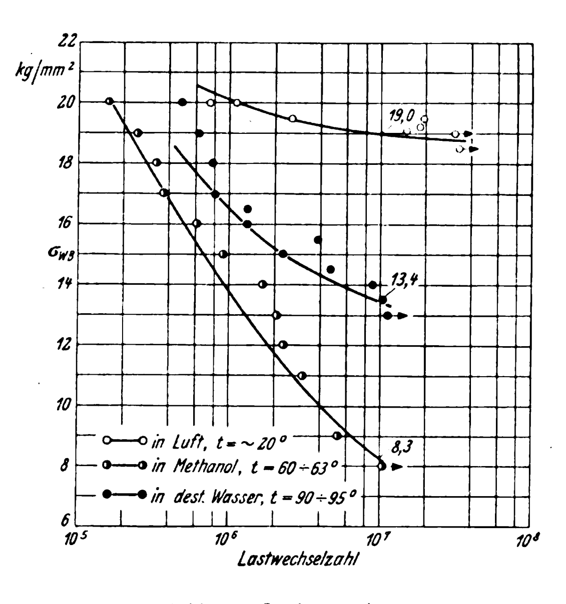


Bild 6m. Legierung 12.

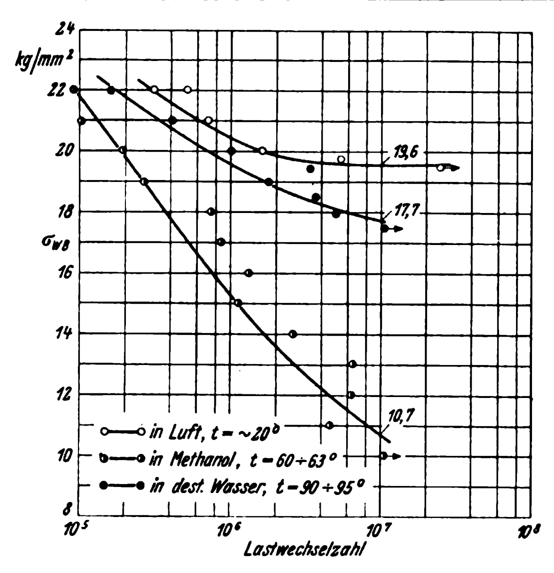


Bild 6n. Legierung 13.

und Magnesiumgehalten und von den zinkhaltigen Al-Mg-Legierungen 12 und 13 erreicht. Die geringste Biegedauerfestigkeit hat erwartungsgemäß die kaltausgehärtete Al-Mg-Si-Legierung 4. Die Dauerfestigkeitswerte der kaltausgelagerten, kaltverfestigten Al-Cu-Mg-Legierungen 1 und 2 betragen 15,3 bzw. 19,2 kg/mm², während die warmausgehärtete, kupferärmere Al-Cu-Mg-Legierung 3 nur 13,6 kg/mm² erreicht. Die Preßlegierung 5 auf Al-Zn-Mg-Basis entspricht mit einer Dauerfestigkeit von 15,1 kg/mm² etwa der Al-Cu-Mg-Legierung 1. Die entsprechenden Werte für die Al-Mg-Legierungen 6 bis 10 ordnen sich zwischen 14,1 und 17,7 kg/mm² ein; sie sind bei den zinkfreien und besonders bei den zinkhaltigen Legierungen 10, 12 und 13 recht beachtlich.

Wegen der verhältnismäßig geringen Korrosionsbeständigkeit der Aluminiumlegierungen werden unter der Einwirkung der heißen Korrosionsmittel die Korrosions-Zeitfestigkeitswerte, verglichen mit den in Luft erhaltenen Ergebnissen, meist sehr stark verringert. Die in Bild 6a bis n mitgeteilten Beobachtungsergebnisse zeigen jedoch, daß die verschiedenen Legierungsgattungen je nach der angewendeten Korrosionsflüssigkeit sich sehr verschieden verhalten. Besonders auffällig ist z. B. der Unterschied zwischen den Al-Cu-Mg- und den Al-Mg-Legierungen. Während bei der ersten Werkstoffart die Korrosionsermüdungsfestigkeiten in heißem Methanol durchweg größer sind als bei Einwirkung heißen destillierten Wassers, ist umgekehrt bei den Al-Mg-Legierungen der Festigkeitsabfall in Methanol erheblich größer als in Wasser. Die geringere allgemeine Korrosionsbeständigkeit der Al-Mg-Legierungen gegen heißes

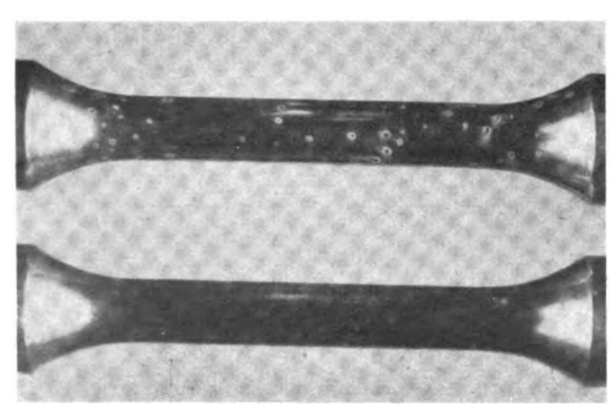


Bild 8. Unterschiedlicher Korrosionsangriff durch heißes Methanol nach 14tägiger Versuchsdurchführung. Vergr. 1,5fach.
oben: Leg. 6 (Al-Mg, gewalzt).
unten: Leg. 1 (Al-Cu-Mg, gewalzt).

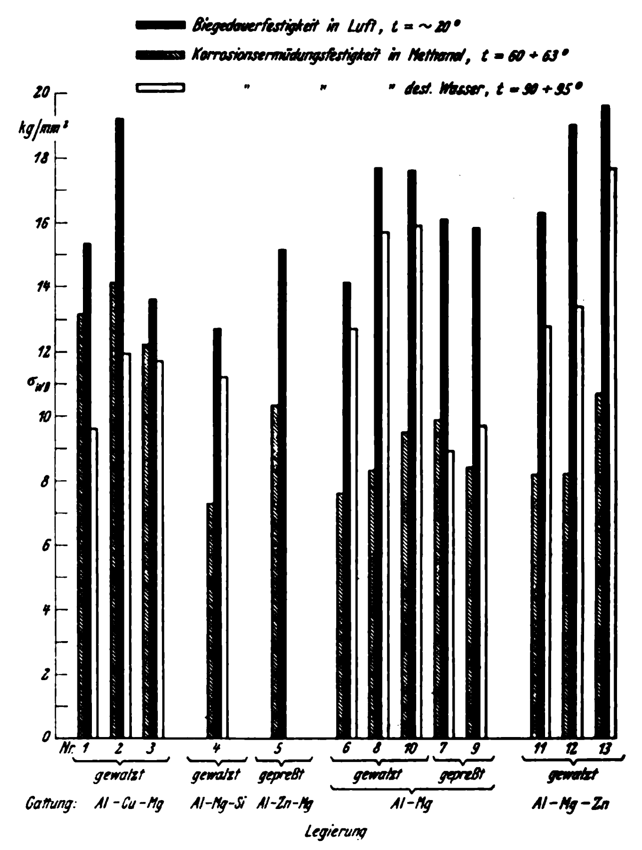


Bild 7. Zusammenstellung aller Versuchsergebnisse.

Methanol kommt deutlich in Bild 8 zum Ausdruck. Nach vierzehntägiger Prüfung in dieser Korrosionsflüssigkeit zeigte der Probestab aus der Al-Cu-Mg-Legierung 1 keinen wesentlichen Korrosionsangriff, während bei der Al-Mg-Legierung 6 die Anfänge einer lochfraßähnlichen Zerstörung gut zu erkennen sind. Die geringere Korrosionsbeständigkeit der Al-Mg-Legierungen in reinem Methanol hängt sehr wahrscheinlich mit folgendem Umstand zusammen. Magnesium reagiert mit wasserfreiem Methanol (Methylalkohol) bei Zimmertemperatur unter Alkoholatbildung; die Reaktionsgeschwindigkeit hängt vom Wassergehalt des Alkohols ab, wobei steigende Wassergehalte die Reaktion stark hemmen[6]). Nach Bild 8 scheint die Neigung des Magnesiums zur Bildung von Alkoholaten in wasserfreiem Methanol auch bei in Aluminium gelöstem Mg erhalten zu bleiben.

Innerhalb dieser Werkstoffgruppe (Leg. 6 bis 13) sind folgende Einzelheiten bemerkenswert. Die Korrosionsermüdungsgrenzwerte der beiden unmittelbar vergleichbaren Werkstoffe 12 und 13 unterscheiden sich bei Korrosionsbeanspruchung durch heißes Wasser um 4,3 kg/mm² und in heißem Methanol um 2,4 kg/mm², wobei stets die Legierung 13 die höheren Werte erreicht, Bild 7. Diese Unterschiede liegen außerhalb des normalerweise zu erwartenden Streubereiches; sie können auch nicht durch die in Zahlentafel 2 angegebenen unterschiedlichen statischen Festigkeitswerte dieser beiden Legierungen erklärt werden, da nach Beobachtungen von F. Bollenrath und K. Bungardt[7]) durch unterschiedliche Kaltverfestigung die Biegedauerfestigkeit dieses Werkstoffs nicht in dem hierzu notwendigen starken Maße geändert wird. F. Bollenrath und K. Bungardt stellen z. B. bei einer Al-Zn-Mg-Walzlegierung mit 8,2% Mg und 0,98% Zink nach 60proz. Kaltverfestigung nur eine Zunahme der Biegedauerfestigkeit von 16,2 auf 18,2 kg/mm² fest. Die Beobachtung, daß die Biegedauerfestigkeit mit zunehmender Kaltverfestigung regelmäßig, wenn auch in erheblich geringerem Maße als die Streck-

[6]) Vgl. Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie, Magnesium, Teil A, Lieferung 2, S. 315/16.
[7]) Metallwirtschaft Bd. 18 (1939), Heft 1, S. 2 bis 6.



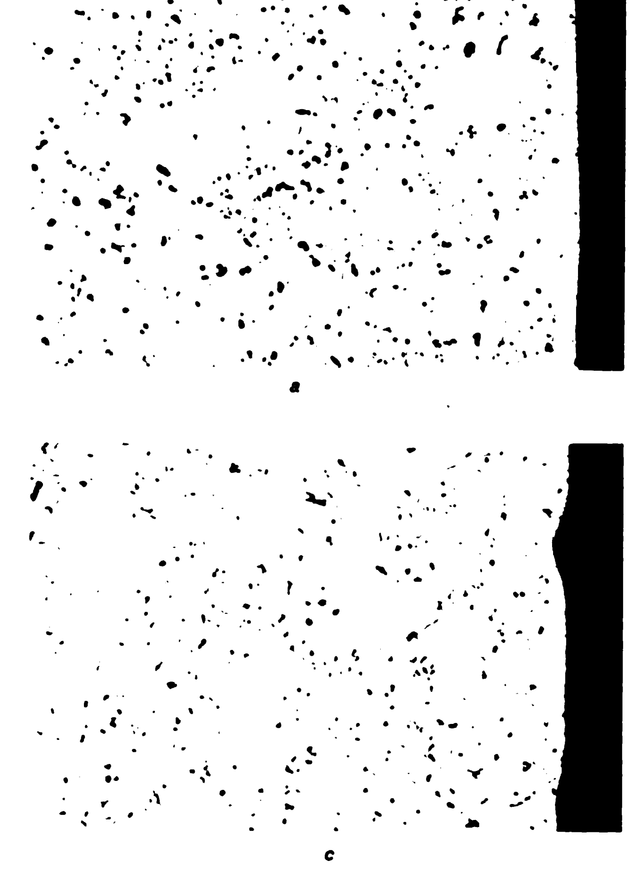




Bild 9. Gefügeveränderung der gepreßten Al-Mg-Legierung 9 während der Durchführung der Korrosionsermüdungsversuche.

a Gefüge im Anlieferungszustand. Vergr. 200fach.
b Gefügeveränderung nach 14tägigem Versuch in Methanol von 60 bis 63°. Vergr. 200fach.
c Gefügeveränderung nach 14tägigem Versuch in heißem Wasser 90 bis 95°. Vergr. 200fach.

grenze ansteigt, wird auch durch die vorliegende Untersuchung bestätigt, denn trotz starker Unterschiede in den Streckgrenzenwerten der beiden Werkstoffe 12 und 13 (Zahlentafel 2) weichen die in Luft gemessenen Biegedauerfestigkeiten nur wenig voneinander ab (Zahlentafel 3).

Die Beobachtung, daß mit zunehmender Versuchstemperatur (60 bis 63° in Methanol gegen 90 bis 95° in Wasser) die Differenzen größer werden, deutet nun darauf hin, daß für das ungünstigere Verhalten des Werkstoffs 12 vornehmlich seine geringere Beständigkeit gegen Spannungskorrosion nach Anlassen bei höheren Temperaturen verantwortlich zu machen ist. Aus diesem Grunde sinkt die Korrosionsermüdungsgrenze, bezogen auf 10 Mill. Lastwechsel gegenüber der in Luft bestimmten Dauerfestigkeit um 29,4% bei Werkstoff 12 ab, während bei der spannungskorrosionsbeständigeren Legierung 13 nur eine Verminderung um 9,7% zu verzeichnen ist. Auch bei den Versuchen in Methanol kommt dem beständigeren Gefüge der Legierung 13 eine merkliche Überlegenheit zu, wie aus Zahlentafel 3 und Bild 7 zu entnehmen ist.

Auffällig sind schließlich noch die an den beiden Preßlegierungen 7 und 9 auf Al-Mg-Basis erhaltenen Ergebnisse insofern, als bei diesen Werkstoffen ein im Vergleich zu heißem Methanol günstigeres Verhalten bei Korrossionsbeanspruchung durch heißes destilliertes Wasser nicht festzustellen war. Die in Methanol erhaltenen Korrosions-Zeitfestigkeitswerte entsprechen im wesentlichen den an den entsprechenden gewalzten Legierungen gewonnenen Ergebnissen, jedoch tritt unter der Korrosionswirkung des heißen Wassers in beiden Fällen ein vorher nicht festgestellter, starker Festigkeitsabfall ein.

Zahlentafel 8. Biegewechselfestigkeit der Versuchswerkstoffe in Luft, heißem Wasser und heißem Methanol (bezogen auf eine Lastwechselzahl von 10^7).

Nr.	Biegewechselfestigkeit				
	in Luft	in dest. Wasser von 90 bis 95°		in Methanol von 60 bis 62°	
	σ_{WB} kg/mm²	σ_{WB} kg/mm²	% Abfall gegen σ_{WB} in Luft	σ_{WB} kg/mm²	% Abfall gegen σ_{WB} in Luft
1	**15,8**	**9,6**	37,3	**13,1**	14,1
2	**19,2**	**11,9**	38,0	**14,1**	26,6
3	**13,6**	**11,7**	14,0	**12,2**	10,3
4	**12,7**	**11,1**	12,6	**7,3**	42,5
5	**15,1**	—	—	**10,3**	31,8
6	**14,1**	**12,7**	10,0	**7,6**	46,0
7	**16,1**	**8,9**	44,6	**9,9**	38,5
8	**17,7**	**15,7**	11,3	**8,3**	53,0
9	**15,8**	**9,7**	38,6	**8,4**	46,9
10	**17,6**	**15,9**	9,7	**9,5**	46,0
11	**16,3**	**12,8**	21,4	**8,3**	49,0
12	**19,0**	**13,4**	29,4	**8,3**	56,0
13	**19,6**	**17,7**	9,7	**10,7**	45,5

Eine Erklärung hierfür kann — wenigstens für Legierung 9 mit dem höheren Magnesiumgehalt — auf Grund der beim Versuch eingetretenen Gefügeveränderungen gegeben werden. Während die mit der Einwirkung des heißen Korrosionsmittel zwangläufig verbundene Temperaturerhöhung nach vierzehntägiger Versuchsdurchführung bei 60 bis 63° keine merkliche Gefügeveränderung verursacht, setzt bei der höheren Temperatur von etwa 90° eine Ausscheidung der β-Kristallart auf den Korngrenzen ein unter Ausbildung eines zusammenhängenden Ausscheidungsnetzwerks, wie Bild 9 erkennen läßt. Damit nimmt aber die Neigung zu Spannungskorrosionsanrissen erfahrungsgemäß stark zu. Da ferner bei der gleichen, jedoch im Walzzustand untersuchten Legierung 8 eine derartig ausgeprägte Gefügeveränderung nicht festzustellen war, erscheint der Schluß berechtigt, daß das unterschiedliche Verhalten der beiden Werkstoffzustände mit einer geringeren Anlaßbeständigkeit der gepreßten Legierung in Zusammenhang steht. Das frühzeitige Versagen der gepreßten Legierungen 9 geht auf die Ausbildung von Spannungskorrosionsanrissen während des Versuchs zurück, die infolge Kerbwirkung die Korrosionsermüdungsfestigkeit stark vermindern müssen.

Die umfangreichen Korrosionsermüdungsversuche an den verschiedensten Al-Mg-Legierungen lassen erkennen, daß der Spannungskorrosionsbeständigkeit des Werkstoffs eine große Bedeutung zukommt. Der trotz erhöhter Versuchstemperatur und der Einwirkung von destilliertem Wasser nur geringfügige Abfall um 9,7% für die Legierungen 10 und 13 wird nur dadurch erzielt, daß der Gefügezustand dieser Werkstoffe vollständig spannungskorrosionsunempfindlich ist.

Bezüglich der sonstigen in Zahlentafel 3 und Bild 7 mitgeteilten Versuchsergebnisse, sei schließlich noch darauf hin-

gewiesen, daß innerhalb der Gruppe der Al-Cu-Mg-Legierungen der Werkstoff 2 mit höheren Mg- und Mn-Gehalten bei Prüfung in heißem Methanol einen erheblich stärkeren Abfall der Korrosionszeitfestigkeit erleidet als Legierung 1. Bei der warmausgehärteten Legierung 3 verändert sich unter der Korrosionseinwirkung des heißen destillierten Wassers der in Luft gemessene Dauerfestigkeitswert von 13,6 kg/mm² nur um 14%, während bei den kaltausgelagerten Al-Cu-Mg-Legierungen 1 und 2 unter denselben Prüfbedingungen eine weitaus stärkere Verringerung von 37 bis 38% festzustellen ist. Bei der Al-Mg-Si-Legierung 4 bewirkt der Korrosionsangriff des heißen Methanols, verglichen mit heißem Wasser, eine etwa 3,5mal stärkere Verringerung der Korrosionsermüdungsgrenze. Infolge ihres höheren Magnesiumgehaltes ähnelt das Verhalten der Legierung 5 auf Al-Zn-Mg-Basis bei Prüfung in heißem Methanol dem der Al-Mg-Legierungen.

IV. Folgerungen.

Wird an den Werkstoff die Forderung hoher statischer Festigkeit und hoher Dauerfestigkeit gestellt bei möglichst geringerer Beeinflussung durch die Einwirkung des heißen Korrosionsmittels, so ist auf Grund der vorliegenden Versuchsergebnisse festzustellen, daß bei Verwendung von heißem, wasserfreiem Methanol mit Legierungen der Gattung Al-Cu-Mg im kaltausgelagerten Behandlungszustand die besten Werte erzielt werden; bei Verwendung von heißem Wasser ist dagegen die Legierungsgattung Al-Mg mit und ohne Zinkzusatz erheblich überlegen. Diese Überlegenheit macht sich besonders dann auffallend bemerkbar, wenn durch entsprechende Maßnahmen bei der Herstellung des Halbzeugs ein anlaßbeständiger Gefügezustand angestrebt wird.

Die Verfasser danken Herrn Ing. J. Held für die gewissenhafte und verständnisvolle Durchführung der langwierigen Versuchsreihen.

V. Zusammenfassung.

Für eine größere Anzahl von gewalzten und gepreßten Aluminiumlegierungen wird die Korrosionsermüdungsgrenze, bezogen auf 10 Mill. Lastwechsel, bei umlaufender Biegebeanspruchung in destilliertem Wasser von 90 bis 95° und wasserfreiem Methanol von 60 bis 63° festgestellt. Zum Vergleich wurde außerdem die Biegedauerfestigkeit in Luft gemessen. Der bemerkenswerte Unterschied im Korrosionsermüdungsverhalten der beiden technisch bedeutsamen Legierungsgruppen Al-Cu-Mg und Al-Mg wird eingehender dargelegt und hierbei auf die Bedeutung der Spannungskorrosionsbeständigkeit für Al-Mg-Legierung hingewiesen. Als bemerkenswertes Ergebnis ergab sich aus der Untersuchung die Feststellung, daß bei Korrosionsbeanspruchung in heißem Wasser Al-Mg-Legierungen mit großer, heute erreichbarer Anlaß- und Spannungskorrosionsbeständigkeit den Vorzug verdienen. In heißem, wasserfreiem Methanol verhalten sich jedoch die bekannten Al-Cu-Mg-Legierungen am günstigsten.

Mathematik für Ingenieure und Techniker

Ein neues Lehrbuch
von Richard Doerfling, Ingenieur

533 Seiten, 290 Abbildungen. 1940. In Leinen RM. 9.60

Seine Hauptvorzüge:

1. Es werden nur die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra und der Elementargeometrie vorausgesetzt.

2. Die Darstellung beschränkt sich nicht auf die Differential- und Integralrechnung, sondern bezieht auch die Elementarmathematik, Determinanten und Hyperbelfunktionen, Fouriersche Reihen ein, gibt außerdem eine Einführung in die Differentialgleichungen und Vektoranalysis.

3. Das Buch setzt so wenig wie möglich voraus und bemüht sich um größte Einfachheit bei allen Entwicklungen.

4. Es ist besonders geeignet für alle Leser, die keine besondere Veranlagung für Mathematik haben.

Inhaltsverzeichnis

A. Arithmetik und Algebra.

§ 1. Potenzen.
§ 2. Binomischer Satz für ganze positive Exponenten.
§ 3. Binomischer Satz für die Exponenten $-n, \frac{n}{m}, -\frac{n}{m}$.
§ 4. Wurzeln.
§ 5. Imaginäre und komplexe Zahlen.
§ 6. Logarithmen.
§ 7. Komplexionslehre.
§ 8. Determinanten.
§ 9. Gleichungen ersten Grades. Das Eliminationsverfahren von Gauß. Verhältnisgleichungen.
§ 10. Gleichungen zweiten Grades. Exponential- und logarithmische Gleichungen.
§ 11. Gleichungen dritten und höheren Grades. Das Divisionsverfahren nach Horner. Numerische Gleichungen. Algebraische Lösung kubischer Gleichungen. Algebraische Lösung biquadratischer Gleichungen.
§ 12. Arithmetische Reihen.
§ 13. Höhere arithmetische Reihen.
§ 14. Geometrische Reihen.
§ 15. Zinseszins- und Rentenrechnung.
§ 16. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

B. Elementargeometrie.

§ 17. Ähnliche Dreiecke und proportionale Strecken.
§ 18. Flächeninhalt ebener Figuren.
§ 19. Schwerpunkte von Linien und Flächen.
§ 20. Oberflächen- und Rauminhalt von Körpern.

C. Trigonometrie.

§ 21. Winkel- und Kreisfunktionen.
§ 22. Berechnung ebener Dreiecke.
§ 23. Umformung trigonometrischer Ausdrücke.
§ 24. Umformung durch komplexe Zahlen.
§ 25. Berechnung sphärischer Dreiecke.

D. Analytische Geometrie.

§ 26. Koordinaten und grundlegende Methoden. 1. Einleitendes. 2. Parallelkoordinaten der Ebene. 3. Inverse Funktionen und Funktionskurven. 4. Einfache Gleichungen ebener Gebilde. 5. Die Gleichungen der Kegelschnittkurven. 6. Die Zykloiden oder Rollkurven. 7. Polarkoordinaten der Ebene. 8. Rechtwinklige Parallelkoordinaten des Raumes. 9. Elemente im rechtwinkligen System des Raumes. 10. Polarkoordinaten des Raumes.

§ 27. Transformation der Koordinaten. 1. Einleitendes. 2. Translation eines Parallelsystems der Ebene. 3. Rotation eines Cartesischen Systems um den Ursprung. 4. Allgemeine Transformation rechtwinkliger Koordinaten. 5. Rechtwinklige und Polarkoordinaten. 6. Translation rechtwinkliger Koordinaten des Raumes. 7. Allgemeine Transformation rechtwinkliger Raumkoordinaten.

§ 28. Die Gerade und die Gleichung ersten Grades. 1. Einleitendes. 2. Segmentgleichung der Geraden. 3. Normalgleichung der Geraden. 4. Geradenbüschel, bestimmt durch einen Punkt. 5. Die Gerade durch zwei Punkte. 6. Teilungsverhältnis in der Geraden. 7. Abstand eines Punktes von einer Geraden. 8. Schnittpunkt und Winkel zweier Geraden. 9. Gerade bestimmt durch Punkt und Richtung. 10. Abstand zweier Parallelen. 11. Geradenbüschel bestimmt durch zwei Gerade. 12. Teilungsverhältnis im Geradenbüschel. 13. Wiederholung einiger Aufgaben mit Determinanten.

§ 29. Die Gleichungen und die Linien zweiten Grades. 1. Kreisgleichungen. 2. Der Kreis durch drei Punkte. 3. Der Kreis und die Gerade. 4. Die Gleichungen zweier Kreise. 5. Die Gleichung der Tangente des Kreises. 6. Ellipse, Parabel und Hyperbel. 7. Mittelpunktgleichungen der Ellipse und Hyperbel. 8. Spezielle Definition für Ellipse und Hyperbel. 9. Diskussion der Ellipsen-

gleichungen. 10. Sehnen und konjugierte Durchmesser der Ellipse. 11. Gleichung der Ellipsentangente. 12. Diskussion der Hyperbelgleichungen. 13. Die Asymtotengleichung der Hyperbel. 14. Sehnen, Tangenten und konjugierte Durchmesser der Hyperbel. 15. Diskussion der Parabelgleichungen. 16. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Kegelschnitte.

§ 30. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades. 1. Einleitendes. 2. Erste Transformation der allgemeinen Gleichung. 3. Zweite Transformation der allgemeinen Gleichung. 4. Weitere Berechnungen und Kriterium. 5. Zahlenbeispiel. 6. Noch ein besonderer Fall der Gleichung zweiten Grades. 7. Die Linien zweiten Grades durch fünf Punkte.

§ 31. Ebene, Gerade und Punkt im Raume. 1. Einleitendes. 2. Die Normalgleichung der Ebene. 3. Die Segmentgleichung der Ebene. 4. Die Ebene durch drei gegebene Punkte. 5. Abstand eines Punktes von einer Ebene. 6. Winkel zweier Ebenen. 7. Ebenenbüschel bestimmt durch zwei Ebenen. 8. Teilungsverhältnis im Ebenenbüschel. 9. Die Gerade als Schnitt zweier Ebenen. 10. Geradenbündel und parametr. Gleichung der Geraden. 11. Gerade durch zwei Punkte. 12. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene. 13. Ebene durch eine Gerade und einen Punkt. 14. Winkel einer Geraden mit einer Ebene. 15. Zwei Gerade im Raume.

§ 32. Krumme Flächen. 1. Einleitendes. 2. Flächengleichungen. 3. Krumme Linien im Raume. 4. Rotationsflächen. 5. Affine Transformationen. 6. Konoidflächen. 7. Hyperbolisches Paraboloid.

E. Differential- und Integralrechnung.

§ 33. Einleitende Betrachtungen und Anknüpfungspunkte. Sehr große und sehr kleine Zahlen. Die Ordnungen des Unendlichkleinen. Differentialquotient und Integral.

§ 34. Grundlehren, Methoden und Formeln. 1. Wiederholung mit Hinweis auf Anwendungen. 2. Allgemeine Differenzierungsregeln; x^n und ax^n 3. Tangentenbestimmungen. 4. Differentialformeln für Summe, Produkt und Quotient. 5. Die Potenzfunktion $y = x^n$. 6. Maxima und Minima der Funktionen. 7. Reihen von Maclaurin und Taylor. 8. Geometrische Bedeutung von $y=f(x)$ und $\frac{dy}{dx}=f'(x)$. 9. Bestimmte und unbestimmte Integrale. 10. Integralformeln für Summe und Potenz mit Beispielen. 11. Die wichtige Funktion e^x. 12. Die Integrale $\int a^x dx$, $\int e^x dx$, $\int \frac{dx}{x}$ und logarithm. Reihen. 13. Die wichtige Funktion $\sin x$. 14. Die Reduktionsformel: $\int u dv = uv - \int v du$ 15. Ermittlung der Werte unbestimmter Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, usw. 16. Quadratur der Kurven. 17. Rektifikation der Kurven. 18. Kurvenkrümmung und Krümmungsradius. 19. Allgemeine Wiederholung in einem Beispiel. 20. Die Hyperbelfunktionen. 21. Differential- und Integralformeln der Hyperbelfunktionen.

§ 35. Fortsetzung der Differentialrechnung. 1. Partielle und totale Differenzierung von $f(x, y)$. 2. Endlichkeit und Stetigkeit der Funktionen. 3. Ableitung nicht entwickelter Funktionen. 4. Funktionen der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sowie $y = \varphi[\psi(x)]$. 5. Singuläre Punkte einer Kurve. 6. Einhüllende Kurven und Umhüllungslinien. 7. Maxima und Minima von $z = f(x, y)$. Kürzester Abstand zweier Geraden im Raume.

§ 36. Fortsetzung der Integralrechnung. 1. Integration rationeller Brüche durch Zerlegung in Teilbrüche. 2. Integration irrationaler Differentiale. 3. Integration transzendenter Differentiale. 4. Einfache und mehrfache bestimmte Integrale. Rektifikation der Ellipse. Elliptisches Integral zweiter Gattung. 5. Anwendung von Polarkoordinaten. 6. Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern. 7. Fouriersche Reihen mit Beispielen. Addition von Sinuswellen. Gerade und ungerade Funktionen.

§ 37. Fortsetzung der Anwendungen. 1. Gradlinige Bewegung eines Punktes. 2. Trägheit, Kraft, Masse, Wurfbewegung, freier Fall. 3. Arbeit, kinetische Energie, Bewegungsgröße, Impuls. 4. Krummlinige Bewegung, Zentripetalbeschl., Fliehkraft. 5. Statische Momente, Schwerpunktbestimmungen. 6. Trägheitsmomente. Trägheitsellipse, Trägheitsellipsoid. 7. Parallele Kräfte, graphische Integration. Trägheitsmoment einer unregelmäßigen Figur.

F. Differentialgleichungen.

§ 38. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 1. Geometrische Bedeutung der Differentialgleichung 1. Ordnung. 2. Trennung der Variablen. 3. Totale Differentialgleichung und integrierender Faktor. 4. Substitution neuer Variablen. Lineare Differentialgleichungen. 5. Differentialgleichungen verschiedener Grade. Singulares Integral einer Differentialgleichung. 6. Differentialgleichungen 2. Ordnung. 7. Weitere Beispiele von Differentialgleichungen 2. Ordnung. Bewegung eines Massenpunktes durch Anziehungszentrum. Pendelschwingungen. Genauere Pendelformel. Elliptisches Integral erster Gattung. Bewegung eines Massenpunktes durch Abstoßungszentrum. Catenaria oder Kettenlinie. Kurven mit Krümmungshalbmessern proport. der Normalen. 8. Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten. Gedämpfte Schwingungen. 9. Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit veränderl. Koeffizienten. Substitution von Reihen. 10. Vollständige lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. 11. Homogene Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit konst. Koeffizienten.

§ 39. Partielle Differentialgleichungen. 1. Geometrische Bedeutung der partiellen Differentialgleichungen. 2. Die Integration linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. 3. Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. Zwei besondere Gleichungen. Das allgemeine Integral einer part. Differentialgleichung 2. Ordnung. 4. Ein ausführliches Beispiel aus der theoretischen Physik.

G. Vektoranalysis.

§ 40. Die Elemente und Rechnungsregeln. 1. Geschichtliches. 2. Skalare, Vektoren und vektorielle Addition. 3. Beispiele aus der Bewegungslehre. 4. Richtungszahlen und vektorielle Multiplikation. Skalares oder inneres Produkt. Vektorielles oder äußeres Produkt. 5. Summen von Vektorprodukten und Zerlegungen.

§ 41. Erweiterung der Theorie mit Anwendungen. 1. Potential, Kraftfelder und Gradient. 2. Kraftlinien, Kraftröhren, Feldstärke. Die Darstellung des elektrischen Feldes. 3. Divergenz und Rotation; div grad, rot grad, div rot. Vektorielle Differentialquotienten höherer Ordnung. 4. Integralsatz von Stokes und die Rotation.

Determinanten

Von Prof. Dr. Heinrich Dörrie, Wiesbaden

216 Seiten. Gr.-8°. 1940. In Leinen RM. 11.—

Aus dem Vorwort:

In allen Zeiten ist es das Bestreben der Mathematiker gewesen, zur Lösung ihrer Probleme passende Hilfsmittel zu schaffen, die ihre oft mühsame Arbeit erleichtern können.

Eins der wichtigsten und wertvollsten dieser Hilfsmittel ist die Lehre von den Determinanten.

Die Vorzüge dieses Rechenverfahrens sind in der Tat erstaunlich: Die Leichtigkeit seiner Handhabung läßt nichts zu wünschen übrig. Die mit ihm verbundenen Beweise sind fast ausnahmslos elementar. Die zum Ziele führenden Wege sind im Gegensatz zu anderen zweckdienlichen Methoden angenehm und kurz, oft von faszinierender Kürze. Trotz dieser unzweifelhaft bestehenden Vorzüge ist die Determinantenlehre immer noch weit davon entfernt, Gemeingut aller mathematisch interessierten Kreise zu sein, gilt sie sogar vielfach noch als trocken.

Dieses Vorurteil zu entkräften, ist eine der beiden Aufgaben dieses Buches; die andere besteht darin, den Studierenden der Mathematik sowie jeden, der für die Schönheit mathematischen Denkens empfänglich ist, so bequem wie möglich mit der Wirksamkeit der Determinantenmethode vertraut zu machen und ihn zu eigener Arbeit auf diesem Felde anzuregen.

Dieses erstrebenswerte Ziel suchte der Verfasser durch Beachtung der folgenden drei Gesichtspunkte zu erreichen:

1. Die theoretischen Entwicklungen wurden, um nicht von vornherein durch zu starken Umfang abschreckend zu wirken, in mäßigen Grenzen gehalten, ohne jedoch wesentliche Dinge auszulassen.

2. Auf einfache und übersichtliche Darstellung der Beweise wurde besonderer Wert gelegt.

3. Zahlreiche Anwendungen — sie füllen mehr als die Hälfte des Buches — setzen Notwendigkeit und Nutzen des Determinantenkalküls in helles Licht.

Die Auswahl der Anwendungen erfolgte nach dem Grundsatz, ein möglichst vielseitiges und abwechslungsreiches Bild von der Kraft der Determinantenmethode zu geben.

Dem Zaudernden aber, dem Ungläubigen ist zu raten, sich durch den Vergleich mit den langatmigen anderen Methoden, wo die Wege so oft unübersichtlich, die Schwierigkeiten bisweilen unüberwindlich sind, von der Eleganz und Überlegenheit des Determinantenverfahrens zu überzeugen. Er wird zur Erkenntnis kommen, daß es trotz Euklid Königswege in der Mathematik gibt.

Inhaltsverzeichnis

Rechenverfahren der Elektrotechnik

Von Prof. Dr.-Ing. Günther Oberdorfer

377 Seiten, 123 Abbildungen. Gr.-8°. 1940. In Leinen RM. 18.50

Aus dem Vorwort:

Was meiner Ansicht nach im einschlägigen Schrifttum bisher fehlte, war ein ausgesprochen für den Elektroingenieur geschriebenes mathematisches Buch, das möglichst alle für ihn praktisch in Betracht kommenden Verfahren enthält, sich — unter Preisgabe vielleicht von manchen exakten Beweisführungen — bei jedem Verfahren aber so weit bescheidet, daß dessen Wesen und Brauchbarkeit leicht erkannt und das Verfahren selbst ohne weiteres Studium auf einfachere Fälle angewendet werden kann. Damit muß es möglich sein, ohne große Schwierigkeiten einen gediegenen Überblick über das ganze in Frage kommende Gebiet zu erhalten und im Bedarfsfalle sofort den richtigen Weg zu spezieller Ausbildung zu finden.
Schwieriger war es vielleicht, den Umfang der einzelnen Verfahren in Ansehung ihrer Bedeutung für den Elektrotechniker und unter Berücksichtigung ihrer Schwierigkeiten zu begrenzen. Ich habe mich bemüht, dies so weit zu tun, daß der Gesamtumfang dieses zweiten Bandes in üblichen Grenzen geblieben ist. Demgemäß glaubte ich, mich im ersten Teil, der sich mit den elementaren Rechnungen, der Differential- und Integralrechnung und den Differentialgleichungen befaßt, möglichst kurz halten zu können, da diese Verfahren ja ausführlich in den mittleren und höheren Schulen besprochen werden. Auch die komplexe Rechnung und die räumliche Vektorrechnung habe ich auf das den Elektroingenieur interessierende Maß beschränkt, wenn auch hier die Grundlagen etwas ausführlicher behandelt sind.
In einem zweiten Teil habe ich die mit der Elektrotechnik bevorzugt in Verbindung stehenden Verfahren gesammelt. Hier wird die bereits im ersten Band verwendete komplexe Zeitvektorrechnung mit ihren Erweiterungen der Ortskurventheorie und symmetrischen Komponentenrechnung systematisch besprochen. Es finden ferner die Fouriersche Zerlegung, die Heavisidesche Operatorenrechnung und die neuerdings stark an Bedeutung gewinnende Laplace-Transformation ihren Platz. Auch der Matrizenrechnung (Tensorrechnung), die in Amerika bereits vielfach in Gebrauch steht und die in nächster Zeit sicherlich sehr stark an Bedeutung gewinnen wird, ist ein längeres Kapitel eingeräumt worden.
Im dritten Teil habe ich endlich einige ausschließlich in der elektrotechnischen Anwendung bestehende Theorien aufgenommen, die Zweipol- und Vierpoltheorie, eine Einführung in die Theorie der Kettenleiter und die Anwendung der konformen Abbildung in der Elektrostatik. Wegen ihrer allgemeinen Bedeutung für die Stark- und Schwachstromtechnik nimmt dabei die Vierpoltheorie den größten Platz in Anspruch. Eine Bevorzugung einer der beiden Zweige der Elektrotechnik ist aber nicht eingetreten.

Inhaltsverzeichnis

C. Geometrische Darstellung. 1. Kartesische Koordinaten. a) Zweidimensionale Darstellung, b) Dreidimensionale Darstellung. 2. Polarkoordinaten. 3. Weitere räumliche Koordinatensysteme. a) Zylinderkoordinaten, b) Kugelkoordinaten.

D. Komplexe Rechnung. 1. Grundlagen der komplexen Rechnung. 2. Grundrechenregeln für komplexe Zahlen. a) Addition und Subtraktion, b) Multiplikation und Division, c) Potenzierung und Radizierung. 3. Funktionen einer komplexen Größe. a) Allgemeine Grundlagen, b) Analytische Funktionen, c) Konforme Abbildung, d) Integration im Komplexen, e) Potenzreihen, f) Singularitäten analytischer Funktionen.

E. Einige spezielle Funktionen und Integrale. 1. Parameterintegrale. 2. Gammafunktion. 3. Elliptische Integrale. 4. Besselsche Funktionen. 5. Laplacesche Integrale. 6. Fouriersche Integrale.

F. Operatorenrechnung.

G. Vektorrechnung. 1. Allgemeines. 2. Vektoralgebra. a) Addition und Subtraktion, b) Multiplikation, c) Ortsvektoren. 3. Vektoranalysis. a) Funktionen skalarer Veränderlicher, b) Ortsfunktionen, α) Der Gradient, β) Die Divergenz, γ) Der Rotor, δ) Einige Hilfssätze, ε) Zweite Ableitungen, ζ) Sprungflächen, η) Anwendungen in der Feldtheorie.

H. Einige Rechenhilfsmittel. 1. Nomographie. a) Funktionsleiter, b) Fluchtlinientafeln, c) Einige weitere Bemerkungen. 2. Graphische Verfahren. 3. Einige weitere Hilfsverfahren.

II. Mit der Elektrotechnik in bevorzugtem Maße zusammenhängende Rechenverfahren

A. Die komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik. 1. Zusammenstellung der wichtigsten Wechselstromgrößen und Richtungsregeln. 2. Die Grundgesetze der komplexen Wechselstromtechnik.

B. Ortskurventheorie.

C. Symmetrische Komponentenrechnung.

D. Fouriersche Reihenentwicklung.

E. Darstellung durch Bahnkurven.

F. Matrizen- und Tensorrechnung. 1. Definition und Grundoperationen. 2. Die zwei Grundprinzipien der Matrizenrechnung. 3. Einige bevorzugte Anwendungsgebiete. a) Netztransformation, b) Symmetrische Komponenten, c) Fehlerberechnung in Drehstromanlagen.

G. Heavisidesche Operatorenrechnung und Laplace-Transformation. 1. Heavisidesche Operatorenrechnung. a) Die Grundlagen des Verfahrens, b) Andere Darstellungen und beliebiger Erregerverlauf. 2. Laplace-Transformation.

III. Selbständige Theorien der Elektrotechnik

A. Die Zweipoltheorie.

B. Die Vierpoltheorie. 1. Definitionen. 2. Passive, lineare Vierpole, a) Grundgleichungen, α) Die Vierpolgleichungen, β) Vierpole mit eindeutigen Kopplungswiderständen, γ) Leerlauf und Kurzschluß, δ) Ermittlung der Grundkonstanten, ε) Kernwiderstand, Kernleitwert, Dualismus, ζ) Der Wellenwiderstand, b) Einige weitere Kenngrößen, α) Der Eingangswiderstand, β) Übersetzungsverhältnisse, γ) Kopplung, c) Ausgezeichnete Belastungsfälle, α) Belastung mit dem Wellenwiderstand, β) Belastung mit dem Ausgangswellenwiderstand, d) Der lineare, symmetrische Vierpol, e) Zusammenstellung der Vierpolkenngrößen, f) Ersatzschaltungen, α) Die T-Schaltung, β) Die Π-Schaltung, γ) Die X-Schaltung, δ) Umwandlungen der Ersatzschaltungen, g) Betriebseigenschaften der Ersatzschaltungen, h) Leistungsdiagramme.

C. Homogene Kettenleiter. 1. Allgemeines. 2. Reaktanzvierpole und Siebketten.

D. Die konforme Abbildung in der Elektrostatik. 1. Die Grundgleichungen der konformen Abbildung. 2. Abbildungstheoretische Deutung einfacher analytischer Funktionen. a) Ganze, lineare Funktionen, b) Die Reziprokfunktion, c) Die Funktion $w = z + \frac{1}{z}$ d) Linear gebrochene Funktionen, e) Die Funktion $w = az^m + b$, f) Die Funktion $w = \ln z$. 3. Abbildung der oberen Halbebene auf einen konvexen, polygonalen Bereich. 4. Anwendungsbeispiel.

Funktionentafeln.

Sachverzeichnis.

Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften

Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie

Von W. Nernst und A. Schönflies † Elfte, von W. Nernst und Dr. W. Orthmann neubeabeitete Auflage. 492 Seiten, 108 Abbildungen. Gr.-8°. 1931. In Leinen gebunden RM. 20.—

Inhaltsverzeichnis

I. Die Elemente der analytischen Geometrie

1. Die graphische Darstellung. 2. Der Koordinatenbegriff. 3. Das Grundprinzip der analytischen Geometrie. 4. Die Gleichung des Kreises. 5. Die Gleichung der Parabel. 6. Die Gleichung der geraden Linie. 7. Eigenart der durch gerade Linien dargestellten Gesetze. 8. Aufgaben über die gerade Linie. 9. Zwei gerade Linien. 10. Die Gleichung der Ellipse. 11. Aufgaben über die Ellipse. Die Direktrix. 12. Die Gleichung der Hyperbel. 13. Die Direktrix der Hyperbel. 14. Die Transformation der Koordinaten. 15. Die gleichseitige Hyperbel und ihre Asymptotengleichung. 16. Die Bewegung eines Punktes. 17. Die Gleichung von van der Waals. 18. Die Gleichung der Dissoziationsisotherme. 19. Die Koexistenz verschiedener Aggregatzustände. 20. Graphische Darstellung eines Kreisprozesses. 21. Die Polarkoordinaten. 22. Rechtwinklige räumliche Koordinaten. 23. Flächen und Kurven in räumlichen Koordinaten. 24. Vektoren und ihre Zusammensetzung. 25. Analytische Darstellung der Vektorenzusammensetzung.

II. Die Grundbegriffe der Differentialrechnung

1. Die Prinzipien der höheren Mathematik und die naturwissenschaftliche Vorstellungsart. 2. Die Tangente der Parabel. 3. Der freie Fall. 4. Die Wärmeausdehnung eines Stabes. 5. Grenzwert und Differentialquotient. 6. Die physikalische Bedeutung des Differentialquotienten. 7. Der Funktionsbegriff. 8. Allgemeine Vorschrift für die Bildung des Differentialquotienten.

III. Differentiation der einfachen Funktionen

1. Der binomische Lehrsatz. 2. Der Differentialquotient von x^x. 3. Die trigonometrischen Funktionen. 4. Der Differentialquotient von $\sin tx$ und $\cos tx$. 5. Der Differentialquotient von Summe und Differenz. 6. Der Differentialquotient des Produkts. 7. Der Differentialquotient des Quotienten. 8. Der Logarithmus und sein Differentialquotient. 9. Das Differential. 10. Die Exponentialfunktion. 11. Die Kreisfunktionen. 12. Das Differential einer Potenz für beliebige Exponenten. 13. Differentiation der Funktionen von Funktionen. 14. Stetigkeit und Unstetigkeit.

IV. Die Integralrechnung

1. Die Aufgabe der Integralrechnung. 2. Der Integralbegriff. 3. Die Grundformeln der Integralrechnung. 4. Die geometrische und physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten. 5. Integration von Summe und Differenz. 6. Die Methode der teilweisen Integration. 7. Integration durch Einführung neuer Variablen. 8. Zerlegung in Partialbrüche. 9. Integration irrationaler Differentiale.

V. Anwendungen der Integralrechnung

1. Anziehung eines Stabes. 2. Hypsometrische Formel. 3. Erkaltungsgesetz von Newton. 4. Maximaltemperatur einer Flamme. 5. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines idealen Gases. 6. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines stark komprimierten Gases. 7. Arbeitsleistung bei isothermer Ausdehnung eines sich dissoziierenden Gases. 8. Berechnung des Reaktionsverlaufes vollständig verlaufender Reaktionen. 9. Verlauf unvollständiger Reaktionen. 10. Auflösungsgeschwindigkeit fester Körper.

VI. Bestimmte Integrale

1. Die Fläche der Parabel. 2. Die Fläche einer Kurve. 3. Das bestimmte Integral. 4. Die Fläche der Ellipse und Hyperbel. 5. Der Inhalt der Kugel und des Rotationsparaboloids. 6. Rechenregeln und Sätze für bestimmte Integrale. 7. Mehrfache Integrale. 8. Integrale in Polarkoordinaten.

VII. Die höheren Differentialquotienten und die Funktionen mehrerer Variablen

1. Definition der höheren Differentialquotienten oder Ableitungen. 2. Die höheren Ableitungen der einfachsten Funktionen. 3. Physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung. 4. Geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten. 5. Die höheren Differentiale. 6. Die partiellen Differentialquotienten und das totale Differential. 7. Differentiation von Funktionen, die aus mehreren Funktionen einer Variablen zusammengesetzt sind. 8. Der planare und kubische Ausdehnungskoeffizient. 9. Die höheren partiellen Differentialquotienten. 10. Differentiation unentwickelter Funktionen. 11. Die Transformation der unabhängigen Variablen. 12. Die Brennpunktseigenschaften der Parabel. 13. Die Brennpunktseigenschaften der Ellipse. 14. Die Asymptoten der Hyperbel. 15. Die Zustandsgleichung.

VIII. Unendliche Reihen und Taylorscher Satz

1. Beispiele unendlicher Reihen. 2. Der Konvergenzbegriff. 3. Die geometrische Reihe. 4. Allgemeine Sätze über Konvergenz der Reihen. 5. Die Reihe von Mac Laurin. 6. Die Potenzreihen von e^n, $\sin x$ und $\cos x$. 7. Die Reihe von Taylor. 7a. Das Restglied der Taylorschen und Mac Laurinschen Reihe. 8. Die logarithmische Reihe. 9. Die binomische Reihe. 10. Die Potenzreihe für $\operatorname{tg} x$. 11. Integration durch Reihen. 12. Die gliedweise Differentiation der Potenzreihen. 13. Ermittelung unbestimmter Werte. 14. Rechnen mit kleinen Größen.

IX. Theorie der Maxima und Minima

1. Bedingungen für ein Maximum oder Minimum. 2. Die Wendepunkte der Kurven. 3. Das Reflexionsgesetz. 4. Das Brechungsgesetz. 5. Das Minimum der Wärmeintensität. 6. Vermischte Beispiele. 7. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Variablen. 8. Fehlerrechnung und Fehlergesetz von Gauß.

X. Auflösung numerischer Gleichungen

1. Graphische Deutung der Gleichungen. 2. Die Newtonsche Annäherungsmethode. 3. Trennung der Wurzeln. 4. Zahl der reellen Wurzeln einer Gleichung. 5. Der Fundamentalsatz der Algebra. 6. Transzendente Gleichungen.

XI. Differentiation und Integration empirisch festgestellter Funktionen

1. Differentiation. 2. Integration.

XII. Beispiele aus der Mechanik und Thermodynamik

1. Geschwindigkeit. 2. Beschleunigung und kontinuierliche Kraft. 3. Bewegung eines Massenpunktes mit Reibung. — Theorie der Ionenbewegung. 4. Ungedämpfte Schwingungen. 5. Gedämpfte Schwingungen. 6. Elektrische Schwingungen. 7. Berechnung der mittleren Weglänge der Gasmoleküle nach Clausius. 8. Das Verteilungsgesetz von Maxwell. 9. Anwendungen des ersten Wärmesatzes. Änderung von Reaktionswärmen mit der Temperatur. 10. Verdünnungswärme der Schwefelsäure. 11. Analytische Formulierung des zweiten Wärmesatzes. 12. Die Formel von Clausius-Clapeyron. 13. Einfluß der Temperatur auf die chemische Affinität. 14. Der neue Wärmesatz.

XIII. Einleitung in die Theorie der Kristallgitter

1. Die kristallographischen Symmetrieelemente. 2. Punktnetze. 3. Symmetrische Punktnetze. 4. Die Punktgitter. 5. Symmetrische Punktgitter. 6. Der Aufbau der Kristallsubstanz. 7. Die Gitter von Diamant, Zinkblende und Sylvin.

XIV. Aufgaben, die auf partielle Differentialgleichungen führen

1. Allgemeine Vorbemerkungen. 2. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem Stab. 3. Das allgemeine Integral der Wärmeleitung. 4. Einige spezielle Fälle. 5. Gleichungen der Diffusion. 6. Theorie der galvanischen Polarisation.

Übungsaufgaben. Formelsammlung. Sachregister



Geist der Mathematik

Abschnitte aus der Philosophie der Arithmetik und Geometrie

Von Max Bense 173 Seiten. 1939. In Leinen RM. 4.80.

Inhalt: Das Irrationale in der Mathematik — Der Verfall der Anschauung — Mathematik und Ästhetik — Das Unendliche — Intuitionismus, Logizismus und Formalismus — Betrachtungen über den Gegenstand der Mathematik.

„Unbestechlichkeit im Denken, restlose Klarheit, die nur möglich ist, wenn ein Verfasser den Stoff souverän beherrscht, eine glänzende Darstellungsgabe gepaart mit einem hohen Wissenschaftsideal, sind die charakteristischen Züge dieser meisterlichen Leistung. Trotz meiner superlativ feindlichen Einstellung stehe ich nicht an, die Arbeit von Bense als den bisher besten Versuch, den Geist der Mathematik allgemeinverständlich darzustellen, anzusehen. Und den vielfachen Fragestellern aus dem Kreise von Statistikern und Freunden der Mathematik nach einem Buch, das eine Einführung in das mathematische Denken darstellt, kann ich nur antworten: Nimm und lies!"
Wilhelm Britzelmayr im Allgemeinen Statistischen Archiv.

Rechnung mit Operatoren

nach Oliver Heaviside. Ihre Anwendung in Technik und Physik

Von E. J. Berg Deutsche Bearbeitung von Dr.-Ing. Otto Gramisch und Dipl.-Ing. Hans Tropper 198 Seiten, 65 Abbildungen. Gr.-8°. 1932. Broschiert RM. 10.—, in Leinen RM. 12.—

Das Buch bringt in der Hauptsache Anwendungen der Heavisideschen Operatorenrechnung auf Probleme der Elektrotechnik. Die Operatorenrechnung, die auch symbolische Differentialrechnung genannt wird, gestattet die Lösung von Differentialgleichungen auf rein symbolisch-algebraischem Wege ausfindig zu machen ohne Verwendung der üblichen Lösungsmethoden. Durch Anwendung der Operatorenrechnung ergibt sich für komplizierte Probleme eine wesentliche Vereinfachung der Rechenarbeit.

Elektrotechnische Zeitschrift: Die vorliegende Bearbeitung des Buches erscheint mir als die beste Einführung in die Technik der Operatorenrechnung.

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Von Prof. Dr. Hermann Weyl 162 Seiten. RM. 6.80.

Das Erscheinen der Weylschen Abhandlung, wohl der weitaus gedankenreichsten und bisher besten Darstellung der modernen naturphilosophischen Probleme, rechtfertigt vielleicht eine solche Besinnung auf die wahrhaft philosophischen Leistungen unserer Zeit. Die Naturwissenschaften.

Nur einem Verfasser, der die drei Disziplinen des Titels in gleicher Weise beherrscht, war es möglich, diesen schweren Stoff in so mustergültig klarer und umfassender Weise zu gestalten. Chemie.

Vorlesungen über technische Mechanik

Von Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. August Föppl

Band I: Einführung in die Mechanik. 9. Auflage. 430 Seiten, 104 Abbildungen. 1938. In Leinen RM. 12.—
Band II: Graphische Statik. 8. Auflage. 416 Seiten, 209 Abbildungen. 1939. In Leinen RM. 12.—
Band III: Festigkeitslehre. 12. Auflage. 465 Seiten, 114 Abbildungen. 1940. In Leinen RM. 12.—
Band IV: Dynamik. 8. Auflage. 456 Seiten, 113 Abbildungen. 1933. In Leinen RM. 12.—

„Die Behandlung erstreckt sich in breiter Ausführung der Grundzüge auf alle Gebiete der Festigkeitslehre, die für die Technik in Betracht kommen, mit einer Gründlichkeit und Klarheit, die den Leser befähigt, nach Aneignung des Inhalts mit Erfolg die Spezialwerte dieses weiten Gebietes zu studieren. Das hierfür erforderliche mathematische Rüstzeug ist auf die Elemente der höheren Analysis beschränkt, was wesentlich zu seiner Beliebtheit in technischen Kreisen beiträgt. Zahlreiche Beispiele zeigen die Anwendung und dienen zur Vertiefung des Verständnisses."
Elektrotechnische Zeitschrift

„Die Vorzüge der ‚Vorlesungen', die flüssige lebendige Darstellung, das klare Herausarbeiten des Wesentlichen und weitere Gesichtspunkte vor Beginn der mathematischen Formulierungen, die Erziehung zur Selbständigkeit, die geschickte Einführung der mathematisch-geometrischen Hilfsmittel, Beispiele zu ihrer Einübung, Gebrauch der Vektorrechnung, technische Anwendungen, sind bekannt und anerkannt." Zeitschrift des VDI

Drang und Zwang **Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure**

Von Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. Aug. Föppl und Prof. Dr. Ludwig Föppl 2. Auflage

Band I. 370 Seiten, 71 Abbildungen. 1924. In Leinen RM. 15.70
Band II. 390 Seiten, 79 Abbildungen. 1928. In Leinen RM. 15.70

„Der Ingenieur, der sich über den gegenwärtigen Stand der Festigkeitslehre ein Urteil bilden will, findet in dem Föpplschen Buch einen ausgezeichneten Führer. Die zum Teil recht schwierigen Probleme werden auch dem mathematisch weniger geschulten Leser in einer klaren und anschaulichen Weise verständlich gemacht." Beton und Eisen





Luftfahrt-Forschung

BAND XIX

1942

Herausgegeben von der Zentrale für
wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof
Verlag von R. Oldenbourg, München-Berlin

INHALTS-ÜBERSICHT

Verfasserverzeichnis.

Sachverzeichnis.



Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 20. Januar 1942 | Lfg. 1

Beitrag zur Frage der Beeinflussung des Abwindes durch den Schraubenstrahl.

Von A. v. Baranoff.

Bericht aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring E.V., Braunschweig.

Theoretische Berechnung desjenigen Anteils am Abwind, der von der Beeinflussung der Zirkulation durch den Schraubenstrahl herrührt. Grundlegende Annahme: Axiale Strahlgeschwindigkeit groß gegenüber der Anströmgeschwindigkeit außerhalb. Methode: Befriedigung der Strahlrandbedingungen durch gespiegelte Wirbel, Lösung der Integralgleichung für die Zirkulation durch direkten trigonometrischen Ansatz. Vergleich der Ergebnisse mit denen der Koningschen Theorie und mit einigen Meßergebnissen.

Gliederung.

I. Problemstellung.

Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit um das Problem des Abwindes hinter dem Tragflügel bei Vorhandensein eines Schraubenstrahls. Der Abwind hinter dem Flügel allein (ohne Rumpf) läßt sich rechnerisch einigermaßen gut erfassen[1]), der Strahleinfluß bereitet jedoch sehr viel mehr Schwierigkeiten, was ja auch dann sehr wohl erklärlich ist, wenn man (wie das im folgenden durchweg geschieht) von allen Zähigkeitseinflüssen und von der turbulenten Vermischung am Strahlrand noch gänzlich absieht.

Den Beitrag des Schraubenstrahls zum Abwind könnte man theoretisch in zwei Bestandteile aufspalten[2]): Der eine Bestandteil ist die direkte Schraubenstrahlströmung, wie sie ohne Vorhandensein eines den Strahl schneidenden Tragflügels gegeben ist. Es handelt sich hierbei um die Bestimmung der Ablenkung des Strahls, wie sie bei einer unsymmetrischen Anblasung der Schraube zustande kommt. Mit diesem Bestandteil wollen wir uns im folgenden nicht befassen. Der andere, uns hier allein interessierende, Bestandteil betrifft die Beeinflussung der direkten Schraubenstrahlströmung durch das Dazwischentreten des Tragflügels. Bezeichnet man diesen Abwindanteil mit Δw (in den folgenden Abschnitten wird aus einleuchtenden Gründen statt Δw einfach w geschrieben), so ist diese Größe proportional der Übergeschwindigkeit im Strahl ΔV (ΔV sei etwa der mittlere Geschwindigkeitszuwachs im Strahl in axialer Richtung), sie ist ferner im Rahmen einer linearen Theorie proportional dem Winkel β zwischen der ankommenden Schraubenstrahlströmung und der Nullauftriebsrichtung des Flügels, Bild 1, und kann mithin mit Hilfe eines dimensionslosen Beiwerts σ folgendermaßen angesetzt werden

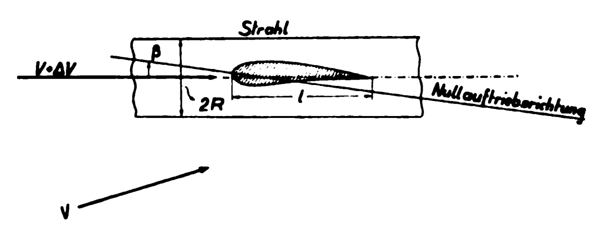


Bild 1. Tragflügel im Schraubenstrahl.

$$\Delta w = \sigma \cdot \beta \cdot \Delta V \quad \text{. . . . . (1)}$$

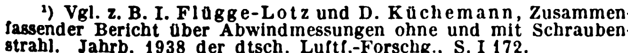
σ ist selbstverständlich eine Funktion des Orts, hängt jedoch auch vom Winkel zwischen der Außengeschwindigkeit V und der ungestörten Strahlgeschwindigkeit ab. Diese letztere Abhängigkeit soll jedoch unberücksichtigt bleiben, so daß es sich also um den Fall handelt, wo der Strahl die Richtung der Außenströmung V hat. Der Beiwert σ hängt daher (außer von den Raumkoordinaten) nur vom Verhältnis zwischen den Strahl- und den Flügelabmessungen ab. Es wird sich späterhin zeigen, daß zur Darstellung dieses Größenverhältnisses unter den noch weiter zu machenden vereinfachenden Annahmen die Zahl

$$\mu = \frac{C^* \, l}{8 \, R} \quad \text{. . . . . (2)}$$

geeignet ist, also im wesentlichen das Verhältnis zwischen Flügeltiefe l und Strahlhalbmesser R

$$\left(\text{es bedeutet } C^* = \left(\frac{d\, c_a}{d\, \alpha}\right)_{b \to \infty}\right).$$

Das allgemeine Problem, das der von einem irgendwie gearteten Strahl getroffene Tragflügel bietet, pflegt man dadurch zu vereinfachen, daß man den Strahl selbst und das Gebiet außerhalb als Gebiete einer in sich homogenen Strömung betrachtet, die durch Unstetigkeitsflächen voneinander getrennt sind. Man vermeidet auf diese Weise die sonst erforderliche Erweiterung der Prandtlschen Tragflügeltheorie auf den Fall einer inhomogenen Grundströmung und



[1]) Vgl. z. B. I. Flügge-Lotz und D. Küchemann, Zusammenfassender Bericht über Abwindmessungen ohne und mit Schraubenstrahl. Jahrb. 1938 der dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 172.

[2]) H. B. Helmbold, Untersuchungen über den Einfluß des Luftschraubenstrahls auf den Abwind und die Höhenleitwerkswirkung. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 3.

gewinnt Anschluß an die einfachere Problemgruppe, wo die Einflüsse freier Grenzen auf Tragflügel untersucht werden. Innerhalb eines jeden solchen Gebiets homogener Grundgeschwindigkeit hat man dann nach wie vor das übliche Tragflügelproblem, nur müssen an den Unstetigkeitsflächen gewisse Randbedingungen erfüllt sein. Allerdings ist auch diese Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit bisher nicht gelöst worden. Lediglich zwei extreme Fälle haben sich den vorhandenen Lösungsmethoden zugänglich erwiesen. Der erste Fall ist der eines Strahls mit nur wenig höherer Geschwindigkeit gegenüber der Anströmgeschwindigkeit ($\Delta V \ll V$), es ist der Fall der »schwach inhomogenen« Strömung (Koning[3]), Franke und Weinig[4]), Ruden[5]), Bausch[6]), Kyewski und Vandrey[7])); der zweite Fall ist der der »stark inhomogenen« bzw. der unendlich inhomogenen Strömung ($\Delta V \gg V$, bzw. $V = 0$), hierher gehört das Problem des durch einen Freistrahl hindurchgesteckten Flügels (Prandtl[8]), Stüper u. a.[9])) und das Problem des im Windkanal sich befindenden Flügels. Fälle, die zwischen den Extremen der schwach inhomogenen und der stark inhomogenen Strömung liegen, sind vielleicht überhaupt auf dem beschrittenen Weg einer Strömung mit Unstetigkeitsflächen wegen der Schwierigkeit der Grenzbedingung an den Stellen, wo der Flügel in den Strahl tritt, nicht lösbar. Es verdient noch Erwähnung, daß man, wie F. Vandrey[10]) gezeigt hat, im Fall der schwach inhomogenen Strömung den Grenzübergang zu einer stetig inhomogenen Strömung machen kann. Allerdings bedeutet die Voraussetzung der schwachen Inhomogenität, wie sie zuerst von Koning gemacht worden ist, den Verzicht auf die exakte Erfüllung der Strahlrandbedingungen (vgl. die Arbeit von Vandrey[10])). Dieser Sachverhalt scheint nun, soweit es sich um den Einfluß des Strahls auf den Flügel selbst handelt, verhältnismäßig wenig ins Gewicht zu fallen. Er muß aber fühlbarer werden, sobald die Strömungsverhältnisse in der Umgebung des Flügels (also z. B. in Leitwerksgegend) untersucht werden. Es ist daher gerade für dieses Problem möglicherweise zweckmäßiger, von der Annahme der schwachen Inhomogenität zu dem anderen Extrem, dem der starken Inhomogenität, überzugehen. Diese Annahme hat, wie weiter unten gezeigt wird, u. a. zur Folge, daß die Strömung innerhalb des Strahls von der Strömung außerhalb desselben unabhängig wird. Dieser Umstand entspricht aber den wirklichen Verhältnissen vielleicht gerade deswegen nicht schlecht, weil die turbulente Vermischungszone am Strahlrand auch eine Art Abschirmung des Strahls vom Außenraum herbeiführt. Es soll daher im folgenden das Problem des »durch den Freistrahl hindurchgesteckten Flügels« nochmal aufgenommen werden, in einer gegenüber Stüper allerdings abweichenden Form.

Die Untersuchung zerfällt in drei Abschnitte. Im ersten wird die Integralgleichung für die Zirkulation um den Flügel abgeleitet; im zweiten Abschnitt wird diese Gleichung gelöst; im dritten endlich wird die Strömung im Strahl untersucht, wobei u. a. der in (1) eingeführte Beiwert σ berechnet wird.

[3]) C. Koning, Influence of the propeller on other parts of the airplane structure. Bd. IV von W. F. Durand's, Aerodynamic Theory, Springer 1935.

[4]) A. Franke und F. Weinig, Tragflügel und Schraubenstrahl. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 303.

[5]) P. Ruden, Theorie des Tragflügels in der Nachbarschaft sprunghafter Gesamtdruckänderungen (Strahl und Windschatten mit Rechteckprofil). Jahrb. 1939 d. dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 98.

[6]) K. Bausch, Auftriebsverteilung und daraus abgeleitete Größen für Tragflügel in schwach inhomogenen Strömungen. Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939), S. 121.

[7]) B. Kyewski und F. Vandrey, Auftrieb eines Flügels, der ein Gebiet erhöhter Geschwindigkeit schneidet. Ing. Arch. Bd. 10 (1939), S. 81.

[8]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie II. Abgedruckt in »Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik«, Göttingen 1927.

[9]) J. Stüper, Der durch einen Freistrahl hindurchgesteckte Tragflügel. Ing. Arch. Bd. 3 (1932), S. 338. E. Pistolesi, Sull'ala traversante un getto libero. Atti della Pontificia Academia delle Scienze, Nuovi Lincei, 1933, S. 405. H. Glauert, The lift and drag of a wing spanning a free jet. R. & M. 1603, 1934. J. Stüper, Beitrag zum Problem des durch einen Freistrahl hindurchgesteckten Tragflügels. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 267.

[10]) F. Vandrey, Beitrag zur Theorie des Tragflügels in schwach inhomogener Grundströmung. Jahrb. 1939 d. dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 143.

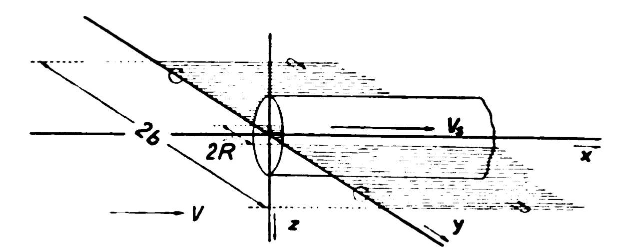


Bild 2. Koordinatensystem mit tragender Linie, Wirbelschleppe und Schraubenstrahl.

II. Herleitung der Integralgleichung für die Zirkulation.

1. Strahlrandbedingungen.

Das Problem des vom Schraubenstrahl geschnittenen Tragflügels werde zunächst als ein Randwertproblem für gewisse Potentiale formuliert. Gegeben ist eine Grundströmung (einschließlich der Strahlströmung), in der sich ein Tragflügel (hier eine tragende Linie) befindet, der den Strahl zentrisch schneiden möge. Die sich hierbei ergebende Strömung setzt sich zusammen aus der bekannten Grundströmung und aus Störungen, die sich aus den Potentialen Φ_I (im Strahlinnern) und Φ_{II} (im Strahläußern) herleiten. Diese Potentiale haben am Strahlrand und an der tragenden Linie gewisse Randbedingungen zu erfüllen, die jetzt betrachtet werden sollen. Bei der Herleitung der Randbedingungen soll zunächst nicht angenommen werden, daß die Geschwindigkeit außerhalb des Strahls klein sei. Diese Voraussetzung soll erst später eingeführt werden. Auf diese Weise wird man deutlicher sehen, inwiefern die Randbedingungen hierdurch beeinflußt werden.

Die Strahlachse, s. Bild 2, falle mit der x-Achse zusammen, positiv in Richtung der Strömung. Die Grundströmung außerhalb des Strahls habe dieselbe Richtung (keine »Schräganblasung« der Luftschraube!). Die tragende Linie falle mit einem Teil der y-Achse zusammen, etwa von $y = -b$ bis $y = b$. Die y-Achse ist positiv nach Backbord. Die z-Achse ist dann entsprechend dem Rechtssystem positiv nach unten. Nun wird freilich der Strahl unter der Wirkung des Tragflügels deformiert und abgelenkt. Trotzdem soll in erster Näherung davon abgesehen werden, weil die Störung durch den Tragflügel als klein gegenüber der Grundgeschwindigkeit angenommen wird. Die Strahlrandbedingungen werden daher am Ort des undeformierten Strahls erfüllt. Die so gewonnenen Ergebnisse werden dann nachträglich zur Berechnung einer Art zweiter Näherung benutzt, wo der Strahlquerschnitt deformiert und der ganze Strahl abgelenkt erscheint. Von dieser zweiten Näherung kann man wohl erwarten, daß sie gegenüber der ersten eine Verbesserung darstellt. Trotzdem hat es schwerlich einen Sinn, von hier aus nach derselben Methode etwa noch weitere Näherungen zu suchen. Denn wie schon Burgers[11]) bemerkt, ist die Errechnung weiterer Näherungen nach dieser Methode wohl nur dann erfolgversprechend, wenn die endgültige Lage der Wirbellinien sich nicht allzusehr von der der ersten Näherung unterscheidet. Probleme wie das Aufrollen der Wirbelschleppe und eine damit zusammenhängende große Verformung des Strahlquerschnitts sind daher von hier aus ganz unzugänglich. Abgesehen davon würde bei einer großen Verformung des Strahlquerschnitts die hier angewandte Methode (Befriedigung der Randbedingungen durch gespiegelte Wirbel) unbrauchbar werden. Das folgende ist also eine Näherung für hinreichend schwachen Fluglauftrieb, so daß das Aufrollen der Wirbel vernachlässigt werden kann.

Im folgenden sollen nun V_s und V die gleichförmigen und zu einander parallelen Grundgeschwindigkeiten innerhalb und außerhalb des Strahls bedeuten ($V_s = V + \Delta V = S V$). Der Strahl sei zunächst als drallfrei angenommen. Die Strahlrandbedingungen, die jetzt aufgestellt werden sollen, bedeuten 1. die Gleichheit des Drucks innerhalb und außerhalb am Strahlrand und 2. die Tatsachen, daß der

[11]) Th. v. Kármán und J. M. Burgers, General aerodynamic theory — Perfect fluids. Bd. II von W. F. Durand's »Aerodynamic Theory«, Springer 1935, S. 319.

Strahlrand aus Stromlinien besteht (d. h. das Verschwinden der Normalkomponente am Strahlrand). Die Bedingung des Druckgleichgewichts ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung, wobei man nur die in den Zusatzgeschwindigkeiten $\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x}\text{ usw.}\right)$ linearen Glieder beibehält. Es ist so für $r = R$ $(r = \sqrt{y^2 + z^2})$.

$$V_s \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} = V \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x}.$$

Integriert man diese Gleichung von $x = -\infty$ bis x, so erhält man

$$V_s [\Phi_I(x) - \Phi_I(-\infty)] = V[\Phi_{II}(x) - \Phi_{II}(-\infty)].$$

Nun sind die Potentiale für $x = -\infty$, d. h. weit vor dem Flügel, sicherlich von y und z unabhängig. Durch Festsetzung ihrer physikalisch belanglosen Absolutwerte kann man daher die Randbedingung auch in der folgenden Form erhalten

$$S\,\Phi_I = \Phi_{II} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Man sieht übrigens, daß diese Bedingung auch dann bestehen bleibt, wenn im Strahl ein Drall zugelassen wird. Voraussetzung ist nur, daß dieser Drall klein ist. Aus der Forderung des Verschwindens der Normalgeschwindigkeit am Strahlrand erhält man die zweite Randbedingung für $r = R$:

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} = S \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

2. Randbedingung an der tragenden Linie.

Eine weitere Randbedingung für die Potentiale Φ_I und Φ_{II} ergibt sich auf Grund ihrer Beziehung zur Zirkulation Γ um die tragende Linie. Aus der Prandtlschen Beziehung, daß nämlich der effektive Anstellwinkel gleich ist der Summe aus den geometrischen und dem induzierten Anstellwinkel, ergeben sich die beiden folgenden auf der y-Achse im Strahlinnern bzw. Strahläußern geltenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\z=0}} + \frac{2\,\Gamma}{C^*\,l} = \alpha\,V_s \text{ für } |y| < R$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\z=0}} + \frac{2\,\Gamma}{C^*\,l} = \alpha\,V \text{ für } R < |y| < b.$$

Ersetzt man die Ableitung der Potentiale nach z durch den Wert im Unendlichen $(x \to \infty)$, so hat man bekanntlich den Faktor $\frac{1}{2}$ davorzuschreiben. Die obigen Gleichungen nehmen dann die Form an

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right)_{\substack{x=\infty\\z=0}} + \frac{2\,\Gamma}{C^*\,l} &= \alpha\,V_s \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z}\right)_{\substack{x=\infty\\z=0}} + \frac{2\,\Gamma}{C^*\,l} &= \alpha\,V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Gleichzeitig kann Γ durch den Potentialsprung am Wirbelband im Unendlichen ausgedrückt werden. Die Gleichungen (5) werden dadurch eine Randbedingung für die Potentiale.

3. System der Zusatzwirbel.

Die Aufgabe, wie sie bisher formuliert ist, besteht darin, zwei Potentiale Φ_I und Φ_{II} als Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung so zu bestimmen, daß für $r = R$ die Bedingungen (3) und (4) und für $x = \infty$, $|y| < b$, $z = 0$ die Bedingungen (5) erfüllt sind. Außerdem müssen die Potentiale innerhalb ihrer Geltungsbereiche regulär sein. Nun ist aber für die Ermittlung der Zirkulation tatsächlich nicht die Lösung dieser vollständigen Aufgabe erforderlich. Es genügt vielmehr, wenn man das asymptotische Verhalten der Potentiale im Unendlichen $(x \to \infty)$ kennt. Gleichzeitig sieht man, daß sehr weit hinter dem Flügel wegen der verschwindenden Wirkung der gebundenen Wirbel und wegen der Tatsache, daß die freien Wirbel voraussetzungsgemäß parallel zur y-Achse verlaufen, ein ebenes Problem vorliegt, dessen Lösung erheblich einfacher ist als das des räumlichen Problems. Es soll daher zunächst dieses ebene Problem behandelt werden. Zur Vereinfachung der Schreibweise bedeuten fortan die Zeichen Φ_I und Φ_{II} die asymptotischen Grenzwerte dieser Potentiale für $x \to \infty$.

Es läßt sich jetzt zeigen, daß die Randbedingungen (3) und (4) durch einen Ansatz für die Potentiale identisch befriedigt werden können. Hierbei wird jedem freien Wirbel ein System von Zusatzwirbeln zugeordnet, wie das z. B. auch von C. Koning gemacht worden ist.

Ändert sich zwischen $y = \eta$ und $y = \eta + d\,\eta$ die Zirkulation um $d\Gamma$, so geht an der betreffenden Stelle ein freier Wirbel der Zirkulation $-d\Gamma$ (positiv entgegen dem Uhrzeigersinn) ab. Dieser freie Wirbel verläuft in erster Näherung parallel der x-Achse. Er geht im Unendlichen $(x \to \infty)$ also wieder durch die y-Achse bei $y = \eta$. Diesem Wirbel, wobei zunächst $|\eta| < R$ sein soll, denken wir uns nun einen am Strahlrand durch reziproke Radien gespiegelten zugeordnet, also an der Stelle

$$y = \frac{R^2}{\eta},$$

wobei die Intensität dieses Zusatzwirbels gleich $-\frac{S^2-1}{S^2+1}\,d\Gamma$ sein soll. Das Potential im Innern des Strahls soll dann durch diese beiden Wirbel bestimmt sein, d. h. es lautet

$$d\,\Phi_I = -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} + \frac{S^2-1}{S^2+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{y - R^2/\eta}{z}\right] \quad (6)$$

Außerhalb des Strahls dagegen soll (wobei immer noch $|\eta| < R$)

$$d\Phi_{II} = -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi}\left[\frac{2\,S}{S^2+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} + \frac{S^3-S}{S^2+1}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad \ldots \quad (7)$$

sein, d. h. die Wirkung des innerhalb des Strahls gelegenen Wirbels äußert sich außerhalb sowohl in einer verminderten Intensität als auch ergänzt durch einen Wirbel im Koordinatenursprung. Die Potentiale (6) und (7) befriedigen die Randbedingungen (3) und (4) identisch. Betrachtet man, um das zu zeigen, irgendeinen Punkt P des Strahlrandes, Bild 3, der also die Entfernung R vom Nullpunkt hat, so sind die Dreiecke OPA und OBP wegen des gleichen Winkels $\sphericalangle\, AOP$ und der Beziehung

$$R/\eta = \frac{R^2/\eta}{R}$$

ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt

$$-\vartheta = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Nun haben die Potentiale im Punkte P folgende Werte

$$d\,\Phi_I = -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi}\left(\varphi_1 + \frac{S^2-1}{S^2+1}\,\varphi_2\right)$$

$$d\,\Phi_{II} = -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi}\left(\frac{2\,S}{S^2+1}\,\varphi_1 + \frac{S^3-S}{S^2+1}\,(-\vartheta)\right)$$

$$= -\frac{d\,\Gamma}{2\,\pi}\,S\left(\varphi_1 + \frac{S^2-1}{S^2+1}\,\varphi_2\right),$$

so daß also die Bedingung (3) erfüllt ist, was auch immer der Wert von $d\Gamma$ ist. Daß dasselbe hinsichtlich der Bedingung (4) zutrifft, erkennt man am einfachsten durch Ausführung der Differentiation nach r.

Befindet sich nun ein Wirbel der Intensität $-d\Gamma$ außerhalb des Strahls $(|\eta| > R)$, so lauten die Potentiale

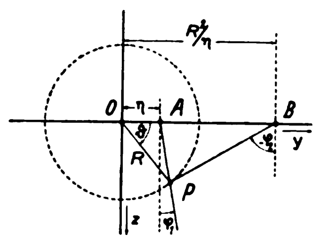


Bild 3. Zum Beweis der Befriedigung der Strahlrandbedingungen durch Wirbel A und Zusatzwirbel B.

$$d\Phi_{\rm I} = -\frac{d\Gamma}{2\pi}\cdot\frac{2S}{S^2+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} \quad . . . (8)$$

$$d\Phi_{\rm II} = -\frac{d\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} - \frac{S^2-1}{S^2+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-R^2/\eta}{z} + \frac{S^2-1}{S^2+1}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}-\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (9)$$

Der Nachweis, daß sie den Bedingungen (3) und (4) identisch genügen, ist ebenso leicht zu führen, wie im Fall des Ansatzes (6) und (7).

Durch Integration über die gesamte Wirbelbelegung erhält man die vollständigen Ausdrücke für die Potentiale. Zu dem Glied mit $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}$ ist zu bemerken, daß es einen Wirbel im Ursprung bedeutet. Ist die Zirkulation symmetrisch, so ist $d\Gamma$ antisymmetrisch, so daß der Beitrag dieses Wirbels verschwindet. Bei antisymmetrischer Zirkulation verschwindet der Gesamtbeitrag dieses Wirbels jedoch nur dann, wenn Γ sowohl an den Flügelenden als auch am Strahlrand Null ist.

4. Integralgleichung für Γ im Fall $S \to \infty$.

Geht man jetzt zur Grenze $S \to \infty$ über, d. h. zu dem Fall, wo die Außengeschwindigkeit gegenüber der Strahlgeschwindigkeit verschwindend klein ist, und nimmt man gleichzeitig an, daß Γ am Strahlrand $(y = \pm R)$ verschwindet, so daß das Glied mit $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}$ fortgelassen werden kann, so wird aus (6) und (8)

$$d\Phi_{\rm I} = -\frac{d\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y-R^2/\eta}{z}\right] \text{ für } \eta < R$$
$$= 0 \text{ für } |\eta| > R$$

und entsprechend aus (7) und (9):

$$d\Phi_{\rm II} = 0 \text{ für } |\eta| < R$$
$$= -\frac{d\Gamma}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y-R^2/\eta}{z}\right] \text{ für } |\eta| > R.$$

Ein Wirbel innerhalb des Strahles $(|\eta| < R)$ hat jetzt keinen Einfluß auf das Potential außerhalb des Strahls, und umgekehrt ist das Potential innerhalb des Strahls unabhängig von den Wirbeln außerhalb. Es hat somit eine Trennung in zwei unabhängige Aufgaben stattgefunden, indem die Bestimmung der Zirkulation etwa innerhalb des Strahls ausschließlich von der Strömung daselbst abhängt. Es ist von Interesse festzustellen, was hierbei aus den Grenzbedingungen (3) und (4) geworden ist. Das Potential $\Phi_{\rm I}$ wird Null auf dem Strahlrand, während $\Phi_{\rm II}$ entsprechend (3) unbestimmt wird. Die Normalgeschwindigkeit außerhalb am Rande $\left(\frac{\partial \Phi_{\rm II}}{\partial r}\right)$ verschwindet, während sie von innen unbestimmt wird. Für die Lösung der Potentialaufgabe innerhalb des Strahls erfüllt man daher kraft des Ansatzes die Bedingung $\Phi_{\rm I} = 0$ am Rande (Konstanz des Drucks am Rande). Für die Aufgabe außerhalb des Strahls erfüllt man umgekehrt nur die Randbedingung $\frac{\partial \Phi_{\rm II}}{\partial r} = 0$ (Verschwinden der Normalkomponente der Geschwindigkeit). In folgenden soll lediglich die Strömung innerhalb des Strahls betrachtet werden. Die Zirkulation außerhalb des Strahls kann also als identisch Null angenommen werden.

Das Potential im Strahlinnern lautet jetzt vollständig

$$\Phi_{\rm I} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{d\Gamma}{d\eta}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{z} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y-R^2/\eta}{z}\right]d\eta \quad (10)$$

Hieraus ergibt sich die abwärts gerichtete Geschwindigkeit für $z = 0$.

$$\left(\frac{\partial \Phi_{\rm I}}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{d\Gamma}{d\eta}\left[\frac{1}{y-\eta} + \frac{\eta}{y\eta - R^2}\right]d\eta \quad (11)$$

Führt man diesen Ausdruck in die erste der Gleichungen (5) ein, so erhält man

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-R}^{R}\frac{d\Gamma}{d\eta}\left[\frac{1}{y-\eta} + \frac{\eta}{y\eta - R^2}\right]d\eta + \frac{2\Gamma}{C^* l} = \alpha V_s.$$

Es empfiehlt sich, Γ durch Division mit $V_S R$ dimensionslos zu machen und sämtliche Längen in Einheiten von R auszudrücken. Man erhält dann, indem der Einfachheit halber die Symbole Γ, y und η beibehalten werden,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\Gamma}{d\eta}\left[\frac{1}{y-\eta} + \frac{\eta}{y\eta - 1}\right]d\eta + \frac{\Gamma}{4\mu} = \alpha \quad . . (12)$$

Hierbei ist entsprechend (2) $\frac{C^* l}{8R} = \mu$ gesetzt worden. An sich könnte μ mit der Tiefe l des Flügels eine Funktion von y sein. Doch hat die Annahme einer nicht konstanten Tiefe für die hier interessierende Fragestellung wohl wenig Sinn. Es soll daher μ stets als eine Konstante betrachtet werden. Numerisch liegt μ etwa zwischen 1 und 3. In α auf der rechten Seite von (12) ist außer dem gegebenen geometrischen Anstellwinkel auch noch die »Verwindung« enthalten, die durch den Schraubenstrahldrall zustande kommt.

III. Bestimmung der Zirkulation.

1. Lösungsansatz.

Die Gleichung (12) kann, wie schon erwähnt, als Problem des durch einen kreisförmigen Freistrahl zentral hindurchgesteckten Flügels gedeutet werden. Ein Lösungsansatz dieser Aufgabe ist schon in der II. Mitteilung zur Tragflügeltheorie von Prandtl erwähnt worden. Allerdings zeigte dieser Ansatz eine schlechte Konvergenz. J. Stüper[12]) hat dasselbe Problem dadurch gelöst, daß er den kreisförmigen Strahlquerschnitt konform auf einen Streifen abbildet, woraufhin die Strahlrandbedingungen durch Wirbelspiegelung befriedigt werden. Im folgenden soll Gleichung (12) direkt durch einen trigonometrischen Ansatz gelöst werden. Man setzt, wie das wohl zuerst Glauert[13]) getan hat,

$$y = -\cos\varphi$$
$$\Gamma = \sum_{1}^{\infty}\Gamma_n \sin n\varphi.$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung (12) in

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{1}^{\infty} n\,\Gamma_n\left\{\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi'\,d\varphi'}{\cos\varphi - \cos\varphi'} + \int_0^\pi\frac{\cos\varphi'\cos n\varphi'\,d\varphi'}{1-\cos\varphi\cos\varphi'}\right\} + \frac{1}{4\mu}\sum_{1}^{\infty}\Gamma_n \sin n\varphi = \alpha \quad (13)$$

wobei die Integrationsveränderliche

$$\eta = -\cos\varphi'$$

geschrieben worden ist. Das erste Integral in den geschweiften Klammern gibt[14]

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi'\,d\varphi'}{\cos\varphi' - \cos\varphi} = \pi\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \quad . . . . . (14)$$

Das zweite Integral in der Klammer läßt sich zwar auch geschlossen auswerten. Es erscheint jedoch im Hinblick auf die Lotzsche Methode[15]) der Zirkulationsberechnung zweckmäßiger, es sofort in der Form der Gleichung (15) anzusetzen:

$$\int_0^\pi\frac{\cos\varphi'\cos n\varphi'\,d\varphi'}{1-\cos\varphi\cos\varphi'} = \frac{\sum a_p^n \sin p\varphi}{\sin\varphi} \quad . . . . (15)$$

[12]) Siehe die in Fußnote 9 an erster Stelle genannte Arbeit.
[13]) H. Glauert, The elements of aerofoil and airscrew theory, Cambridge 1937, S. 138.
[14]) H. Glauert, a. a. O., S. 139.
[15]) I. Lotz, Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. Z. Flugt. Motorl. Bd. 22 (1931), S. 189.

Der Fourier-Koeffizient a_p^n (n ist hier ein Index!) ist daher

$$a_p^n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi' \cos n\varphi'\, d\varphi' \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \sin p\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} \qquad (16)$$

2. Berechnung der Koeffizienten.

Wir werten zuerst das innere Integral in (16) aus. Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\pi \frac{\sin\varphi \sin p\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} = J_p,$$

so ist auf Grund einer einfachen trigonometrischen Beziehung

$$2\,J_p = \int_0^\pi \frac{\cos(p-1)\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} - \int_0^\pi \frac{\cos(p+1)\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} \qquad (17)$$

Wir behandeln nun weiter das Integral

$$K_p = \int_0^\pi \frac{\cos p\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi}.$$

Für $p \neq 0$ hat man

$$K_p = \int_0^\pi \frac{\cos p\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} - \int_0^\pi \cos p\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\cos\varphi'}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(p+1)\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi'}{2}\int_0^\pi \frac{\cos(p-1)\varphi\, d\varphi}{1-\cos\varphi'\cos\varphi}$$

oder

$$K_{p+1} - \frac{2\,K_p}{\cos\varphi'} + K_{p-1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

als Rekursionsformel für K. Da ferner

$$K_0 = \frac{\pi}{\sin\varphi'}, \quad K_1 = \frac{\pi}{\sin\varphi'}\cdot\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'},$$

so bestätigt man leicht nach (18), daß

$$K_p = \frac{\pi}{\sin\varphi'}\left[\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right]^p \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Hieraus erhält man nach (17)

$$J_p = \frac{\pi}{1+\sin\varphi'}\left[\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right]^{p-1} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Damit wird zunächst

$$a_p^n = 2\int_0^\pi \cos n\varphi' \left[\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right]^p d\varphi' \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Man sieht nun sofort, daß a_p^n nur dann von Null verschieden ist, wenn p und n beide gleichzeitig entweder gerade oder ungerade sind. Ferner ist nach Ausführung einer partiellen Integration

$$a_p^n = \frac{2}{n}\int_0^\pi \left[\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right]^p d(\sin n\varphi') =$$

$$= 2\,\frac{p}{n}\int_0^\pi \frac{\sin n\varphi'}{\cos\varphi'}\left[\frac{1-\sin\varphi'}{\cos\varphi'}\right]^p d\varphi'.$$

Andererseits kann durch eine längere Rechnung, indem man in (16) mit der Integration φ' anfängt, gezeigt werden, daß auch

$$2\int_0^\pi \frac{\sin p\varphi}{\cos\varphi}\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]^n d\varphi = a_p^n.$$

Der Vergleich beider Ausdrücke zeigt, daß

$$a_p^n = \frac{p}{n}\,a_n^p \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Ist also irgend ein Koeffizient bekannt, so kann nach (22) der Koeffizient mit numerisch vertauschtem oberen und unteren Index sofort auch berechnet werden. Durch diese Beziehung wird die Berechnungsarbeit erheblich abgekürzt.

Eine weitere, und zwar asymtotische Eigenschaft der Koeffizienten a_p^n ergibt sich auf folgende Weise. Es ist für $p = n$

$$n\,a_n^n = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]^n d(\sin n\varphi) =$$

$$= 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]^n d(\sin n\varphi) +$$

$$+ 2\int_{\varphi=\frac{\pi}{2n}}^{\varphi=\pi}\left[\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]^n d(\sin n\varphi).$$

Geht man jetzt zur Grenze $n \to \infty$, so konvergiert das zweite Integral gegen Null, während das erste nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung gegen 1 geht. Für große Werte n gilt also

$$a_n^n \cong \frac{2}{n} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Diese Abschätzung ist ziemlich brauchbar. Bereits für $n = 8$ beträgt der Unterschied zwischen dem exakten Wert und der Näherung (23) weniger als 1%.

Die endgültige Berechnung von (21) geschieht nun für nicht allzu große Werte von n und p durch exaktes Auswerten des Integrals. Dazu bringt man den Integranden zweckmäßigerweise auf eine Form, wo er eine rationale Funktion einer neuen Veränderlichen wird. Durch Partialbruchzerlegung kann dann die Auswertung exakt erfolgen, was allerdings für größere Werte von p und n mit sehr viel Rechenarbeit verbunden ist. Für die näherungsweise Berechnung von (21) kann die Simpsonsche Regel benutzt werden. Die Zahlentafel 1 enthält die Koeffizienten für ungerade Indizes bis $n = p = 17$.

Mit Hilfe von (22) kann die Zahlentafel für die Stellen links von der Diagonale vervollständigt werden. Für gerade Werte von p und n bis $n = p = 18$ gibt Zahlentafel 2 die entsprechende Zusammenstellung.

3. Gleichungssystem für die Γ_n.

Gleichung (13) nimmt jetzt die Form an

$$\pi\sum_1^\infty n\,\Gamma_n \sin n\varphi + \sum_1^\infty n\,\Gamma_n \sum_1^\infty a_p^n \sin p\varphi +$$

$$+ \frac{\pi}{\mu}\sum_1^\infty \Gamma_n \sin\varphi \sin n\varphi = 4\,\pi\,\alpha \sin\varphi.$$

Nun ist

$$\sin\varphi \sin n\varphi = \frac{2}{\pi}\sin n\varphi - \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(n+2p)\varphi + \sin(n-2p)\varphi}{(2p-1)(2p+1)},$$

so daß schließlich

$$\pi\sum_1^\infty n\,\Gamma_n \sin n\varphi + \sum_1^\infty n\,\Gamma_n \sum_1^\infty a_p^n \sin p\varphi + \frac{2}{\mu}\sum_1^\infty \Gamma_n \sin n\varphi -$$

$$- \frac{2}{\mu}\sum_1^\infty \Gamma_n \sum_1^\infty \frac{\sin(n+2p)\varphi + \sin(n-2p)\varphi}{(2p-1)(2p+1)} = 4\,\pi\,\alpha \sin\varphi \quad \ldots \quad (24)$$

Die rechte Seite wird jetzt gemäß der Lotzschen Methode[16]) in eine sin-Reihe entwickelt:

$$4\,\pi\,\alpha \sin\varphi = \sum_1^\infty c_n \sin n\varphi,$$

wobei der Fourier-Koeffizient

$$c_n = 8\int_0^\pi \alpha \sin\varphi \sin n\varphi\, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Zahlentafel 1. Werte der Koeffizienten a_p^n für ungerade Indizes.

p \ n	1	3	5	7	9	11	13	15	17
1	2,2832	0,3835	0,1498	0,0806	0,0483	0,0325	0,0234	0,0176	0,0137
3		0,7138	0,3575	0,2068	0,1329	0,0919	0,0672	0,0511	0,0402
5			0,4092	0,2732	0,1894	0,1371	0,1030	0,0799	0,0636
7				0,2888	0,2169	0,1653	0,1287	0,1022	0,0828
9					0,2236	0,1790	0,1444	0,1179	0,0974
11						0,1815	0,1535	0,1300	0,1107
13							0,1537	0,1331	0,1155
15								0,1333	0,1176
17									0,1177

Zahlentafel 2. Werte der Koeffizienten a_p^n für gerade Indizes.

p \ n	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	1,1327	0,4012	0,1982	0,1166	0,0764	0,0538	0,0398	0,0307	0,0239
4		0,5191	0,3117	0,2005	0,1378	0,0998	0,0753	0,0587	0,0467
6			0,3384	0,2421	0,1772	0,1335	0,1035	0,0821	0,0664
8				0,2520	0,1962	0,1544	0,1233	0,1001	0,0819
10					0,2010	0,1646	0,1355	0,1125	0,0955
12						0,1673	0,1416	0,1202	0,1048
14							0,1469	0,1229	0,1105
16								0,1278	0,1134
18									0,1141

Durch Koeffizientenvergleich gewinnt man sodann aus Gleichung (24) ein System linearer Gleichungen für die Unbekannten Γ_n. Es möge etwa folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{array}{lllll} A_{11}\Gamma_1 & & +A_{13}\Gamma_3 & & +A_{15}\Gamma_5+\ldots = c_1 \\ & A_{22}\Gamma_2 & & +A_{24}\Gamma_4+\ldots & = c_2 \\ A_{31}\Gamma_1 & & +A_{33}\Gamma_3 & & +A_{35}\Gamma_5+\ldots = c_3 \\ & A_{42}\Gamma_2 & & +A_{44}\Gamma_4+\ldots & = c_4 \\ \ldots & & & & \end{array}\right\} \quad (26)$$

Man sieht, daß (26) in zwei getrennte Systeme zerfällt, eines für ungerade und eines für gerade Indizes der Unbekannten Γ_n. Die Koeffizienten der Diagonalglieder lauten hierbei

$$A_{nn} = n\pi + n\,a_n^n + \frac{2}{\mu}\,\frac{4n^2}{4n^2-1} \quad \ldots \quad (27)$$

und die der Nicht-Diagonalglieder (*m-te* Gleichung, *n-tes* Glied)

$$A_{m,n} = n\,a_m^n - \frac{2}{\mu}\,\frac{4\,m\,n}{[n^2-(m+1)^2]\,[n^2-(m-1)^2]} \quad (28)$$

Dabei ist die Zählung der Gleichungen und der Glieder entsprechend dem System in (26) zu handhaben, so daß also in der 1., 3., 5. . . . Gleichung nur ungerade m und n, während in der 2., 4., 6. . . . . Gleichung nur gerade m und n vorkommen.

Bis auf die Glieder mit a_m^n ist (26) identisch mit dem von Lotz für den Fall konstanter Tiefe angegebenen Gleichungssystem, mit dem es auch alle Vorteile der leichten Auflösbarkeit durch Iterationen teilt. Man kann insbesondere eine erste Näherung etwa dadurch erhalten, daß man die Glieder jeweils nur bis zum Diagonalglied einschließlich berücksichtigt. Jede weitere Gleichung hat dann immer nur eine neue Unbekannte. Die beiden wichtigen Koeffizienten für $n = 1$ und $n = 2$ z. B. lauten in dieser ersten Näherung

$$\Gamma_1 \cong \frac{c_1}{\pi + a_1^1 + \frac{2}{\mu}\cdot\frac{4}{3}}$$

$$\Gamma_2 \cong \frac{c_2}{2\pi + 2\,a_2^2 + \frac{2}{\mu}\cdot\frac{16}{15}}.$$

Weitere Näherungen gewinnt man entsprechend der Iterationsmethode dadurch, daß man alle Glieder bis auf die Diagonalglieder nach rechts schafft und in die rechte Seite jeweils die schon errechnete Näherung einsetzt.

4. Die durch Integration aus der Zirkulation gewonnenen Größen.

Der Vollständigkeit halber seien im folgenden die Formeln für Auftrieb, induzierten Widerstand und Rollmoment eines durch den Freistrahl hindurchgesteckten Flügels zusammengestellt. Für den Auftrieb liegen zudem Messungen von J. Stüper[17] vor, so daß ein Vergleich mit der Theorie möglich wird.

Man findet nach dem Kutta-Joukowskischen Satz leicht für den Gesamtauftrieb

$$A = \frac{\varrho}{2}\,V_s^2\,\pi\,R^2\,\Gamma_1$$

oder auch

$$c_a = \frac{\pi\,R\,\Gamma_1}{2\,l} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

wobei der Beiwert auf die im Strahl liegende Fläche $2\,R\,l$ bezogen ist. Nimmt man für Γ_1 die erste Näherung beim Iterationsverfahren, so wird (für Flügel konstanten Anstellwinkels)

$$c_a = \frac{\pi^2\,C^*\,\alpha}{\frac{32}{3} + 4\,\mu\,(\pi + a_1^1)}$$

oder mit $C^* = 2\pi$

$$\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = \frac{\pi^3}{\frac{16}{3} + 2\,\mu\,(\pi + a_1^1)} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Die Stüperschen Messungen sind mit $R/l = 1$, 2 und 4 ausgeführt worden, dabei ist $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 1{,}58$, 2,60 und 3,95 ermittelt worden. Die folgende Zahlentafel und Bild 4 zeigen den Vergleich mit der theoretischen Formel.

Zahlentafel 3.

R/l	μ	$\frac{d\,C_a}{d\,\alpha}$ berechnet	$\frac{d\,C_a}{d\,\alpha}$ gemessen
1	0,785	2,24	1,58
2	0,393	3,23	2,60
4	0,196	4,16	3,95

Man sieht, daß die Übereinstimmung für kleinere Werte von μ besser ist. Das ist möglicherweise die Folge davon, daß für kleine μ (also für großes Seitenverhältnis des im Strahl

[16]) S. Fußn. 15.
[17]) Siehe die in Fußn. 9 an letzter Stelle genannte Arbeit.

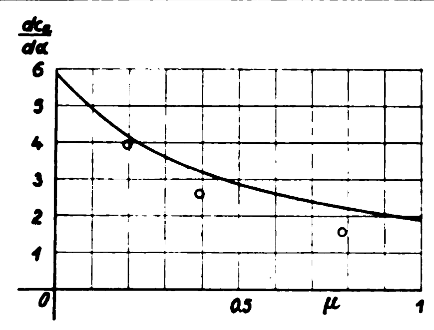


Bild 4. Vergleich der nach Formel (30) gerechneten und der von J. Stüper gemessenen Werte für $\frac{d c_a}{d \alpha}$.

liegenden Flügelteils) die theoretische Annahme der »tragenden Linie« mit der Wirklichkeit besser übereinstimmt als für große Werte μ. Der induzierte Widerstand berechnet sich zu

$$W_i = \frac{\pi}{8} \varrho V_s^2 R^2 \left\{ \sum_1^\infty n \Gamma_n^2 + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \sum_1^\infty n\, a_p^n \Gamma_p \Gamma_n \right\} \quad (31)$$

Insbesondere wird das Minimum des induzierten Widerstands

$$(W_i)_{\min} = \frac{\pi}{8} \varrho V_s^2 R^2 T^2 \Gamma_1^2 \left(1 + \frac{a_1^1}{\pi}\right).$$

Der Faktor in der Klammer gibt an, um wieviel das Minimum des induzierten Widerstands bei dem hier betrachteten Fall größer ist als bei einem Flügel im unbegrenzten Strom. Sein Wert ist (vgl. Zahlentafel 1)

$$1 + \frac{a_1^1}{\pi} = 1{,}727.$$

Nach Stüper[18]) ist dieser Zahlenfaktor gleich 1,84, während Prandtl[19]) auf Grund einer Näherungsrechnung von K. Pohlhausen den Wert 1,74 angibt.

Für das Rollmoment endlich findet man

$$M_R = -\frac{\pi}{4} \varrho V_s^2 R^3 \Gamma_2 \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

IV. Die Strömung in der Gegend des Leitwerks.

1. Bestimmung des komplexen Strömungspotentials.

Die Kenntnis des Zirkulationsverlaufs gestattet nun die Ermittlung der gesamten Strömung, jedoch nur in der Ebene $x = \infty$. Es fragt sich hier, wie weit diese Teillösung für das Potential dem praktischen Problem genügt, und ob nicht eine Korrektur erforderlich wäre zur Berücksichtigung des endlichen Abstandes des Leitwerks von der tragenden Linie. Die ausführliche Behandlung dieser Frage würde allerdings an dieser Stelle zu weit führen. Es soll daher die ohne Beweis gegebene Behauptung genügen, daß die Strömungsverhältnisse im Unendlichen nicht nur in der Gegend des Leitwerks, sondern fast schon in der Nähe der Flügelhinterkante eine sehr gute Näherung bilden. Nicht nur der Abwindwinkel am Leitwerk, sondern auch etwa die Absenkung des ganzen Strahls können daher mit Hilfe der bisher errechneten Strömung im Unendlichen ermittelt werden. Ihr Potential ergibt sich am einfachsten in komplexer Form. Wir setzen zu diesem Zweck (Bild 5)

$$\zeta = z + i y.$$

Das komplexe Potential für Punkte außerhalb der imaginären Achse ist dann

$$f(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d\Gamma}{d\eta} \left[\lg(\zeta - i\eta) + \lg\left(\zeta - \frac{i}{\eta}\right) \right] d\eta$$

oder nach Ausführung einer partiellen Integration

$$f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \Gamma(\eta) \left[\frac{1}{\zeta - i\eta} - \frac{1}{\zeta\eta^2 - i\eta} \right] d\eta \quad (33)$$

[18]) Siehe die in Fußn. 9 an erster Stelle genannte Arbeit.
[19]) Siehe Fußn. 8.

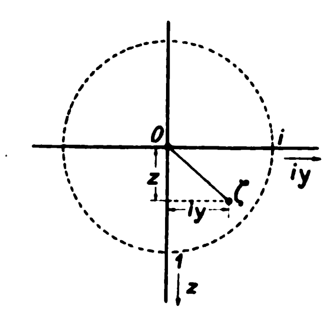


Bild 5. Zur Definition von $\zeta = z + iy$.

Faßt man hier η als eine komplexe Veränderliche auf, so verläuft der Integrationsweg in (33) auf der reellen Achse von -1 nach $+1$. Nun ist

$$\Gamma = \sum_1^\infty \Gamma_n \sin n\varphi = \sqrt{1 - \eta^2} \sum_0^\infty B_n \eta^n,$$

wobei

$$B_0 = \Gamma_1 - \Gamma_3 + \Gamma_5 \quad + \ldots$$

und für $n > 1$

$$B_n = (-2)^n [\Gamma_{n+1} - (n+1)\Gamma_{n+3} + \\ + 3n\Gamma_{n+5} - (5n-1)\Gamma_{n+7} + \ldots].$$

Führt man den Ausdruck für Γ in (33) ein, so erhält man

$$f(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty B_n \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\eta^n \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta}{\zeta - i\eta} - \int_{-1}^{1} \frac{\eta^{n-1} \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta}{\zeta\eta - i} \right\} \quad \ldots (34)$$

Die Integrale in den geschweiften Klammern sollen nunmehr ausgewertet werden. Bezeichnet man das erste mit G_n, also

$$G_n = \int_{-1}^{1} \frac{\eta^n \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta}{\zeta - i\eta},$$

so kann man zunächt G_n in der folgenden Form schreiben:

$$G_n = (-i)^n \zeta^n G_0 + \\ + i^n \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \zeta^\nu \int_{-1}^{1} (\zeta - i\eta)^{n-\nu-1} \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta,$$

wobei der Summenausdruck eine leicht zu berechnende ganz rationale Funktion vom Grade n-1 ist. Die Auswertung von

$$G_0 = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\eta^2}\, d\eta}{\zeta - i\eta}$$

erfolgt in folgender Weise: Durch Einführung von

$$u^2 = \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

und anschließende Partialbruchzerlegung wird

$$G_0 = -4i \int_0^\infty \frac{du}{(u^2+1)^2} - 2(\zeta - i) \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} + \\ + 2(\zeta - i) \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + \frac{\zeta - i}{\zeta + i}} = -\pi\zeta + 2(\zeta - i) J,$$

wo zur Abkürzung

$$J = \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + \frac{\zeta - i}{\zeta + i}}$$

gesetzt wurde. Nun kann man offenbar J auch so darstellen:

$$J = \frac{1}{2} \oint \frac{du}{u^2 + \frac{\zeta - i}{\zeta + i}},$$

wo das Integral in positiver Richtung um die obere Halbebene zu nehmen ist. Hieraus erhält man, indem man auf die Lage der Singularitäten des Integranden in der u-Ebene achtet,

$$J = \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\zeta+i}{\zeta-i}} \qquad z \gtrless 0$$

und mithin

$$G_0 = -\pi\zeta \pm \pi \sqrt{\zeta^2+1},$$

wobei $\Re \sqrt{\zeta^2+1} \geq 0$ zu nehmen ist ($\Re$ bedeutet wie üblich Realteil). Das Potential G_0 stellt bekanntlich die Strömung um eine mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zu ihrer Ebene bewegte Platte dar. Die explizite Darstellung von G_n kann nun ohne Schwierigkeiten erfolgen. Das soll weiter unten für einige Werte von n geschehen. Bei der Auswertung des zweiten Integrals in den geschweiften Klammern der Gleichung (34) verfährt man ähnlich wie oben. Es sei

$$H_n = \int_{-1}^{1} \frac{\eta^{n-1} \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta}{\zeta\eta - i}.$$

Man bekommt insbesondere für $n = 0$ und $n = 1$

$$H_0 = -\frac{\pi}{\zeta}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right)$$

$$H_1 = -\frac{\pi i}{\zeta^2}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right),$$

wobei $\Re \sqrt{\zeta^2+1} \geq 0$. Andererseits ist für $n \geq 2$

$$H_n = \left(\frac{i}{\zeta}\right)^{n-1} H_1 + \frac{1}{\zeta^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{n-2} (i)^\nu \binom{n-1}{\nu} \int_{-1}^{1} (\zeta\eta - i)^{n-\nu-2} \sqrt{1-\eta^2}\, d\eta.$$

Für $n = 0$ bis $n = 3$ ergibt sich somit

$$\left.\begin{aligned}
G_0 &= -\pi\left(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
H_0 &= -\frac{\pi}{\zeta}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
G_1 &= \frac{\pi i}{2} + \pi i \zeta\left(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
H_1 &= -\frac{\pi i}{\zeta^2}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
G_2 &= \frac{\pi}{2}\zeta + \pi\zeta^2\left(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
H_2 &= \frac{\pi}{2\zeta} + \frac{\pi}{\zeta^3}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
G_3 &= \frac{\pi i}{8} - \frac{\pi i}{2}\zeta^2 - \pi i \zeta^3\left(\zeta \mp \sqrt{\zeta^2+1}\right)\\
H_3 &= \frac{\pi i}{2\zeta^2} + \frac{\pi i}{\zeta^4}\left(1 - \sqrt{\zeta^2+1}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

2. Der mittlere Abwind und der mittlere Drall.

Für die Beurteilung der Strömung im Strahlquerschnitt haben vor allem gewisse Mittelwerte oder auch Einzelwerte Bedeutung, so insbesondere etwa die mittlere Abwindgeschwindigkeitauf dem Strahldurchmesser zwischen $y = -1$ und $y = +1$ (s. Bild 5), die zunächst abgeleitet werden soll. Bezeichnet man diese Größe mit $\overline{w}$, so ist

$$\overline{w} = -\frac{V_s}{2} \Re\left[i f(i) - i f(-i)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

wo f das komplexe Potential nach (34) ist. Setzt man den Ausdruck für f ein, so erhält man nach einiger Umrechnung

$$\overline{w} = \frac{V_s}{\pi} \sum_{0}^{\infty} B_n \int_{-1}^{1} \frac{\eta^n\, d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

oder schließlich, indem man wieder auf die Γ_n übergeht,

$$\overline{w} = V_s \sum_{0}^{\infty} \Gamma_{2n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Zum Vergleich möge der ähnlich definierte mittlere Abwind hinter einem Flügel der Spannweite $2R$ im unbegrenzten Luftstrom berechnet werden. Bezeichnet man die Anströmgeschwindigkeit mit V_s, so ergibt sich

$$\overline{w}^* = \frac{V_s}{2} \sum_{0}^{\infty} \Gamma_{2n+1}.$$

Der Einfluß der Strahlgrenzen verdoppelt also den hier eingeführten mittleren Abwind. Allerdings wird bei diesem Vergleich vorausgesetzt, daß die Zirkulationsverteilung in beiden Fällen dieselbe ist. Da das bei zwei geometrisch ähnlichen Flügeln, von denen der eine im unbegrenzten Strom ist, während der andere einen Strahl schneidet, nicht der Fall ist, so besteht eine etwas weniger einfache Beziehung zwischen ihren Abwindbeträgen. Für kleine Werte μ bleibt allerdings das Verhältnis 2 für $\overline{w}/\overline{w}^*$ näherungsweise erhalten. Für größere Werte μ wird jedoch dieses Verhältnis kleiner.

Als für den Abwind charakteristisch kann ferner auch sein Wert in der Mitte des Strahls gelten. Diese mit w_0 bezeichnete Größe errechnet sich zu

$$w_0 = V_s\left[\frac{3\,\Gamma_1}{4} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)\,\Gamma_{2n+1}}{2}\right] \qquad (38)$$

Der Abwind w erscheint in jedem Fall proportional der Geschwindigkeit V_s, die man im Sinne von Gleichung (1) auch als die axiale Zusatzgeschwindigkeit im Strahl deuten kann. Andererseits sind die Zirkulationskoeffizienten in (37) und (38) proportional dem Anstellwinkel des Flügels, der hier dem in Gleichung (1) benutzten Winkel β entspricht. Der Beiwert σ kann daher ohne weiteres ausgerechnet werden. Insbesondere seien im folgenden die Beiwerte $\overline{\sigma}$ und σ_0 betrachtet, die entsprechend den Gleichungen (37) und (38) den Mittelwert des Abwindes über den der tragenden Linie parallelen Halbmesser und den Wert in Strahlmitte darstellen. Bild 6 enthält ihren Verlauf für ein praktisch wichtiges Intervall von μ. Dieselbe Abbildung enthält auch die entsprechend gebildeten Verhältnisse $\overline{\sigma}^*$ und σ_0^* (also das Verhältnis des vom Schraubenstrahl ohne Schräganblasung bedingten Abwindes zum Produkt aus zusätzlicher Strahlgeschwindigkeit und α), wie sie sich auf Grund der Koningschen Theorie ergeben, einer Theorie also, die dem Fall einer schwach inhomogenen Strömung entspricht. Es zeigt sich das wohl nicht zu erwarten gewesene Ergebnis, daß die Koningsche Theorie größere Abwindwerte liefert als die hier entwickelte Theorie der unendlich stark inhomogenen Strömung.

Der Vergleich mit Meßergebnissen ist leider nur sehr unvollkommen möglich, weil hierzu nur wenige Versuche[20] in Frage kommen. Sämtlichen Versuchen liegt außerdem eher der Fall der schwach inhomogenen Strömung zugrunde, trotzdem ist es aber nicht uninteressant, gerade diesen Fall mit den Theorien der schwach und der unendlich stark inhomogenen Strahlströmung zu vergleichen. Die Messungen

[20] Die Zusammenstellung von F. B. Bradfield in R. & M. 1488 (Techn. Rep. of the A. R. C. 1932/33, Bd. II) enthält zwar die Ergebnisse einer großen Reihe von Modellversuchen, ist aber für unsere Zwecke nicht brauchbar, weil gewisse notwendige Angaben über Flügelabmessungen fehlen. Außerdem besitzt die Mehrzahl der untersuchten Modelle einen Rumpf.

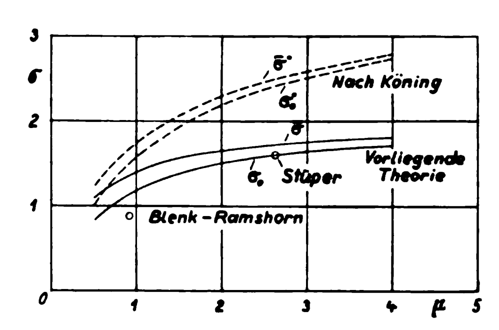


Bild 6. Abhängigkeit des Beiwerts σ von μ nach der Theorie des »stark inhomogenen« Strahls und der des »schwach inhomogenen« Strahls. Vergleich mit Messungen.

von Stüper[21]), bei denen der Strahl durch ein Gebläse erzeugt wurde, sind im Hinblick auf Drallfreiheit des Strahls und Fehlen einer Schräganblasung in guter Übereinstimmung mit den Voraussetzungen der Theorie. Leider geben sie jedoch nicht den Abwindverlauf von Punkt zu Punkt oder wenigstens gemittelt über das Gebiet im Strahlinnern. Der Abwindwinkel wird hier statt dessen durch eine Fühlfläche bestimmt, deren Breite (30 cm) erheblich größer ist als der Strahldurchmesser (12 cm). Der so gewonnene Abwind ist daher sehr viel kleiner als die theoretischen Werte. Nimmt man jedoch in roher Abschätzung an, daß die Fühlfläche entsprechend dem Anteil des Strahldurchmessers nur 40% des Abwindes im Strahl anzeigt (wir betrachten hier nur den durch die Schraube verursachten zusätzlichen Abwind), so ergibt sich ein Wert, der der theoretischen Größenordnung der vorliegenden Theorie gut gleichkommt, während er nur etwa $^2/_3$ des nach Koning berechneten Wertes ausmacht, Bild 6. Die bisher unveröffentlichten Messungen von H. Blenk und R. Ramshorn[22]) waren insofern günstiger angelegt, als die benutzte Fühlfläche sehr viel schmäler war als der Schraubendurchmesser. Der Strahl wurde durch eine Schraube erzeugt und besaß Drall. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung ist gut. Allerdings ist der Wert von μ klein, so daß der Unterschied zwischen der Koningschen und der vorliegenden Theorie klein ist, Bild 6.

Soweit man diesen spärlichen Messungen einiges Gewicht beilegen kann, fällt es jedenfalls auf, daß sie mit der Theorie des stark inhomogenen Strahls besser übereinstimmen als mit der Theorie des schwach inhomogenen Strahls (bei Stüper war $S = 1{,}18$ und $1{,}36$; bei Blenk und Ramshorn $S = 1{,}25$). Der Grund ist, wie schon eingangs bemerkt wurde, möglicherweise darin zu suchen, daß die turbulente Mischzone am Strahlrand eine Abschirmung des Innengebiete vom Außengebiet bewirkt, so daß die auf dasselbe herauskommende theoretische Annahme $S \to \infty$ darin ihre physikalische Rechtfertigung erhält.

Von Interesse mag schließlich noch die sog. »Gleichrichterwirkung« des Flügels auf den Strahl sein. Der Drall sämtlicher Teilchen des Strahlquerschnitts um den Strahlmittelpunkt setzt sich zusammen aus dem ungestörten Drall des Strahls und dem Drall der Strömung, die durch das System der freien Wirbel induziert wird. Man findet leicht, daß das Verhältnis des Strahls hinter dem Flügel zum Drall vor dem Flügel gleich ist

$$\delta = 1 + \frac{V_s \Gamma_2}{2\,\omega R},$$

wobei der Drall entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv gilt, und außerdem die einfache Voraussetzung zugrunde gelegt wird, daß der Strahl sich wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Nimmt man für Γ_2 die erste Näherung, so erhält man

$$\delta = 1 - \frac{\pi}{2\pi + 2a_2^2 + \dfrac{32}{15\mu}}.$$

Für sehr kleine μ ist δ annähernd gleich 1, d. h. der Drall bleibt erhalten. Für große μ ist dagegen

$$\delta \cong 0{,}633,$$

so daß also etwas weniger als $^2/_3$ des Dralls hinter dem Flügel erhalten bleibt. Bild 7 zeigt den Verlauf von δ in Abhängigkeit von μ. Das schraffierte Gebiet deutet die Größenordnung von δ an, die auf Grund von Versuchen feststeht, wobei diese Versuche[23]) wohl nicht ganz die hier eingeführte Größe δ erfassen, der der Drall im gesamten Querschnitt zugrunde liegt.

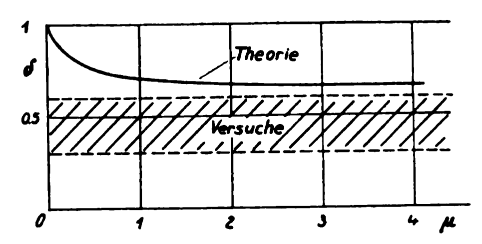


Bild 7. Gleichrichterwirkung des Tragflügels auf den Strahl (δ = Drall hinter dem Flügel/Drall vor dem Flügel).

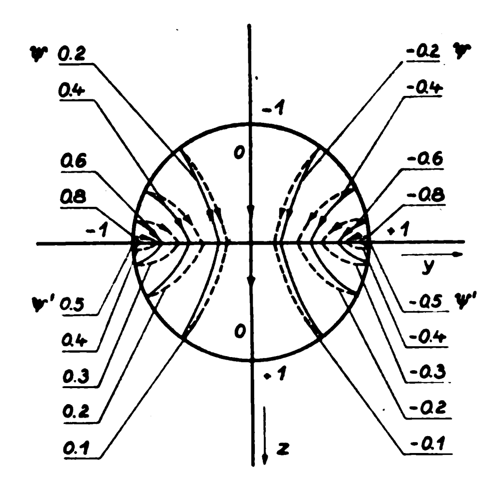


Bild 8. ψ' = konst. Stromlinien ohne Strahlrandeinfluß (— — —); ψ = konst. Stromlinien bei Berücksichtigung des Strahlrandeinflusses (—). In beiden Fällen elliptische Zirkulationsverteilung.

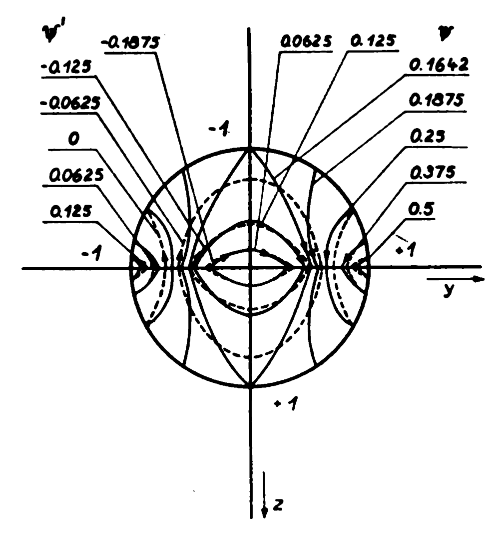


Bild 9. ψ' = konst. Stromlinien ohne Strahlrandeinfluß (— — —); ψ = konst. Stromlinien mit Berücksichtigung des Strahlrandeinflusses. In beiden Fällen dreht sich der Strahl wie ein »starrer Körper«.

3. Strömungsbilder.

Zur Veranschaulichung der durch die Potentiale (35) gegebenen Strömung sind im folgenden die Strömungsbilder für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ dargestellt. Betrachtet man die dem Potential G_0 entsprechende Strömung (gestrichelte Stromlinien Bild 8), so erkennt man — worauf schon oben hingewiesen worden ist —, daß es die Strömung um eine mit konstanter Geschwindigkeit nach abwärts bewegte Platte ist. Bei einer elliptischen Zirkulationsverteilung im unbegrenzten Medium wäre das die vollständige Strömung. Nun überlagert sich ihr im vorliegenden Fall noch der Anteil des Potentials H_0, wodurch der Einfluß der freien Strahlgrenzen zum Ausdruck kommt. Die resultierenden Stromlinien sind in Bild 8 voll ausgezogen. Die abwärts gerichtete Geschwindig-

[21]) J. Stüper, Einfluß des Straubenstrahls auf Flügel und Leitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 181.

[22]) H. Blenk und R. Ramshorn, Messungen des Schraubenstrahleinflusses auf die Auftriebsverteilung und den Abwind (1936). Die Versuchsanordnung ist kurz beschrieben und einige Ergebnisse diskutiert in A. v. Baranoff, Tragflügel im Schraubenstrahl. Jahrb. 1939 d. dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 222.

[23]) R. Schmidt, Experimenteller Beitrag zum Problem »Abwind und Schraubenstrahl«. Jahrb. 1937 d. dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 139. W. Stieß, Über den Einfluß des Luftschraubendrehsinns auf die Längsstabilität von zweimotorigen Flugzeugen. Jahrb. 1938 d. dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 206

keitskomponente auf der y-Achse ist jetzt nicht mehr konstant, sondern wächst von der Strahlmitte aus nach dem Rande hin. Bei Annäherung an $y = \pm 1$ wird sie sogar unendlich, jedoch so, daß das Integral noch endlich bleibt.

In Bild 9 sind die Verhältnisse für den Fall $n = 1$ dargestellt. Hier muß allerdings noch für die Darstellung der vollständigen Strömung der Anteil der direkten Strahldrehung hinzugenommen werden.

V. Zusammenfassung.

Untersucht wird der Einfluß des Schraubenstrahls auf den Abwind, und zwar nur derjenige Teil des Abwindes, der durch die geänderte Zirkulationsverteilung am Flügel zustande kommt. Der direkte Anteil des Strahls am Abwind bleibt außerhalb der Betrachtung.

Strahl und Außengebiet haben im ungestörten Zustand eine gleichförmige und einander parallele Strömung. Durch das Hinzukommen eines Tragflügels, der den Strahl senkrecht und zentrisch schneidet, entsteht eine Störung der Grundströmung, die es zu berechnen gilt. Es zeigt sich, daß nur die beiden extremen Fälle einer schwach inhomogenen Strömung (Strahlgeschwindigkeit nur wenig größer als Außengeschwindigkeit) und einer stark inhomogenen Strömung (Strahlgeschwindigkeit sehr viel größer als Außengeschwindigkeit) rechnerisch einfach sind. Die vorliegende Arbeit macht die an zweiter Stelle genannte Voraussetzung. Nach Aufstellung der Integralgleichung für die Zirkulation um den Flügel wird die Lösung durch einen direkten trigonometrischen Ansatz (nach Art der Lotzschen Methode) gewonnen. Die Kenntnis der Zirkulation ermöglicht sodann die Ermittlung der Störungsströmung im Strahl (zwar in unendlicher Entfernung vom Flügel, was jedoch für das Leitwerk in guter Näherung zutrifft). Es werden einige Mittelwerte für den Abwind berechnet und mit Meßergebnissen verglichen, wobei die Übereinstimmung besser ist als im Fall der Theorie des »schwach inhomogenen« Strahls, die einen zu großen Abwind liefert. Zum Schluß werden zwei Stromlinienbilder berechnet, aus denen der Strömungscharakter im Strahl (sofern von allen Vorgängen der fortgeschrittenen »Aufrollung« der Wirbelfläche abgesehen wird) ersichtlich ist.

Flatterrechnung für Profile geringer Tiefe.

Von A. Schallenkamp, Augsburg.

Das Schwingungsverhalten eines schmalen Profils bei starker Massenkopplung wird untersucht, wobei angenommen wird, daß die reduzierte Frequenz wegen der geringen Tiefe klein ist und daher das stationäre Luftkraftgesetz gilt. Bei Übereinstimmung der Biege- und Drehfrequenz ergibt sich ein sehr übersichtlicher Zusammenhang zwischen kritischer Geschwindigkeit, Frequenz und Massenkopplung.

Gliederung.

Es sind im Flugbetrieb wiederholt Flattererscheinungen an schmalen Profilen (Profildrähten, Antennenmasten, Streben) beobachtet worden, die sich vom Flügel- oder Leitwerkflattern dadurch unterscheiden, daß die Biegeamplituden im Verhältnis zur Flügeltiefe sehr groß sind. Bei den großen Amplituden treffen die Ansätze der gebräuchlichen instationären Luftkräfte nicht mehr zu, denn die sich ablösenden Wirbel liegen nicht mehr in der Ebene der Platte.

Es soll im folgenden eine Rechnung gezeigt werden, die wegen der im Hinblick auf Luft- und Reibungskräfte getroffenen Annahmen nicht den Anspruch darauf erhebt, den Geschwindigkeitsbereich der Flatterfreiheit genau abzugrenzen, sondern Anhaltspunkte dafür gibt, ob durch geeignete Massenkopplung Flatterfreiheit erreicht werden kann oder nicht. Die Rechnung wird sowohl für anliegende $\left(\frac{d c_a}{d\alpha} > 0\right)$ als auch für abgerissene Strömung $\left(\frac{d c_a}{d\alpha} < 0\right)$ durchgeführt, und es zeigt sich, daß die Massenkopplung im ersten Fall entgegengesetzt wirkt wie im zweiten.

A. Biege- und Drehschwingungen mit anliegender Strömung.

Der hier gegebenen Berechnung liegt die Vorstellung zu Grunde, daß durch den Drehungsfreiheitsgrad der Anstellwinkel sich ändert und damit das Profil einen Auftrieb erfährt, der bei geeigneter Phasenverschiebung zwischen Biegung und Drehung zur Anfachung führt. Wegen der geringen Tiefe des Profils und der verhältnismäßig hohen Geschwindigkeit, bei der das Flattern beobachtet wird, ist die reduzierte Frequenz

$$\omega_R = \frac{\omega \cdot t}{2v} < 0{,}1.$$

Man kann daher für $\frac{d c_a}{d\alpha}$ den zum Profil im stationären Fall gehörigen Wert einsetzen; dieser ist wegen der meistens unscharfen Hinterkante bei den schmalen Profilen ungefähr $= \pi$. Der durch die Schlagbewegung des Profils hervorgerufene Anstellwinkel ist $A\frac{\dot y}{v} = A i\omega \frac{y}{v} e^{i\omega t}$. Es soll ferner die Reibung berücksichtigt werden, die amplitudenproportional, phasengleich mit $\dot y$ bzw. $\dot\alpha$ und frequenzunabhängig angenommen wird, sie ist $A i y r_1 e^{i\omega t}$ für Biegung und $B i \alpha r_2 e^{i\omega t}$ für Drehung. In unserem Ansatz ist angenommen, daß das Drehmoment der Luftkräfte auf das Profil vernachlässigbar ist gegenüber dem der Massenträgheit; die Massenkopplung ist durch eine Zusatzmasse im positiven bzw. negativen Sinne vergrößert. Dann lauten die Schwingungsgleichungen des ebenen Problems:

$$A\left(c_1 - m\omega^2 + i\pi\frac{\varrho}{2}t\omega v + i r_1\right) + B\left(-\omega^2 m s + \pi\frac{\varrho}{2}t v^2\right) = 0$$

$$A\left(-\omega^2 m s\right) + B\left(c_2 - \Theta\omega^2 + i r_2\right) = 0$$

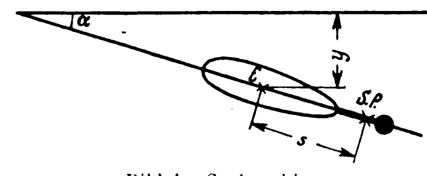


Bild 1. Systemskizze.

Zeichenerklärung:

- c_1 Biegefederkonstante,
- c_2 Drehfederkonstante,
- m Masse des Stabes,
- Θ Massenträgheitsmoment um elastische Achse,
- ϱ Luftdichte,
- t Profiltiefe,
- s Schwerpunktsabstand von elastischer Achse, Bild 1,
- ω Kreisfrequenz,
- v Fluggeschwindigkeit,
- Ay Biegeamplitude, $B\alpha$ Drehamplitude — y und α sind in der Rechnung $= 1$ gesetzt
- r Reibungskonstante,
- τ Zeitkoordinate,
- z Koordinate in Richtung Spannweite.

Die Unbekannten ω und v ergeben sich aus der Bedingung, daß im Flatterfall Real- und Imaginärteil der Determinante je für sich 0 werden.

$$\begin{vmatrix} c_1 - m\omega^2 + i\pi\frac{\varrho}{2}t\omega v + i r_1 & -\omega^2 m s + \pi\frac{\varrho}{2}t v^2 \\ -\omega^2 m s & c_2 - \Theta\omega^2 + i r_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1 c_2 - c_1\Theta\omega^2 - c_2 m\omega^2 + m\Theta\omega^4 - \pi\frac{\varrho}{2}t r_2\omega v - r_1 \cdot r_2 - m^2 s^2\omega^4 + \pi\frac{\varrho}{2}t m s\omega^2 v^2 = 0 \quad (1)$$

$$c_1 r_2 - m r_2\omega^2 + \pi\frac{\varrho}{2}t c_2\omega v - \pi\frac{\varrho}{2}t\Theta\omega^3 v + c_2 r_1 - \Theta r_1\omega^2 = 0 \quad (2)$$

Aus (2) ergibt sich

$$v = \frac{r_2(m\omega^2 - c_1) + r_1(\Theta\omega^2 - c_2)}{\pi\frac{\varrho}{2}t\omega(c_2 - \Theta\omega^2)} \quad . \; . \; . \; . \quad (2')$$

Wird die Reibung 0, so kann nur dann $v \neq 0$ werden, wenn auch der Nenner verschwindet, also $c_2 - \Theta\omega^2 = 0$ ist, d. h. aber, daß der Stab, wenn überhaupt, dann mit der Drehfrequenz flattert. $r = 0$ ist allerdings eine grobe Vernachlässigung, da die Luft sehr stark dämpft.

Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn Biege- und Drehfrequenz übereinstimmen. Die zweite Gleichung ist dann identisch für alle v erfüllt. Aus der ersten Gleichung ergibt sich eine quadratische Gleichung für v

$$v^2 - \frac{r_2}{m s\omega}v + \frac{1}{\pi\frac{\varrho}{2}t m s\omega^2}\left(-r_1 r_2 - m^2 s^2\omega^4\right) = 0$$

$$v = \frac{r_2}{2 m s\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{\pi\frac{\varrho}{2}t m s\omega^2}\left(r_1 r_2 + m^2 s^2\omega^4\right) + \frac{1}{4}\frac{r_1 r_2}{m^2 s^2\omega^2}}.$$

Für $r = 0$ ist

$$v = \omega\sqrt{\frac{m s}{\pi\frac{\varrho}{2}t}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

der Grenzübergang $s \to 0$ ist wegen der Vernachlässigung des Momentes der Luftkräfte gegenüber dem der Massenkopplung nicht erlaubt.

Setzt man die Reibung $r = 0$, so ändert der Radikand mit s sein Vorzeichen, wird also bei vorverlegtem Schwerpunkt negativ. Ist $r \neq 0$, so ist dennoch im allgemeinen bei negativem s die Wurzel imaginär, da das zweite Glied unter der Wurzel gegenüber dem ersten sehr klein ist.

Im Resonanzfall gilt:

Liegt der Schwerpunkt vor der elastischen Achse, so ist der Stab nicht anfachbar.

Zum Verständnis des Flattervorgangs soll nicht versäumt werden, in diesem einfachen Falle den Phasenunterschied φ zwischen Biege- und Drehschwingung zu bestimmen. Wir setzen

Biegeschwingung $= A\,c^{i(\omega\tau + \varphi)}$
Drehschwingung $= B\,c^{i\omega\tau}$.

Der Quotient der beiden Schwingungen ergibt sich aus (1) und (2)

$$\frac{A\,c^{i(\omega\tau+\varphi)}}{B\,c^{i\omega\tau}} = \frac{A}{B}\,c^{i\varphi} = \frac{i\,r_2}{\omega^2 m s} = \frac{i\left(\omega^2 m s - \pi\frac{\varrho}{2}t\,v^2\right)}{\omega\pi\frac{\varrho}{2}t\,v + r_1}$$

er ist rein imaginär, und zwar positiv imaginär für $+s$, negativ imaginär für $-s$. Daraus folgt, daß φ im ersten Fall $+\frac{\pi}{2}$, im zweiten $-\frac{\pi}{2}$ sein muß.

Ist $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, so eilt die Biegung der Drehung um $\frac{\pi}{2}$ voraus, das ergibt Anfachung, Bild 2.

Für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ eilt die Drehung der Biegung um $\frac{\pi}{2}$ voraus, das System ist gedämpft, Bild 3.

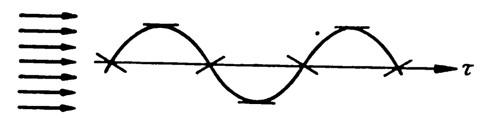


Bild 2. Angefachte Schwingungen.

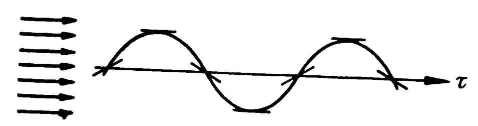


Bild 3. Gedämpfte Schwingungen.

Weichen Biege- und Drehfrequenz voneinander ab, so läßt sich nicht so ein einfacher Ausdruck für die kritische Geschwindigkeit angeben. Für geringere Frequenzunterschiede gilt aber sicher noch das oben abgeleitete Gesetz. Sonst geht man so vor, daß man (2′) für verschiedene ω-Werte ausrechnet, in (1) einsetzt und die Nullstellen graphisch ermittelt. Nach diesem Verfahren haben wir einige Beispiele gerechnet, und es ergab sich, daß Schwerpunktsvorlage das Flattern verhindert. Dieses Ergebnis ist auch durch Versuche bestätigt worden.

B. Abreißschwingungen.

Wenn der Anstellwinkel für $c_{a\,\max}$ überschritten ist, so können Abreißschwingungen auftreten. Die vorhergehenden Gleichungen sind auf diesen Fall auch anwendbar, wenn man berücksichtigt, daß $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} < 0$ ist.

Da in erster Linie das grundsätzliche, weniger das quantitative Verhalten des Schwingungssystems interessiert, setzen wir $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = -\pi$ in unsere Rechnung ein. Man erkennt, daß hier Schwingungen mit einem Freiheitsgrad möglich sind. Die Gleichung der Biegeschwingung lautet nämlich

$$c_1 - m\,\omega^2 - i\,\pi\,\frac{\varrho}{2}\,t\,\omega\,v + i\,r = 0.$$

Diese Gleichung ist für ein reelles Wertepaar ω, v erfüllt, was bei anliegender Strömung wegen des gleichen Vorzeichens der beiden imaginären Glieder nicht der Fall ist.

Ist die Biegeschwingung mit der Drehschwingung gekoppelt, so gelten folgende Gleichungen:

$$c_1 c_2 - c_1\Theta\omega^2 - c_2 m\,\omega^2 + m\,\Theta\,\omega^4 + \pi\frac{\varrho}{2}t\,r_2\,\omega\,v - r_1 r_2 - m^2 s^2\omega^4 - \pi\frac{\varrho}{2}t\,m\,s\,\omega^2 v^2 = 0$$

$$c_1 r_2 - m\,r_2\,\omega^2 - \pi\frac{\varrho}{2}t\,c_2\,\omega\,v + \pi\frac{\varrho}{2}t\,\Theta\,\omega^3 v + c_2 r_1 - \Theta\,r_1\,\omega^2 = 0$$

Die Gleichungen gehen aus (1) und (2) hervor, indem die Ausdrücke, die π enthalten, mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden.

Im Falle der Übereinstimmung von Biege- und Drehfrequenz ergibt sich die Gleichung:

$$v = \frac{r_2}{2\,m\,s\,\omega} \pm \sqrt{\frac{-1}{\pi\frac{\varrho}{2}t\,m\,s\,\omega^2}\left(r_1 r_2 + m^2 s^2\omega^4\right) + \frac{1}{4}\,\frac{r_1\cdot r_2}{m^2 s^2\omega^2}}.$$

Hier ergibt sich nur dann eine reelle Geschwindigkeit, wenn s negativ wird, also bei Schwerpunktsvorlage.

C. Genauigkeit der Rechnung.

Wichtige Voraussetzung zu den vorstehenden Gleichungen ist eine genügend große Massenkopplung, so daß das Luftkraftmoment vernachlässigt werden kann. Ist außerdem die reduzierte Frequenz klein, so hat das Verfahren die Genauigkeit einer stationären Rechnung. Wie groß der Fehler bei großen ω_r wird, soll ein Vergleich einer Leitwerksrechnung mit weit hintenliegenden Seitenflossen, also großer Massenkopplung, die mit exakten instationären Luftkräften durchgeführt ist, mit einer Näherungsrechnung nach den hier angegebenen Gleichungen zeigen.

Übertragen wir unseren Ansatz mit Hilfe des Energiesatzes auf das räumliche Problem, so erhalten wir bei Übereinstimmung von Biege- und Drehfrequenz und Vernachlässigung der Reibung

$$v = \omega\sqrt{\frac{\int_0^b m\,s\,y\,\alpha\,dz}{\int_0^b \pi\,\varrho\,t\,y\,\alpha\,dz}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3')$$

Hier ist natürlich $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 2\,\pi$ gesetzt. Es ergab sich nach der exakten Rechnung $v_k = 570$ km/h und nach obiger Näherungsformel $v_k = 520$ km/h, das ist eine sehr gute Näherung. Richtiger ist es, wenn man für $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}$ den wirklichen Wert einsetzt, also im Falle des Leitwerks $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 5{,}5$.

Aus den vorhergehenden Überlegungen zum Amplitudenverhältnis ersieht man, daß für $r_2 = 0$ die Biegeamplitude 0 ist. Da immer etwas Energie vernichtet wird, teils durch Materialreibung, teils durch Bildung von Luftwirbeln, so besteht die Schwingung im wesentlichen aus einer Drehung um die elastische Achse, die Biegeamplitude der elastischen Achse ist demgegenüber gering.

D. Zusammenfassung.

Bei Biegedrehschwingungen mit anliegender Strömung ergibt die Rechnung, daß Schwerpunktsvorlage das Flattern beseitigt. Diese Tatsache ist bekannt und durch Versuche bestätigt. Es ist jedoch beobachtet worden, daß trotz Schwerpunktsvorlage zuweilen Flattern auftritt. Hierfür gibt die Rechnung die Erklärung, daß es sich um Abreißschwingungen mit einem oder mit zwei Freiheitsgraden handelt. Im letzteren Fall würde Schwerpunktsrücklage das Flattern beseitigen, wenn Biege- und Drehfrequenz nahe beieinander liegen.

Die Tafel der Beiwerte für Gasreibung bei Verdichtern.

(μ-Tafel.)

Von C. Pfleiderer, Braunschweig.

Bei der Untersuchung des Verdichtungsvorgangs von Gasen sind infolge der unvermeidlichen Gasreibung einige Beiwerte wichtig, deren Größe und insbesondere deren innerer Zusammenhang aus den bisher verfügbaren Tafeln oder Formeln nicht genügend einfach ersichtlich ist. Es ist der Zweck der nachstehenden Arbeit, diesen Mangel durch Aufstellung einer Kurventafel zu beheben. Im Anschluß daran wird gezeigt, welche verschiedenartige Anwendung man von der neugeschaffenen Tafel machen kann.

Gliederung.

A. Der Mehrbetrag an reiner Verdichtungsarbeit durch das Hinzukommen der Reibungswärme. Entstehung der μ-Tafel.

Ebenso wie bei Dampfturbinen die Reibungswärme der oberen Stufeu teilweise in den folgenden Stufen zurückgewonnen wird, weil sie eine Wärmezufuhr darstellt, die das verfügbare Gesamtgefälle vergrößert[1]), so verursacht umgekehrt bei mehrstufigen Verdichtern die Reibungswärme eine Aufheizung des Gases und damit eine zusätzliche Verdichtungsarbeit der folgenden Stufen, weil das Gasvolumen größer wird und offenbar auch die entgegengesetzte Wirkung vorliegt, wie bei der arbeitsparenden Kühlung.

Von praktischer Bedeutung ist dieser Vorgang besonders bei mehrstufigen Kreiselverdichtern. Hier beeinflußt die erwähnte Mehrarbeit auch die Schaufelbemessung. Die spezifische Schaufelarbeit des ganzen Verdichters H_{th} steht zu der der einzelnen Stufen ΔH_{th} in der Beziehung

$$H_{th} = \Sigma \Delta H_{th} = \Sigma \frac{\Delta H_{ad}}{\eta_h} = \frac{1}{\eta_h} \Sigma \Delta H_{ad}.$$

Hierin ist aber die Summe der adiabatischen Stufenförderhöhen $\Sigma \Delta H_{ad}$ größer als die adiabatische Förderhöhe H_{ad} des ganzen Verdichters, wenn diese wie üblich auf den Anfangszustand bezogen wird. Also ist

$$\Sigma \Delta H_{ad} = \mu H_{ad}, \quad \dots \dots \quad (1)$$

wo die Beizahl μ größer als 1 ist und die durch die Reibungswärme bedingte Mehrarbeit an reiner Verdichtungsarbeit berücksichtigt. Die gesamte Mehrarbeit ist naturgemäß um die inneren Verluste größer. Letztere erscheinen zwar im Entropiediagramm, aber nicht im $p\,v$-Diagramm. Deshalb läßt sich der Mehrarbeitsbeiwert an Hand des letzteren Diagramms, Bild 1, bequem in folgender Weise ausdrücken:

$$\mu = \frac{\Sigma \Delta H_{ad}}{H_{ad}} = \frac{\text{Fläche } AB'\,BC'\,CE'\,FG}{\text{Fläche } AE''\,FG} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Die Zunahme der adiabatischen Gesamtarbeit infolge der Reibungswärme der vorhergehenden Stufen, welche in Bild 1 durch die schraffierten Flächen dargestellt ist, hat auch die bemerkenswerte Folge, daß der innere Wirkungsgrad des ganzen Verdichters (falls die inneren Arbeiten durch das Fußzeichen i unterschieden werden)

$$(\eta_i)_{ges} = \frac{H_{ad}}{H_i} = \frac{1}{\mu} \frac{\Sigma \Delta H_{ad}}{\Sigma \Delta H_i}$$

schlechter ist als der durchschnittliche Wirkungsgrad $(\eta_i)_{stufe} = \frac{\Delta H_{ad}}{\Delta H_i}$ der einzelnen Stufe. (Die inneren Arbeiten H_i und ΔH_i, Bild 2, umfassen hierin außer der Schaufelarbeit auch Radreibung und Undichtheiten.) Nehmen wir gleiche Stufengefälle ΔH_{ad} an, wobei dann im Falle gleichbleibenden Stufenwirkungsgrades auch die inneren Stufenarbeiten ΔH_i gleich sind, so ist nämlich bei i Stufen

$$\Sigma \Delta H_{ad} = i \Delta H_{ad}, \; \Sigma \Delta H_i = i \Delta H_i,$$

womit

$$(\eta_i)_{ges} = \frac{1}{\mu} (\eta_i)_{stufe} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

μ ist nach Gl. (2) um so größer, je größer das gesamte Verdichtungsverhältnis und die Stufenzahl ist. Daraus wird verständlich, warum der Gesamtwirkungsgrad mit zunehmendem Verdichtungsverhältnis abnimmt[2]). Diese Verschlechterung des Gesamtwirkungsgrades durch die hinzukommende Reibungswärme ist an sich unabhängig von der Stufenzahl, weil der absolute Betrag der zusätzlichen Verdichtungsarbeit — bei gleichem Wirkungsgrad — unabhängig davon ist, ob die Reibungswärme in getrennten Stufen oder in einem einzigen Rad erzeugt wird. Die Stufenzahl gewinnt aber Einfluß auf die Größe μ infolge der Bezugnahme auf die Stufenarbeit gemäß Gl. (2) oder den Stufenwirkungsgrad gemäß Gl. (3).

Diese Bezugnahme auf die Stufenarbeit ist bei der Ausrechnung der Stufenabmessungen nicht zu umgehen. Wie Bild 1 zeigt, bewirkt die Reibungswärme eine Vergrößerung der adiabatischen Stufenförderhöhe ΔH_{ad}. Deshalb ist es bei höheren Verdichtungsgraden ungekühlter Verdichter angebracht, den Mehrarbeitsbeiwert μ in die Rechnung

[1]) Z. VDI Bd. 84 (1940), S. 1033, woselbst weiteres Schrifttum.

[2]) Wobei noch nicht berücksichtigt ist, daß eine solche Verschlechterung schon durch die Volumenabnahme, also die Verengung der Kanäle und die Zunahme von Undichtheiten und Radreibung eintritt.

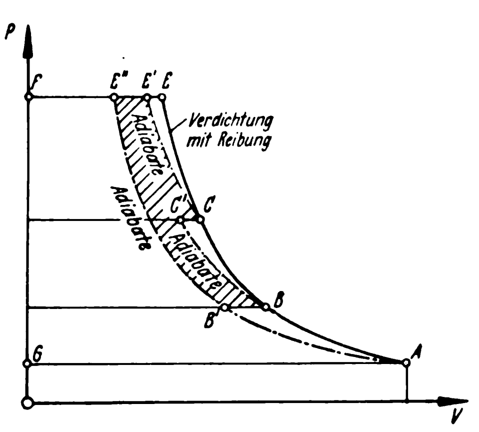


Bild 1. Zunahme der adiabatischen Gesamtarbeit durch die Reibungswärme der vorhergehenden Stufen (schraffiert dargestellt).

einzuführen, ebenso wie dies umgekehrt heute auch bei der Turbine geschieht. Zur Erleichterung dieser Rechnung sind die μ-Werte für zweiatomige Gase, d. h. für $k = c_p/c_v = 1{,}4$, in der beigefügten Kurventafel dargestellt, über deren Entstehung noch folgende Erläuterungen beigefügt sein sollen.

Im Hinblick auf die Abhängigkeit des Wertes μ vom Stufengefälle ist beim Aufbau der Tafel angenommen, daß das Gesamtgefälle des Verdichters auf unendlich viele Stufen aufgeteilt sei. In diesem Fall verschwinden in Bild 1 die dreieckigen Flächenwinkel längs der Adiabaten, z. B. $BC'C$, und es ist

$$\mu_\infty = \frac{\text{Fläche } A\,E\,F\,G}{\text{Fläche } A\,E''F\,G} = \frac{H_{\text{pol}}}{H_{ad}}.$$

Darin ist, wenn das Fußzeichen e den Eintritts- und a den Austrittszustand des Verdichters kennzeichnet und angenommen wird, daß die Verdichtung längs des ganzen Verdichters nach der gleichen Politrope mit dem Exponenten n geschieht

$$H_{ad} = \frac{k}{k-1}\,R\,T_e\left[\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$H_{\text{pol}} = \frac{n}{n-1}\,R\,T_e\left[\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] \quad . \; . \; . \quad (4\text{a})$$

Die letztere Größe stellt die reine Verdichtungsarbeit, wie sie aus dem $p\,v$-Diagramm als Fläche ersichtlich ist, also ohne innere Verluste z. B. durch Gasreibung, Undichtheiten usw., bei politropischer Verdichtung mit dem Exponenten n dar.

Also ist

$$\mu_\infty = \frac{H_{\text{pol}}}{H_{ad}} = \frac{\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1} \cdot \frac{n}{(n-1)}\,\frac{(k-1)}{k} \quad . \; . \quad (5)$$

Der erste Bruch der rechten Seite dieser Gleichung ist der reziproke Wert des Gesamtwirkungsgrades $(\eta_i)_{\text{ges}}$, weil er das Verhältnis der Temperaturzunahmen bei politropischer und adiabatischer Verdichtung bedeutet. Der zweite Bruch ist dann nach Gl. (3) der Wirkungsgrad der einzelnen Stufe mit verschwindend kleinem Stufengefälle, der jetzt mit $\eta_{i\infty}$ bezeichnet sei. Gl. (5) kann also im Einklang mit Gl. (3) auch geschrieben werden:

$$\mu_\infty = \eta_{i\infty}/(\eta_i)_{\text{ges}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

worin

$$(\eta_i)_{\text{ges}} = \frac{\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\eta_{i\infty} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{k-1}{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Mittels Gl. (6) bis (8) kann offenbar zu jedem Wertepaar n, p_a/p_e sowohl $(\eta_i)_{\text{ges}}$ wie μ_∞ berechnet werden. Die beiliegende Kurventafel enthält sowohl die Linien gleicher n als auch die Linien gleicher $(\eta_i)_{\text{ges}}$ mit den (logarithmisch aufgetragenen) Werten μ_∞ und p_a/p_e als Ordinate bzw. Abszisse[3]).

Beide Linienscharen sind fast gleichlaufend, weil eben längs der gleichen n-Linie, d. h. längs der gleichen Politropen, der Wirkungsgrad nur langsam mit steigendem Druckverhältnis kleiner wird. Bei der Auftragung von μ_∞ und p_a/p_e ist nicht der Logarithmus dieser Zahlen selbst, sondern von $\mu_\infty - 1$ und $p_a/p_e - 1$ als Koordinate gewählt. Dadurch wurde der große Vorteil erzielt, daß die Werte μ_∞ auch für Druckverhältnisse p_a/p_e nahe bei 1 mit der gleichen relativen Genauigkeit dargestellt werden konnten. Dies ist wichtig aus folgendem Grunde:

Aus dem Wert μ_∞ der unendlichen Stufenzahl ergibt sich der tatsächliche μ-Wert der wirklichen Stufenzahl gemäß

$$\mu = \frac{(\eta_i)_{\text{stufe}}}{(\eta_i)_{\text{ges}}} = \frac{\eta_{i\infty}}{(\eta_i)_{\text{ges}}} \cdot \frac{(\eta_i)_{\text{stufe}}}{\eta_{i\infty}},$$

also

$$\mu = \frac{\mu_\infty}{(\mu_\infty)_{\text{stufe}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8\text{a})$$

Darin ist entsprechend Gl. (6)

$$(\mu_\infty)_{\text{stufe}} = \frac{\eta_{i\infty}}{(\eta_i)_{\text{stufe}}}.$$

Der Mehrarbeitsbeiwert $(\mu_\infty)_{\text{stufe}}$ der einzelnen Stufe hat nur dadurch einen Sinn, daß ihm die Vorstellung zugrunde liegt, daß die einzelne Stufe wieder in unendlich viele Stufen mit dem Stufenwirkungsgrad $\eta_{i\infty}$ und mit dem Gesamtwirkungsgrad gleich dem wirklichen Stufenwirkungsgrad $(\eta_i)_{\text{stufe}}$ aufgeteilt sei. Um das wirkliche μ nach Gl. (8) zu erhalten, hat man aus der Kurventafel zunächst μ_∞ zum Druckverhältnis des gesamten Verdichters und dem erwarteten Gesamtwirkungsgrad $(\eta_i)_{\text{ges}}$ zu entnehmen. Dann wandert man auf der Linie der zugehörigen Politropen, d. h. des zugehörigen Exponenten n, nach links bis zur Ordinate des Stufendruckverhältnisses x, dessen Mittelwert man aus

$$x = \left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{1}{i}}$$

erhält. Dort entnimmt man das zugehörige $(\mu_\infty)_{\text{stufe}}$ und erhält damit μ aus Gl. (8a).

Die Kurventafel gibt also die Werte n und μ für jede Stufenzahl und jeden Wirkungsgrad schnell an. Die Stufendruckverhältnisse sind allerdings selbst bei gleicher Ausbildung der Schauflung der einzelnen Stufen infolge der wachsenden Temperatur nicht gleich groß. Deshalb ist für x der oben angegebene Mittelwert zu nehmen.

Der Übergang vom Diagrammpunkt des gesamten Verdichters auf den der einzelnen Stufe hat unter Beibehaltung des für die gesamte Verdichtung erhaltenen Exponenten n zu erfolgen, weil die Verdichtung von vornherein politropisch angenommen ist.

Ein besonderer Wert der Tafel liegt darin, daß sie gleichzeitig den Exponenten n, der zu dem gewählten Wirkungsgrad und dem vorhandenen Druckverhältnis paßt, angibt. Dies bedeutet für Untersuchungen, bei denen dieser Exponent gebraucht wird, eine erhebliche Erleichterung.

Der Vollständigkeit halber sind auch die Linien gleicher Temperaturverhältnisse eingetragen gemäß der Beziehung

$$\frac{T_a}{T_e} = \left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8\text{b})$$

Die zugehörigen Werte für $n = k$, d. h. $(T_a)_{ad}/T_e$, sind unterhalb der waagerechten Achse zu entnehmen. Dort sind auch die daraus sich ergebenden Größen

$$\frac{H_{ad}}{T_e} = \frac{c_p}{A} \cdot \left[\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = \frac{c_p}{A}\left(\frac{(T_a)_{ad}}{T_e} - 1\right)$$

beigefügt, so daß auch die zu jedem Druckverhältnis gehörige Förderhöhe H_{ad} ohne große Rechnung bekannt ist.

Um das mittlere Druckverhältnis $(p_a/p_e)^{\frac{1}{i}}$ ohne Logarithmentafel ausrechnen zu können, sind längs der Abszissenachse noch die Zahlenwerte der Logarithmen selbst bei den zugehörigen Werten p_a/p_e eingetragen.

Die Tafel ist von $(\eta_i)_{\text{ges}} = 0{,}3$ bis $0{,}90$ entsprechend $n \approx 8$ bis $1{,}45$ geführt, weil Wirkungsgrade außerhalb dieser Grenzen kaum Bedeutung haben. Die Linie $(\eta_i)_{\text{ges}} = 1$ entsprechend $n = k = 1{,}40$, $\mu_\infty = 1$ ist die Abszissenachse, liegt also infolge der gewählten Darstellung im Unendlichen. Die Linie $(\eta_i)_{\text{ges}} = 0$ entsprechend $p_a/p_e = 1$ fällt zusammen mit der ebenfalls unendlich fernen

[3]) Die Linien n = konst. sind unmittelbar nach Gl. (5) errechnet. Die Linien $(\eta_i)_{\text{ges}}$ = konst. werden mittels derselben Beziehung erhalten, wenn dort statt $\frac{n-1}{n}$ der aus Gl. (7) folgende Wert

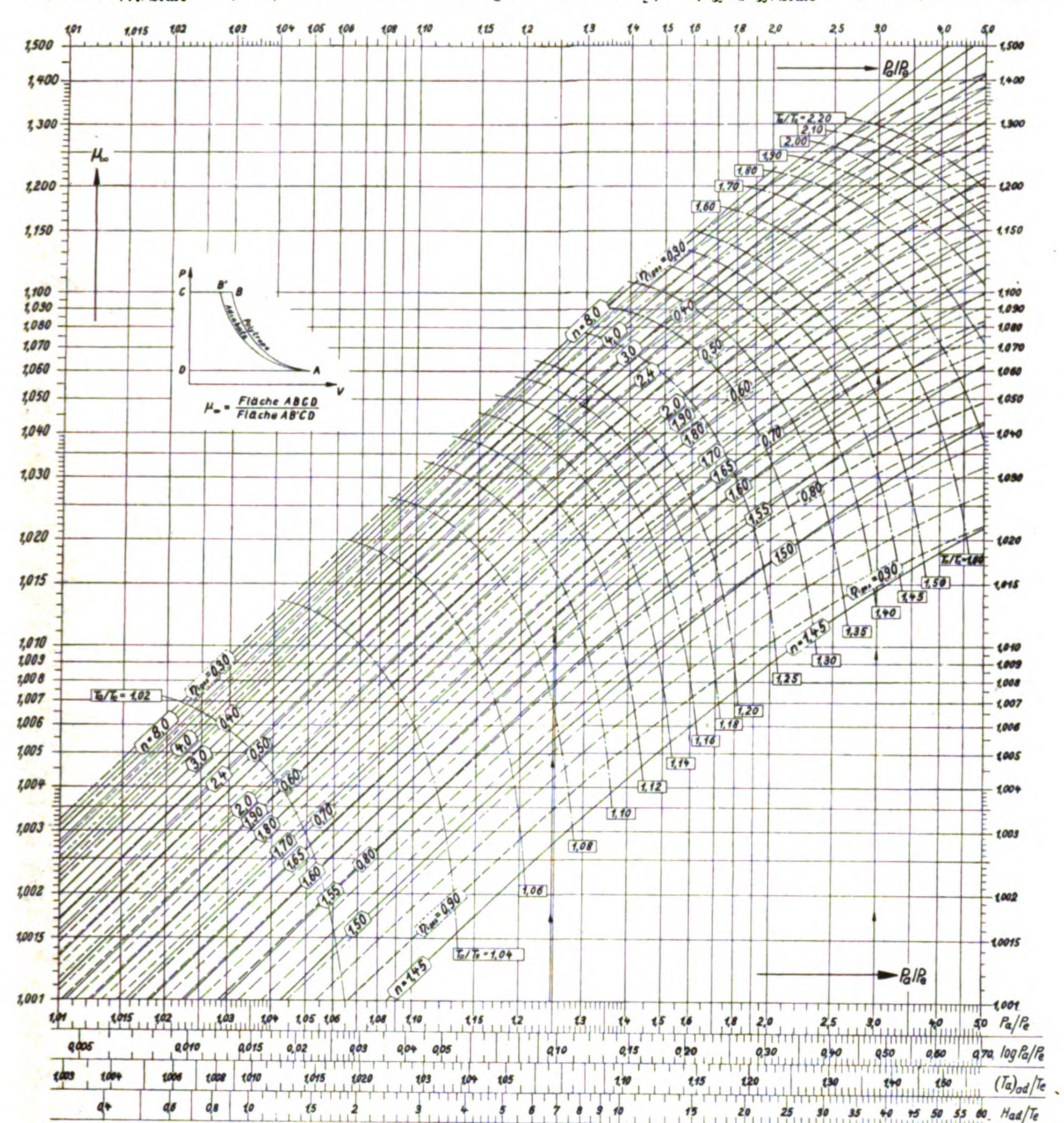
$$\frac{n-1}{n} = \frac{\log\left[\frac{1}{(\eta_i)_{\text{ges}}}\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{k-1}{k}} - \frac{1}{(\eta_i)_{\text{ges}}} + 1\right]}{\log\frac{p_a}{p_e}}$$

eingesetzt wird.

Tafel der Mehrarbeitsbeiwerte μ und Exponenten n für verschiedene Druckverhältnisse P_a/P_e und Wirkungsgrade $\eta_{i\,ges}$ bei der Verdichtung von 2-atomigen Gasen ($k = c_p/c_v = 1{,}4$).

Zahlenbeispiel: Gesamtes Druckverhältnis $P_a/P_e = 3$, innerer Gesamtwirkungsgrad $\eta_{i\,ges} = 0{,}7$ gibt $\mu_\infty = 1{,}060$, $n = 1{,}63$.

Längs dieser n-Linie folgt bei 5 Stufen mit dem durchschnittlichen Druckverhältnis $x = (P_a/P_e)^{\frac{1}{i}} = 3^{\frac{1}{5}} = 1{,}246$, $(\mu_\infty)_{\text{Stufe}} = 1{,}0112$, $(\eta_i)_{\text{Stufe}} = 0{,}734$, also für den 5-stufigen Verdichter $\mu = \mu_\infty/(\mu_\infty)_{\text{Stufe}} = 1{,}060/1{,}0112 = 1{,}048$.



Ordinatenachse, wo wegen Gl. (8) $n = 0$ sein muß, während die Linie $n = \infty$ wegen Gl. (8b) dort liegt, wo $T_a/T_e = p_a/p_e$, also punktweise mit Hilfe der T_a/T_e-Linien bestimmt werden könnte. Hier ist $(\eta_i)_{ges} > 0$, und zwar wegen Gl. (7) und (8) höchstens gleich $(k-1)\,k$.

Zahlenbeispiel. Gegeben sei ein gesamtes Druckverhältnis $\frac{p_a}{p_e} = 3$ und der innere Gesamtwirkungsgrad $(\eta_i)_{ges} = 0{,}7$. Damit gibt die Tafel sofort $\mu_\infty = 1{,}06$, $n = 1{,}63$. Sind 5 Stufen vorgesehen, so ist das mittlere Druckverhältnis für eine Stufe $x = (p_a/p_e)^{\frac{1}{i}} = 3^{1/5}$, das sich mittels der unterhalb der Abszisse angegebenen Logarithmenskala zu 1,246 errechnet. Man entnimmt nun im Schnitt der zu dieser Zahl gehörigen Ordinaten mit der Linie des bereits bekannten Exponenten $n = 1{,}63$ den Wert $(\mu_\infty)_{\text{stufe}} = 1{,}0112$ und erhält damit $\mu = \frac{\mu_\infty}{(\mu_\infty)_{\text{stufe}}} = \frac{1{,}06}{1{,}0112} = 1{,}048$. Auch den mittleren Stufenwirkungsgrad entnimmt man aus der $(\eta_i)_{ges}$-Kurve des zuletzt bestimmten Schnittpunktes zu $(\eta_i)_{\text{stufe}} = 0{,}734$. Damit ist sogar eine Probe für die Richtigkeit der Entnahme mit Hilfe der Beziehung $(\eta_i)_{\text{stufe}} = \mu\,(\eta_i)_{ges} = 1{,}048 \cdot 0{,}7 = 0{,}734$ gegeben.

Weiter ergibt sich

$$\frac{T_a}{T_e} = 1{,}529, \quad \frac{(T_a)_{ad}}{T_e} = 1{,}37, \quad \frac{H_{ad}}{T_e} = 37{,}9\ \text{m/}^0\text{K}.$$

B. Anwendungsbeispiele der μ-Tafel.

1. Berechnung des mehrstufigen ungekühlten Verdichters.

Bei i Stufen mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit und gleichen Schaufelwinkeln, Bild 2, ist das Stufengefälle nach Gl. (1)

$$\Delta H_{ad} = \mu \frac{H_{ad}}{i}.$$

Die gesamte Förderhöhe H_{ad} ist stets bekannt. Für die Berechnung des Verdichters ist aber das Stufengefälle

ΔH_{ad} notwendig, zu dessen genauer Ermittlung man also μ braucht[3a]), wenn man nicht eine Mollier-Tafel in außergewöhnlich großem Maßstab zur Hand hat. Zur Entnahme von μ aus der Tafel bestimmt man vorher das mittlere Druckverhältnis $x = (p_a/p_e)^{\frac{1}{i}}$ unter Benutzung der unter der Tafel angegebenen Logarithmenteilung, wie im vorigen Zahlenbeispiel angegeben.

2. Umrechnung von (z. B. auf dem Versuchsstand gewonnenen) Kennlinien eines Verdichters auf andere Betriebsverhältnisse.

a) Wechsel der Anfangstemperatur, falls der Verdichter und die Drehzahl gleich sind. Die Drosselkurve, d. h. die Linie gleicher Drehzahl im V_x, H_{ad}-Diagramm, wo V_x den Förderstrom in m³/s darstellt, ist bei Gasen — im Gegensatz zu Flüssigkeiten — nicht unabhängig von dem Ansaugezustand. Wie Gl. (4) zeigt, wird das Druckverhältnis p_a/p_e und damit auch das Volumenverhältnis wechseln müssen, wenn trotz wechselnder Anfangstemperatur T_1 oder wechselnder Gasart (also wechselndem R und $k = c_p/c_v$) die Förderhöhe H_{ad} gleichbleiben soll. Letzteres wird aber bei gleichem Stoßzustand, also gleichen Geschwindigkeitsplänen, gefordert werden müssen, weil ja die spezifische Schaufelarbeit $H_{th\,x}$ nach der Turbinenhauptgleichung nur von den Geschwindigkeitsverhältnissen abhängt und beide Werte in dem Zusammenhang stehen

$$H_{ad} = \eta_h H_{th}.$$

Nun wird zwar der Schaufelwirkungsgrad η_h nicht ganz unabhängig vom Gaszustand oder der Gasart sein[4]). Sieht man aber von dieser Veränderung ab, so wird ein solcher Wechsel bei gleichem mittleren Stoßzustand auch eine Veränderung von p_2/p_1 nach sich ziehen.

Die Änderung der Zusammendrückung ersieht man, wenn man der Zustandsänderung eine Politrope zugrunde legt gemäß

$$\frac{p_a}{p_e} = \left(\frac{V_e}{V_a}\right)^n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und also Gl. (4) lautet

$$H_{ad} = \frac{k}{k-1} R\, T_e \left[\left(\frac{V_e}{V_a}\right)^{\frac{k-1}{k} \cdot n} - 1\right] \quad \ldots \quad (10)$$

Ein Wechsel des Eintrittsdruckes wird demnach auf die Form der Drosselkurven, die in Abhängigkeit des Eintrittsstroms V_e oder Austrittsstroms V_a aufgetragen sind (wenn man von der Änderung der Reynoldsschen Zahl und damit der Reibung absieht), keinen Einfluß haben, sondern nur ein solcher der Gasart oder der Eintrittstemperatur T_e, weil dann das Volumenverhältnis wechselt.

Wir beschränken uns im folgenden auf gleichbleibende Gasart. Die vorausgesetzte Unveränderlichkeit von H_{ad} ist nach unseren obigen Überlegungen vorhanden bei gleichen Geschwindigkeitsplänen. Da diese Gleichheit nicht in jeder Stufe vorliegen kann, so darf sie nur im Mittel verlangt werden. Dadurch ist allerdings eine Veränderung der Stoßverluste bedingt, die aber bei den im vorliegenden Fall eintretenden Verschiebungen als klein betrachtet werden kann und deshalb vernachlässigt werden soll. Wir können also annehmen, daß die Drosselkurven unabhängig von der Anfangstemperatur sind, wenn die Auftragungen H_{ad} nicht in Abhängigkeit des Eintrittsstroms V_e oder des Austrittsstroms V_a, sondern eines mittleren Stroms V_m erfolgt.

Bei einstufigen Gebläsen wäre V_m gleich dem Spaltvolumen. Dieses ist im Fall senkrecht endigender Laufschaufeln wegen des Reaktionsgrades 1/2 ziemlich genau

$$V_m = \sqrt{V_e V_a}.$$

Der gleiche Wert soll im folgenden allgemein, also auch bei mehrstufigen Maschinen, zugrunde gelegt werden. Die Aufzeichnung des Schaubildes der Drosselkurven mit diesem mittleren Volumen als Abszisse wäre zwar möglich, aber nicht zweckmäßig, weil dieses mittlere Volumen nur rechnerische Bedeutung hat. Deshalb soll gezeigt werden, wie der neue Eintritts- oder Austrittsstrom V_e bzw. V_a erhalten wird.

Bei Gleichheit des mittleren Volumens ist

$$V_{ev} \cdot V_{av} = V_e \cdot V_a, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wobei das Fußzeichen v die Versuchswerte kennzeichnet. Die weiterhin verlangte Gleichheit der Förderhöhen bedingt nach Gl. (10)

$$T_{ev}\left[\left(\frac{V_{ev}}{V_{av}}\right)^{n\frac{k-1}{k}} - 1\right] = T_e\left[\left(\frac{V_e}{V_a}\right)^{n\frac{k-1}{k}} - 1\right] \quad (12)$$

Dabei wurde rechts und links der gleiche Exponent n verwendet, weil ja gleicher Wirkungsgrad vorausgesetzt ist. Zwar besteht nach der μ-Tafel für n auch eine Abhängigkeit vom Druckverhältnis, die aber im vorliegenden Fall nicht merkbar wird.

Ist nun beispielsweise ein vorhandenes Versuchsschaubild mit dem angesaugten Volumen V_{ev} umzurechnen, so kann man in Gl. (12) V_a aus Gl. (11) einsetzen und erhält

$$\frac{V_e}{V_{ev}} = \left[\frac{T_{ev}}{T_e} + \left(\frac{V_{av}}{V_{ev}}\right)^{n\frac{k-1}{k}} \cdot \frac{T_e - T_{ev}}{T_e}\right]^{\frac{k}{2n(k-1)}} \quad (13)$$

Bei Benutzung dieser Gleichung muß das Verhältnis V_{av}/V_{ev} aus den Versuchen zu dem betreffenden Versuchspunkt bekannt sein. Ist dies nicht der Fall, so ersetzt man diesen Wert besser durch die Förderhöhe H_{adv} und erhält unter Bezugnahme auf Gl. (10)

$$\frac{V_e}{V_{ev}} = \left[\frac{T_{ev}}{T_e}\left(1 + \frac{T_e - T_{ev}}{\frac{H_{adv}}{427\, c_{pv}} + T_{ev}}\right)\right]^{\frac{k}{2n(k-1)}} \quad \ldots \quad (14)$$

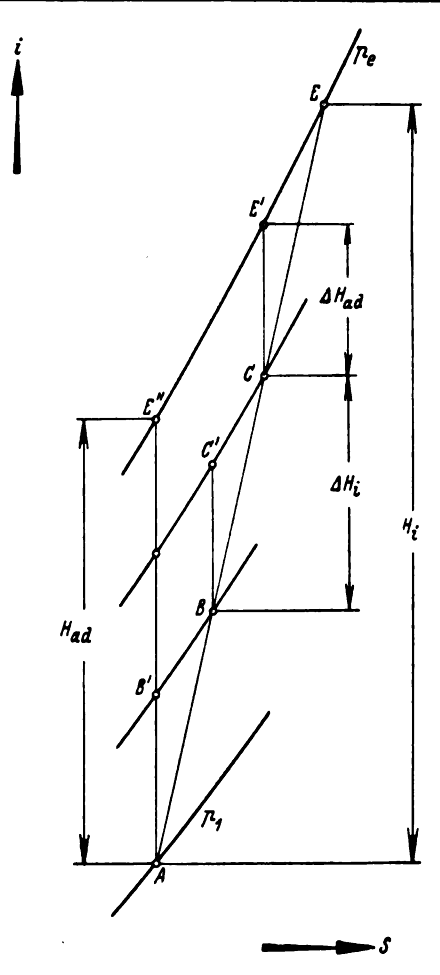


Bild 2. Darstellung einer dreistufigen Verdichtung im Mollier-*iS*-Diagramm unter Annahme gleich großer Stufenarbeit ΔH_i.

[3a]) Vgl. auch »Hütte« Bd. II z. B. 26. Aufl. S. 693.

[4]) Bei gleicher Gasart wird er mit abnehmender Temperatur in der Regel schlechter werden, weil das Volumenverhältnis sich vergrößert, also die Strömung in den Schaufelkanälen sich stärker verlangsamen muß. Diese Verschlechterung wird allerdings dann nicht eintreten, wenn die Kanalformen der stärkeren Verlangsamung angepaßt sind.



Die Werte H_{adv} und die spezifische Wärme c_{pv} (die meist als konstant betrachtet werden kann) sind stets bekannt. Man kann aber auch davon Gebrauch machen, daß der Ausdruck $H_{adv}/427\,c_{pv}$ die adiabatische Temperaturzunahme $\Delta\, t_{ad}$ bei den Versuchen darstellt, die meist aus der Auswertung der Versuche bekannt ist.

Den Exponenten n entnimmt man aus der μ-Tafel zu den beiden dem betrachteten Versuchspunkt eigenen Werten $(\eta_i)_{ges}$ und p_a/p_e, die bekannt sind.

An anderer Stelle ist gezeigt, daß bei nicht erheblichen Temperaturunterschieden $\Delta\, t_e = T_{ev} - T_e = t_{ev} - t_e$ die eintretende Volumenverschiebung $\Delta\, V_e = V_e - V_{ev}$ mit guter Annäherung sich errechnen läßt aus

$$\frac{\Delta\, V_e}{V_{ev}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\, V_v}{V_{ev}}\,\frac{\Delta\, t_e}{T_e},$$

wobei $\Delta\, V_v = V_{ev} - V_{av}$ die beim Versuch ermittelte Zusammendrückung darstellt und also der Einfluß von n nur noch in dieser Größe erscheint.

b) **Zuschaltung weiterer Stufen unter Beibehaltung der Drehzahl, Anfangstemperatur und Gasart.** Die Untersuchung soll zunächst auf den Fall beschränkt bleiben, daß die Drosselkurven und die Linie der Wirkungsgrade für eine Stufe vorliegen und weitere Stufen gleichen Durchmessers und Schaufelwinkels zugefügt werden, deren Breite so bemessen ist, daß bei einem bestimmten sekundlichen Durchsatzgewicht G gleichzeitig Stoßfreiheit in allen Stufen besteht und also auch die Förderhöhen gleich sind. Weicht der Durchfluß von diesem Wert ab, so werden die Förderhöhen verschieden groß. Hiedurch ändert sich die Zusammendrückung, so daß auch die Füllungsgrade in den einzelnen Stufen nicht mehr gleich sein können.

Wir verwenden bei der Darstellung der Kennlinien als Abszissen nicht den Absolutbetrag des Förderstroms, sondern die Füllung $\varepsilon = \frac{V_x}{V}$, wo V das Fördervolumen stoßfreien Eintritts und das Fußzeichen x — ebenso wie im folgenden — dartun soll, daß stoßfreier Eintritt nicht vorliegt. Dann kann die gegebene Drosselkurve der 1. Stufe für alle folgenden Stufen verwendet werden. Solange die Drosselkurve die adiabatische Förderhöhe H_{adx} als Ordinate enthält, gilt diese Übereinstimmung trotz des Umstandes, daß die Temperatur in den folgenden Stufen mit zunehmender Stufennummer wächst, weil die Schaufelarbeit H_{thx} innerhalb gewisser Grenzen[8]) vom Anfangszustand unabhängig ist. Dadurch wird dann stillschweigend berücksichtigt, daß das Druckverhältnis der einzelnen Stufe nach oben hin abnimmt.

Die Schwierigkeit liegt dann in der Vereinigung der Drosselkurven der einzelnen Stufen zu der des ganzen Verdichters, weil nur im Punkt $\varepsilon = 1$ die Füllung in allen Stufen gleich ist. Nur für diesen Punkt darf die Förderhöhe der 1. Stufe entsprechend vervielfacht werden[9]). Im übrigen wird im Fall $\varepsilon < 1$ die Füllung sich nach oben fortlaufend verkleinern, weil infolge des Anstiegs der Drosselkurve die Verdichtung größer ist als normal und umgekehrt im Fall $\varepsilon > 1$ vergrößern, weil jetzt das Durchsatzvolumen weniger stark verdichtet wird. Man sieht also, daß jede Abweichung von $\varepsilon = 1$ sich in den folgenden Stufen verstärkt.

In einwandfreier Weise kann diese Aufgabe mittels einer Mollier-is-Tafel gelöst werden, indem aus den gegebenen Kennlinien zu jedem ε die Werte $\Delta\, H_{adx}$ und η_i entnommen werden. Durch $\Delta\, H_{adx}$ ist die Austrittsisobare p_{2x} gegeben und durch η_i die innere Stufenarbeit

$$\Delta\, H_{ix} = \frac{1}{\eta_i}\,\Delta\, H_{adx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

die gemäß Bild 3 vom Eintrittszustand A_1 aus nach oben abgetragen wird. Damit ist auch der Eintrittszustand A_{2x} der zweiten Stufe, also das dortige spezifische Volumen v_{2x} und die Füllung

[8]) Hier ist nur die unter a besprochene Verschiebung der Abszissen unbeachtet geblieben, die im vorliegenden Fall unwesentlich ist, da sie auf andere Weise ausgeglichen werden wird.

[9]) Sofern man $H_{adx} = \sum \Delta\, H_{adx}$ setzt, also $\mu = 1$ annimmt, was hier ebenfalls geschehen soll.

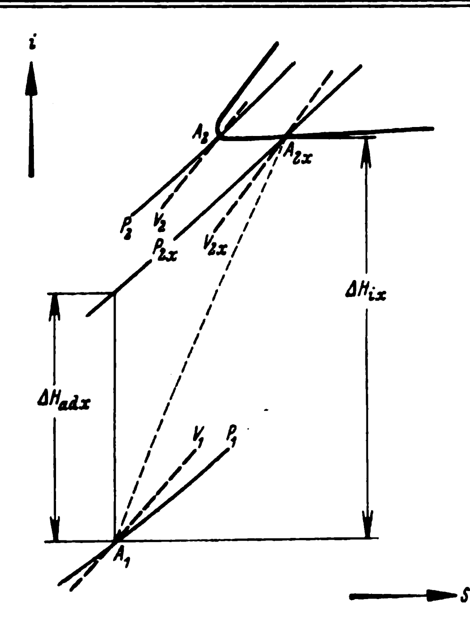


Bild 3. Übertragung der Drosselkurve in das Mollier-*iS*-Diagramm.

$$\varepsilon_2 = \frac{V_{2x}}{V_2} = \frac{G_x \cdot v_{2x}}{G \cdot v_2} = \varepsilon_1\,\frac{v_{2x}}{v_2}$$

bekannt. Von dem so erhaltenen Punkt A_{2x} aus berücksichtigt man in gleicher Weise die Verhältnisse der zweiten Stufe usw. Der gegebenen Kennlinie entspricht die Linie $A_2\,A_{2x}$ im Mollier-Diagramm. Die angegebene Bestimmung läßt sich ebenso auch rein rechnerisch, d. h. ohne Zuhilfenahme einer Entropietafel, durchführen.

Man kann nun diese Bestimmung auch ohne Molliertafel, aber unter Benutzung der μ-Tafel vornehmen, wenn man für die Zustandsänderung in den einzelnen Stufen ein politropisches Gesetz zugrunde legt. Kennzeichnet das Fußzeichen 1 den Eintrittszustand in die erste, das Fußzeichen 2 den Eintrittszustand in die zweite Stufe, so gilt:

für normale Förderung; $p_2\, V_2^n = p_1\, V_1^n$,

für Teil- oder Überlast: $p_{2x}\, V_{2x}^{n'} = p_1\, V_{1x}^{n'}$.

n' ist hiernach der Wert von n bei nicht stoßfreiem Eintritt. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{V_{2x}^{n'}}{V_2^n} = \frac{V_{1x}^{n'}}{V_1^n}\cdot\frac{p_2}{p_{2x}}$$

oder

$$\left(\frac{V_{2x}}{V_2}\right)^{n'}\frac{1}{V_2^{n-n'}} = \left(\frac{V_{1x}}{V_1}\right)^{n'}\cdot\frac{1}{V_1^{n-n'}}\,\frac{p_2}{p_{2x}}$$

$$\frac{V_{2x}}{V_2} = \frac{V_{1x}}{V_1}\cdot\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{n'-n}{n'}}\left(\frac{p_2}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}}.$$

Hierin stellen $\frac{V_{2x}}{V_2}$ bzw. $\frac{V_{1x}}{V_1}$ die zusammengehörigen Füllungen ε_2 bzw. ε_1 der ersten bzw. zweiten Stufe dar. Der Wert $\frac{V_1}{V_2}$ ist ein von der Füllung unabhängiger Festwert und gleich dem Breitenverhältnis $b_{\rm I}/b_{\rm II}$ der ersten zur zweiten Stufe:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\left(\frac{b_{\rm I}}{b_{\rm II}}\right)^{1-\frac{n}{n'}}\left(\frac{p_2}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Der zweite Faktor

$$\left(\frac{b_{\rm I}}{b_{\rm II}}\right)^{1-\frac{n}{n'}} = s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16\,\text{a})$$

liegt im praktisch brauchbaren Bereich des Verdichters, wo n' nur wenig größer als n ist, nahe bei 1. Wird er vorläufig vernachlässigt, so erhält man

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\left(\frac{p_2}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Dabei ist im Auge zu behalten, daß im Bereich starken Wirkungsgradabfalls infolge der vorgenommenen Vernachlässigung die wirkliche Füllung etwas größer ist, wie nachher noch näher gezeigt wird.

Der Wert n' ist aus der μ-Tafel zu dem aus dem Versuchsdiagramm der ersten Stufe ersichtlichen η_i-Wert in Verbindung mit dem Druckverhältnis p_{2x}/p_1 zu entnehmen. Das Druckverhältnis steht zur Förderhöhe ΔH_{ad} in der durch Gl. (4) gekennzeichneten Beziehung, die an der waagerechten Achse der μ-Tafel durch Angabe von H_{ad}/T_e dargestellt ist, so daß die eine Größe schnell aus der anderen erhalten wird. Die Ausrechnung der Potenz kann mit dem Rechenschieber erfolgen.

Falls dies als unbequem betrachtet wird, geht man ähnlich einem Vorschlag von U. Senger[7]) graphisch vor. Hierbei trägt man zu $\log \varepsilon$ den Logarithmus des Druckverhältnisses p_{2x}/p_1 auf. Man schreibt dann Gl. (17)

$$\log \varepsilon_2 = \log \varepsilon_1 - \frac{1}{n'} \left(\log \frac{p_{2x}}{p_1} - \log \frac{p_2}{p_1}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

welche Gleichung sich in einfacher Weise gemäß Bild 4 graphisch auswerten läßt, indem man durch den beliebig gewählten Kurvenpunkt a mit der Füllung ε_1 der ersten Stufe eine Gerade unter dem Winkel $\alpha' = \operatorname{arctg} n'$ zur Abszissenrichtung legt. Durch den Schnittpunkt b dieser mit der Waagerechten durch den Kurvenpunkt N der Normalfüllung ($\varepsilon_1 = 1$) läuft die Ordinate der gesuchten Füllung ε_2 der nächsten Stufe. Dabei ist vorausgesetzt, daß der Maßstab von Abszisse und Ordinate der gleiche ist. Sind beide Maßstäbe verschieden, so gilt

$$\alpha' = \operatorname{arctg} m\, n' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\text{a})$$

falls m das Verhältnis des Maßstabes von $\log \frac{p_{2x}}{p_1}$ zum Maßstab von $\log \varepsilon$ ist.

Im Hinblick darauf, daß in einem weiten Bereich der Kennlinie sich n' nicht wesentlich ändert, empfiehlt es sich, den Maßstab m so zu wählen, daß dabei α' gleich 45° oder 30° oder 60° wird.

Die zugehörige Förderhöhe der zweiten Stufe entnimmt man der (ΔH_{adx}, $\log \varepsilon$)-Linie der ersten Stufe. Man sieht aus Bild 4, daß, wie oben schon festgestellt, die Füllung ε_2 der zweiten Stufe stets mehr von 1 verschieden ist als ε_1, auch wenn man den Punkt a in das Teillastgebiet nach a_1 legt.

Beim Übergang auf die dritte Stufe benutzt man sinngemäß die Gleichungen

$$p_3\, V_3^{n} = p_2\, V_2^{n}$$
$$p_{3x}\, V_{3x}^{n''} = p_{2x}\, V_{2x}^{n''},$$

[7]) BBC-Mitteilungen Bd. 28 (1941), S. 19.

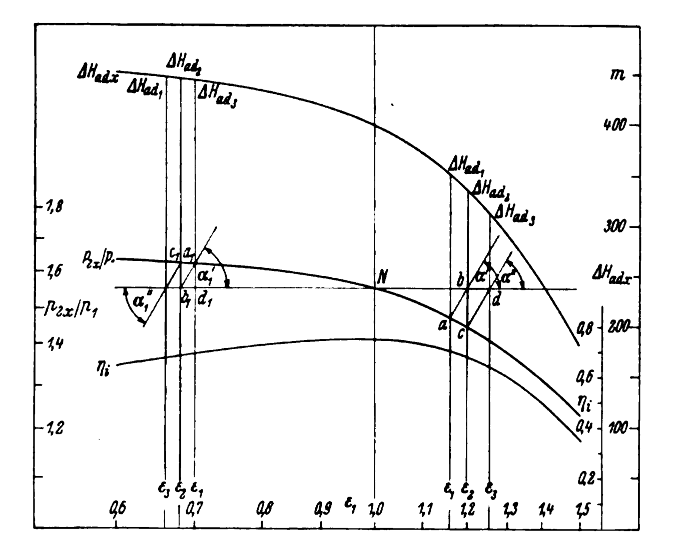


Bild 4. Graphische Ermittlung der zusammengehörigen Füllungen ε_1, ε_2, ε_3 der ersten, zweiten und dritten Stufe.

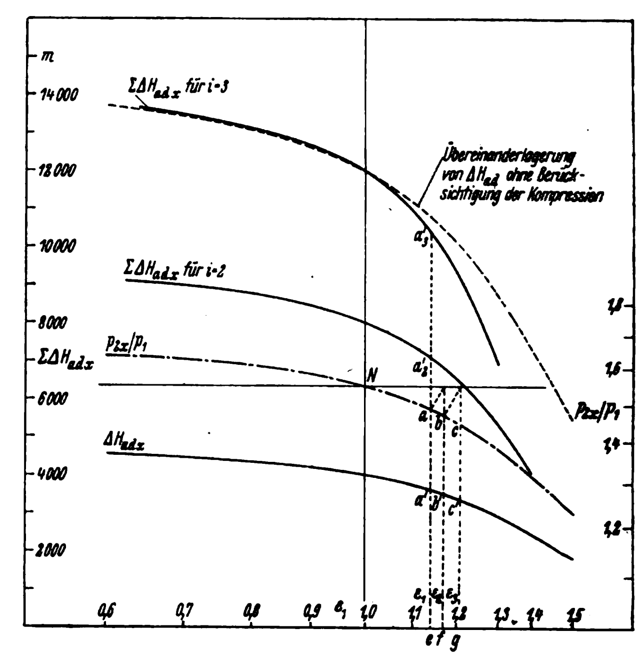


Bild 5. Entwicklung der Drosselkurve eines dreistufigen Verdichters aus den Kennlinien der ersten Stufe: $\Sigma \Delta H_{adx} = e\,a_3' = e\,a' + f\,b' + g\,c'$.

wobei also n'' der Wert n bei nicht stoßfreiem Eintritt der zweiten Stufe ist. Ganz entsprechend wie oben folgt nun:

$$\frac{V_{3x}}{V_3} = \frac{V_{2x}}{V_2} \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\frac{n''-n}{n''}} \left(\frac{p_3}{p_2}\,\frac{p_{2x}}{p_{3x}}\right)^{\frac{1}{n''}}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \left(\frac{b_{II}}{b_{III}}\right)^{1-\frac{n}{n''}} \left(\frac{p_3}{p_2} \Big/ \frac{p_{3x}}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n''}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

falls b_{II}/b_{III} das Breitenverhältnis der zweiten und dritten Stufe ist. Auch hier kann im Bereich flachen Verlaufs der Wirkungsgradkurve dieser Wert gleich 1 gesetzt und geschrieben werden

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \Big/ \frac{p_{3x}}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n''}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wobei n'' zu dem für ε_2 geltenden η_i wieder aus der μ-Tafel erhalten und p_{3x}/p_{2x} das zu diesem ε_2 gehörige Druckverhältnis, $\frac{p_3}{p_2}$ das zu $\varepsilon_2 = 1$ gehörige Druckverhältnis der zweiten Stufe ist.

Die Linien der Druckverhältnisse sind streng genommen für die erste und zweite Stufe infolge der höheren Eintrittstemperatur der zweiten Stufe verschieden, und zwar sind nach Gl. (4) die Druckverhältnisse der zweiten Stufe kleiner als für die erste Stufe. Da aber in Gl. (19) und (20) die beiden Druckverhältnisse reziprok auftreten, so wird die erreichbare Genauigkeit kaum beeinträchtigt, wenn die für die erste Stufe gegebene Linie der Druckverhältnisse auch für die folgenden Stufen benutzt wird, was im folgenden geschehen soll.

Damit kann ε_3 wieder aus Gl. (19) oder (20) unmittelbar berechnet oder graphisch aus der logarithmischen Darstellung von Bild 4 bestimmt werden, indem an den Punkt c der Winkel $\alpha'' = \operatorname{arc\,tg} n''$ angetragen wird.

Für die vierte Stufe würde folgen

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 \left(\frac{b_{III}}{b_{IV}}\right)^{1-\frac{n}{n'''}} \left(\frac{p_4}{p_3} \Big/ \frac{p_{4x}}{p_{3x}}\right)^{\frac{1}{n'''}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

usw., wobei das Verfahren sich wiederholt.

Die resultierende Drosselkurve ergibt sich durch Addition der zu ε_1, ε_2 usw. gehörigen Stufenförderhöhen $\Delta H_{ad1} + \Delta H_{ad2} + \ldots$ (wobei also die Berücksichtigung des Faktors μ der Gl. (1) unterbleiben kann), Bild 4. In Bild 5 ist zum Vergleich die durch einfaches Vervielfachen der Ordi-

naten sich ergebende Linie, wie sie bei tropfbaren Flüssigkeiten richtig ist, gestrichelt eingetragen. Man sieht, daß bei Gasen ein verstärkter Abfall im Überlastbereich eintritt, während bei Teillast die Unterschiede nur gering sind. Zu beachten ist, daß das Eintrittsvolumen der Abszisse der Kennlinien zugrunde gelegt wurde. Würde man statt dessen das Austrittsvolumen verwenden, wobei das Verfahren sinngemäß zu ergänzen wäre, so würde sich ergeben, daß durch das Hinzufügen weiterer Stufen der Abfall der Kurven verringert, also die entgegengesetzte Veränderung erzielt würde.

c) Wechsel der Drehzahl des gleichen Verdichters unter Beibehaltung des Eintrittszustandes. Bei mehrstufigen Kreiselrädern für tropfbare Förderflüssigkeit gilt hier das Affinitätsgesetz (Newtonsches Ähnlichkeitsgesetz), ebenso das Kongruenzgesetz[8]). Deshalb gestaltet sich dort der Übergang auf eine andere Drehzahl recht einfach. Bei Gasen werden wieder durch die Zusammendrückbarkeit die Beziehungen weitgehend geändert und dadurch erschwert. Stoßfreiheit in allen Stufen kann nur bei einer einzigen Drehzahl vorliegen, von der unsere Betrachtungen hier ausgehen[9]).

Wie im letzten Abschnitt b ist es auch hier notwendig, den Vorgang in den einzelnen Stufen nacheinander zu verfolgen. Diese sollen wieder gleiche Umfangsgeschwindigkeit und gleiche Schaufelwinkel, also im Berechnungspunkt N auch gleiche Förderhöhe haben. Die Kennlinien der ersten Stufe bei der Berechnungsdrehzahl, und zwar der Verlauf von Stufenförderhöhe ΔH_{adx}, Druckverhältnis p_{2x}/p_1 und Wirkungsgrad η_i sollen wieder in Abhängigkeit der Füllung ε_1 der ersten Stufe gegeben sein. Verändert sich nun die Drehzahl, so bleiben die Abszissen ε_1 bzw. $\log \varepsilon_1$ unverändert, d. h. die Linien gleichen Stoßzustandes und gleichen inneren Wirkungsgrades sind bei dieser Darstellung senkrechte Geraden. Deshalb können auch die η_i-Linien als unabhängig

[8]) Vgl. C. Pfleiderer, Die Kreiselpumpen, 1. oder 2. Aufl. Springer, Berlin 1924 bzw. 1932.

[9]) Ähnlich kann beim einstufigen Verdichter nur bei einer Drehzahl Stoßfreiheit sowohl am Eintritt des Lauf- wie Leitrades erzielt werden.

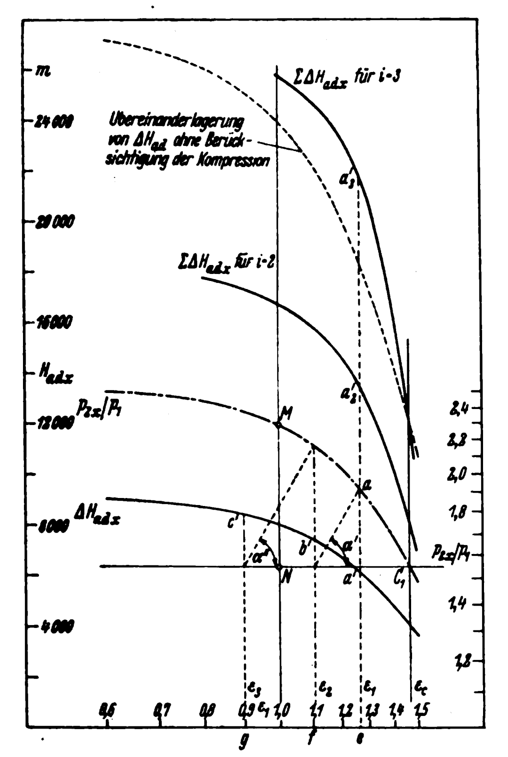


Bild 6. Bestimmung der Drosselkurven bei Drehzahländerung vom Konstruktionspunkt N aus. Für die beliebige Füllung ε_1 ist die Ordinate

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta H_{adx} = e\,a_3' = e\,a' + f\,b' + g\,c'.$$

Berichtigungsglied s vernachlässigt.

von der Drehzahl betrachtet werden, wenn man vom Einfluß der Reynoldsschen und der Machschen Zahl absieht, während die Ordinaten ΔH_{adx} mit dem Quadrat der Drehzahl verändert werden können[10]). Aus der neuen ΔH_{adx}-Linie kann man die zugehörige Linie der Druckverhältnisse mittels Gl. (4) berechnen, falls man nicht vorzieht, sie unmittelbar aus der alten Linie der Druckverhältnisse abzuleiten[11]). Die neuen, für die erste Stufe geltenden Linien sind in Bild 6 neben dem auf der Linie der Druckverhältnisse der Berechnungsdrehzahl zu denkenden Konstruktionspunkt N, dessen Druckverhältnis p_2/p_1 sei, eingetragen. Für den Übergang von der niederen auf die höhere Drehzahl dieser Stufe gelten nun die im vergangenen Abschnitt abgeleiteten Gl. (16) bis (18a), wenn darin p_2 und n für den Konstruktionspunkt N bzw. p_{2x} und n' für einen beliebigen Zustandspunkt der neuen Drehzahl der Austrittsdruck der ersten Stufe und der Exponent der zugehörigen Politrope sind, denn die dortige Ableitung setzt an keiner Stelle gleichbleibende Drehzahl voraus[12]). Gleiche Füllung in allen Stufen bleibt nach der Drehzahlsteigerung nur bestehen für das der Rechnung zugrunde gelegte Druckverhältnis des Punktes N also in Bild 6 für den auf der neuen Linie der Druckverhältnisse liegenden Punkt C_1 mit der Füllung ε_1, wenn zunächst wieder das Berichtigungsglied $s = (b_I/b_{II})^{1-\frac{n}{n'}}$ vernachlässigt, also von der Veränderung von η_i, abgesehen wird.

Für eine beliebige Ausgangsfüllung ε_1 geschieht also die Bestimmung der Füllungen ε_2, ε_3 usw. wieder nach der früheren Konstruktion, wie in Bild 6 gezeigt ist.

Wendet man die graphische Bestimmung der Füllung ε_2 auf die Normalfüllung $\varepsilon_1 = 1$ (für welche $n' = n$, also $\alpha = \operatorname{arc\,tg} n$) an, so sieht man, daß das zugehörige ε_2 kleiner als 1 geworden ist, infolge der durch die erhöhte Drehzahl bedingten stärkeren Verdichtung.

In Bild 6 ist auf diese Weise die resultierende Drosselkurve des gleichen dreistufigen Verdichters wie in Bild 5 für eine Steigerung der Drehzahl auf das $\sqrt{2}$-fache abgeleitet. Zu beachten ist, daß die so bestimmten Linien nur im Gebiet des flachen Wirkungsgradverlaufs mit der Wirk-

[10]) Besonders die Machsche Zahl bewirkt merkbare Abweichungen, weil im Spalt bereits die Zusammendrückung verschieden ist und nur bei einer Drehzahl Stoßfreiheit sowohl am Eintritt des Lauf- wie Leitrades bestehen kann. Das Affinitätsgesetz kann hier (ähnlich wie im Abschn. a behandelt) nur befriedigend gelten, wenn der Abszisse das Spaltvolumen zugrunde gelegt wird.

[11]) Bei nicht besonders großen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufrades und den Drehzahlen ω' und ω gilt

$$\frac{p_{2x}}{p_1} = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \left(\frac{p'_{2x}}{p_1} - 1\right).$$

Diese einfache Beziehung dürfte für die vorliegenden Zwecke genügen.

[12]) Gibt man dem Betriebspunkt, welcher gleiche Füllung bei der neuen Drehzahl in den folgenden Stufen gewährleistet, das Fußzeichen c und behält man im übrigen die alten Beziehungen bei, so ist:

$$p_{2c} V_{2c}^{n} = p_1 V_{1c}^{n_c}$$
$$p_{2x} \cdot V_{2x}^{n'} = p_1 \cdot V_{1x}^{n'},$$

also

$$\frac{V_{2x}}{V_{2c}} = \frac{V_{1x}}{V_{1c}} \left(\frac{V_{1c}}{V_{2c}}\right)^{\frac{n'-n_c}{n'}} \left(\frac{p_{2c}}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

oder

$$\frac{V_{2x}}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_{2c}} = \frac{V_{1x}}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_{1c}} \left(\frac{b_I}{b_{II}}\right)^{\frac{n'-n_c}{n'}} \left(\frac{p_{2c}}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \ldots \quad (a)$$

Da der Zustandspunkt c gleiche Füllung in den beiden betrachteten Stufen liefert, so ist

$$\frac{V_{1c}}{V_1} = \frac{V_{2c}}{V_2},$$

also folgt aus Gl. (a)

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left(\frac{b_I}{b_{II}}\right)^{\frac{n'-n_c}{n'}} \left(\frac{p_{2c}}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Setzen wir nun

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_{2c}}{V_{1c}} = \frac{b_{II}}{b_I} = \delta,$$

so ist

$$p_2 \delta^n = p_1 = p_{2c} \delta^{n_c},$$

also

$$p_{2c} = \frac{p_2}{\delta^{n_c - n}} = p_2 \left(\frac{b_I}{b_{II}}\right)^{n_c - n}.$$

Nach Einsetzen dieses Wertes in Gl. (b) folgt

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left(\frac{b_I}{b_{II}}\right)^{\frac{n'-n}{n'}} \left(\frac{p_2}{p_{2x}}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (16).

lichkeit übereinstimmen, weil das Berichtigungsglied s vernachlässigt ist.

Da bei der Drehzahlerhöhung der Stoßzustand in allen Stufen sich verschiebt, so ist es nicht möglich, Linien gleichen Stoßzustandes wie bei tropfbaren Flüssigkeiten einzutragen.

Abreißgrenze: Kreiselverdichter zeigen häufig die Eigenart, daß mit abnehmendem Durchfluß ein Betriebspunkt erreicht wird, in welchem bei weiterem Sinken des Förderstroms die Förderhöhe plötzlich abfällt. Dabei sinkt gleichzeitig stark der Wirkungsgrad, so daß das Abreißgebiet für die praktische Verwendung ausscheidet. Zu beachten ist, daß dieses Abreißen mit dem ebenfalls bei Kreiselverdichter auftretenden »Pumpen« nichts zu tun hat, weil die Abmessungen der Rohrleitung keinen Einfluß haben, auch kein Pendeln der Leistung auftritt, sondern lediglich ein Umkippen der Strömung innerhalb des Verdichters die Ursache ist.

Bei der Drehzahlveränderung ist es eine für die Praxis besonders wichtige Frage, wie dabei dieser Abreißpunkt wandert. Hier kann man in Anlehnung an einen von Senger angegebenen Gedankengang[13]) das vorstehende Verfahren verwenden. Ist in Bild 7 der auf der p_{2x}/p_1-Linie liegende Punkt L die Abreißgrenze der ersten Stufe bei der Konstruktionsdrehzahl ω, so wird bei einer Drehzahländerung die Abreißgrenze dieser Stufe annähernd nach dem Newtonschen Ähnlichkeitsgesetz (Affinitätsgesetz), also — wegen der Auftragung der Füllung ε als Abszisse — als Senkrechte FL verlaufen. Diese Linie ist für den ganzen Verdichter aber nur solange gültig, als das Abreißen in der ersten Stufe beginnt, also — bei gleichen Durchmessern und Winkeln — dort die Füllung zuerst unter den kritischen Betrag ε_L des Punktes L sinkt. Sieht man hier wieder zunächst von der Berücksichtigung des Zusatzgliedes s ab, so bedeutet dies, daß in den folgenden Stufen das Druckverhältnis kleiner als in der ersten Stufe sein muß. Diese Bedingung ist nur für Drehzahlen erfüllt, die kleiner sind als eine Grenzdrehzahl ω_g. Diese gehört zu der Linie der Druckverhältnisse (Bild 7), die bei der Ordinate der Füllung ε_L das der Berechnung zugrunde gelegte Druckverhältnis hat, also durch den Punkt G (Bild 7) hindurchgeht, wobei $GF = AN$ ist. Die Grenzdrehzahl ω_g ist also

$$\omega_g = \omega \sqrt{\frac{FG}{FL}}\,.$$

Bei Drehzahlen $\omega > \omega_g$ gibt nun aber das beschriebene graphische Verfahren in den folgenden Stufen eine stetige Verkleinerung der Füllung im kritischen Bereich, so daß dort die Füllung bei einer kleineren Drehzahl den kritischen

[13]) Vgl. Fußbem. 7.

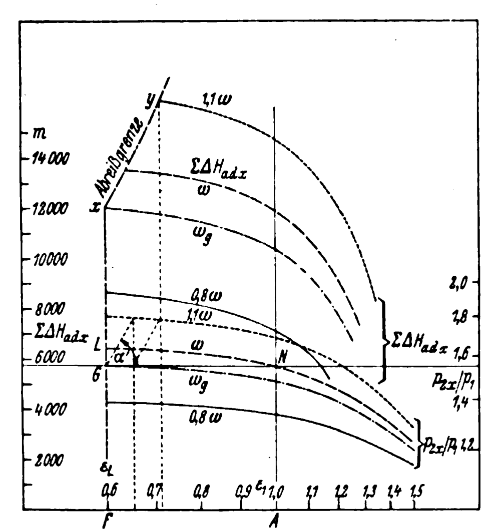


Bild 7. Bestimmung der Abreißgrenze bei Vernachlässigung des Berichtigungsgliedes s.

Betrag ε_L unterschreitet als in der ersten Stufe und die letzte Stufe des Verdichters offenbar das Abreißen einleitet.

Daraus folgt:

Bei Drehzahlen $\omega < \omega_g$ bewegt sich der Abreißpunkt nach dem Affinitätsgesetz, also im V_x, H_{adx}-Diagramm nach einer Parabel und im ε, H_{adx}-Diagramm nach einer Senkrechten FX, wobei die Ordinate von X nämlich $\overline{FX} \approx i\,\Delta\,H_{adx}$, wenn i die Stufenzahl und $\Delta\,H_{adx}$ die Berechnungsförderhöhe der ersten Stufe ist. In diesem Bereich wird das Abreißen in der ersten Stufe ausgelöst.

Bei Drehzahlen $\omega > \omega_g$ bewegt sich der Abreißpunkt gemäß der früher beschriebenen Konstruktion bei logarithmischer Auftragung der Druckverhältnisse in Abhängigkeit der Füllung von dem erwähnten Punkt X nach oben längs einer nach rechts geneigten Linie XY. Das Abreißen wird in diesem Bereich in der letzten Stufe ausgelöst.

Man sieht also, daß bei Überschreitung der Drehzahl ω_g in die Abreißgrenze ein Knick hineinkommt, der ein wesentlich ungünstigeres Verhalten des Verdichters im oberen Drehzahlbereich zur Folge hat. Diese Grenzdrehzahl liegt, wie ein Blick auf Bild 7 zeigt, unter der Berechnungsdrehzahl ω, die demnach bereits in den ungünstigen Bereich fällt. Hiernach empfiehlt es sich, die Berechnungsdrehzahl in all den Fällen möglichst hoch zu nehmen, wo es darauf ankommt, die Abreißgrenze hinauszuschieben. Naturgemäß geschieht dies auf Kosten des Wirkungsgrades in den niederen Drehzahlbereichen.

d) Einbeziehung des Korrekturgliedes s der Gl. (16a) in das graphische Verfahren. Die bisher zugrunde gelegte Vernachlässigung von s bedeutet nichts anderes, als daß der Einfluß der Wirkungsgradverschlechterung bei Teil- oder Überlast, d. h. der dadurch bedingten zusätzlichen Erwärmung auf das austretende Volumen, die offenbar eine Füllungsvergrößerung in der folgenden Stufe zur Folge hat, nicht in die Erscheinung tritt. Dies ist nur zulässig, solange man sich im Bereich des flachen Verlaufs der Wirkungsgradlinie bewegt. Außerhalb dieses Gebietes ist die folgende Abwandlung des graphischen Verfahrens am Platz, die zunächst für den Fall der Zuschaltung weiterer Stufen bei gleichbleibender Drehzahl (also als Ergänzung zum Unterabschnitt b) besprochen werden soll.

Fügt man zu den in Bild 4 erhaltenen Werten $\log \varepsilon_2$ und $\log \varepsilon_3$ in den Punkten b und d das jeweilige Berichtungsglied[14]) $\log s$ hinzu, so erhält man nach Gl. (16) die berichtigten Füllungsordinaten, Bild 8. Bringt man diese Ordinaten zum Schnitt mit den freien Fahrstrahlen ab und cd der Winkel α', α'', so erhält man die Punkte β und δ, welche gewissermaßen die früheren Punkte b und d ersetzen. Man kann demnach die frühere Gerade $b_1\,N\,b$ durch eine Bezugskurve $\beta_1\,N\,\beta$ ersetzen. Jeder Zweig dieser Linie rechts und links vom Berührungspunkt N hat hyperbolischen Charakter und kann, da der Punkt N bekannt ist, mittels zweier Punkte genügend genau gezeichnet werden. Ihre weitere Fortsetzung, die aber nur theoretisches Interesse hat, ist für die rechte Seite in Bild 9 eingetragen. Ebenso wie der zur Veranschaulichung eingetragene n' Verlauf (aus der μ-Tafel bestimmt) nach den Angaben am Schluß des Hauptabschnitts A asymptotisch an die Ordinate heranläuft, für welche

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_{2x}}{p_1} = 1 + \Delta\,H_{ad\,x}/300\,\eta_i,$$

erhält auch die neue Bezugslinie eine Asymptote, die aber um $\log s_\infty = \log\,(b_I/b_{II})$ nach rechts verschoben ist.

Benutzt man nun diese gekrümmte Bezugslinie statt der früheren Geraden, so ändert sich im weiteren Verlauf des Verfahrens nichts, wie aus Bild 8 zu ersehen ist. Wie zu erwarten, sind jetzt die Füllungen ε_2 und ε_3 durchgängig größer

[14]) Die Größe $\log s = (1 - n/n') \log b_I/b_{II}$ kann man auch graphisch bestimmen. Sie erscheint nämlich als Strecke $A\,B$ von Bild 8a, in welcher nur der Fahrstrahl $O\,A$ für jeden Kurvenpunkt sich ändert.

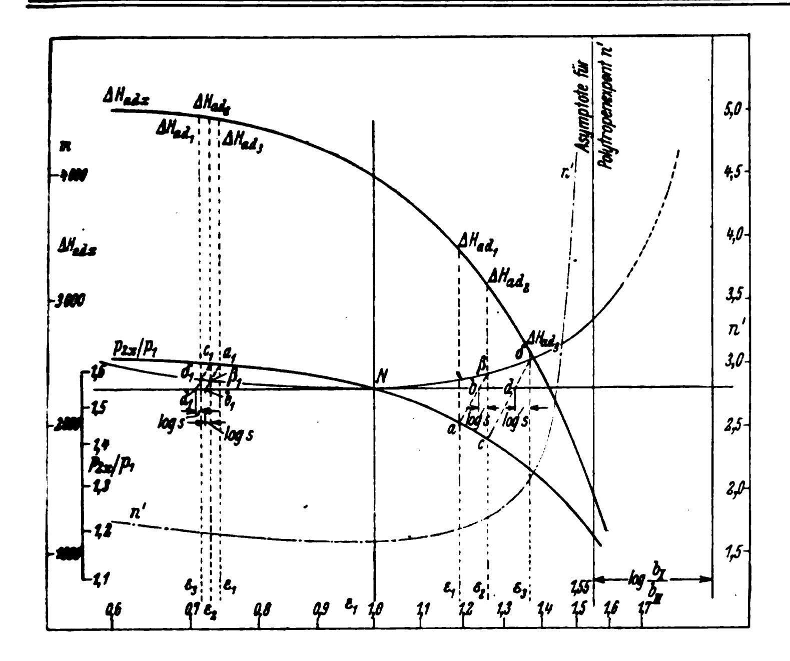


Bild 8. Berücksichtigung des Zusatzgliedes s, d. h. der Temperaturunterschiede durch eine gekrümmte Bezugslinie $\beta_1\ N\ \beta$.

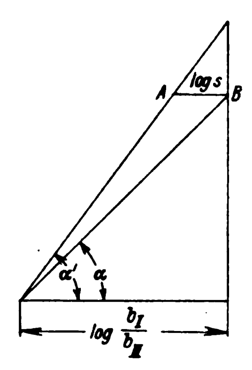


Bild 8a. Graphische Ermittlung des Korrekturgliedes s.

und also die Unterschiede der Füllungen von Stufe zu Stufe im Teillastbereich kleiner, im Überlastbereich größer als früher.

In Bild 8 ist beim Übergang auf die dritte Stufe die gleiche Bezugslinie $\beta_1\ N\ \beta$ wie beim Übergang von der ersten zur zweiten Stufe verwendet, weil die Breitenverhältnisse b_I/b_{II}, b_{II}/b_{III} infolge der Gleichheit der Stufenarbeiten sich nur wenig unterscheiden und der dadurch bedingte Fehler im Hinblick auf die anderen Annahmen der Rechnung (z. B. gleichbleibende Wirkungsgradlinie in beiden Stufen) nicht in die Waagschale fällt.

Bild 9 gibt einen Überblick über die Genauigkeit der verschiedenen Verfahren. Linie A stellt den Verlauf bei raumbeständiger Flüssigkeit dar, B bei Anwendung des zuerst (im Unterabschnitt b) beschriebenen einfachen graphischen Verfahrens unter Vernachlässigung des s-Gliedes, C bei Berücksichtigung dieses Gliedes nach dem vorhin beschriebenen Verfahren, während schließlich die Linie D den Verlauf wiedergibt, wie er sich bei Anwendung der im Anschluß an Bild 3 beschriebenen genaueren Rechnung einstellt, wobei dann also nicht nur die Temperaturzunahme von Stufe zu Stufe, sondern auch der Einfluß des Beiwertes μ berücksichtigt wird. Die Linien C und D fallen im oberen Teil vollständig zusammen und sind im unteren Teil aus zeichnerischen Gründen weiter voneinander abgerückt als der Wirklichkeit entspricht.

Man ersieht, daß das s-Glied wie zu erwarten im Bereich starker Überlast erheblichen Einfluß gewinnt und dort also berücksichtigt werden sollte. Geschieht dies, so erzielt man aber eine Genauigkeit, die offenbar auch durch Anwendung wesentlich umständlicherer Berechnungsverfahren kaum übertroffen werden kann. Dies ist um so bemerkenswerter als die Temperaturzunahme gemäß der aus Bild 9 ersichtlichen Linie der Endtemperaturen T_a des ganzen Verdichters nicht unbeträchtlich ist. Die Linie der Gesamtwirkungsgrade $(\eta_i)_{ges}$ ist aus den Stufenwirkungsgraden ermittelt[15]. Der Verlauf beider Linien ist offenbar im Teillastgebiet der gleiche (weil der Beiwert $\mu = 1$ gesetzt worden ist, vgl. Gl. (3)). Dagegen fallen die Gesamtwirkungsgrade im Überlastgebiet sehr stark ab.

Im Fall der Drehzahländerung (entsprechend Unterabschnitt c) muß man die Bezugskurve $\beta_1\ N\ \beta$, wie Bild 10 für drei Drehzahlen ω, $0{,}8\ \omega$ und $\sqrt{2}\cdot\omega$ zeigt, für jede Drehzahl neu zeichnen. Zwar bleiben die s-Werte selbst gleich, aber die Bezugskurve wird etwas nach links bzw. rechts verzogen, weil der neue Berührungspunkt M bzw. M_1 mit der früheren Bezugsgeraden[16]) offenbar auf die Füllungsordinate der zweiten Stufe zu liegen kommt, die zu $\varepsilon_1 = 1$ gehört. Man kann die so erhaltene Bezugslinie wieder für alle Stufen beibehalten, so daß die Mehrarbeit nicht stark ins Gewicht fällt. Wesentlich ist die Feststellung, daß Gleichheit der Füllung bei Überlast in allen Stufen nicht mehr in den Schnittpunkten C_1 der Druckverhältnislinien mit der früheren Bezugsgeraden, Bild 6, vorliegt, sondern in den Schnittpunkten C mit der Bezugskurve, was eine beachtliche Veränderung mit sich bringt.

[15]) Aus $(\eta_i)_{ges} = \dfrac{H_{ad}}{\sum 1\ H_{ad}/(\eta_i)_{Stufe}}$.

[16]) In Bild 10 gehören M und M_1 offenbar zu den Drehzahlen $\sqrt{2}\ \omega$ und $0{,}8\ \omega$. Der dort eingetragene Winkel λ ist gleich $90 - \alpha$, wo $\alpha = \operatorname{arc\,tg} n$.

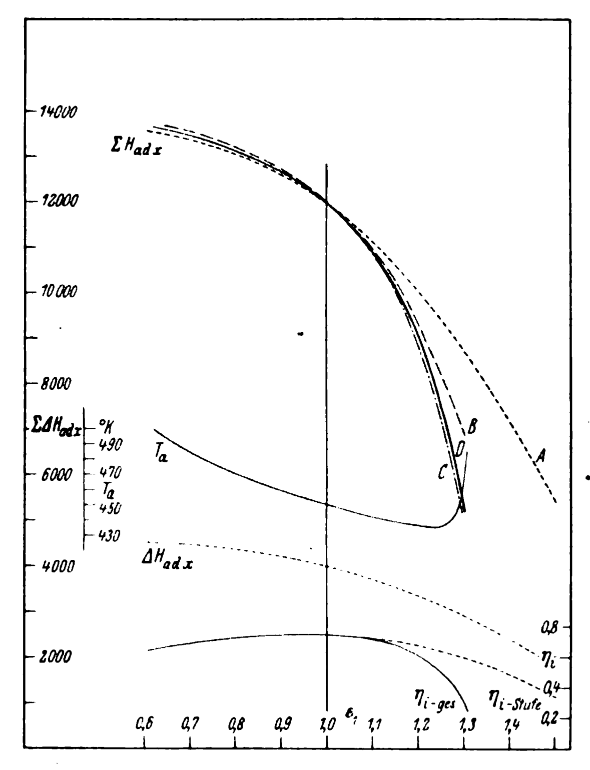


Bild 9. Verlauf der Drosselkurven bei Anwendung verschiedener Rechenverfahren im Beispiel von Bild 5.
Linie A für tropfbare Flüssigkeiten ermittelt.
Linie B nach Konstruktion wie in Bild 5, also ohne Berücksichtigung des Zusatzgliedes s,
Linie C nach Konstruktion wie in Bild 8, also mit Berücksichtigung des Zusatzgliedes s,
Linie D nach genauer Rechnung.

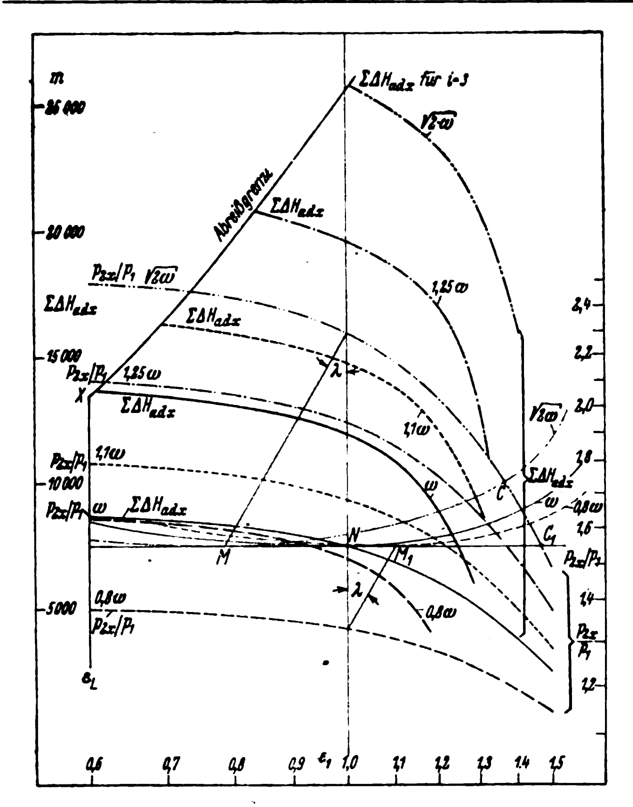


Bild 10. Bestimmung der Drosselkurven und der Abreißgrenze bei Drehzahländerung unter Berücksichtigung des Zusatzgliedes s. Die zusammengehörigen $p_{z\,x}/p_1$- und $\Sigma\Delta H_{adx}$-Linien sind gleichartig gezeichnet (z. B. gestrichelt).

Auch die Abreißgrenze verschiebt sich insofern, als der Knickpunkt X, welcher die beiden verschiedenen Bereiche trennt, nach oben rückt, also das Abreißverhalten im ganzen günstiger erscheint. Dieser Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß der auf der Ordinate ε_L des Abreißpunktes L gelegene Punkt G, Bild 7, durch welchen die Linie der Grenzdrehzahl ω_g läuft, nach dem Schnittpunkt mit der zugehörigen Bezugskurve wandert. Er ist naturgemäß nur dann merkbar, wenn der Abreißpunkt bereits im abfallenden Bereich des Wirkungsgrades liegt, was bekanntlich meist leider nicht der Fall ist.

e) Sonderfälle. Ungleiche Stufen. Haben die aufeinanderfolgenden Stufen stark verschiedene Durchmesser, so muß beim Übergang auf die nächste Stufe das Kennlinienfeld der vorhergehenden Stufe in sinngemäß gleicher Weise zugrunde gelegt werden, wie das hinsichtlich der ersten Stufe geschehen ist. Dieser Wechsel der Ausgangslinie bedingt auch, daß der Konstruktionspunkt N entsprechend verlegt wird.

Bei ähnlich gestalteten Laufrädern läßt sich dieses Verfahren insofern vereinfachen als die Drosselkurven (H_{adx}-Linien) ebenso die Linien der Druckverhältnisse bei den einzelnen Stufen sich nur dadurch unterscheiden, daß ihre Ordinaten durch Multiplikation mit einem gemeinsamen Faktor in die der nächsten Stufe übergehen, während die Wirkungsgradkurven sich nicht nennenswert verändern. Man kann sich hier deshalb dadurch helfen, daß man die Kurven der ersten Stufe samt dem Konstruktionspunkt beibehält und nur ihren Maßstab entsprechend verändert. Daß dabei die Exponenten n, n' infolge der geänderten Druckverhältnisse sich ebenfalls verändern, ist nicht von Bedeutung und im allgemeinen vernachlässigbar. Nicht übersehen darf aber werden, daß die Winkel α und α' entsprechend den sich jeweils ergebenden Maßstäben nach Gl. (18a) umgerechnet werden müssen.

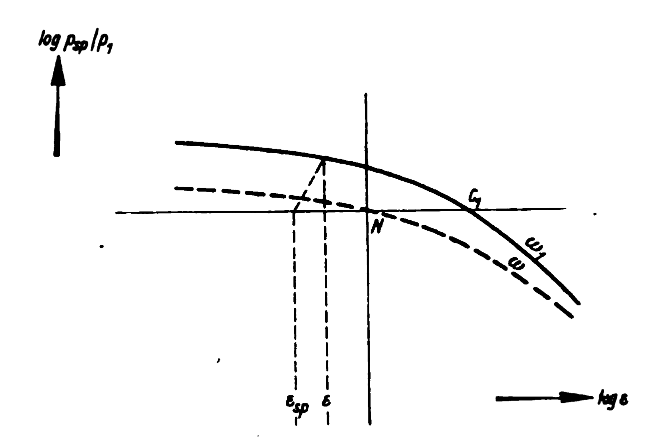


Bild 11. Verschiebung der Füllung ε_{sp} des Leitrades gegenüber ε des Laufrades beim einstufigen Verdichter im Fall der Änderung der Drehzahl von ω auf ω_1.

Einstufiger Verdichter. Das beschriebene graphische Verfahren läßt sich auch dazu verwenden, die Vorgänge in einem einstufigen Verdichter bei Veränderung der Drehzahl zu klären, wenn man das Leitrad als zweite Stufe behandelt. Man geht dann von der Linie des Verhältnisses des Spaltdruckes p_{sp} zum Anfangsdruck p_1 aus und entnimmt in gleicher Weise die Füllung ε_{sp} des Austrittsleitrades zu jeder Füllung ε des Laufrades, wie man vorher die Füllung ε_1 der zweiten Stufe zu jeder Füllung ε_1 der ersten Stufe erhalten hat. In Bild 11 ist dieser Fall veranschaulicht, wobei das Korrekturglied nicht berücksichtigt ist. Man sieht, daß bei einer Drehzahlsteigerung von ω auf ω_1 in einem weiten Bereich $\varepsilon_{sp} < \varepsilon$ und daß gleiche Füllung von Lauf- und Leitrad wieder nur im Punkt C vorhanden ist, bei dessen Überschreitung nach rechts sich die Verhältnisse umkehren. Will man das Korrekturglied entsprechend Unterabschnitt c berücksichtigen, so ist dies zu setzen

$$\log s = \left(1 - \frac{n}{n'}\right) \log \frac{V_1}{V_{sp}}$$

falls V_1 bzw. V_{sp} die gleichzeitig vorhandenen stoßfreien Eintrittsströme des Lauf- bzw. Leitrades der Berechnungsdrehzahl sind.

C. Zusammenfassung.

Es ist eine Kurventafel (μ-Tafel) entwickelt, die besonders die durch die Gasreibung bedingten Größen, nämlich den Exponenten n der zugrunde gelegten Polytropen und den Beiwert μ der hinzukommenden Verdichtungsarbeit zu jedem Wirkungsgrad und Druckverhältnis zu entnehmen gestattet. Außerdem gibt die Tafel Auskunft über die Temperaturzunahme und adiabatische Förderhöhe.

Im Anschluß werden einige besondere Anwendungsmöglichkeiten der Tafel gezeigt, nämlich für die Berechnung mehrstufiger Verdichter und die Umrechnung der Kennlinien des Verdichters auf andere Anfangstemperaturen, andere Stufenzahlen und andere Drehzahlen. Dabei konnte auch der einstufige Verdichter, ebenso der Verdichter mit ungleichen Stufendurchmessern einbezogen werden.

Bei der Ausarbeitung der μ-Tafel hat Herr Dipl.-Ing. Weinrich die umfangreichen rechnerischen und zeichnerischen Arbeiten durchgeführt. Die Herstellung der folgenden Bilder mit den zugehörigen Rechnungen lag in den Händen von Herrn Dipl.-Ing. Thuß. Beiden Herren danke ich auch an dieser Stelle für ihre eifrige und verständnisvolle Mitarbeit.

Abgeschlossen 5. Dezember 1941.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 20. März 1942 Lfg. 2

Betrachtungen und Versuche zum Problem des Kreiselhorizontes.

Von K. Magnus.

Bericht des Institutes für angewandte Mechanik der Universität Göttingen *).

Ein kräftefrei aufgehängter Kreisel mit voller Präzessionsfreiheit behält seine Achsenrichtung bei beliebigen Bewegungen seines Aufhängepunktes bei und ist daher ein idealer Richtungshalter. Stellt man die Drehachse senkrecht, so kann man einen solchen Kreisel zur Anzeige der Horizontalen verwenden. Praktisch läßt sich dieses Ideal des vollkommen kräftefreien Kreisels nur mit mehr oder weniger großer Annäherung verwirklichen, denn stets werden restliche Momente, zum Beispiel Reibungs- und Schweremomente die genaue Abstimmung stören und gemeinsam mit den Richtungsänderungen des Schwerevektors auf der Erdoberfläche eine Abweichung der Kreiselachse von der Vertikalen hervorrufen. Es ist daher notwendig, die Richtung der Kreiselachse entweder von Zeit zu Zeit durch Nachstellen von Hand zu berichtigen, oder laufend durch selbsttätige »Stütz«-Einrichtungen zu überwachen. Die durch derartige Stützungen verursachten Fehler des Kreiselhorizontes werden im folgenden für einige der vorgeschlagenen oder auch ausgeführten Stützarten errechnet und diskutiert. Dabei stehen vor allem die Untersuchungen über den weitverbreiteten Sperry-Horizont im Vordergrund, dessen Verhalten durch Rechnung und Versuch bei verschiedenen Flugzuständen untersucht wird.

Gliederung.

I. Einleitung.

Ein Kreiselhorizont soll dazu dienen, auf beliebig bewegtem Fahrzeug die Vertikale, also das wahre Lot anzugeben. Man hat sich dazu bisher stets eines Kreisels mit vertikaler Drehachse bedient, der volle Präzessionsfreiheit um zwei zur Kreiselachse senkrechte Achsen besitzt. Solch ein Kreisel wirkt als Richtungshalter. Jedoch wird er infolge stets vorhandener Störmomente im Laufe der Zeit aus seiner ursprünglichen Lage auswandern und muß deshalb in seiner Achsenrichtung in bestimmter Weise überwacht und nachgesteuert werden. Diese Überwachung geschieht dadurch, daß entweder der Schwerpunkt des Kreisels etwas unter den Aufhängepunkt gelegt wird (Beispiel: Anschütz-Horizont vom Jahre 1917), oder durch kleine, am Kreisel angebrachte Schwerependel, die bei Abweichungen der Kreiselachse vom wahren Lot entsprechende Rückführ- oder Stützmomente auslösen (Beispiel: Sperry-Horizont). Als richtende Kraft dient in beiden Fällen die Schwere. Der Kreisel bildet dabei vermöge seiner langsamen Präzessionsgeschwindigkeit das Mittel aus den veränderlichen Richtungen der Gesamtbeschleunigung.

Die Ausführung der durch Pendelchen gesteuerten Stützung kann sehr verschiedenartig sein. Die Stützmomente können proportional den Ausschlägen des Kreisels aus seiner Ruhelage anwachsen (»Proportional-Stützung«) oder sie können nach Erreichen eines bestimmten Ausschlages konstant bleiben (z. B. beim Sperry-Horizont). Schließlich können im Grenzfall die Stützmomente über dem ganzen Bereich konstant sein und nur dann in der Richtung umspringen, wenn der Kreisel durch die Ruhelage hindurchgeht (»Schwarz-weiß-Stützung«).

Diese verschiedenen Stützarten können am besten durch die Wirkungen gekennzeichnet werden, die sie bei einem ausgelenkten Horizont hervorbringen, also durch die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung, die die Kreiselspitze durch die Stützmomente erfährt. Die Gesamtheit der Geschwindigkeitsvektoren in einer horizontalen Ebene im Abstand eins vom Unterstützungspunkt des Kreisels aufgezeichnet, soll als »Stützfeld« bezeichnet werden.

Solche Stützfelder sind in Bild 1 bis 7 aufgezeichnet. Die α-Achse gibt dabei die Querneigungsanzeige, die β-Achse die Längsneigungsanzeige des Horizontes an. Eine Bewegung $+\alpha$ bedeutet ein Auswandern der unteren Kreiselspitze zum rechten Tragflügel, eine Bewegung $+\beta$ ein Auswandern in der Flugrichtung. Bild 1 zeigt das Stützfeld der sogenannten Eindüsendämpfung (proportionale Dämpfung!) wie sie beim Anschütz-Horizont vom Jahre 1917 angewendet wurde. Die Vektoren wachsen proportional dem Abstand von der α-Achse und zeigen senkrecht zu dieser. Das Feld ist in der ganzen Ebene stetig. Nimmt man noch eine Dämpfung um die andere Präzessionsachse hinzu, so kommt man zur Doppeldüsendämpfung, deren Stützfeld Bild 2 für den Fall zeigt, daß die Dämpfungskoeffizienten in den beiden Ebenen gleich groß sind. Die Vektoren von Bild 2 sind stets zum Nullpunkt hingerichtet und wachsen proportional zum Abstand von diesem. Wären die Dämpfungskoeffizienten nicht gleich, so würden die Vektoren gleicher Größe nicht auf einem Kreise, sondern auf einer Ellipse liegen. Bild 3 zeigt das Stützfeld eines Horizontes mit Schwerpunktstieferlage. Die Vektoren wachsen proportional dem Abstand vom Nullpunkt an, ihre Richtung ist jedoch stets senkrecht zur Verbindungslinie zum Nullpunkt. Dieses Feld kann nie allein zur Anwendung kommen, weil dadurch vorhandene Fehler nicht rückgängig gemacht werden können. Es wird deshalb stets mit dem Felde der Eindüsendämpfung oder der Doppeldüsendämpfung vereinigt.

Die drei bisher gezeigten Felder waren in der ganzen Ebene stetig. Zu unstetigen Stützfeldern gelangt man, wenn man das Feld eines Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung betrachtet. Bild 4 zeigt dies für den Fall, daß die Über-

*) Dem Direktor des Institutes, Herrn Prof. Schuler, sei auch an dieser Stelle für viele wertvolle Anregungen und das stete Interesse, das er diesen Untersuchungen entgegengebracht hat, gedankt.

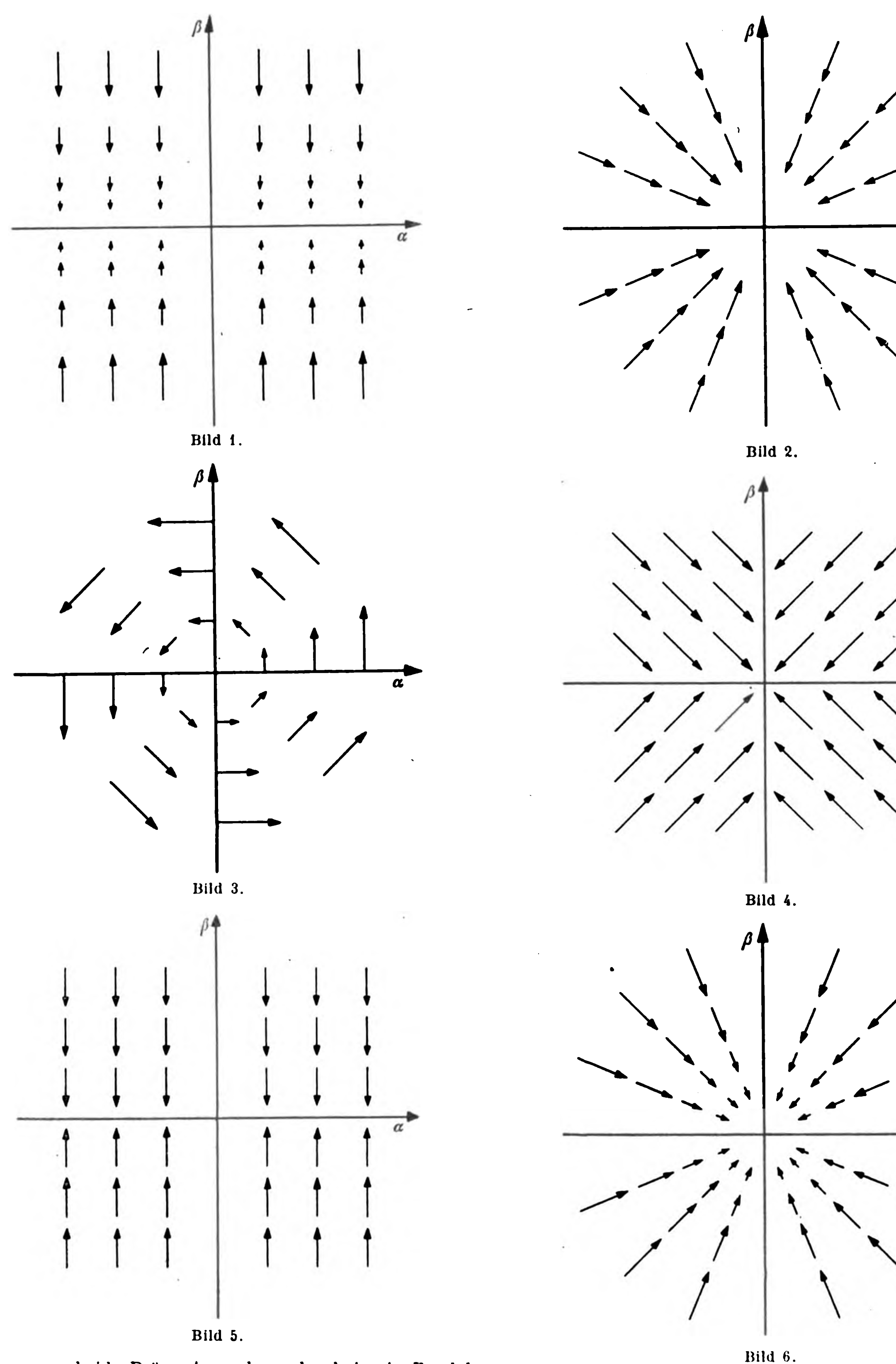


Bild 1. Bild 2. Bild 3. Bild 4. Bild 5. Bild 6.

wachung um beide Präzessionsachsen durch je ein Pendelpaar geschieht. Die Geschwindigkeits-Vektoren sind alle gleich groß, aber in den vier Gebieten verschieden geneigt. Bei Bild 4 ist angenommen, daß die Stützmomente um die beiden Präzessionsachsen gleich groß sein sollen. Ist das nicht der Fall, so ändert sich dadurch die Neigung der Vektoren gegenüber den Koordinatenachsen. Das Stützfeld Bild 4 ist unstetig längs den beiden Koordinatenachsen, denn an diesen Achsen springt die Richtung der sonst stets gleich großen Vektoren. Schaltet man bei diesem Feld die Stützung um eine Achse aus, so kommt man zu dem Stützfeld Bild 5, das jetzt nur noch längs einer Koordinatenachse unstetig ist. Das Stützfeld 5 ähnelt dem Stützfeld 1, nur sind jetzt die Größen der Vektoren konstant.

Die Unstetigkeit des Stützfeldes bei Schwarz-weiß-Stützung (Bild 4) kommt offenbar daher, daß diese Stützung nach rechtwinkligen Koordinaten geschieht. Man könnte nach einem Vorschlag von Stellmacher die Unstetigkeit der Richtung durch eine Schwarz-weiß-Stützung nach Polarkoordinaten beseitigen. Man käme so zu dem Stützfeld Bild 6, das jetzt nur noch einen unstetigen Punkt im Koor-

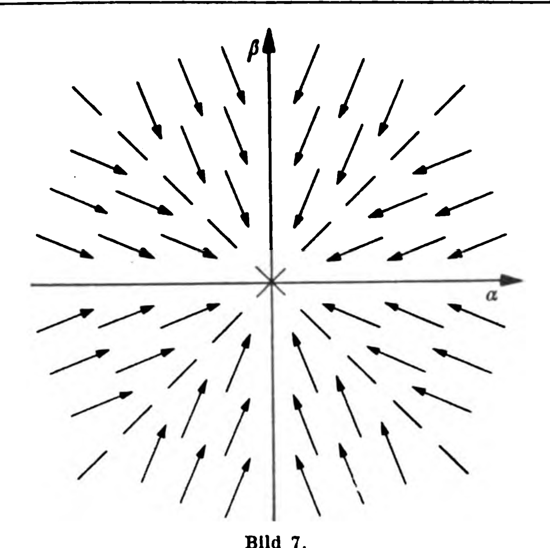


Bild 7.

Bild 1 bis 7. Stützfelder für verschiedene Ausführungsarten des Kreiselhorizontes.

dinatenursprung besitzt. Die Vektoren sind zum Nullpunkt hingerichtet, aber in ihrer Größe stets gleich. Das Feld ähnelt dem Stützfeld 2. Wie diese Stützung praktisch erreicht werden kann, sei dahingestellt. Eine Annäherung an die ideale Polarkoordinatenstützung kann man z. B. am Sperry-Horizont dadurch erreichen, daß an Stelle der vier Rückführpendel nunmehr acht Pendelchen symmetrisch verteilt angebracht werden. Das Stützfeld für diesen Fall zeigt Bild 7. Jetzt sind zwar vier Unstetigkeitslinien vorhanden, aber der Richtungssprung an diesen Linien ist nur noch halb so groß wie im Fall von Bild 4.

Im folgenden soll das Verhalten von Kreiselhorizonten mit verschiedenen Stützarten untersucht werden. Dabei wird das Verhalten der Horizonte beim Kurvenflug im Vordergrund stehen, weil dabei die größten Fehler zu erwarten sind.

Horizonte mit Stützung durch Schwerpunktstieferlage (Stützfeld 3) in Verbindung mit einer Eindüsendämpfung (Stützfeld 1) oder einer Doppeldüsendämpfung (Stützfeld 2) sind bereits untersucht worden [6]*) und sollen daher hier nicht berücksichtigt werden. Auch über das Verhalten des Sperry-Horizontes, dessen Stützfeld etwa dem Stützfeld 4 entspricht und nur in unmittelbarer Nähe der Koordinatenachsen davon abweicht, liegt eine sehr ausführliche Untersuchung vor [4]. Trotzdem wird die Betrachtung des Sperry-Horizontes hier den breitesten Raum einnehmen, einmal um die bereits vorhandenen Ergebnisse zu erweitern, zum anderen, weil das dabei verwendete Rechenverfahren die Grundlage für die Berechnung der anderen Horizonte abgibt.

II. Der Sperry-Horizont.

Der Sperry-Horizont besteht im wesentlichen aus einem im Schwerpunkt aufgehängten Kreisel mit drei Freiheitsgraden, der seine Richtkraft den Reaktionsmomenten von vier Luftstrahlen verdankt, deren Austrittsöffnungen durch kleine Schwerependel verschlossen bzw. freigegeben werden können. Durch diese Stützung sowie durch die hohe Präzessionsdauer wird erreicht, daß sich der Horizont in die Mittellage der von den Schwerependeln eingenommenen Richtungen einstellt. Die Ausblasedüsen werden von den Schwerependeln bereits nach Auslenkungen von $\pm 2^0$ ganz freigegeben bzw. zugedeckt. Die Rückführkraft nimmt also nach Auslenkungen um diesen Betrag konstante Werte an. Diese Tatsache macht es notwendig, bei der Berechnung der Schwingungen des Horizontes schrittweise vorzugehen, wie das auch zum erstenmal von E. Schmid geschehen ist [4]. Wie die vorliegenden Untersuchungen zeigen werden, reicht jedoch die dort getroffene Einteilung des Rechnungsganges in vier Gebiete nicht für alle in Frage kommenden Fälle aus. Deshalb soll hier die Rechnung noch

*) Schrifttumshinweis am Schluß der Arbeit.

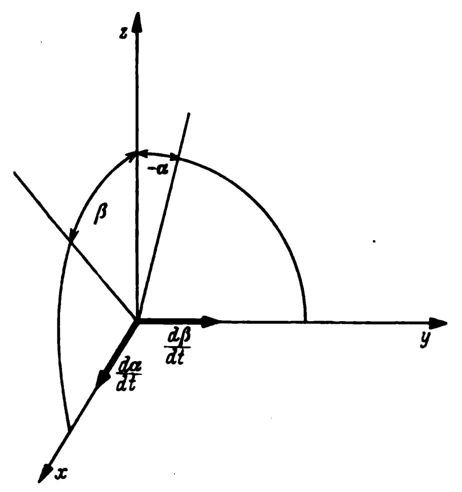


Bild 8. Koordinatensystem.

etwas allgemeiner angefaßt werden. Es wird sich zeigen, daß man ein verhältnismäßig einfaches graphisches Verfahren angeben kann, das die Einschwingkurven des Horizontes ohne viel Mühe zu zeichnen gestattet.

Der Rechnung legen wir ein Koordinatensystem nach Bild 8 zugrunde. Die Hochachse (z-Achse) soll mit der Gleichgewichtslage der Kreiselachse zusammenfallen. Die x-Achse fällt dann in die Flugzeuglängsachse (positiv zum Schwanz hin gerechnet). Die y-Achse wird zur Querachse (positiv nach rechts). Den Drehwinkel um die x-Achse bezeichnen wir mit α, den um die y-Achse mit β, und zwar so, daß die Vektoren $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$ in die Richtung der positiven x- bzw. y-Achse fallen. Wir wollen uns ferner bei der Rechnung auf kleine Winkel beschränken, so daß die linearisierten Kreiselgleichungen nach A. Föppl benutzt werden können.

Bezeichnen wir mit J den Impuls des Kreisels, mit Θ_x bzw. Θ_y die Trägheitsmomente des Horizontsystems (Kreisel + Kreiselgehäuse + Kardanrahmen) um die x- bzw. y-Achse, so bekommen wir das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x \frac{d^2\alpha}{dt^2} + J\,\frac{d\beta}{dt} &= M_x \\ \Theta_y \frac{d^2\beta}{dt^2} - J\,\frac{d\alpha}{dt} &= M_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichungen sagen aus, daß die Momente der Trägheitswirkungen zusammen mit den Kreiselmomenten den äußeren Momenten das Gleichgewicht halten. Bei den uns hier lediglich interessierenden langsamen Präzessionsbewegungen sind die Beschleunigungen $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ und $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ so gering, daß wir die Trägheitsglieder unbedenklich gegenüber den Kreiselgliedern vernachlässigen können. Das bedeutet nichts anderes, als eine Vernachlässigung der Nutationen des Kreisels, die für die bei technischen Kreiseln üblichen Drehzahlen gerechtfertigt ist.

M_x und M_y sind die Momente um die beiden Präzessionsachsen. Sie setzen sich zusammen aus 1. den Düsenmomenten, 2. den Schweremomenten, 3. den Coriolismomenten, 4. den Reibungsmomenten. Die letzteren wollen wir zunächst außer acht lassen, da sie im allgemeinen vernachlässigbar klein gegen die Düsenmomente sind. Die Schweremomente sind für den Idealfall des Sperry-Horizontes gleich Null, da ja das System im Schwerpunkt aufgehängt ist. Es soll aber dennoch bei diesen ersten Betrachtungen mit einem Schweremoment gerechnet werden, da sich die so erhaltenen Ergebnisse in sehr einfacher Weise später anwenden lassen. Es zeigt sich nämlich, daß die beim Kurvenflug auftretenden Coriolismomente dieselbe Wirkung wie die Schweremomente haben.

Die für den Sperry-Horizont wichtigsten Momente sind die Düsenmomente. Wie schon erwähnt, sind diese nur in einem kleinen Winkelbereich mit den Winkeln α und β ver-

änderlich. Wir wollen sie dort den Winkeln proportional annehmen. Die Unstetigkeit der Dämpfungsfunktionen macht eine Einteilung des Rechnungsganges in neun Gebiete erforderlich, Bild 9. In den Gebieten I bis IV seien beide Düsenpaare ganz geöffnet bzw. geschlossen. Das Düsenmoment habe um beide Achsen den konstanten Wert D. Wie die Versuche an einem Sperry-Horizont gezeigt haben, ist die Annahme der Gleichheit der Düsenmomente in den beiden Ebenen durchaus berechtigt. Die Vorzeichen der Düsenmomente bestimmen sich aus den Bedingungen, daß die Momente die jeweiligen Auslenkungen rückgängig zu machen suchen. In den Gebieten V und VII sind die α-Klappen voll geöffnet, der Winkel β liegt jedoch im Proportionalitätsbereich ($-2^0 < \beta < +2^0$). Für die Gebiete VI und VIII gilt $|\beta| > 2^0$; $-2^0 < \alpha < +2^0$. Das Gebiet IX schließlich gibt den Bereich der Proportionalität zwischen den Winkeln und den Düsenmomenten wieder.

A. Der Einschwingvorgang bei ungestörtem Geradeausflug.

Es soll zunächst das Verhalten des Sperry-Horizontes bei beschleunigungsfreien Flugzuständen betrachtet werden. Dann sind als äußere Momente in Gl. (1) lediglich das Schweremoment, dessen Komponenten um die beiden Präzessionsachsen mit $G_1 s_1$ und $G_2 s_2$ bezeichnet werden sollen sowie das Düsenmoment einzusetzen.

1. Gebiet I bis IV. In den Gebieten I bis IV sind die Düsenmomente unabhängig von den Auslenkungen α und β. Wir bekommen damit die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} +J\frac{d\beta}{dt} &= -G_1 s_1 \alpha \mp D \\ -J\frac{d\alpha}{dt} &= -G_2 s_2 \beta \pm D \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

In der weiteren Rechnung wollen wir $G_1 s_1 = G_2 s_2$ setzen. Mit den Bezeichnungen

$$\frac{G_1 s_1}{J} = \frac{G_2 s_2}{J} = p$$

(Präzessionsgeschwindigkeit wegen des Schweremomentes),

$$\frac{D}{J} = d$$

(Präzessionsgeschwindigkeit wegen des Düsenmomentes). ergibt sich dann aus (2)

$$\left.\begin{aligned} 1.\quad \frac{d\beta}{dt} + p\,\alpha \pm d &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p\,\beta \mp d &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Gebiet I bis IV} \quad \ldots (3)$$

Dabei gilt in den einzelnen Gebieten folgende Vorzeichenregel:

	Gleichung 1	Gleichung 2
Gebiet I	oberes Vorzeichen	oberes Vorzeichen
Gebiet II	oberes Vorzeichen	unteres Vorzeichen
Gebiet III	unteres Vorzeichen	unteres Vorzeichen
Gebiet IV	unteres Vorzeichen	oberes Vorzeichen

Die Lösung des Gleichungssystemes läßt sich sofort angeben. Wir erhalten mit den beiden Integrationskonstanten A und φ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\sin(p\,t + \varphi) \mp \frac{d}{p} \\ \beta &= A\cos(p\,t + \varphi) \pm \frac{d}{p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Das ist eine ungedämpfte Kreisbewegung der Kreiselspitze mit der Umlauffrequenz p und dem Radius A um eine bestimmte Gleichgewichtslage. Die Verhältnisse seien z. B. für das Gebiet I genauer betrachtet, Bild 10. Es gelten dort die beiden oberen Vorzeichen von (4). Wir haben also die Gleichgewichtslage der Schwingung:

$$\alpha_0 = -\frac{d}{p};\ \beta_0 = +\frac{d}{p}.$$

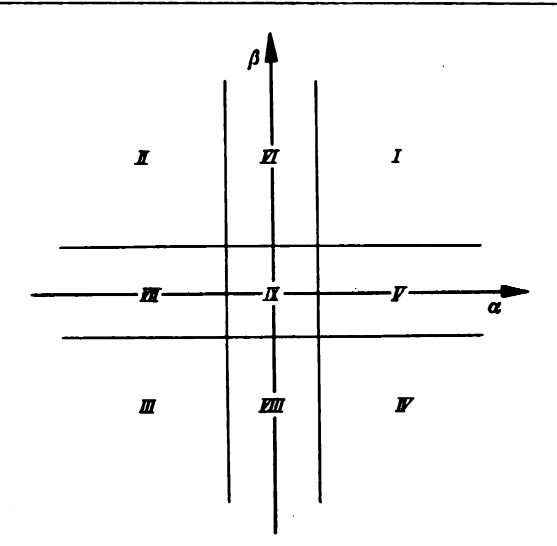


Bild 9. Gebietseinteilung.

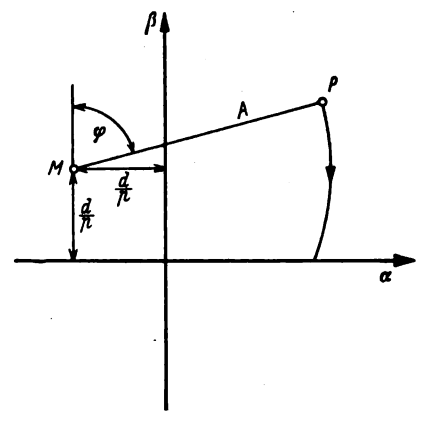


Bild 10. Zur Konstruktion der Bahnkurven.

Da aber im Gebiet I sowohl α als β positiv sind, so kann die Gleichgewichtslage (α_0, β_0) nicht in diesem Gebiet liegen. Sie liegt vielmehr im Gebiet II. Das hat zur Folge, daß der durch (4) gegebene Kreis niemals ganz durchlaufen werden kann, weil die Kreiselspitze im Verlauf ihrer Bewegung in andere Gebiete gelangt, für die wieder andere Gleichgewichtslagen gelten. Aus Bild 10 ersieht man sofort die Bedeutung der durch die Anfangsbedingungen gegebenen Größen A und φ. Der Kreis wird vom Ausgangspunkt P (zur Zeit $t = 0$) im Sinne größer werdender φ durchlaufen, bis die Kreiselspitze in ein anderes Gebiet kommt.

Wenn wir uns nun einen Augenblick die Gebiete V bis VIII so schmal denken, daß wir sie vernachlässigen können, so wird sich die gesamte Bahnkurve der Kreiselspitze aus Kreisbögen mit verschiedenen Gleichgewichtslagen zusammensetzen, Bild 11. Man sieht sofort, daß durch diese Art der Zusammensetzung nicht mehr von einer ungedämpften Bewegung gesprochen werden kann. Denn im ganzen genommen nähert sich die Kreiselspitze stets ihrer eigentlichen Gleichgewichtslage $\alpha = 0$; $\beta = 0$, und zwar um so mehr, je größer der Wert $\frac{d}{p}$ ist, je weiter also die Gleichgewichtslagen der einzelnen Kreise vom Nullpunkt entfernt liegen. Im Falle des astatischen Sperry-Horizontes ($p = 0$) rücken die Gleichgewichtslagen der einzelnen Gebiete auf den Winkelhalbierenden der Quadranten ins Unendliche. Die Kreiselspitze bewegt sich dann jeweils auf einer Geraden, die unter 45° gegen die Hauptachsen geneigt ist. Das läßt sich auch sofort aus (3) ersehen, denn für $p = 0$ entkoppeln sich die Gleichungen. Als Lösung hat man dann:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mp d\,t + \alpha_1 \\ \beta &= \pm d\,t + \beta_1 \end{aligned}\right\} \text{Gebiet I bis IV für } p = 0 \quad \ldots (5)$$

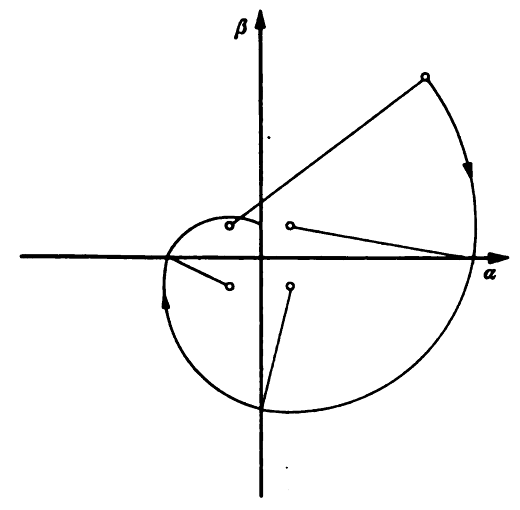


Bild 11. Zusammensetzung der einzelnen Bogenstücke.

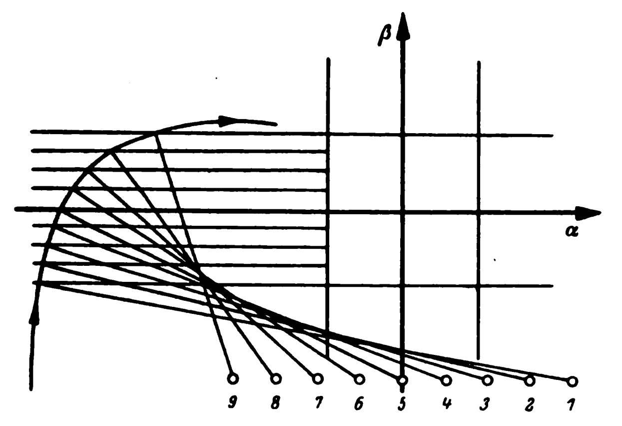


Bild 12. Konstruktion der Bahnkurven in den Gebieten V bis VIII.

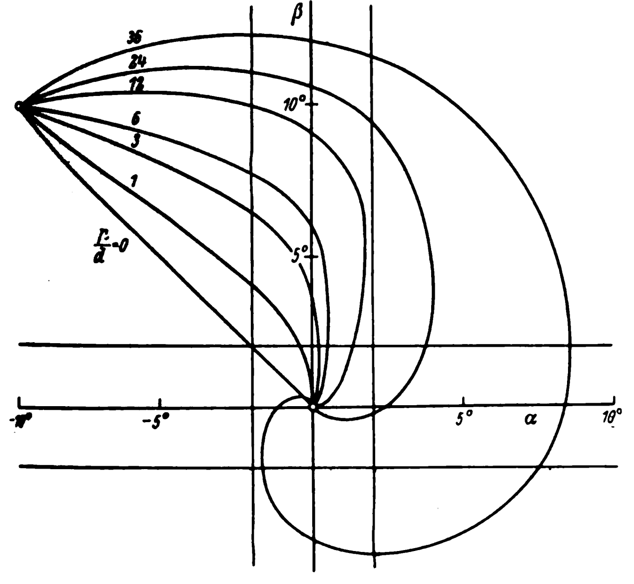


Bild 13. Graphisch konstruierte Einschwingkurven des Sperry-Horizontes bei verschiedenen Schwerpunktstieferlagen.

Dabei sind α_1 und β_1 die Auslenkungen zur Zeit $t = 0$.

Die Größe der Gleichgewichtslagen kann demnach kein Maß für die am Horizont auftretenden Auslenkungen sein, denn die Gleichgewichtslagen liegen nicht in dem Bereich für den sie Gültigkeit besitzen und können daher nie erreicht werden.

Es mag noch bemerkt werden, daß natürlich auch Schwerpunktshöherlagen bei dieser Rechnung mit erfaßt sind. Man hat dazu nur für p negative Werte einzusetzen. Dadurch ändert sich der Drehsinn der einzelnen Kreisbogenstücke.

2. Gebiet V bis VIII. In den Gebieten V und VII haben wir für das Düsenmoment um die x-Achse $-D_1\beta$ anzusetzen, denn die um die x-Achse wirksamen Düsen werden von den β-Pendeln gesteuert. Führen wir die Abkürzung $\frac{D_1}{J} = d_1$ ein, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + p\,\alpha + d_1\,\beta &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p\,\beta \mp d \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Gebiet V: oberes Vorzeichen,
Gebiet VII: unteres Vorzeichen.

Ganz entsprechend erhält man für die Gebiete VI und VIII das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + p\,\alpha \pm d \quad &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p\,\beta - d_1\,\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

Gebiet VI: oberes Vorzeichen,
Gebiet VIII: unteres Vorzeichen.

Die Lösung, deren Angabe hier unterbleiben soll, ergibt als Bahnkurve der Kreiselspitze eine verzerrte logarithmische Spirale. Da sich diese jedoch schlecht zeichnen läßt, kann man so vorgehen, daß die Gebiete V bis VIII in einzelne Streifen zerschnitten werden, in denen die Düsenmomente jeweils konstant angesetzt werden. Dann kann man die zuvor in den Gebieten I bis IV angewandte Methode benutzen, und die Spirale durch Kreisbogenstücke annähern. Die dabei erzielte Genauigkeit reicht für die vorliegenden Untersuchungen vollkommen aus. Je nach der Art des zu konstruierenden Kurvenstückes kommt man mit zwei bis acht Schritten aus, Bild 12. Die jeweilige Gleichgewichtslage wandert dabei vom Punkte 1 (Gleichgewichtslage für das Gebiet III) bis zum Punkte 9 (Gleichgewichtslage für das Gebiet II).

3. Gebiet IX. Im Gebiet IX sind beide Düsenmomente den Winkeln proportional anzusetzen. Man erhält das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + p\,\alpha + d_1\,\beta &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + p\,\beta - d_1\,\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Gebiet IX } \ldots . (8)$$

Die Lösung ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A\,e^{-d_1 t} \sin(p\,t + \varphi) \\ \beta &= A\,e^{-d_1 t} \cos(p\,t + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Das ist eine logarithmische Spirale, die den Nullpunkt als Mittelpunkt hat. Zur zeichnerischen Bestimmung kann die Spirale wieder in ähnlicher Weise durch Kreisbogenstücke angenähert werden, wie dies in den Gebieten V bis VIII geschah. Im Falle $p = 0$ erhalten wir die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1\,e^{-d_1 t} \\ \beta &= \beta_1\,e^{-d_1 t} \end{aligned}\right\} (p = 0) \quad \ldots\ldots (10)$$

Das ist ein logarithmisches Hineinkriechen in den Nullpunkt auf einer Geraden.

4. Die Einschwingkurven. Damit sind die Bahnkurven in den einzelnen Gebieten berechnet. Wir können nun darangehen, die Einschwingkurven des Sperry-Horizontes schrittweise zu konstruieren. Das ist in Bild 13 für verschiedene Werte des Schweremomentes geschehen. Es ist angenommen, daß der Horizont zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung $\alpha = -10^0$; $\beta = +10^0$ hat. Im Fall $p = 0$ geht die Kreiselspitze auf einer Geraden in den Nullpunkt hinein. Bei größer werdendem p beulen sich die Kurven mehr und mehr aus. Dabei ist es bemerkenswert, daß bis zu verhältnismäßig hohen Werten des Schweremomentes das Gebiet VI nicht überschritten wird. Der Einschwingvorgang spielt sich also hauptsächlich in den Gebieten II, VI und IX ab. Erst bei großen Schwerpunktstieferlagen (oder Schwerpunkts-

höherlagen) geht der Horizont über diese Gebiete hinaus. Geringe Schweremomente, etwa bis zur Größe des Düsenmomentes, haben auf den Einschwingvorgang des Horizontes wenig Einfluß.

Um diese Ergebnisse experimentiell zu bestätigen, wurden an einem Sperry-Horizont Zusatzgewichte angebracht und so verschiedene Schwerpunktstieferlagen hergestellt. Die dann aufgenommenen Einschwingkurven zeigt Bild 14. Die Anfangsauslenkung betrug $\alpha = -40^0$; $\beta = 0^0$. Die Kurven zeigen durchaus den nach der Theorie zu erwartenden Verlauf. Vor allem ist auch das Steckenbleiben im Gebiet VI an einer Kurve deutlich zu sehen.

Für den unveränderten Sperry-Horizont wurden schließlich Einschwingkurven unter den verschiedensten Bedingungen aufgenommen. Bild 15 zeigt die Kurven, die sich nach Auslenkung des Horizontes um 40^0 jeweils in einer Achsenrichtung ergeben. Ausgezogen sind die theoretischen Kurven. Die eingezeichneten Kreise bezeichnen die in Abständen von 1 min gemessenen Werte. Man sieht, daß der Horizont nach 5 bis 6 min praktisch in die Gleichgewichtslage eingeschwungen ist. Die Kurven von Bild 16 sind nach Auslenkungen um beide Achsen aufgenommen worden. Wieder sind die theoretischen Kurven ausgezogen und die nach je 1 min gemessenen Werte als Kreise eingezeichnet. Wie es die Gleichung (5) verlangt, sind diese Einschwingkurven in den Gebieten I bis IV unter 45^0 gegen die Achsenrichtungen geneigt. In den Gebieten V bis VIII biegen sie dann ab und gehen in Richtung der Achsen in die Nulllage.

Die Geschwindigkeit, mit der der Horizont nach einer Störung wieder in die Gleichgewichtslage einschwingt, ist durch die Größe d bzw. d_1 gegeben. Die Messungen ergaben für d den Wert $9{,}6^0$/min.

Der Antriebsdruck hat auf die Größe von d nur wenig Einfluß, da zugleich mit dem Düsenmoment D dann auch der Impuls J verändert wird. Der Quotient $\frac{D}{J} = d$ bleibt dadurch fast konstant. Messungen ergaben ein geringes Anwachsen von d mit dem Antriebsdruck, Bild 17.

B. Die Fehler im Kurvenflug.

Geht ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit v in eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω durchflogene horizontale Kreiskurve, so weicht das Scheinlot um den Winkel α_L vom wahren Lot ab. Es gilt dabei für nicht zu große α_L die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha_L = \frac{v\,\omega}{g} \approx \alpha_L.$$

Die Steuerpendel werden sich in die Richtung des Scheinlotes einstellen, und das dadurch auftretende Düsenmoment wird den Horizont zum Scheinlot hinzuziehen suchen. Auf den ausgelenkten Horizont wirkt dann wegen der Drehung der Flugbahn ein Coriolismoment, das den Horizont zu einer Präzession um die Richtung des Drehgeschwindigkeitsvektors ω veranlaßt. Je nach den Verhältnissen dieser beiden Momente wird sich der Einschwingvorgang in verschiedener Weise abspielen. Zur Beschreibung des Horizontverhaltens beim Kurvenflug wählen wir ein Koordynatensystem nach Bild 8, lassen es jedoch mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotieren. Die in diesem Koordinatensystem vorkommenden Winkel entsprechen nicht den beim Kurvenflug am Horizont wirklich abgelesenen Werten, sondern geben unmittelbar die Fehler der Neigungsanzeige um die beiden Achsen wieder.

Das bei einer Winkelgeschwindigkeit ω auftretende Coriolismoment ist nach Größe und Richtung durch das Vektorprodukt gegeben:

$$\mathfrak{K} = [\mathfrak{J} \cdot \omega].$$

Die Komponenten um die x- und die y-Achse sind bei horizontalem Kreisflug

$$K_x = -J\,\omega \sin\alpha \approx -J\,\omega\,\alpha,$$
$$K_y = -J\,\omega \sin\beta \approx -J\,\omega\,\beta.$$

Diese Momente sind nun in Gleichung (1) einzusetzen.

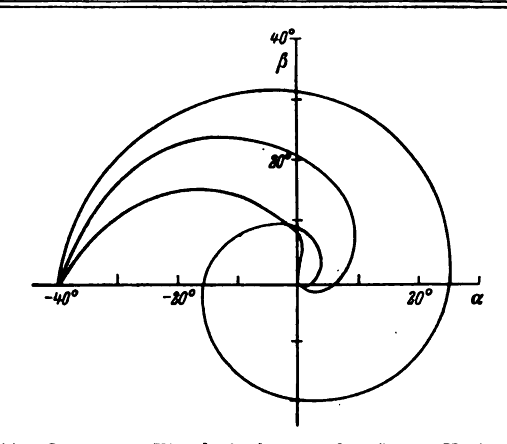


Bild 14. Gemessene Einschwingkurven des Sperry-Horizontes bei verschiedenen Schwerpunktstieferlagen.

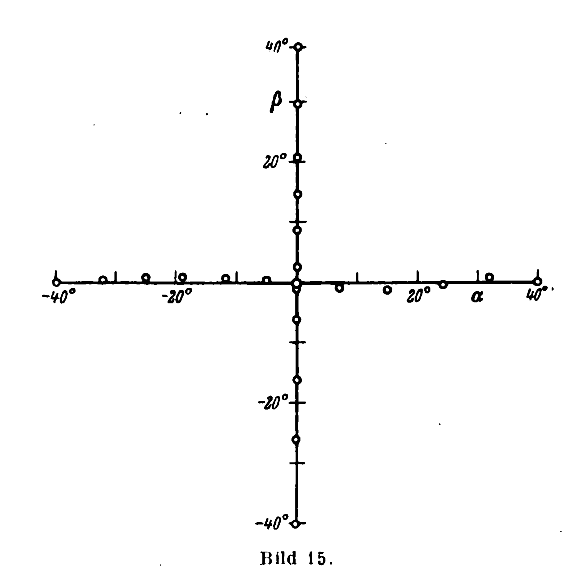


Bild 15.

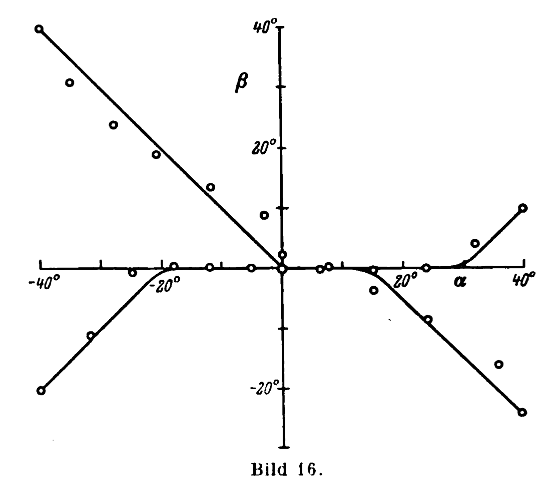


Bild 16.

Bild 15 und 16. Gemessene Einschwingkurven des astatischen Sperry-Horizontes.

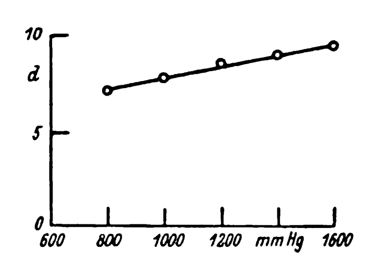


Bild 17. Abhängigkeit der Einschwinggeschwindigkeit vom Antriebsdruck.



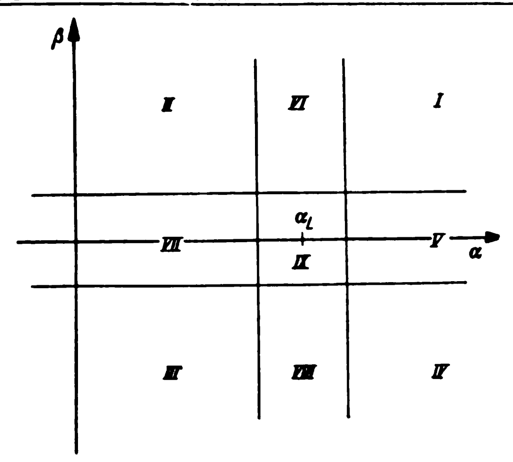


Bild 18. Verschiebung der Gebiete im Kurvenflug.

Gebiet I bis IV. In den Gebieten I bis IV erhalten wir nun mit den schon früher benutzten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + (p+\omega)\,\alpha - p\,\alpha_L \pm d &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + (p+\omega)\,\beta \qquad \mp d &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

Dabei ist jedoch zu bedenken, daß die Vorzeichenänderung des Düsenmomentes in der zweiten Gleichung von (11) jetzt nicht bei $\alpha = 0$, sondern bei $\alpha = \alpha_L$ auftritt. Die Einteilung der Gebiete ändert sich dadurch derart, daß eine Parallelverschiebung um den Betrag α_L in Richtung der α-Achse auftritt, Bild 18. Der Horizont befindet sich jetzt beim Einleiten einer Linkskurve im Gebiet VII, beim Einleiten einer Rechtskurve im Gebiet V.

Die Lösung des Gleichungssystemes (11) ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A \sin[(p+\omega)\,t+\varphi] + \alpha_0 \\ \beta &= A \cos[(p+\omega)\,t+\varphi] + \beta_0 \\ \text{mit} \quad \alpha_0 &= \frac{\frac{p\,\omega\,v}{g} \mp d}{p+\omega} \\ \beta_0 &= \frac{\pm d}{p+\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Das ist wieder eine ungedämpfte Kreisbewegung um bestimmte Gleichgewichtslagen. Doch ist auch hier, wie zuvor beim ungestörten Einschwingen, die Gesamtbewegung nicht ungedämpft, da die Kreise im allgemeinen nicht ganz durchlaufen werden können, und so durch die Art der Zusammensetzung der Gesamtbewegung aus Kreisbögen eine Dämpfung zustande kommt. Nur in einem gewissen Bereich von Drehzeiten kann wirklich eine ungedämpfte Schwingung vorkommen.

In der weiteren Rechnung soll nun das Schweremoment vernachlässigt, also das Verhalten des wirklich ausgeführten Sperry-Horizontes untersucht werden. Wir bekommen dann für die Gebiete I bis IV die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A \sin(\omega t+\varphi) \mp \frac{d}{\omega} \\ \beta &= A \cos(\omega t+\varphi) \pm \frac{d}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \text{Gebiet I bis IV für } p=0 \quad \ldots \quad (13)$$

Vergleichen wir diese Lösung mit der Gleichung (4), so erkennen wir die vollkommene Übereinstimmung, nur daß jetzt an die Stelle der Präzessionsgeschwindigkeit p die Winkelgeschwindigkeit ω getreten ist. Wir können deshalb die damals abgeleitete graphische Konstruktion ohne weiteres übertragen. Aus der Analogie der Gleichungen (4) und (13) darf man jedoch nicht schließen, daß auch die entsprechenden Einschwingkurven analog sind, denn es kommt durch die Verschiebung der Gebiete um den Betrag α_L eine völlig andere Zusammensetzung der einzelnen Kreisbogenstücke zustande. Die Kurvenbilder werden das später zeigen.

Gebiet V bis VIII. Die Bewegungsgleichungen in den Gebieten V und VIII entsprechen vollkommen der Gleichung (6). Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\,\alpha + d_1\,\beta &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\,\beta \mp d \quad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Gebiet V: oberes Vorzeichen,
Gebiet VII: unteres Vorzeichen.

Als Gleichgewichtslagen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \mp \frac{d\,d_1}{\omega^2} \\ \beta_0 &= \pm \frac{d}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

Die Auflösung des Systems (14) ergibt auch hier wieder Spiralen als Einschwingkurven, und zwar für langsame Drehkreise aperiodische Lösungen, für schnelle Drehkreise periodische Lösungen. (Siehe z. B. [4].) Der aperiodische Grenzfall liegt für die am Sperry-Horizont gemessenen Werte bei einem Drehkreis von 2,6 min. Praktisch genommen hat diese Einteilung jedoch wenig Bedeutung, da der Horizont für derartige Drehkreise die Gebiete V bzw. VII sehr bald verläßt. Zur graphischen Konstruktion der Einschwingkurven kann man wieder mit hinreichender Genauigkeit die zuvor schon beschriebene Methode der schrittweisen Annäherung durch Kreisbögen anwenden.

Von den Gebieten VI und VIII interessieren uns nur noch die Gleichgewichtslagen, denn der Einschwingvorgang ist derselbe wie in den Gebieten V und VII. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\,\alpha \pm d \qquad &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\,\beta - d_1(\alpha - \alpha_L) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Gebiet VI: oberes Vorzeichen,
Gebiet VIII: unteres Vorzeichen.

Daraus bekommen wir die Gleichgewichtslagen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \mp \frac{d}{\omega} \\ \beta_0 &= \pm \frac{d\,d_1}{\omega^2} - \frac{d_1\,v}{g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

Gebiet IX. Schließlich bleibt noch das Gebiet IX. Wir erhalten dafür die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\,\alpha + d_1\,\beta \qquad &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\,\beta - d_1(\alpha - \alpha_L) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Gebiet IX} \quad (18)$$

Als Lösung ergibt sich ein Einschwingen auf einer logarithmischen Spirale in die Gleichgewichtslage

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{d_1^2\,\frac{v\,\omega}{g}}{\omega^2 + d_1^2} \\ \beta_0 &= -\frac{\omega\,d_1\,\frac{v\,\omega}{g}}{\omega^2 + d_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{Gebiet IX} \quad \ldots \quad (19)$$

Die Gleichgewichtslage fällt nicht mit dem Scheinlot zusammen, sondern weicht um so mehr ab, je größer ω ist, je kürzer also die Drehzeit ist.

Damit ist das Verhalten des Horizontes beim Kurvenflug in den einzelnen Gebieten festgelegt, so daß jetzt die Einschwingkurven bei verschiedenen Drehzeiten an Hand der graphischen Konstruktion und der Versuche diskutiert werden können.

1. Stationärer Kurvenflug.

Bild 19 zeigt die Einschwingkurven des Horizontes bei verschieden schnell durchflogenen Rechtskurven. Die Kurven

sind für eine Fluggeschwindigkeit von 400 km/h unter Berücksichtigung der am Horizont gemessenen Apparatekonstanten konstruiert. Die an den Kurven angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Drehzeit in Minuten. Die eingezeichneten Kreise am Ende der Einschwingkurven geben die Gleichgewichtslagen an, in denen der Horizont bei stationären Kurvenflügen steckenbleibt.

Bei schnell durchflogenen Recktskurven kommt der Horizont nicht aus dem Gebiet V (bei Linkskreisen aus dem Gebiet VII) heraus. Das sieht man aus (15), wenn man dort ω groß gegen d bzw. gegen d_1 setzt. Der Horizont hat also dann nur geringe Fehler, von denen — wie man ebenfalls aus (15) sieht — der Fehler in der Längsneigungsanzeige der größere ist. Daß der Horizont trotz der bei schnellen Kurven auftretenden großen Zentrifugalkräfte nur geringe Fehler zeigt, liegt daran, daß in diesem Fall das Coriolismoment mehr Einfluß hat als das Düsenmoment.

Werden die Kurven mit geringerer Drehzeit durchflogen, so kommt der Horizont auf einem Stück einer logarithmischen Spirale aus dem Gebiet V heraus in das Gebiet IV (bei Linkskreisen aus dem Gebiet VII in das Gebiet III). Die für dieses Gebiet geltende Gleichgewichtslage liegt, wie man aus (13) unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel von (3) ersehen kann, ebenfalls im Gebiet IV. Es gibt jetzt also einen Bereich von Drehzeiten, bei dem der Horizont die durch (13) beschriebene ungedämpfte Kreisschwingung wirklich voll ausführen kann. Im vorliegenden Fall gilt das für die mit 3, 4 und 5 min durchflogenen Kreise, Bild 19. Erst wenn die Drehkreise so langsam geworden sind, daß die ungedämpfte Kreisschwingung nicht mehr ganz im Gebiet IV liegt, sondern das Gebiet VIII teilweise überdeckt, treten wieder gedämpfte Einschwingkurven auf. Die im Gebiet VIII geltende Gleichgewichtslage liegt im Gebiet IV, während die im Gebiet IV geltende Gleichgewichtslage den Horizont wieder in das Gebiet VIII herüberdrängt. Der Horizont wird also an der Grenze beider Gebiete zur Ruhe kommen. In Bild 19 ist das für die mit 6 min durchflogene Kurve der Fall.

Für noch größere Drehzeiten gelangt der Horizont nicht mehr in das Gebiet IV, sondern wird aus dem Gebiet VII gleich in das Gebiet IX einschwingen. Denn das Gebiet IX nähert sich wegen des immer geringer werdenden Scheinlotwinkels α_L mehr und mehr der Nullage. Wie die Rechnung ergab, stellt sich der Horizont im Gebiet IX näherungsweise in das Scheinlot ein, zeigt aber außerdem einen geringen Fehler in der Längsneigungsanzeige, Kurven 10 und 20 von Bild 19.

Für Linkskreise ergeben sich dieselben Einschwingkurven, nur an der β-Achse gespiegelt. Wir können also feststellen, daß der Sperry-Horizont bei allen Kreisflügen in der Querneigung einen Fehler zeigt, dessen Vorzeichen

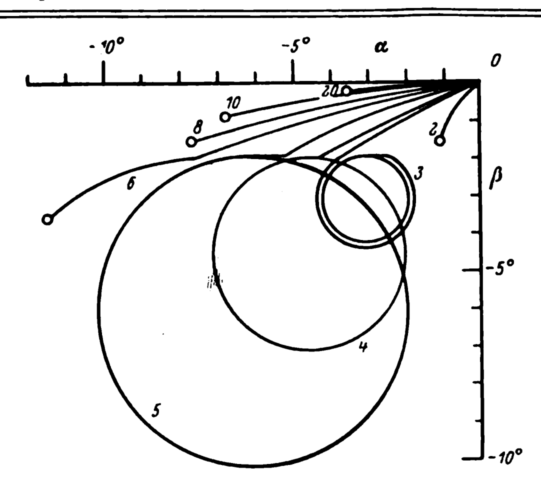


Bild 19. Konstruierte Fehlerkurven des Sperry-Horizontes beim Kreisflug mit verschiedenen Drehzeiten.

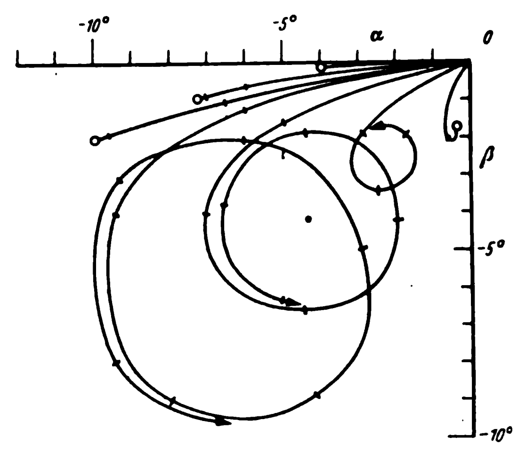


Bild 21. Gemessene Fehlerkurven des Sperry-Horizontes beim Kreisflug mit verschiedenen Drehzeiten.

dem jeweiligen Scheinlot entspricht. In der Längsneigungsanzeige ist der Fehler stets negativ, d. h. wenn der Flugzeugführer die Längsneigung nach dem Horizont steuert, fliegt das Flugzeug nicht horizontal, sondern abwärts.

Um die bisher rein theoretischen Ergebnisse zu bestätigen, wurden mit dem Sperry-Horizont Versuche auf einem Drehtisch angestellt. Bild 20 zeigt das für diese Versuche besonders umgebaute Gerät. Die Zentrifugalkraft wurde in ihrer Wirkung dadurch ersetzt, daß bei schnellen Drehkreisen die α-Pendel so festgehalten wurden, daß sie die Düsen im richtigen Sinne freigaben. Solange das Coriolismoment den Horizont am Einschwingen in die Gebiete VIII und IX verhindert, ist das noch erlaubt. Für langsame Drehungen wurde an den α-Pendeln ein winziger Hebel angebracht, der an seinem Ende durch kleine Gewichte so lange beschwert wurde, bis die Pendelneigung in der Ruhestellung dem Scheinlotwinkel entsprach.

Die nun bei den verschiedenen Drehkreisen gemessenen Kurven zeigt Bild 21. Die Einschwingkurven tragen gleichzeitig einen Zeitmaßstab; nach je 1 min ist ein Querstrich angebracht. Die gute Übereinstimmung mit den graphisch konstruierten Kurven beweist, daß es sehr wohl möglich ist, derart unstetige Vorgänge, wie sie beim Sperry-Horizont auftreten, rechnerisch zu erfassen. Bei der Beurteilung der Kurven muß man bedenken, daß die Ablesegenauigkeit des Sperry-Horizontes trotz einer besonders für die Versuche angebrachten Skala nur etwa $\frac{1}{2}^0$ beträgt.

2. Flug auf Kreisbogenstücken. Die Kurven, Bild 19 und 21, waren für stationären Kreisflug gezeichnet. Es sollen jetzt die Fehler betrachtet werden, die nach einem einzelnen Kreis, nach einem halben Kreis und nach einem viertel Kreis auftreten. Bild 22, 23 und 24 zeigen links jedesmal die Flugbahn, rechts die dazugehörige Einschwingkurve des Horizontes. An den Einschwingkurven sind die

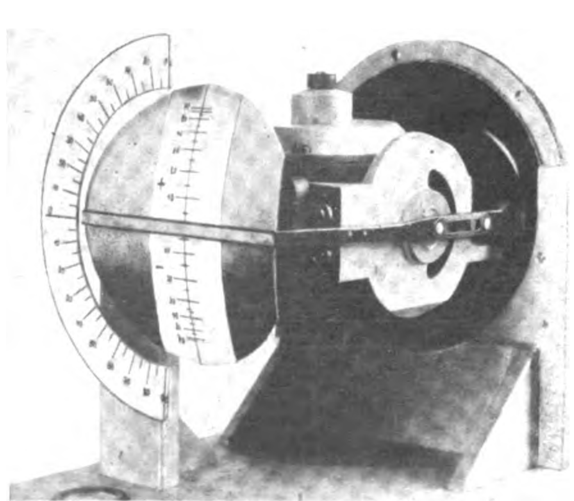


Bild 20. Ansicht des Versuchsgerätes.

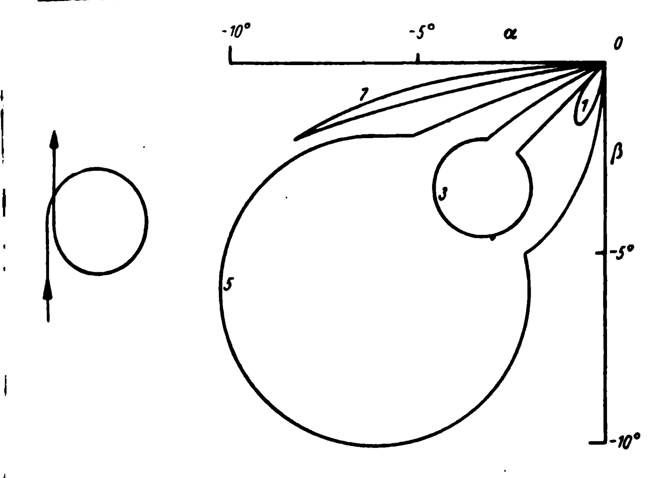


Bild 22. Fehlerkurven des Sperry-Horizontes bei einem vollen Kreis für verschiedene Drehzeiten.

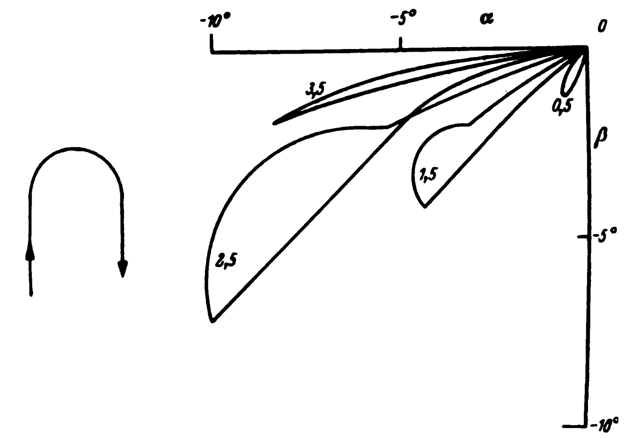


Bild 23. Fehlerkurven des Sperry-Horizontes bei einem halben Kreis für verschiedene Drehzeiten.

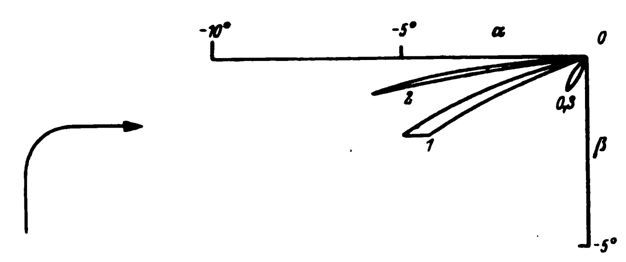


Bild 24. Fehlerkurven des Sperry-Horizontes bei einem viertel Kreis für verschiedene Drehzeiten.

Zeiten in Minuten angeschrieben, die das Flugzeug zur Ausführung der Flugfigur — vom Beginn bis zum Ende des Kreisfluges gerechnet — benötigt. Vor und nach dem Kreisflug soll das Flugzeug geradeaus fliegen. Die Kurven setzen sich zusammen aus den Auswanderungskurven des ungestörten Horizontes beim Kreisflug sowie den Einschwingkurven des gestörten Horizontes bei ungestörtem Geradeausflug. Der Horizont benötigt nach Aufhören des Kreisfluges etwa 2 min (im ungünstigsten Fall) um wieder in die Vertikale einzuschwingen.

Nach dem angegebenen Verfahren kann man schließlich die Auswanderungskurven für den Fall ganz beliebiger, aus horizontalen Kreisbogenstücken zusammengesetzter Flugbahnen schrittweise ermitteln.

3. Der größtmögliche Fehler. Die gezeigten Kurven sind für eine Fluggeschwindigkeit von 400 km/h konstruiert worden. Bei anderen Fluggeschwindigkeiten wird der Auswanderungsvorgang zwar für schnelle Drehkreise nicht beeinflußt, bei langsamen Kreisen wird sich jedoch wegen der geänderten Scheinlotwinkel die Endlage des Horizontes verschieben, insbesondere wird dadurch der größtmögliche Fehler beeinflußt. Dieser größte Fehler des Horizontes tritt näherungsweise dann auf, wenn die ungedämpfte Kreis-

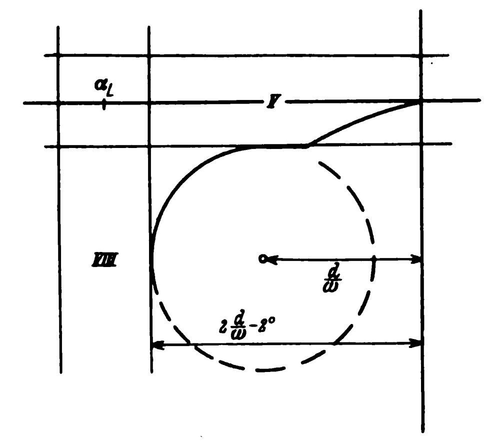


Bild 25. Zur Berechnung des größtmöglichen Fehlers.

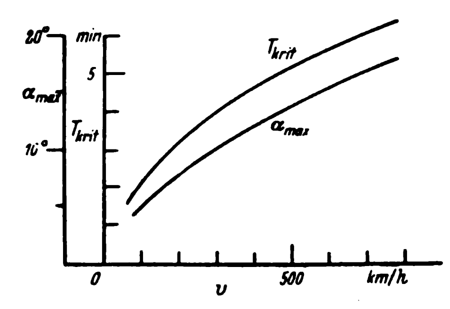


Bild 26. Abhängigkeit der kritischen Drehkreiszeit und des größten Fehlers von der Fluggeschwindigkeit.

bewegung im Gebiet III bzw. IV gerade bis an das Gebiet VIII reicht, Bild 25. Da nun das Gebiet VIII proportional zum Scheinlotwinkel, also auch zur Fluggeschwindigkeit, verschoben wird, so wird bei größerer Fluggeschwindigkeit der maximale Fehler bei entsprechend größeren Drehkreiszeiten auftreten. Nach Bild 25 gilt:

$$\alpha_{\max} = \frac{v\,\omega}{g} - 2^0 = 2\,\frac{d}{\omega} - 2^0.$$

Daraus erhalten wir zunächst die gefährlichste Drehfrequenz:

$$\omega_{\mathrm{krit}} = \sqrt{\frac{2\,d\,g}{v}} \qquad \ldots\ldots\ldots (20)$$

und damit den größtmöglichen Fehler

$$\alpha_{\max} = \sqrt{\frac{2\,d\,v}{g}} - 2^0 \qquad \ldots\ldots (21)$$

Der größtmögliche Fehler wächst also mit der Wurzel aus der Fluggeschwindigkeit. Man könnte ihn verringern durch ein möglichst kleines d, also kleines Düsenmoment und großen Impuls.

Bild 26 zeigt die Abhängigkeit der kritischen Drehzeit und des maximalen Fehlers von der Fluggeschwindigkeit. Den Kurven ist der am Horizont gemessene Wert $d = 0{,}0028/\mathrm{s}$ zugrunde gelegt.

C. Verbesserungsmöglichkeiten.

Wir wollen untersuchen, wie man den vorliegenden Sperry-Horizont ohne allzugroße Änderung seines Baues verbessern kann. Deshalb sei zunächst überlegt, welche Gerätegrößen für eine Änderung in Frage kommen.

1. Die Lagerreibung. Sie wirkt in jedem Falle störend und ist deshalb möglichst klein zu halten.

2. Der Kreiseldrall. Da das Verhältnis von Kreiseldrall zur Lagerreibung die Anzeigegenauigkeit bestimmt, ist der Drall möglichst groß zu wählen.

3. Das Schweremoment. In späteren Betrachtungen (Abschnitt II, D, 1) wird gezeigt werden, daß ein Sperry-Horizont mit Schweremoment, gleichgültig, ob dieses durch eine Schwerpunktstieferlage oder Schwerpunktshöherlage hervorgerufen wird, stets ungünstiger ist als ein astatischer Horizont.

Diese drei Größen, Lagerreibung, Drall und Schweremoment müssen wir also als gegeben betrachten, so daß lediglich noch die Düsenbreite sowie das Düsenmoment, also die durch die Düsen hergestellte Rückführfunktion für eine Veränderung in Frage kommen.

1. Änderung der Düsenbreite. Würde man bei gleichem Düsenmoment d (bei vollkommen geöffneten Düsen) die Düsenbreite verändern, so wäre das gleichbedeutend mit einer Veränderung der Größe d_1, d. h. des Düsenfaktors im proportionalen Gebiet IX.

Um eine Übersicht über den Einfluß der Düsenbreite zu bekommen, seien zunächst die Grenzfälle betrachtet.

a) Die Düsenbreite sei sehr klein, im Grenzfall gleich Null. Dann ist die Größe d_1 unendlich groß, so daß bei Kreisflügen, die im folgenden betrachtet werden sollen, die Gleichgewichtslage des Horizontes im Gebiet IX nicht von dem Scheinlot abweicht (s. Gl. (19)). Das hat zur Folge, daß der Horizont bei langsamen Drehkreisen in das Scheinlot wandert, und zwar so lange, bis die Gleichgewichtslage in dem ungedämpften Gebiet III bzw. IV gleich der Hälfte des Scheinlotwinkels ist (Bild 25). Dann vollführt der Horizont im ungedämpften Gebiet eine Kreisbewegung, und zwar so, daß der Anzeigefehler in beiden Ebenen zwischen den Werten 0 und $2\,\frac{d}{\omega}$ schwankt. Tragen wir uns den Fehler des Horizontes über der Frequenz des Drehkreises auf, so kommen wir zu Bild 27. Dabei ist die Kurve der Fehlanzeige in der Querneigung (α_f) ausgezogen, die der Längsneigung (β_f) gestrichelt. Die α-Kurve setzt sich zusammen aus der Geraden $\alpha_f = \frac{v\,\omega}{g}$ (für kleine ω) und der Hyperbel $\alpha_f = 2\,\frac{d}{\omega}$. Das Maximum der Fehlerkurve liegt bei

$$\omega_{krit} = \sqrt{\frac{2\,d\,g}{v}} \quad \text{. . . . . (22)}$$

und hat den Wert

$$\alpha_{f_{max}} = \sqrt{\frac{2\,d\,v}{g}} \quad \text{. . . . . (23)}$$

b) Die Düsenbreite sei sehr groß, so daß wir nur den Schwingungsvorgang in dem proportionalen Gebiet betrachten brauchen. Aus Abschnitt II, B ist bekannt, daß der Horizont auf einer logarithmischen Spirale in seine Gleichgewichtslage (Gl. (19)) einschwingt. Den Verlauf dieser Gleichgewichtslagen zeigt Bild 28. Wieder ist die α-Kurve ausgezogen, die β-Kurve gestrichelt. Die Fehlerkurven α_f und β_f verlaufen ganz entsprechend, nur im ganzen etwas höher, da der Horizont stets etwas über die Gleichgewichtslage hinausschwingt. Das Maximum der α-Kurve liegt bei $\omega = d_1$ und hat den Wert

$$\alpha_{0_{max}} = \frac{v\,d_1}{2\,g} \quad \text{. . . . . (24)}$$

die β-Kurve erreicht ihr Maximum

$$\beta_{0_{max}} = \frac{v\,d_1}{g} = 2\,\alpha_{0_{max}} \quad \text{. . . . . . (25)}$$

erst bei unendlich schnellen Drehkreisen. Den Kurven sind die am Sperry-Horizont bei 2° Düsenbreite gemessenen Werte zugrunde gelegt. Im Falle sehr großer Düsenbreite würde jedoch der Faktor d_1 kleiner sein als bei 2° Düsenbreite. Doch darf man unter eine bestimmte Grenze nicht heruntergehen, da dann die Einstellgenauigkeit des Horizontes darunter leidet. Man wird beim Sperry-Horizont $d_1 > 0{,}02/\text{s}$ verlangen müssen. Dann beträgt der Höchstwert der Gleichgewichtslage mindestens 12°, der Fehler der Anzeige etwa 14 bis 15° bei einer Fluggeschwindigkeit von 360 km/h. Diese Fluggeschwindigkeit ist auch allen weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt zugrunde gelegt.

c) Nimmt man eine unendliche Düsenbreite an, so kann man in gleicher Weise wie zuvor die Kurve des Anzeigefehlers über der Frequenz des Drehkreises auftragen. Nur sind die Kurven dann aus mehreren einfachen Teilstücken zusammengesetzt, da sich der Einschwingvorgang je nach der Frequenz des Drehkreises und dem Drehsinn in ver-

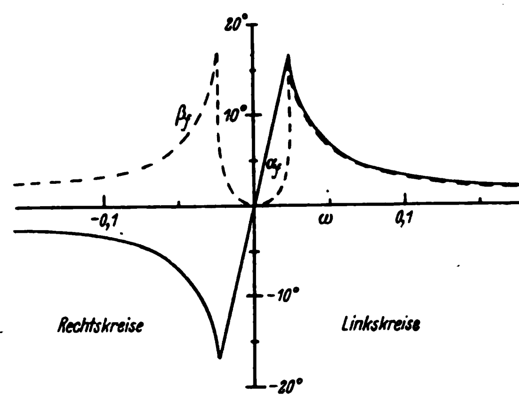


Bild 27. Für einen Horizont mit Schwarz-weiß-Stützung.

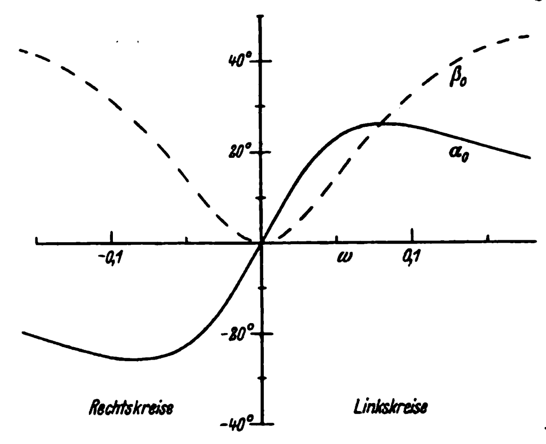


Bild 28. Für einen Horizont mit Proportional-Stützung.

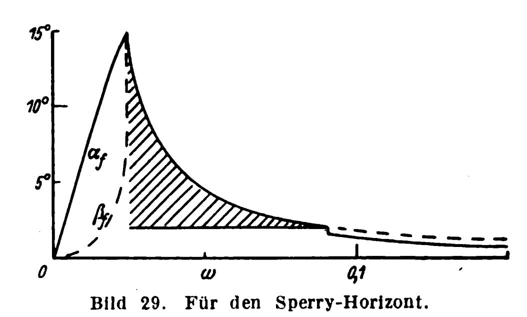


Bild 29. Für den Sperry-Horizont.

Bild 30. Für einen Sperry-Horizont mit günstigster Düsenbreite.

Bild 27 bis 30. Die Fehler der Querneigungsanzeige (α_f) und der Längsneigungsanzeige (β_f) in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz der Drehung.

schiedenen Gebieten abspielt. Für kleine ω gilt (19) bis zur kritischen Drehkreiszeit (22). Für größere ω gilt dann die Hyperbel

$$\alpha_f = \beta_f = 2\,\frac{d}{\omega} - \varphi, \quad \text{. . . . . . . (26)}$$

wobei φ die Düsenbreite ist. Für große ω und $(\alpha, \beta) < \varphi$ gelten dann die Hyperbeln (15). Bild 29 zeigt die Fehlerkurve für den üblichen Sperry-Horizont mit 2° Düsenöffnung, der schraffierte Bereich gibt das Gebiet der ungedämpften Horizontbewegung an. Das Maximum der Fehlerkurve ist um $\varphi = 2°$ kleiner als das der Fehlerkurve von Bild 27, weil der Horizont an der Grenze der Gebiete III und VIII (bzw. IV und VIII) steckenbleibt. Wird jetzt die Düsenbreite φ vergrößert, so wird damit das Maximum

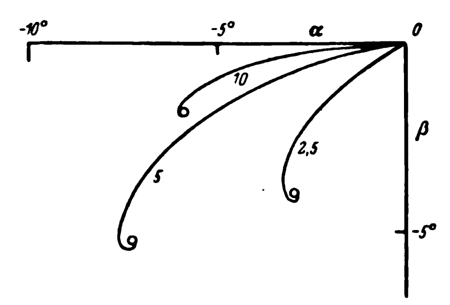


Bild 31. Konstruierte Auswanderungskurven für einen Sperry-Horizont mit günstigster Düsenbreite bei verschiedenen Drehkreiszeiten.

der Fehlerkurven kleiner, und zwar so lange, bis das ungedämpfte Gebiet verschwunden ist, Bild 30. Würde man danach die Düsenbreite weiter vergrößern, so würde der Fehler wieder größer werden, da das Gebiet IX dann an Ausdehnung gewinnt. Es gibt also eine günstigste Düsenbreite, für die das Maximum der für stationären Kurvenflug konstruierten Fehlerkurve am kleinsten ist. Dieser günstigste Wert läßt sich näherungsweise bestimmen zu

$$\varphi_{opt} \cong \sqrt{\frac{d v}{2 g}} \quad \dots\dots\dots\dots (27)$$

Das Maximum selbst wird dann

$$\alpha_{max} \cong \varphi_{opt} \cong \sqrt{\frac{d v}{2 g}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

Bei dieser Rechnung ist das Hinausschwingen des Horizontes über die Gleichgewichtslage im Gebiet IX nicht berücksichtigt. Der genaue Wert für φ_{opt} wird deshalb etwas niedriger sein, als es (27) angibt. Für den Sperry-Horizont gilt

$$\varphi_{opt} \cong 7{,}5^0 \quad \dots\dots\dots\dots (29)$$

Der dann auftretende größte Fehler beträgt etwa 8,3°, er wird bei Kreisen von 4,3 min Drehzeit erreicht.

Einige Einschwingkurven, die für diese günstigste Düsenbreite konstruiert sind, zeigt Bild 31. Die angeschriebenen Zahlen bezeichnen die Zeit für den vollen Kreis in Minuten. Ein Vergleich mit Bild 19 zeigt die Besserung gegenüber den Verhältnissen bei 2° Düsenbreite.

2. Änderung des Düsenmomentes. Die bisherigen Rechnungen haben gezeigt, daß mit wachsendem Düsenmoment auch der größte Fehler sowie die Gleichgewichtslagen in den einzelnen Gebieten anwachsen. Demnach müßte man das Düsenmoment so klein wie nur irgend möglich wählen, soweit dies eben mit den Forderungen der Einstellgenauigkeit und Einstellgeschwindigkeit verträglich ist.

Es wäre jedoch möglich, daß man bei Berücksichtigung der Erdkrümmung zu einem günstigsten Düsenmoment geführt wird, ähnlich wie es bei dem ungedämpften, durch Schweremomente gefesselten Kreiselpendel ein günstigstes Schweremoment gibt, eben ein solches, das dem Kreiselpendel eine Schwingungszeit von 84 min verleiht. (Siehe [2] und [5]). Um dieses nachzuprüfen, soll der Einfluß der Erdkrümmung kurz betrachtet werden. Die Rechnung ist von Schmid durchgeführt worden [4]. Wir wollen an dieser Stelle nur die Ergebnisse unter Benutzung der in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen angeben. Im Gebiet IX (Proportionalitätsgebiet) bekommt man als Gleichgewichtslagen für den stationären Kurvenflug unter Berücksichtigung der Erdkrümmung:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\frac{v\,\omega}{g}}{\omega^2 + d_1^2}(\gamma^2 + d_1^2) \\ \beta_0 &= \frac{\frac{v\,d_1}{g}}{\omega^2 + d_1^2}(\gamma^2 - \omega^2) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (30)$$

Dabei ist γ die Frequenz eines mathematischen Pendels von der Länge des Erdradius ($2\pi/84$ min).

Man sieht daraus, daß der Querneigungsfehler α nur für den Geradeausflug ($\omega = 0$) sowie für unendlich schnelle Drehkreise ($\omega = \infty$) verschwindet. Dazwischen liegt ein Maximum bei $\omega = \pm d_1$ mit dem Wert

$$\alpha_{0max} = \frac{v(\gamma^2 + d_1^2)}{2 g d_1} \quad \dots\dots\dots (31)$$

Andererseits sehen wir aus (30), daß α_0 unabhängig von dem Wert d_1 für einen Drehkreis von 84 min ($\omega = \gamma$) gleich dem Scheinlot ($v\omega/g$) wird. Der günstigste Fall liegt offenbar dann vor, wenn das Maximum der α_0-Kurve in diesen »Festpunkt« hereinrückt. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist das der Fall für $d_1 = \gamma$, also dann, wenn die durch das Düsenmoment erzeugte Präzessionsdauer 84 min beträgt. Um das zu erreichen, müßte man das Düsenmoment des gegenwärtig vorliegenden Sperry-Horizontes allerdings um das 60fache verkleinern.

Der Längsneigungsfehler verschwindet für einen Drehkreis von 84 min, gleichgültig ob dieser als Rechts- oder Linkskreis geflogen wird. Für alle anderen Werte ist er von Null verschieden, auch für $\omega = 0$, also für den Geradeausflug. Wir erhalten dafür

$$\beta_0 = \frac{v\,\gamma^2}{g\,d_1} \text{ (für } \omega = 0) \quad \dots\dots\dots (32)$$

Das ist aber gerade der Fahrtfehler des Horizontes, den man erhält, wenn man die gerade Flugstrecke als Teil eines Großkreises auf der Erdoberfläche auffaßt. Für die am Sperry-Horizont gemessenen Größen beträgt dieser Fehler nicht ganz eine Bogenminute. Wollte man jedoch das Düsenmoment so verkleinern, wie es die vorherigen Betrachtungen erfordern, so würde dieser Fehler bis auf etwa 1° ansteigen. Außerdem kann der bisher vernachlässigte Anzeigefehler des Horizontes durch die Erddrehung mit einer Verkleinerung von d_1 erheblich ins Gewicht fallen.

Es soll noch erwähnt werden, daß auch eine Betrachtung der Gleichgewichtslagen in den Gebieten I bis IV (bei vollkommen geöffneten Düsen) unter Berücksichtigung der Erdkrümmung keine neuen Gesichtspunkte bringt. Das Düsenmoment bei voll geöffneten Düsen darf hierbei niemals kleiner sein als die von der Erddrehung herrührende Corioliskraft, da sonst der Erddrehungsfehler sehr groß werden kann.

Für die Größe des Düsenmomentes gibt es demnach beim astatischen Sperry-Horizont keinen günstigsten Wert, der alle Forderungen gleichmäßig befriedigt. Bei kleinem Düsenmoment wird der Fahrtfehler sowie der durch die Erddrehung entstehende Fehler groß, bei großem Düsenmoment werden die Fehler beim Kurvenflug groß. Da jedoch zur Zeit die Kurvenflugfehler den Fahrt- und den Erddrehungsfehler bedeutend überwiegen, so wäre eine Verkleinerung des Düsenmomentes anzustreben.

3. Kompensierung der durch Störbeschleunigungen hervorgerufenen Momente. Zwei Forderungen werden an einem guten Horizont gestellt:

1. Er soll beim Auftreten von Störmomenten möglichst langsam aus seiner Ruhelage herausgehen, damit keine großen Fehler entstehen.

2. Er soll möglichst rasch wieder in die Vertikale einschwingen, wenn er eine fehlerhafte Auslenkung besitzt.

Beide Forderungen sind grundsätzlich nicht miteinander zu vereinbaren. Solange als richtende Kraft für den Horizont die Schwerkraft dient, sei es durch ein Schweremoment oder über die Düsenmomente durch die Steuerpendel, kann der Horizont von sich aus nicht unterscheiden, ob eine Abweichung seiner Anzeige von der Richtung der Gesamtbeschleunigung durch eine fehlerhafte Auslenkung des Kreisels oder durch das Auftreten von Störmomenten hervorgerufen ist. Er wird also auch in beiden Fällen nicht verschieden reagieren können. Will man die beiden genannten Forderungen erfüllen, so muß man noch Geräte zu Hilfe nehmen, die dem Horizont angeben, ob Störmomente auftreten oder nicht.

Im Fall des Kurvenfluges kann ein Wendezeiger die Drehgeschwindigkeit des jeweiligen Kreises messen und ent-

weder Gegenmomente steuern, die die am Horizont auftretenden störenden Kurvenflugmomente aufheben, oder die in diesem Falle falsch arbeitende Stützeinrichtungen ausschalten. Im zweiten Falle werden bei ungestörtem Geradeausflug die von den Pendeln gesteuerten Momente den Horizont stets wieder in die Vertikale zurückdrücken, wenn er ausgelenkt sein sollte. Fliegt das Flugzeug aber eine horizontale Kurve, so wird die Rückführeinrichtung den Horizont zunächst in der Richtung zum Scheinlot hin aus der Vertikalen herauszuziehen versuchen. Von einem bestimmten Schwellwert ω_s der Drehgeschwindigkeit des Kreises schaltet nun der Wendezeiger die durch die Steuerpendel befohlenen — aber falschen — Momente aus. Dadurch verliert der Kreisel seine von der Rückführeinrichtung herrührende Richtkraft. Es wirkt auf ihn das vom Kurvenflug herrührende Coriolismoment, das ihn — vom Standpunkt des mitdrehenden Flugzeuges aus betrachtet — um die Richtung des Vektors ω, also bei horizontalem Kurvenflug um die Vertikale ungedämpft präzedieren läßt.

Auch bei den durch Längsbeschleunigungen hervorgerufenen Momenten läßt sich eine Kompensation in ähnlicher Weise wie bei den Kurvenflugmomenten erreichen. Wichtig ist dabei ein Gerät, das unabhängig von den Komponenten der Erdbeschleunigung die Längsbeschleunigungen zu messen gestattet. Nach dem Vorschlag von Böttger [3] kann man dazu eine Momentenmeßdose verwenden, die das von einer Treibschraube auf einen Kreisel (oder Motoranker) ausgeübte Drehmoment zu messen gestattet. Die Anforderungen an die Meßdose sind nicht sehr groß, da sie nur einen Schnellwert der Längsbeschleunigung anzugeben und dadurch die von den Längspendeln gesteuerten Momente auszuschalten hat.

Da die Kompensationseinrichtungen für Kurvenflug- und Längsbeschleunigungen unabhängig voneinander arbeiten, so können sie gleichzeitig angewendet werden. Man hätte dann einen schweremomentenfreien Horizont mit einer pneumatischen oder auch elektrischen Rückführeinrichtung, die stets dann in Tätigkeit tritt, wenn eine Abweichung zwischen Scheinlot und Kreiselanzeige vorhanden ist. Das ist der Fall entweder, wenn der Kreisel eine Fehlauslenkung besitzt, oder wenn Störbeschleunigungen auftreten. Im letzteren Falle wird die Rückführeinrichtung durch Hilfsgeräte automatisch ausgeschaltet.

Die Fehler eines derartigen Horizontes lassen sich im Prinzip nach den in den vorhergehenden Abschnitten verwendeten Verfahren errechnen. Sie hängen von der Düsenbreite, dem Düsenmoment und den Schwellwerten der Hilfsgeräte ab, doch können jetzt störende Einflüsse, wie Schwerpunktsverlagerungen, Reibungen und die Erddrehung ganz wesentlichen Einfluß haben. Von einer allgemeinen Untersuchung dieser Verhältnisse sei hier abgesehen, doch sollen die Störeinflüsse noch gesondert behandelt werden.

D. Störende Einflüsse.

1. **Schwerpunktsverlagerungen.** Um die Einwirkung einer Schwerpunktstieferlage oder Schwerpunktshöherlage für den Sperry-Horizont zu übersehen, wollen wir nochmals auf die Gleichungen (12) zurückgreifen und die dort angegebenen Gleichgewichtslagen untersuchen. Bild 32 zeigt den Betrag der Gleichgewichtslage α_0 in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit bzw. der Drehzeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ für verschiedene Werte des bezogenen Schweremomentes p aufgetragen.

Diese Gleichgewichtslagen gelten in den Gebieten I bis IV, also bei vollständig geöffneten Düsen. Sie können jedoch nur dann als Maß für die möglichen Fehler am Horizont gelten, so lange sie selbst in dem Gebiet liegen, für das sie Gültigkeit besitzen. Wie man sich an Hand der Bilder 18 und 25 überlegen kann, ist das nur möglich, so lange der Betrag von α_0 kleiner als der Scheinlotwinkel α_L ist, denn dieser Winkel ist für das Verschieben der Gebietsgrenzen verantwortlich. In Bild 32 ist der Verlauf des Scheinlotwinkels α_L gestrichelt eingetragen. Die Bereiche unterhalb der beiden Scheinlotgeraden sind nach dem Gesagten die Gültigkeitsbereiche der gezeichneten Gleichgewichtslagen. Man sieht, daß in diesen Bereichen ein Horizont mit Schwerpunktstieferlage stets größere Werte für α_0, und damit auch für die zu erwartenden Fehler ergibt, als ein astatischer Sperry-Horizont.

Für Schwerpunktshöherlage gilt das entsprechende, nur hat man sich dann Bild 32 an der Ordinate gespiegelt zu denken.

Die Sperrysche Konstruktion des astatischen Horizontes muß demnach als sehr günstig bezeichnet werden, sie stellt für die vorhandene Stützeinrichtung offenbar ein Optimum dar. Bei ihr wird die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage dadurch unschädlich gemacht, daß sie aus dem Gültigkeitsbereich dieser Gleichgewichtslage herausgeschnitten wird.

Bisher ist angenommen worden, daß der Schwerpunkt des Horizontsystems auf der Kreiselachse liegt und daß sich die beiden Präzessionsachsen in einem Punkte schneiden. Lassen wir zunächst die zweite dieser Voraussetzungen fallen, lassen wir also eine Verschiedenheit der bezogenen Schweremomente um beide Präzessionsachsen p_1 und p_2 zu, so wird — wie schon in [6] gezeigt wurde — die Unendlichkeitsstelle der Gleichgewichtslage zu einem endlichen labilen Bereich, derart, daß sich in diesem Bereich die Horizontschwingungen aufschaukeln. Das tritt für alle Flugzeugdrehgeschwindigkeiten ein, bei denen ω zwischen die beiden Werte p_1 und p_2 fällt. Doch auch hier kann das Aufschaukeln niemals über den jeweiligen Wert des Scheinlotwinkels hinausgehen, da dann der Horizont in Gebiete kommt, für die wieder andere Bewegungsgesetze gelten.

Läßt man schließlich eine Schwerpunktsverlagerung von ganz beliebiger Richtung zu, so werden dadurch zusätzliche Rückführmomente hervorgerufen, die die Kreiselachse in eine Lage zu ziehen suchen, die mit der Vertikalen einen beliebigen Winkel einschließt. Solche Schwerpunktsverlagerungen sind bei den Versuchen am Sperry-Horizont auch wirklich beobachtet worden. Die von ihnen verursachten Fehlmomente sind jedoch so gering gegenüber den Stützmomenten, daß sie den Bewegungsvorgang nur unwesentlich derart beeinflussen, daß die Gleichgewichtslagen, die Frequenz und die Schwingungsform geringe Änderungen erfahren können.

2. **Einfluß der Reibungen.** Bei den bisherigen Betrachtungen ist die Reibung in den Lagern der Kardanringe außer acht geblieben. Das ist sicher dann zulässig, wenn äußere Momente auf das System einwirken, deren Betrag groß gegen alle Reibungseinflüsse ist, und die dem System eine bestimmte Gleichgewichtslage aufzwingen. In zwei Fällen sind diese Bedingungen jedoch nicht erfüllt, erstens in den Gebieten I bis IV (bei vollständig geöffneten Düsen) und zweitens, wenn im Kurvenflug die Stützung ausgeschaltet wird. Dem Kreisel wird in diesen Fällen durch die Stützung keine feste Gleichgewichtslage aufgezwungen, er beschreibt vielmehr Kreise, ohne sich dabei dem Mittelpunkte dieser Kreise zu nähern. Dabei bewegt sich der Kreisel relativ zum Flugzeug bzw. zu seinem Gehäuse und

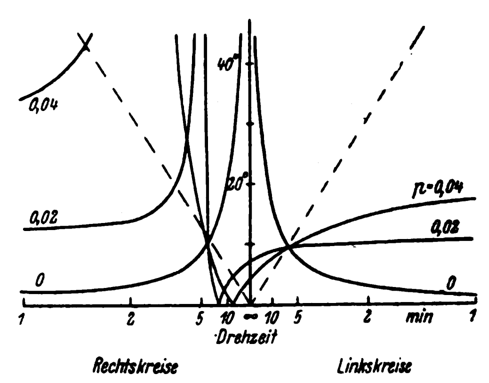


Bild 32. Gleichgewichtslagen des Sperry-Horizontes in den Gebieten I bis IV bei verschiedenen Schwerpunktstieferlagen.



dem Kardanring. Setzt man die Reibungen den Drehgeschwindigkeiten um die Kardanachsen proportional, so hat man die Momente:

$$\text{um die } x\text{-Achse } -K_1 \frac{d\alpha}{dt}, \quad \text{um die } y\text{-Achse } -K_2 \frac{d\beta}{dt}.$$

Die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges ω bzw. seine Schräglage ist für diesen Reibungsansatz gleichgültig, denn die Relativbewegung wird dadurch nicht beeinflußt.

Das Gleichungssystem für den astatischen Kreisel mit ausgeschalteter Stützeinrichtung auf drehendem Flugzeug bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung in den Lagern der Kardanringe lautet:

$$\left.\begin{aligned} +J\frac{d\beta}{dt} + J\omega\alpha + K_1\frac{d\alpha}{dt} &= 0 \\ -J\frac{d\alpha}{dt} + J\omega\beta + K_2\frac{d\beta}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (33)$$

Ein ganz ähnliches System würden wir bei eingeschalteter Stützung in den Gebieten I bis IV bekommen. Die dann auftretenden konstanten Düsenmomente gehen als konstante Werte in das System ein und bewirken lediglich eine Verschiebung der Gleichgewichtslagen, die für die hier gebrachten Untersuchungen ohne Belang sind.

Das System (33) führt auf eine charakteristische Gleichung von der Form:

$$\lambda^2 (K_1 K_2 + J^2) + \lambda J \omega (K_1 + K_2) + J^2 \omega^2 = 0.$$

Da in fast allen Fällen, die praktisch vorkommen, das Produkt $K_1 K_2$ klein gegen J^2 ist, so kann man die Lösung vereinfacht schreiben:

$$\lambda = -\frac{\omega (K_1 + K_2)}{2J} \pm i\omega \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Uns interessiert hier vor allem der Realteil der Lösung, da dieser die Dämpfung bzw. Aufschaukelung der mit der Frequenz ω erfolgenden Schwingungen bestimmt. Ist der Quotient $\frac{\omega}{J}$ positiv (Flugzeugdrehung im Sinne der Kreiseldrehung), so ist der Realteil negativ, die Schwingungen werden also gedämpft. Ist dagegen $\frac{\omega}{J}$ negativ (Flugzeugdrehung im Gegensinne der Kreiseldrehung), so ist der Realteil positiv, die Schwingungen wachsen an.

Aus (34) sieht man, daß die Reibungen K_1 und K_2 vollkommen gleichberechtigt sind. Da ferner ω als Faktor im Realteil steht, so wird das Abklingen bzw. Aufschaukeln der Schwingung zeitlich um so schneller erfolgen, je schneller das Flugzeug dreht.

War die maximale Amplitude des Kreisels zur Zeit $t = 0$ gleich A, so ist sie nach n-Kreisen $\left(t = \frac{2\pi n}{\omega}\right)$ auf den Wert

$$A_n = A\, e^{\mp \frac{n\pi (K_1 + K_2)}{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

gesunken bzw. angestiegen. Da die Drehgeschwindigkeit ω in diesem Ausdruck nicht mehr vorkommt, so wird der Kreisel nach n-Kreisen stets um denselben Betrag ausgewandert sein, gleichgültig wie schnell die Kreise durchflogen werden.

Die Reibungskräfte in der Gleichung (33) waren linear angesetzt worden. Es soll jetzt noch untersucht werden, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man statt dessen Festreibung ansetzt. Die Reibungsmomente treten dann im Gleichungssystem als konstante Faktoren auf, die den Bewegungsvorgang nicht beeinflussen, sondern nur die Gleichgewichtslage verschieben. Die Kreiselspitze beschreibt dann ungedämpfte Präzessionen um Gleichgewichtslagen, die sich sprungweise ändern, da die Vorzeichen der Reibungsmomente K_1 und K_2 von den Vorzeichen der Drehgeschwindigkeiten $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$ abhängen. Die Bahnkurven der Kreiselspitze lassen sich leicht aus den einzelnen Kreisbogenstücken zusammensetzen, Bild 33. Die Gleichgewichtslagen ändern sich stets dann, wenn α bzw. β ein Maximum erreicht haben. Die so erhaltenen Kreisbogenstücke reihen sich im Fall $J\omega > 0$ lückenlos aneinander. Im Fall $J\omega < 0$ ist das nicht möglich, wie man sich leicht überlegen kann. Der Kreisel wird nach Erreichen des Maximums des einen Kreisbogenstückes in einer Ebene so lange stecken bleiben, bis die Auslenkung in der anderen Ebene gleich dem Wert der neuen Gleichgewichtslage geworden ist.

Dann schließt sich wieder ein neues Kreisbogenstück derart an, daß Ausschlag und Tangente stetig übergehen. Die gesamte Bahnkurve des Kreisels im Falle $J\omega < 0$ ist demnach eine ungedämpfte, aber auch nicht aufgeschaukelte Kreisschwingung, die nach je einer Viertelschwingung durch kurzen Stillstand eines der beiden Kardanringe unterbrochen wird.

Tritt gleichzeitig lineare und konstante Reibung auf, so kann man die Bahnkurven in ganz ähnlicher Weise durch Zusammensetzen von einzelnen logarithmischen Spiralenstücken bekommen. In diesem Fall ist dann wieder Aufschaukelung möglich, wenn $J\omega < 0$ ist.

Zur Bestätigung dieser Ergebnisse wurden Versuche mit einem astatischen Kreisel angestellt, bei dem die Düsendämpfung außer Betrieb gesetzt wurde. Um den Einfluß der Reibung deutlicher zu machen, wurden die Kardanringe absichtlich stark gedämpft. Der Kreisel wurde dann um einen Betrag von 20° ausgelenkt und auf einem Drehtisch mit bestimmter Drehgeschwindigkeit herumgedreht. Die Ergebnisse zeigt Bild 34. Es sind dort die Maximalamplituden über der Zeit aufgetragen. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten die Drehkreiszeiten in Minuten, positives Vorzeichen bedeutet Linkskreis, negatives Rechtskreis. Die eingezeichneten kleinen Kreise sind die nach je einer Umdrehung gemessenen Werte.

Praktisch wird der Einfluß der Reibung in den Kardanlagern bei dem heutigen Stand der Feinmechanik vernachlässigbar sein. Dagegen wird manchmal die Reibung in den Kreisellagern von Einfluß sein können, nämlich dann, wenn bei Schwankungen des Antriebsdruckes das Momenten-

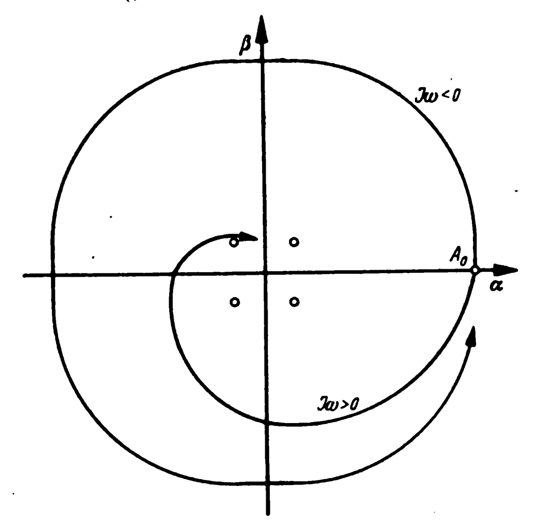


Bild 33. Bahnkurven eines astatischen Kreisels mit Festreibung in den Kardanlagern bei Kurvenflügen im Sinne und im Gegensinne der Kreiseldrehung.

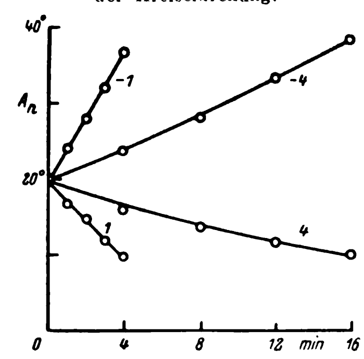


Bild 34. Meßergebnisse über das Aufschaukeln bzw. Abklingen der Amplitude an einem astatischen Horizont mit Reibung.

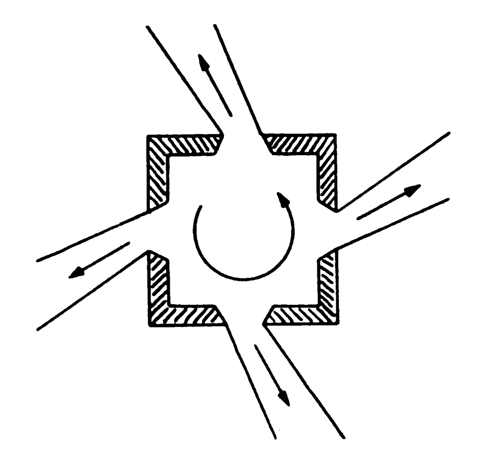


Bild 35. Schräger Luftaustritt aus den Düsen des Sperry-Horizontes.

gleichgewicht zwischen Antriebsmoment und Reibungsmoment gestört ist. Dann treten Momente M um die Kreiselachse auf, die auf das Gehäuse übertragen werden und bei Auslenkungen des Kreisels um die β-Achse Komponenten von der Größe $M \sin \beta$ in Richtung der α-Achse besitzen. Diese Momente können aber sehr viel größer sein als die Reibungsmomente in den Kardanlagern. Man kann sich leicht überlegen, daß das Moment stets im günstigen Sinne wirkt, also dämpft, wenn der Kreisel beschleunigt wird. Wird der Kreisel dagegen verzögert, z. B. nach Abschalten des Antriebsdrucks beim Auslaufen, so wird durch das Moment der Horizontfehler vergrößert. Bei gleichmäßig laufendem Kreisel verschwindet das Moment um die Kreiseldrehachse.

Schließlich sei erwähnt, daß beim Sperry-Horizont auch im Falle gleichmäßig laufenden Kreisels ein Moment um die Kreiselachse vorhanden ist. Dieses entsteht durch den schrägen Austritt der Luftstrahlen aus den Dämpfungsdüsen, Bild 35. Die aus den Düsen austretende Luft dreht noch im Sinne der Kreiseldrehung. Die schräg austretenden Luftstrahlen erzeugen ein Reaktionsmoment, dessen Richtung der Richtung des Impulses entgegengesetzt ist. Das Moment wirkt deshalb stets dämpfend.

III. Horizonte mit Schwarz-weiß-Stützung.

Der Begriff der Schwarz-weiß-Stützung ist bereits in der Einleitung erklärt worden. Diese Stützart wird insbesondere bei Kreiselhorizonten mit elektrischer Rückführeinrichtung angewandt, da sie sich dort besonders einfach konstruktiv verwirklichen läßt. Bei den folgenden Untersuchungen ist es prinzipiell gleichgültig, ob eine absolute Schwarz-weiß-Stützung vorliegt, die etwa dem Sperry-Horizont mit der Düsenbreite Null entspricht, oder ob ein geringes proportionales oder auch indifferentes Gebiet zugelassen wird, wie dies bei elektrischen Stützeinrichtungen durch ein Spiel zwischen Kontakten auftreten kann. Ein indifferentes Gebiet wird man schon aus Gründen der Anzeigegenauigkeit so klein wie möglich zu machen suchen. Bei Vorhandensein eines proportionalen Bereiches gelten die Überlegungen sinngemäß außerhalb dieses Bereiches.

A. Der Vier-Düsen-Horizont.

Die Theorie des Vier-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung ist bereits vollständig in der Theorie des Sperry-Horizontes enthalten. Wir wollen jedoch hier noch etwas über die Untersuchungen der Abschnitte II A und B hinausgehen und verschiedene Rückführmomente um die beiden Präzessionsachsen zulassen. Wir werden dadurch zugleich Aufschluß über das Verhalten des Horizontes bekommen, wenn die Stützung um eine Achse ausgeschaltet wird, wie dies für den Kurvenflug vorgeschlagen worden ist. Bezeichnet man die auf den Kreiselimpuls bezogenen Stützmomente mit d_1 und d_2, so gelten für die Bewegung des Horizontes folgende Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\alpha \pm d_1 &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\beta \mp d_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (36)$$

Die Vorzeichenwechsel der Momente treten für d_1 an der Stelle $\beta = 0$, für d_2 an der Stelle $\alpha = \alpha_L$ ein.

Die Lösung des Gleichungssystems (36) ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= A \sin \omega t \mp \frac{d_1}{\omega} \\ \beta &= A \cos \omega t \pm \frac{d_2}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

Das ist eine Kreisbewegung mit der Frequenz ω um die Gleichgewichtslage $\alpha_0 = \mp \frac{d_1}{\omega}$; $\beta_0 = \pm \frac{d_2}{\omega}$. Der Radius des Kreises A ist durch die jeweiligen Anfangsbedingungen gegeben. In den einzelnen Gebieten liegen die Gleichgewichtslagen auf Geraden, die mit der α-Achse den Winkel δ einschließen. Dabei gilt

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{d_2}{d_1}.$$

Die Gleichgewichtslagen rücken um so weiter vom Koordinatenursprung, also dem wahren Lot fort, je kleiner ω ist, je langsamer also der Kreisbogen durchflogen wird. Dabei ist aber, wie wir früher schon gesehen haben, die Größe der Gleichgewichtslage noch kein Maß für die am Horizont auftretenden Fehler.

Eine Übersicht über die Lagen der vier Gebiete sowie der in diesen Gebieten geltenden Gleichgewichtslagen vermitteln Bild 36 bis 39. Sie sind für den Fall gezeichnet, daß $\alpha_0 < \alpha_L$ ist. Das ist für alle Kreise der Fall, die schneller als mit etwa 6 min Drehzeit für den vollen Kreis geflogen werden. Dabei wird hier sowie bei den folgenden Bildern angenommen, daß das Flugzeug Linkskreise fliegt ($\omega > 0$). Bei Rechtskreisen bekommt man ein zur β-Achse spiegelbildliches Verhalten.

Die Gebiete I bis IV werden getrennt einmal durch die α-Achse, zum anderen durch die Parallele zur β-Achse im Abstand des Scheinlots (gestrichelt gezeichnet). Die zu den Gebieten gehörigen Gleichgewichtslagen sind durch kleine Kreise gekennzeichnet. Man sieht, daß in den gezeichneten Fällen lediglich das Gebiet III seine zugehörige Gleichgewichtslage enthält. Nur in diesem Gebiet sind also ungedämpfte Kreisbewegungen der Kreiselspitze möglich. Wenn $\alpha_0 > \alpha_L$ wird, dann fällt die Gleichgewichtslage 3 in das Gebiet IV, so daß die Kreiselspitze keine vollen Kreise mehr beschreiben kann. Die Bahnkurven setzen sich dann aus einzelnen Kreisbogenstücken zusammen.

Besonderer Beachtung bedarf die Bewegung an der Grenze zweier Gebiete. Bild 40 zeigt einen Sonderfall davon. Es ist angenommen, daß der Horizont zunächst fehlerfrei anzeigt, und das Flugzeug dann eine Kurve fliegt. Durch zufällige Auslenkungen (oder auch durch den Fahrtfehler) berühre die Kreiselspitze das Gebiet III. Sie wird dann einen kurzen Präzessionsbogen um die Gleichgewichtslage 3 ausführen und wird dadurch an die Grenze des Gebietes II gedrängt. Die Stützung schaltet dann um, so daß der Horizont nur einen kurzen Präzessionsbogen um die Gleichgewichtslage 2 beschreibt, bis er wieder zum Gebiet III herübergedrängt ist. Der Drehsinn aller dieser Kreisbögen ist stets derselbe, und zwar bei Linkskreis ($\omega > 0$) rechts herum, bei Rechtskreis ($\omega > 0$) links herum. Wie man sich leicht überzeugen kann, wird der Kreisel an der Grenze der beiden Gebiete II und III hin und her zittern und sich dabei längs der reellen Achse vorwärtsbewegen. Bei dem in Bild 40 gezeichneten Fall gelangt der Kreisel so bis zum Scheinlot hin. Er wird nie über das Scheinlot hinausgelangen können, sondern wird Zitterbewegungen um das Scheinlot vollführen, deren Größe vom Bau des Horizontes abhängt, also vom Spiel zwischen den Gebieten und von der Größe der Rückführmomente. Diese Verhältnisse sind in Bild 40 mit übertrieben großen Präzessionswegen dargestellt.



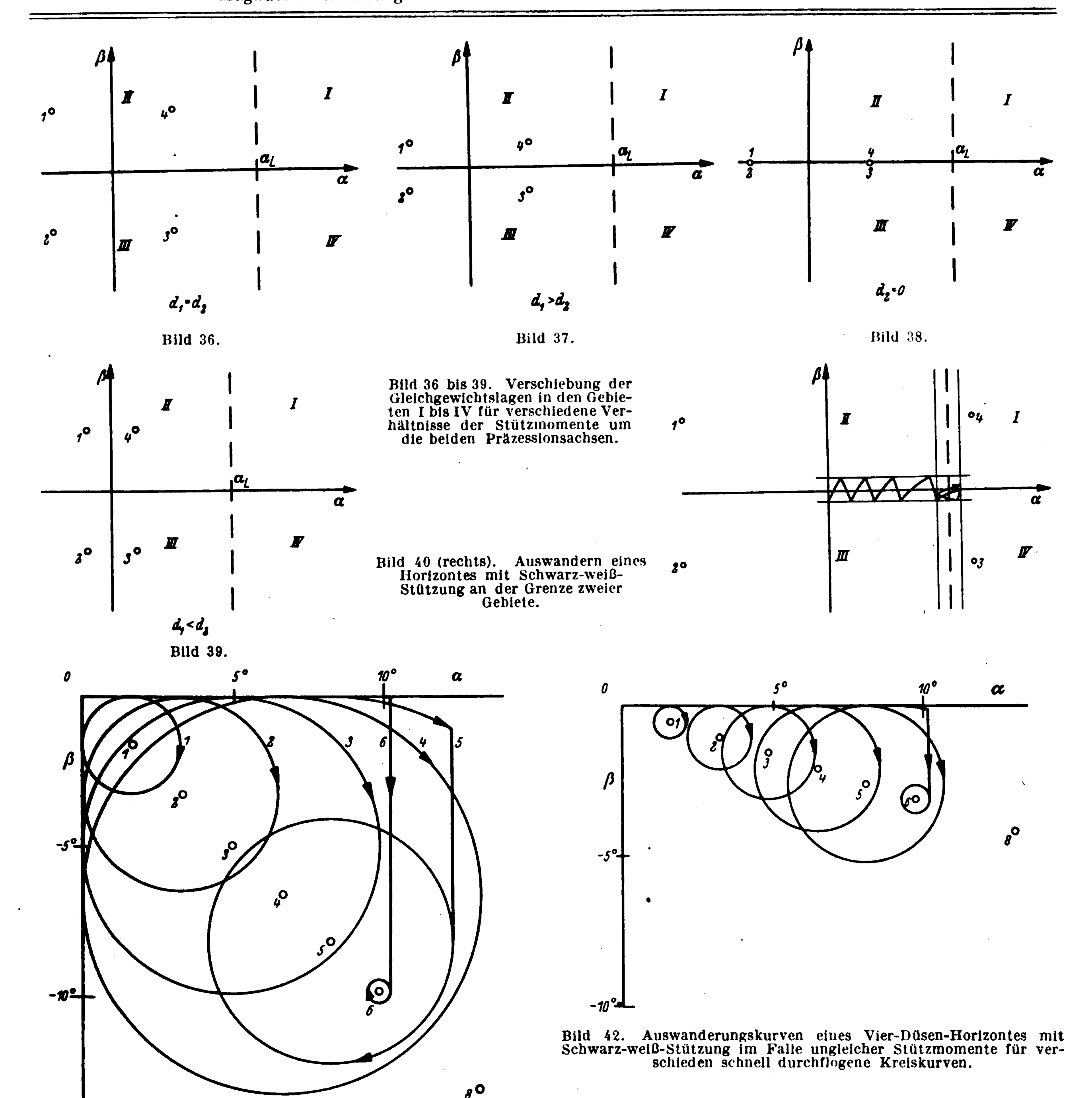


Bild 36.

Bild 37.

Bild 38.

Bild 39.

Bild 36 bis 39. Verschiebung der Gleichgewichtslagen in den Gebieten I bis IV für verschiedene Verhältnisse der Stützmomente um die beiden Präzessionsachsen.

Bild 40 (rechts). Auswandern eines Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung an der Grenze zweier Gebiete.

Bild 41. Auswanderungskurven eines Vier-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung im Falle gleicher Stützmomente für ver- verschieden schnell durchflogene Kreiskurven.

Bild 42. Auswanderungskurven eines Vier-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung im Falle ungleicher Stützmomente für verschieden schnell durchflogene Kreiskurven.

1. Auswanderungskurven im Kurvenflug. Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen können die Ausschwingkurven des Horizontes bei verschieden schnell durchflogenen Kurven konstruiert werden. In Bild 41 sind diese für den Fall gleicher Stützmomente gezeichnet. Die Kurven gelten für Drehzeiten von 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 min für den vollen Kreis. Die dazugehörigen Gleichgewichtslagen sind durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet. Als Stützmomente sind dabei die am Sperry-Horizont gemessenen Werte für den Fall ganz geöffneter Düsen zugrunde gelegt. Der Horizont möge zu Beginn des Kurvenfluges fehlerfrei sein. Der Bewegungsverlauf für die Drehkreise bis zu 4 min voller Drehzeit ist dann folgender. Die Kreiselspitze wird nach der zuvor beschriebenen Art an der reellen Achse entlangzittern, bis sie eine Auslenkung zeigt, die der Gleichgewichtslage α_0 entspricht. Dann wird sie eine ungedämpfte Kreisbewegung um die Gleichgewichtslage (α_0; β_0) beginnen mit einem Radius von der Größe der Gleichgewichtslage β_0. Während dieser Bewegung bleibt der Horizont stets im Gebiet III.

Bei Drehkreiszeiten von 5 und 6 min beginnt die Bewegung genau wie bei den schneller durchflogenen Kreisen. Nur kann die Kreiselspitze die ungedämpfte Kreisbewegung im Gebiet III nicht voll ausführen, da sie im Verlauf der Bewegung in das Gebiet IV gelangt. Wie man sich an Hand von Bild 36 leicht überzeugen kann, wird dort wieder ein Hin- und Herzittern an der Grenze der Gebiete III und IV erfolgen. Dabei rückt die Kreiselspitze so lange an der Grenze der beiden Gebiete herunter, bis sie in der β-Richtung der Wert β_0 erreicht hat. Dann erst beginnt wieder die ungedämpfte Kreisbewegung, jedoch mit einem Radius, der sich aus der Differenz zwischen Scheinlotwinkel und α_0 ergibt.

Für noch langsamere Kreise des Flugzeuges ist die Bewegung schon an dem Sonderfall von Bild 40 erklärt. Der Horizont wandert an der reellen Achse entlang bis zum Scheinlot und bleibt dort stecken. Die Anzeige der Längsneigung ist in diesem Fall fehlerfrei.

Die Ausschwingkurven des Horizontes für ein anderes Verhältnis der Stützmomente sind in Bild 42 gezeichnet.

Es ist diesmal das Dämpfungsmoment d_2 auf ein Drittel gegenüber dem vorhergehenden Fall verkleinert. Der Bewegungsverlauf ist im wesentlichen derselbe wie im vorigen Fall, nur sind die Radien der Kreise geringer geworden. Das hat zur Folge, daß nunmehr auch für den 5-min-Kreis eine ungedämpfte Bewegung um die Gleichgewichtslage möglich ist, ohne daß der Horizont in das Gebiet IV gelangt.

Wie groß ist nun der maximale Fehler? An Hand von Bild 41 und 42 sieht man sofort, daß der Horizont die größten Auslenkungen zeigt, wenn die ungedämpfte Kreisbewegung im Gebiet III gerade bis an die Grenze zum Gebiet IV führt. Das ist der Fall für:

$$\alpha_L = \frac{v\,\omega}{g} = \frac{d_1}{\omega} + \frac{d_2}{\omega}.$$

Die gefährlichste Drehkreisfrequenz ist danach:

$$\omega = \sqrt{\frac{(d_1 + d_2)\,g}{v}} \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

Bei dieser Frequenz tritt sowohl die größte Absolutauslenkung als auch der größte Fehler in den beiden Anzeigeebenen auf. Die maximalen Fehler sind:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \frac{d_1 + d_2}{\omega} = \sqrt{\frac{(d_1 + d_2)\,v}{g}} \\ \beta_{\max} &= 2\,\frac{d_2}{\omega} = \frac{2\,d_2\sqrt{v}}{\sqrt{(d_1 + d_2)\,g}} \\ \sqrt{\alpha_{\max}^2 + \beta_{\max}^2} &= \sqrt{\frac{v\,[(d_1 + d_2)^2 + 4\,d_2^2]}{(d_1 + d_2)\,g}} \end{aligned}\right\} \ldots (39)$$

Bei dem in Bild 41 gezeichneten Fall treten diese größten Fehler bei einem Drehkreis von 4,3 min auf, in Bild 42 bei 5,3 min Drehzeit.

2. Verhalten bei ausgeschalteter β-Stützung. Eine besondere Untersuchung erfordert der Fall $d_2 = 0$, bei dem die Stützung um die β-Achse ganz fortgenommen wird. Da die um die α-Achse schwingenden Pendel von den Zentrifugalkräften des Kurvenfluges gestört werden, ist die von ihnen gesteuerte Stützung um die β-Achse die eigentliche Ursache der beim Kurvenflug auftretenden Horizontfehler. Es liegt als nahe, diese Stützung beim Kurvenflug auszuschalten. Wie man aus Bild 38 sieht, liegt die Gleichgewichtslage dann auf der α-Achse. Befindet sich der Horizont zu Beginn der Flugzeugdrehung in der Nullage, so wird er im Verlauf der Drehung entweder im Gebiet II oder III Stützmomente auslösen. Die darauf erfolgenden Präzessionen drängen den Horizont senkrecht zur reellen Achse in das gegenüberliegende Gebiet. Es wird also eine Zitterbewegung zwischen den Gebieten II und III erfolgen, jedoch so, daß ein Entlanggleiten an der reellen Achse nicht möglich ist, denn die Bewegung erfolgt ja stets senkrecht dazu. Es können danach keine Fehler des Horizontes auftreten, wenn der Horizont zu Beginn des Kurvenfluges fehlerfrei war. Zeigte der Horizont jedoch zu Beginn des Kreisfluges einen Fehler in der α-Richtung, so wird dieser Fehler auch nicht abklingen können, solange er dem Betrage nach kleiner ist als die Gleichgewichtslage. Es gibt also eine ganze Strecke, längs der der Horizont im indifferenten Gleichgewicht ist. Diese Strecke reicht von $\alpha = -\frac{d_1}{\omega}$ bis $\alpha = +\frac{d_1}{\omega}$.

Bild 43 veranschaulicht diese Verhältnisse. Es sind dort verschiedene mögliche Einschwingkurven konstruiert, wie sie etwa dem Verhalten eines Horizontes bei einer 3-min-Linkskurve entsprechen. Die Doppelkreise auf der reellen Achse sind die Gleichgewichtslagen. Die linke Gleichgewichtslage $\left(\alpha = +\frac{d_1}{\omega}\right)$ gilt für positive β, also oberhalb der α-Achse, die rechte Gleichgewichtslage $\left(\alpha = +\frac{d_1}{\omega}\right)$ gilt für negative β, also unterhalb der α-Achse. Die eingezeichneten Kreise sind die jeweils angenommenen Fehlauslenkungen des Horizontes zu Beginn des Kurvenfluges. Das Einschwingen erfolgt dann längs der gezeichneten Kreisbögen bis zu einem Punkt, der auf der reellen Achse zwischen den beiden Gleichgewichtslagen liegt. An den dort mit Kreuzen bezeichneten Stellen bleibt der Horizont stecken und zeigt einen dauernden Fehler in der Querneigung.

Versuche mit einem Sperry-Horizont mit ausgeschalteten β-Pendeln zeigten dann auch dieses Verhalten. Bild 44 gibt einige Beispiele davon. Die Kurven wurden auf einem Drehtisch bei etwa 6 min Drehzeit aufgenommen. Der Horizont wurde zu Beginn der Versuche um jeweils 15° in Richtung einer Achse ausgelenkt und dann die Einschwingkurven beobachtet. Die Stellung des Horizontes nach je 1 min ist an den eingezeichneten Querstrichen zu erkennen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß für den Sperry-Horizont die hier durchgeführten Betrachtungen nur außerhalb der $\pm 2°$-Grenze gelten. Deutlich sichtbar ist an den Kurven das schnelle Einschwingen bis zur α-Achse und dann das langsame Kriechen an dieser Achse infolge restlicher Störmomente. Das Abschalten der d_2-Stützung kann sich um so unangenehmer auswirken, je kleiner die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges auf seiner Kreisbahn ist. Z. B. reicht das indifferente Gebiet bei einem 3-min-Kreis und einer Fluggeschwindigkeit von 360·km/h etwa von $\alpha = -5°$ bis $\alpha = +5°$, bei einem 6-min-Kreis jedoch von $\alpha = -10°$ bis $\alpha = +10°$.

3. Anschauliche Deutung. Das bei der Konstruktion der bisher besprochenen Einschwingkurven benutzte Verfahren war auf dem Wege über die analytische Behandlung der entsprechenden Bewegungsgleichungen gewonnen worden. Es erscheint zweckmäßig, diese etwas abstrakten

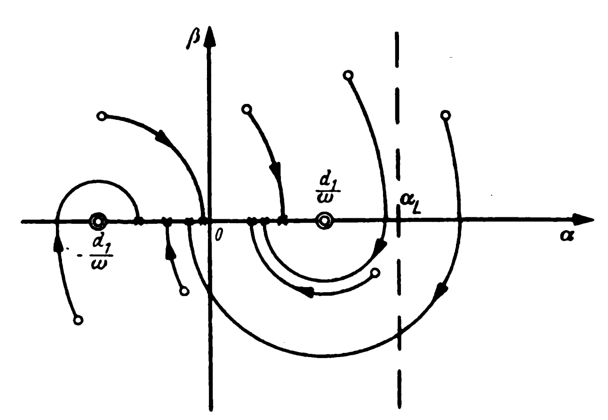


Bild 43. Verschiedene Einschwingkurven für den Fall ausgeschalteter Stützung um die β-Achse.

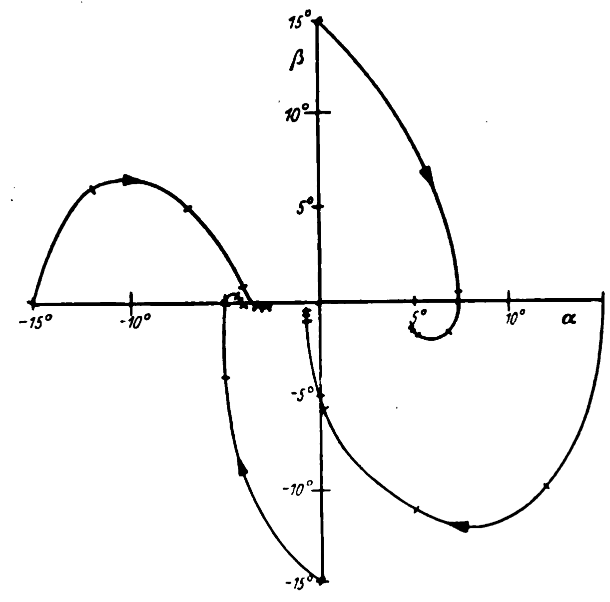


Bild 44. Gemessene Einschwingkurven für einen Sperry-Horizont mit ausgeschalteter Stützung um die β-Achse.

Darstellungen durch eine Betrachtung der am Horizont angreifenden Kräfte und ihrer Wirkungen anschaulicher zu machen.

Vom raumfesten System aus betrachtet wirkt auf den astatischen Horizont als einzige Kraft die Rückführkraft der Dämpfungseinrichtung. Geht man jedoch von einem mit dem Flugzeug drehenden System aus, so hat man noch die Corioliskraft bzw. das Coriolismoment hinzuzufügen. Da die Ablesungen des Horizontes vom drehenden Flugzeug aus geschehen, so soll auch hier das drehende Bezugssystem zugrunde gelegt werden. Steht die Kreiselachse genau senkrecht, so wirkt lediglich das von den ins Scheinlot gezogenen Pendeln gesteuerte Dämpfungsmoment. Zeigt jedoch die Kreiselachse eine Auslenkung aus der Vertikalen, so macht sich das Coriolismoment dadurch bemerkbar, daß es die Kreiselspitze im entgegengesetzten Sinne der Flugzeugdrehung zu drehen sucht. Die Kreiselachse sucht ja — wenn man von den Stützmomenten einen Augenblick absieht — ihre Richtung im Raum beizubehalten. Im mitdrehenden System wird sie sich also im entgegengesetzten Sinne um die Vertikale herumzudrehen suchen. Dabei ist die Geschwindigkeit stets senkrecht zum Fahrstrahl zum wahren Lot, ihre Größe ist dem Abstand vom wahren Lot proportional. Das Feld der Geschwindigkeitsvektoren entspricht also genau dem anfangs gezeigten Stützfeld von Bild 3 (für Rechtskreise). Diesem Feld überlagert sich nun das Feld der von der Stützeinrichtung hervorgerufenen Geschwindigkeiten. Dieses Stützfeld ist in Bild 4 für den Fall $d_1 = d_2$ gezeichnet.

Setzt man die beiden Felder der Bilder 3 und 4 zusammen, so bekommt man ein Bild von der Geschwindigkeitsverteilung der Horizontbewegung beim Kurvenflug. Dabei ist zu beachten, daß der Mittelpunkt des Stützfeldes bei Kurvenflug nicht in der Vertikalen, sondern im Scheinlot liegt, die Mittelpunkte der beiden Felder müssen also beim Zusammensetzen um den Betrag des Scheinlotes auseinandergerückt werden. Das Ergebnis der Zusammensetzung zeigt Bild 45 für den Fall $d_1 = d_2$ bei einem Linkskreis von 3 min Drehzeit. Um die Zeichnung übersichtlicher zu machen, sind dabei die vier Gebiete etwas auseinandergerückt. Die eingezeichneten Pfeile geben die Geschwindigkeit der Kreiselspitze nach Richtung und Größe für denjenigen Punkt an, an dem sich der Schwanz des Pfeiles befindet. Das Geschwindigkeitsfeld vermittelt anschaulich einen Begriff von der Schar aller möglichen Einschwingkurven. Befindet sich die Kreiselspitze im Gebiet I, so wird sie sich zum Gebiet IV bewegen, befindet sie sich im Gebiet IV, so wird sie zum Gebiet III herübergedrängt. Vom Gebiet II sind Bewegungen entweder in das Gebiet I oder in das Gebiet III möglich. Im Gebiet III gibt es einen Punkt, an dem die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Felder gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind. An diesem Punkt kann die Kreiselspitze in Ruhe bleiben. Um diese »Gleichgewichtslage« herum sind Kreisbewegungen möglich, solange die Kreiselspitze dabei im Gebiet III bleibt.

An Hand von Bild 45 kann man sofort einsehen, wie die in Bild 41 und 42 gezeichneten Einschwingkurven zustande kommen. Insbesondere gewinnt man einen Einblick in die Art des Entlangzitterns an der Grenzlinie zweier Gebiete.

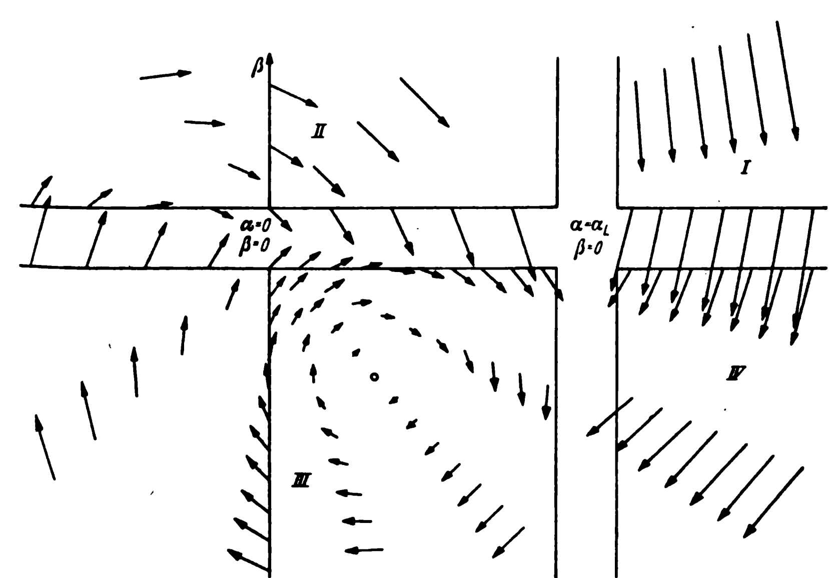


Bild 45. Vektorfeld der Geschwindigkeit für die Bewegung eines Vier-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung im Kurvenflug.

B. Der Acht-Düsen-Horizont.

1. Theorie. Als nächster Fall soll das Verhalten eines astatischen Horizontes mit acht Düsen (Stützfeld Bild 7) betrachtet werden. Die Steuerpendel der Düsen schwingen dabei um Achsen, die den Präzessionsachsen sowie deren Winkelhalbierenden parallel sind. Die Einschwingkurven eines derartigen Horizontes im Geradeausflug nach einer Störung ergeben sich unmittelbar aus dem Bild 7. Die Horizontspitze bewegt sich längs der gezeichneten Geschwindigkeitspfeile bis an eine der vier Grenzlinien und wird dann auf dieser Grenzlinie entlang in den Nullpunkt hereinzittern. Das Verhalten im Kurvenflug läßt sich ebenfalls leicht übersehen, wenn man an die Untersuchungen des vorigen Abschnittes über das Verhalten des Vier-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung anschließt.

Es ist dort gezeigt worden, daß der Horizont in den Gebieten, in denen das Stützmoment nach Größe und Richtung konstant ist, eine ungedämpfte Kreisbewegung um eine bestimmte Gleichgewichtslage beschreibt. Dasselbe gilt auch für den Acht-Düsen-Horizont, denn auch bei diesem ist das Stützmoment in acht Teilgebieten nach Größe und Richtung konstant. Die Aufgabe besteht zunächst darin, die Gleichgewichtslagen in den acht Gebieten zu finden. Dazu gehen wir von den für den vorliegenden Fall geltenden Bewegungsgleichungen aus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\alpha + D_1 = 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\beta + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Dabei sind D_1 und D_2 die durch den Kreiselimpuls dividierten Komponenten der Stützmomente in Richtung der α- und β-Achsen.

Die Gleichgewichtslagen ergeben sich sofort aus (40) zu

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 = -\frac{D_1}{\omega} \\ \beta_0 = -\frac{D_2}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Wie man aus Bild 7 sieht, sind die Geschwindigkeitsvektoren des Stützfeldes stets unter einem Winkel von $\pi/8 = 22{,}5^0$ gegen die Koordinatenachsen geneigt. Dasselbe muß auch für die Vektoren der Gesamtstütz-

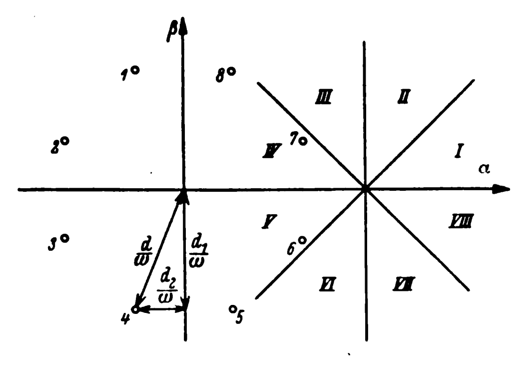


Bild 46. Gebietseinteilung für die Berechnung des Acht-Düsen-Horizontes mit Schwarz-weiß-Stützung.

momente gelten. Bezeichnet man das bezogene Gesamtstützmoment mit d, so können die Komponenten dieses Momentes in den beiden Koordinatenachsen die Werte annehmen:

$$d_1 = d \cos 22{,}5^0 = 0{,}924\, d$$
$$d_2 = d \sin 22{,}5^0 = 0{,}383\, d.$$

Diese Werte hat man also unter Berücksichtigung der in den einzelnen Quadranten geltenden Vorzeichen für D_1 und D_2 einzusetzen. Der Vorzeichenwechsel tritt für D_1 an der Stelle $\beta = 0$, für D_2 an der Stelle $\alpha = \alpha_L$ ein. Die Einteilung der Gebiete soll nun so vorgenommen werden, wie es Bild 46 zeigt. Dabei ist angenommen, daß das Flugzeug einen Linkskreis ($\omega > 0$) beschreibt. Bei Rechtskreis ($\omega < 0$) würde der Punkt $\alpha = \alpha_L$ auf der anderen Seite der α-Achse liegen, die Bewegungen würden spiegelbildlich zu denen bei Linkskreis sein. Die Vorzeichen der Stützmomente müssen nun so beschaffen sein, daß der Horizont im Geradeausflug stets nach dem Nullpunkt hinstrebt, wie dies das Stützfeld Bild 7 zeigt. Man findet folgende Vorzeichenverteilung in den acht Gebieten:

Gebiet	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
D_2	$-d_1$	$-d_2$	$+d_2$	$+d_1$	$+d_1$	$+d_2$	$-d_2$	$-d_1$
D_1	$+d_2$	$+d_1$	$+d_1$	$+d_2$	$-d_2$	$-d_1$	$-d_1$	$-d_2$

Die sich daraus und aus (41) ergebenden Gleichgewichtslagen sind in Bild 46 als kleine Kreise eingezeichnet. Sie liegen alle auf einem Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{d}{\omega}$.

Die Konstruktion der Einschwingkurven ist nun einfach. Man braucht nur zu gegebenen Anfangsbedingungen die Kreisbogenstücke in den acht Gebieten aneinanderzuheften. Der Drehsinn dieser Kreisbögen ist in allen Gebieten gleich, und zwar bei Linkskreis rechts (d. h. im Uhrzeigersinn), bei Rechtskreis links herum. Stellenweise ist ein Entlangzittern an der Grenze zweier Gebiete möglich, nämlich dann, wenn der Kreisbogen von einem Gebiet in das andere Gebiet herüberführt, und der dann in diesem Gebiet geltende Bogen den Horizont wieder in das erste Gebiet zurückdrängen will.

In Bild 47 sind einige Auswanderungskurven bei verschiedenen Drehkreisen für den Fall gezeichnet, daß der Horizont zu Beginn des Kurvenfluges fehlerfrei anzeigte. Die an den Kurven angeschriebenen Zahlen bedeuten die Drehzeiten in Minuten, die kleinen Kreise sind die dazugehörigen Gleichgewichtslagen. Die Bewegung beginnt stets mit einem kurzen Entlangzittern an der α-Achse. Die Kreiselspitze bleibt in den Gebieten V und VI, sie kann aber — wie bei der Kurve für den 6-min-Kreis — die Grenze zum Gebiet VII erreichen. Den Kurven ist ein bezogenes Gesamtstützmoment $d = 0{,}003$/s zugrunde gelegt.

Es interessiert nun vor allem die Frage nach den bei diesen Kurven maximal auftretenden Fehlern. Der größte Fehler in der Querneigungsanzeige, also in der α-Richtung tritt offenbar dann auf, wenn die Kreisbewegung im Gebiet VI gerade das Scheinlot, also die Grenze zwischen den Gebieten VI und VII erreicht, ohne an dieser Grenze selbst entlangzurutschen. Die Ausrechnung führt auf eine Gleichung vierten Grades für die gefährlichste Drehkreisfrequenz ω, so daß eine explizite Angabe dieses Fehlers nicht möglich ist. Man kann jedoch zeigen, daß der größte α-Fehler des Acht-Düsen-Horizontes kleiner ist als der des Vier-Düsen-Horizontes.

Ganz entsprechend kann man sich überlegen, daß der größte Fehler in der Längsneigungsanzeige, also in der β-Richtung, dann auftritt, wenn die Kreisbewegung im Gebiet V gerade bis an die Grenze der Gebiete V und VI reicht. Die Ausrechnung dieses Fehlers ist explizit möglich, soll jedoch hier unterbleiben. Man kann zeigen, daß er etwa 5% kleiner ist als der größte Fehler der Längsneigungsanzeige beim Vier-Düsen-Horizont. Immerhin beträgt der größte Fehler des Acht-Düsen-Horizontes in der Längsneigung bei dem angegebenen Wert für d und einer Fluggeschwindigkeit von 360 km/h noch 11,4°.

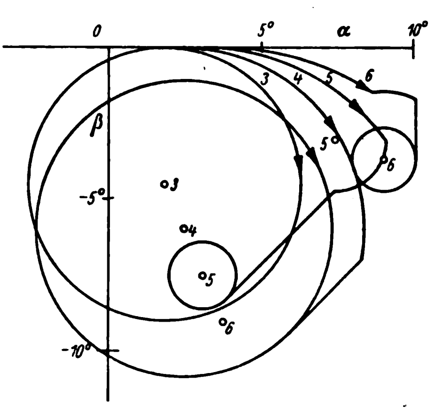


Bild 47. Konstruierte Auswanderungskurven des Acht-Düsen-Horizontes für verschieden schnell durchflogene Kreiskurven.

2. Versuche. Um die theoretischen Untersuchungen zu prüfen, wurden Versuche mit einem Acht-Düsen-Horizont angestellt.

Die Stützeinrichtung des für diese Versuche umgebauten Sperry-Horizontes zeigt Bild 48. An Stelle des am Sperry-Horizontes gebräuchlichen Vierkantes wurde ein Achtkant eingesetzt, der an seinen Flächen je eine 1 mm breite und 5 mm lange Düsenöffnung besitzt. Vor diesen Öffnungen schwingen wie beim Sperry-Horizont kleine Pendelchen, die in der Nullstellung des Gerätes die Schlitze zur Hälfte bedecken. Bei Auslenkungen des Kreisels aus seiner Nullstellung werden die Düsen von den Pendelchen mehr oder weniger geschlossen. Schon bei Auslenkungen von 1° sind die Düsen voll ausgesteuert. Der Öffnungssinn ist stets derart, daß die Stützung den Kreisel zum Lot zurückdrückt. In Bild 48 sind an den Pendelchen noch Stifte zu sehen, an denen ursprünglich Zusatzgewichte zur Vergrößerung der Pendelmasse befestigt waren. Die Zusatzgewichte sind jedoch im Laufe der Versuche wieder entfernt worden. Der Schwerpunkt des Horizontes war — soweit möglich — in den Schnittpunkt der beiden Kardanachsen verlegt worden.

Mit diesem Horizont wurden zunächst die Einschwingkurven bei unbeschleunigtem Bezugssystem aufgenommen. Bild 49 zeigt die Ergebnisse. Nach dem Stützfeld von Bild 7 muß der Horizont nach Auslenkungen in Richtung der Achsen wieder längs dieser Achsen in den Nullpunkt einschwingen. Bis auf geringe Ausbeulungen zeigen dies auch die Versuchsergebnisse. Jedoch muß man dabei berück-

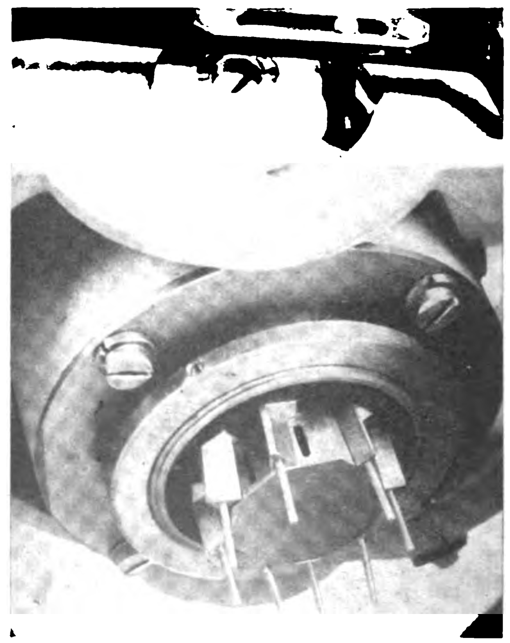


Bild 48. Ansicht der Stützeinrichtung des Versuchshorizontes mit acht Düsen.

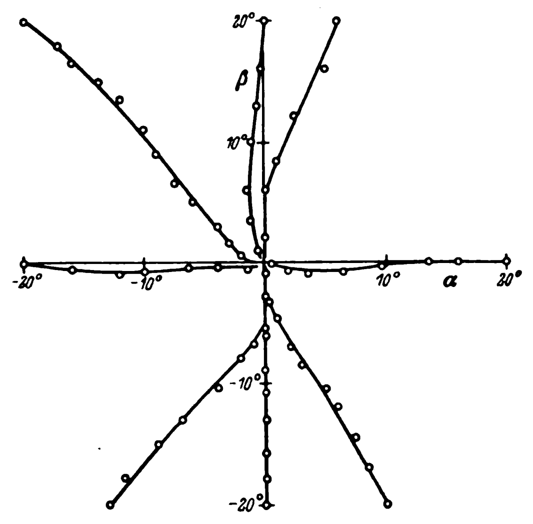


Bild 49. Gemessene Einschwingkurven des Acht-Düsen-Horizontes im ungestörten Geradeausflug.

sichtigen, daß die Ablesegenauigkeit des Horizontes nur etwa 1° beträgt. Auch bei Auslenkungen unter 45° zu den Achsenrichtungen muß der Horizont wieder auf einer Geraden in den Nullpunkt hereingehen. Bei Auslenkungen in anderen Richtungen muß die Bahn des Kreisels um 22,5° gegen die Achsenrichtungen bzw. deren Winkelhalbierende geneigt sein, bis eine der Gebietsgrenzen erreicht wird. Danach muß der Kreisel längs dieser Gebietsgrenze zum Nullpunkt wandern. Im großen und ganzen bestätigen die aufgenommenen Einschwingkurven die theoretischen Erwartungen. Geringe Abweichungen der Bahnwinkel vom theoretischen Wert lassen sich durch Unsymmetrien der Stützeinrichtung erklären, denn die Momente der einzelnen Düsenpaare zeigten kleine Unterschiede.

Auswanderungskurven, die für den Kurvenflug aufgenommen wurden, zeigen Bild 50 und 51. Zur Aufnahme dieser Kurven wurde der Horizont auf einen Drehtisch gestellt und die Düsen durch Klemmvorrichtung so festgehalten, wie es der jeweiligen Scheinlotstellung und Auslenkung des Kreisels entsprach. Bei einem 3 min-Kreis z. B. bleibt der Kreisel stets innerhalb des Gebietes V (bei Linkskreis) bzw. VIII (bei Rechtskreis). Also bleibt auch die Öffnung der Düsen während des gesamten Auswanderungsvorganges die gleiche, die Düsen können einfach festgeklemmt werden. Bei einem 6-min-Kreis kommt der Kreisel im Verlauf seiner Bewegung in das Gebiet VI (bei Linkskreis) bzw. VII (bei Rechtskreis). Das ist gleichbedeutend mit dem Umklappen eines Pendelpaares. Im Versuch wurde deshalb der Horizont nach Erreichen der Gebietsgrenze angehalten, die Stellung des einen Pendelpaares geändert und dann der Versuch mit der entsprechenden Anfangsauslenkung im neuen Gebiet weitergeführt. In Bild 50 und 51 sind die Ergebnisse der Versuche bei Links- und Rechtskreisen von 3 und 6 min Dauer aufgezeichnet. Ein Vergleich mit den entsprechenden Kurven von Bild 47 zeigt prinzipielle Übereinstimmung von Theorie und Versuch. Nach den theoretischen Untersuchungen müssen sich die Bahnkurven bei Rechts- und Linkskreis spiegelbildlich zur β-Achse verhalten. Daß dies bei den Versuchen nicht genau der Fall ist, liegt an der Reibung in den Kardanlagern, die durch mehrfache Umbauten des Horizontes über dem Normalwert lag. Die Versuche bilden damit gleichzeitig eine Bestätigung des im Abschnitt II, D, 2 berechneten Einflusses der Reibung: Bei Flugzeugdrehungen im Sinne der Kreiseldrehung wirkt die Reibung dämpfend, bei Flugzeugdrehungen im Gegensinne der Kreiseldrehung dagegen aufschaukelnd. Der Kreisel des Sperry-Horizontes läuft von oben gesehen entgegen dem Uhrzeigersinne, also links herum. Um den Reibungseffekt besser zu zeigen, ist bei dem 3-min-Rechtskreis absichtlich die Umschaltung des einen Pendelpaares beim Überschreiten der α-Achse unterblieben. Die

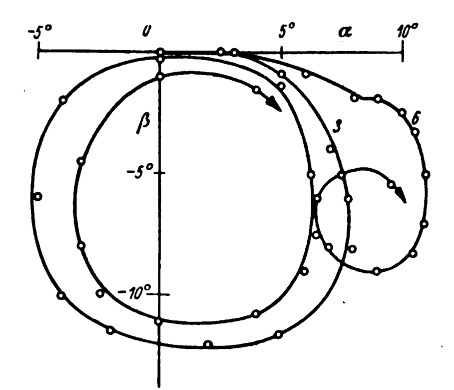


Bild 50: für Linkskreise.

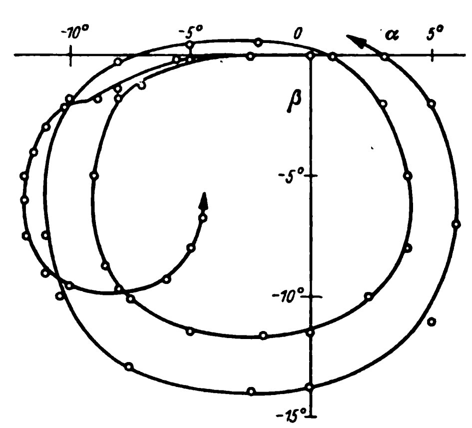


Bild 51: für Rechtskreise.

Bild 50 und 51. Gemessene Auswanderungskurven des Acht-Düsen-Horizontes für Drehkreiszeiten von drei und sechs Minuten.

gesamte Kurve wurde also bei einer festen Pendelstellung aufgenommen.

Auch an diesen bei drehendem System aufgenommenen Kurven ist zu ersehen, daß die Düsenmomente der einzelnen Düsenpaare nicht genau gleich waren, denn sonst müßten die Mittelpunkte der einzelnen Kreisbewegungen auf Geraden liegen, die mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 22,5° einschließen. Diese Bedingung ist nur annähernd erfüllt.

C. Der Horizont mit Stützung nach Polarkoordinaten.

Ohne auf die Ausführbarkeit eines nach Polarkoordinaten schwarz-weiß gestützten Horizontes (Stützfeld Bild 6) einzugehen, sollen zunächst dessen Bewegungsgleichungen aufgestellt und diskutiert werden. Das Stützfeld Bild 6 ähnelt stark dem Stützfeld Bild 2. Wir werden also erwarten, daß auch die Bewegungsgleichungen dieser beiden Fälle sich auseinander leicht ableiten lassen. Für den Horizont mit Doppeldüsendämpfung und Proportionalstützung (Stützfeld Bild 2) gilt das Gleichungssystem (18).

Dabei bestimmt das letzte Glied jeder Gleichung die Eigenschaften des Stützfeldes. Wir werden aus dem Stützfeld Bild 2, das dem Gleichungssystem (18) entspricht, das Stützfeld Bild 6 erhalten, wenn wir diese Glieder durch den Abstand der Kreiselspitze vom Scheinlot dividieren. Dann wird das nach Gl. (18) erfolgende Anwachsen der Momente proportional zu diesem Abstand verhindert, so daß die Momentenvektoren und damit auch die Geschwindigkeitsvektoren des Stützfeldes überall die gleiche Größe bekommen, wie es Bild 6 verlangt. Die Vektoren bleiben aber unverändert zum Scheinlot hin gerichtet. Wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \omega\alpha + \frac{d\,\beta}{\sqrt{(\alpha-\alpha_L)^2+\beta^2}} &= 0 \\ -\frac{d\alpha}{dt} + \omega\beta - \frac{d\,(\alpha-\alpha_L)}{\sqrt{(\alpha-\alpha_L)^2+\beta^2}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (41)$$

Um die Bahnkurven des Horizontes zu bekommen, formen wir (41) noch durch Elimination der Zeit um in

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\omega\,\alpha\,\sqrt{(\alpha-\alpha_L)^2+\beta^2}+d\,\beta}{\omega\,\beta\,\sqrt{(\alpha-\alpha_L)^2+\beta^2}-d\,(\alpha-\alpha_L)}\Bigg\} \quad . \; . \; (42)$$

Damit haben wir die Differentialgleichung der Bahnkurve der Kreiselspitze in der $\alpha\beta$-Ebene gefunden. Jedem Wertepaar α, β entspricht bei konstanten Größen d, ω und α_L, ein Wert der Neigung $\frac{d\beta}{d\alpha}$ der Bahnkurve. Das Richtungsfeld ließe sich sofort für jedes ω konstruieren, und daraus der Verlauf aller möglichen Einschwingkurven übersehen. Die Gleichgewichtslagen der Bahnkurven werden sich im Richtungsfeld als singuläre Punkte bemerkbar machen. Deshalb sollen zunächst diese singulären Punkte aufgesucht werden.

Man wird vor allem im Scheinlot, also bei dem Wertepaar

$$\alpha = \alpha_L \qquad \beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

eine Gleichgewichtslage vermuten. Durch Einsetzen in (42) sieht man leicht, daß tatsächlich ein singulärer Punkt vorliegt, denn der Ausdruck auf der rechten Seite erscheint dann in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Nach kurzer Rechnung findet man noch einen weiteren singulären Punkt bei dem Wertepaar

$$\alpha = \left(\frac{d}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\alpha_L}; \quad \beta = -\frac{d}{\omega}\sqrt{1-\left(\frac{d}{\omega\,\alpha_L}\right)^2} \quad . \; . \; (44)$$

Diese Gleichgewichtslage gilt aber nur für den Fall $\frac{d}{\omega} < \alpha_L$, weil sonst der Radikand in (44) negativ wird.

Man kann nun die Gleichgewichtslagen des Horizontes für alle ω angeben, denn für $\frac{d}{\omega} < \alpha_L$, also $\omega > \sqrt{\frac{d\,g}{v}}$ gilt die Gleichgewichtslage (44), dagegen für $\omega < \sqrt{\frac{d\,g}{v}}$ die Gleichgewichtslage (43). Für $\omega = \sqrt{\frac{d\,g}{v}}$ sind (43) und (44) identisch. Bild 52 zeigt den Verlauf der Gleichgewichtslagen mit ω. Die Drehkreiszeiten in vollen Minuten sind angeschrieben.

Die Auswanderungskurven selbst lassen sich am schnellsten durch graphische Lösung der Gleichung (42) konstruieren. Das ist in Bild 53 für Drehzeiten von 3, 4, 5 und 6 min geschehen. Bemerkenswert ist dabei, daß die Dämpfung der Kurven mit langsamer durchflogenen Kreisen größer wird, bei einem 6-min-Kreis ist die Einstellung bereits aperiodisch.

D. Vergleich der Horizonte mit vier, acht und unendlich vielen Stützpendeln.

In Bild 54 sind zum Vergleich die Auswanderungskurven des Vier-Düsen-Horizontes, des Acht-Düsen-Horizontes und des Horizontes mit Polarkoordinaten-Schwarz-weiß-Stützung für den 3-min-Kreis zusammengestellt. Allen drei Kurven ist gleiches bezogenes Gesamtstützmoment ($d = 0{,}003$/s zugrunde gelegt.

Um noch einen anderen Vergleich der Wirkungen der verschiedenen Dämpfungsarten zu haben, denke man sich für jede Stützart die Auswanderungskurven für alle Drehgeschwindigkeiten gezeichnet. Die Gesamtheit dieser Kurven überdeckt einen Bereich, der zur Veranschaulichung der Fehler dienen kann. In Bild 55 sind die Grenzkurven dieser Bereiche, also die Umhüllungskurven aller Auswanderungskurven, für die verschiedenen Stützarten konstruiert worden. Um auch die Rechtskreise noch in der Zeichnung zu erfassen, müßte man die Kurven an der β-Achse spiegeln. Aus den Umhüllungskurven sieht man, daß der Acht-Düsen-Horizont nur eine ganz rohe Annäherung an den Polarkoordinaten-Horizont darstellt. Auch bedeutet er gegenüber dem Vier-Düsen-Horizont keine wesentliche Besserung. Allerdings ist der größte Gesamtfehler, also die größte Auslenkung der Kreiselachse aus der Nullage, um etwa 20% gegenüber dem des Vier-Düsen-Horizontes verringert, während der größte Gesamtfehler des nach Polarkoordinaten gestützten Horizontes um etwa 35% gegenüber dem des Vier-Düsen-Horizontes kleiner ist.

Gestrichelt ist in Bild 55 außerdem die Umhüllungskurve eines Vier-Düsen-Horizontes eingezeichnet, bei dem die Stützmomente in beiden Ebenen nicht gleich groß sind. Es ist in diesem Fall das Verhältnis 1 : 3 angenommen, d. h. das von den α-Pendeln gesteuerte Moment soll nur ein Drittel des von den β-Pendeln gesteuerten Momentes sein. Es läßt sich in diesem Fall eine ganz wesentliche Verkleinerung des Fehlerbereiches erzielen, doch sei bemerkt, daß diese Betrachtungen nur für den Fall des stationären Kurvenfluges gelten.

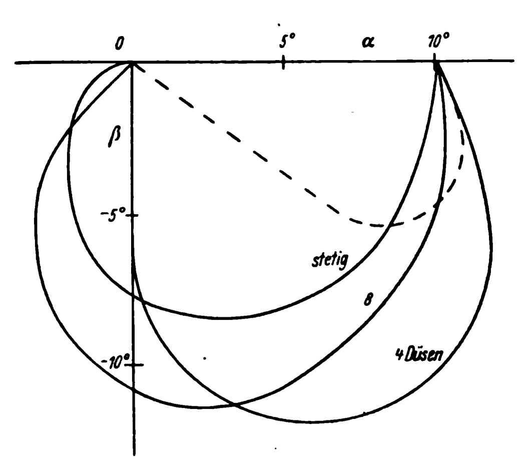


Bild 55. Umhüllungskurven aller Auswanderungskurven für Horizonte mit verschiedenen Stützarten.

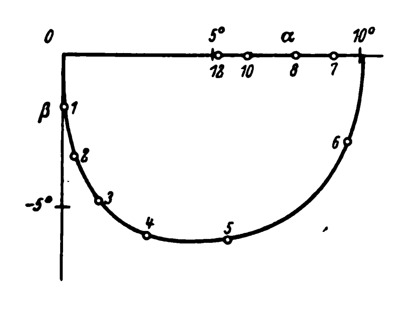


Bild 52. Geometrischer Ort der Gleichgewichtslagen für einen Horizont mit Polarkoordinaten-Stützung (unendlich viele Düsen!) für verschieden schnell durchflogene Kreiskurven.

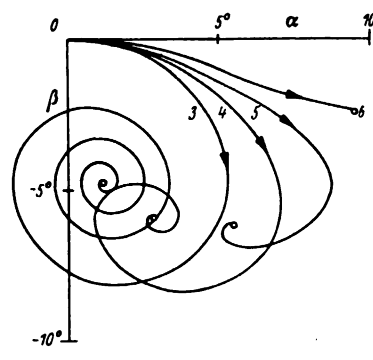


Bild 53. Konstruierte Auswanderungskurven eines Horizontes mit Polarkoordinaten-Stützung für verschieden schnell durchflogene Kreiskurven.

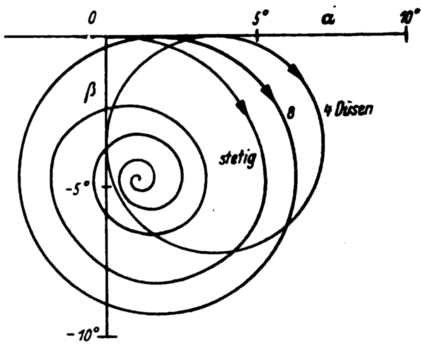


Bild 54. Vergleich der Auswanderungskurven verschiedener Horizontarten für den Drei-Minuten-Kreis.



IV. Zusammenfassung.

Nach einleitenden Betrachtungen über verschiedene Stützarten zur Überwachung der Achsenrichtung eines Kreiselhorizontes werden zunächst die Bewegungsvorgänge des Sperry-Horizontes in seiner üblichen Bauart behandelt. Infolge der Eigenart der Stützeinrichtung läßt sich die Berechnung des Sperry-Horizontes nur in einzelnen Schritten durchführen, jedoch läßt sich ein einfaches graphisches Verfahren angeben, mit dessen Hilfe man die Auswanderungskurven des Sperry-Horizontes für beliebige, aus horizontalen Kreisbogenstücken zusammengesetzte Bahnkurven des Flugzeuges konstruieren kann. Für einige Fälle werden die durch Rechnung und Versuch ermittelten Auswanderungskurven angegeben und der größtmögliche Fehler des Horizontes berechnet. Schließlich wird untersucht, wie sich dieser größtmögliche Fehler durch Änderungen der Stützeinrichtung beeinflussen läßt. Dabei zeigt es sich, daß zwischen der günstigsten Düsenbreite, dem Düsenmoment und dem größten Fehler eine Beziehung besteht, die anzeigt, wie sich der größte Fehler durch Verringerung des Düsenmomentes und entsprechende Düsenbreite noch herabdrücken läßt. Störende Einflüsse, wie Schwerpunktsverlagerungen und Reibung in Kreisel- und Kardanlagern, werden untersucht.

Läßt man am Sperry-Horizont die Düsenbreite immer kleiner werden, so kommt man zu einem Horizont mit »Schwarz-weiß-Stützung«, dessen Verhalten für den Fall verschiedener Stützmomente um die beiden Präzessionsachsen behandelt wird. Dabei wird gleichzeitig die Wirkung des Abschaltens der Stützung um eine Achse untersucht, wie dies für den Kurvenflug vorgeschlagen worden ist. Es zeigt sich, daß in diesem Fall das Gleichgewicht des Horizontes längs eines Stückes der α-Achse indifferent sein kann, so daß vorhandene Fehler dann nicht mehr getilgt werden können.

Um die Richtungssprünge im Stützfeld des Vier-Düsen-Horizontes zu vermeiden, müßte man unendlich viele Düsen gleichmäßig um den Umfang des Kreiselgehäuses verteilen. Auf diese Weise würde man einen nach Polarkoordinaten gestützten Horizont erhalten, dessen Verhalten errechnet wird. Schließlich werden die Auswanderungskurven für eine Zwischenkonstruktion mit acht Düsen rechnerisch und versuchsmäßig ermittelt. Ein Vergleich der verschiedenen Horizontarten zeigt, daß der größte Fehler des Polarkoordinaten-Horizontes etwa um 35%, der des Acht-Düsen-Horizontes etwa um 20% kleiner ist als der des Vier-Düsen-Horizontes.

V. Schrifttum.

[1] R. Grammel: »Zur Störungstheorie des Pendelkreisels.« Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 10 (1919) S. 1 bis 12.

[2] M. Schuler: »Störungen von Pendel- und Kreiselapparaten durch die Beschleunigungen des Fahrzeuges.« Phys. Z. Bd. 24 (1923) S. 344 bis 350.

[3] R. Böttger: »Vorbereitende Arbeiten für den Bau von Kreiselhorizonten nach dem Prinzip der Relativbewegungsmessung.« Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 266.

[4] E. Schmid: »Das Verhalten des Sperry-Horizontes bei stationärem Kurvenflug.« Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937) S. 283 bis 292.

[5] K. L. Stellmacher: »Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung.« Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939) S. 154 bis 165.

[6] M. Schuler und K. Magnus: »Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug.« Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) S. 318 bis 325.

Eigenschaften von austenitischen, mit Mangan legierten Ventilkegelstählen.

Von Heinrich Cornelius, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Gefüge, spezifisches Gewicht, Wärmeausdehnung, Wärmeleitfähigkeit, Verschleißverhalten, Zunderbeständigkeit, statische Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit vor und nach langzeitigem Glühen bei 700°, Warmhärte und Dauerstandfestigkeit von austenitischen Ventilkegelstählen mit 0,23 bis 0,55% C, 1,5 bis 4,3% Si, 13 bis 20% Cr, 0,7 bis 6,8% Mn, 4,2 bis 13,0% Ni, 0 bis 2,4% W, 0 bis 1,1% V und 0 bis 2,4% Al. Nitrierhärtbarkeit dieser und einiger weiterer Stähle mit 0,1 bis 0,95 C, 0,7 bis 9% Mn, 15 bis 18% Cr, 0,6 bis 15% Ni, 0 bis 2,2% Mo, 0 bis 1,7% Cu und 0 bis 1,0% Ta + Nb.

Gliederung.

I. Einleitung.

Als Werkstoff für thermisch und mechanisch hochbeanspruchte Auslaßventilkegel von Verbrennungsmotoren hat ein austenitischer Stahl mit rd. 0,45% C, 1,5% Si, 0,8% Mn, 15% Cr, 13% Ni und 2,5% W die weiteste Verbreitung gefunden. Weitere gebräuchliche, austenitische Ventilkegelstähle liegen innerhalb folgender Legierungsgrenzen: 0,3 bis 0,6% C, 0,5 bis 2% Si, 0,5 bis 1,5% Mn, 8 bis 28% Ni, 12 bis 24% Cr, 1 bis 5% W und gegebenenfalls kleine Mengen von Molybdän oder Vanadin. Mit erheblich mehr als 1,5% Mn legierte austenitische Stähle sind bisher anscheinend noch nicht eingehend auf ihre Eignung als Werkstoffe für hochbeanspruchte Auslaßventilkegel untersucht worden. Wenigstens scheint das Schrifttum keine diesbezüglichen Berichte zu enthalten. Nachfolgend wird über vergleichende Untersuchungen an austenitischen Ventilkegelstählen einerseits mit Chrom und Nickel, anderseits mit Chrom-Mangan und Nickel als hauptsächlichen Legierungselementen berichtet.

II. Versuchsstähle.

Die Zusammensetzung der für die Untersuchungen benutzten Stähle enthält Zahlentafel 1. Die Stähle V 1 und V 3 wurden in Stangen mit 20 mm Durchmesser von zwei Edelstahlwerken bezogen. Die übrigen Versuchsstähle wurden im 8-kg-Hochfrequenzofen erschmolzen, zu Blöcken mit 70 bis 82 mm Durchmesser und 220 mm Höhe vergossen und bei 1100 bis 900° zu Stangen mit 18 mm Durchmesser ausgeschmiedet. Die Stangen aus allen Versuchsstählen wurden bei 800° eine Stunde geglüht und anschließend in Luft abgekühlt. Soweit im folgenden keine andere Glühbehandlung angegeben ist, beziehen sich die Angaben über die Eigenschaften der Stähle auf den durch diese Glühung bedingten Zustand.

Bei den Untersuchungen diente der Chrom-Nickel-Wolfram-Stahl V 1 als Vergleichswerkstoff. Der Stahl V 2 hat einen kleineren Nickelgehalt, der Stahl V 3 außerdem einen kleineren Wolfram-, aber höheren Chromgehalt als der Stahl V 1. Die Stähle V 4 und V 5 haben bei einem auf 6,1 bzw. 4,2% weiter gesenkten Nickelgehalt erhöhte Mangangehalte von 2,6 bzw. 4,0%. Sie entsprechen hinsichtlich ihrer Zusammensetzung sonst weitgehend dem Stahl V 3. In den Stählen V 6 und V 7 ist der gleiche Nickelgehalt wie in Stahl V 5 beibehalten worden; jedoch wurde der Chromgehalt auf 13,1% gesenkt. Im Hinblick auf den 2,35% betragenden Aluminiumgehalt von Stahl V 6 und den 4,26% betragenden Siliziumgehalt von Stahl V 7 mußte der Mangangehalt mit 6,6 bis 6,8% ziemlich hoch gewählt werden, um den austenitischen Charakter der Stähle V 6 und V 7 zu sichern. Während die Stähle V 1 bis V 7 0,9 bis 2,35% W enthalten, sind die Stähle V 8 bis V 10 statt mit Wolfram mit 0,6 bis 1,13% V legiert. Sie enthalten im übrigen 16,2 bis 20,2% Cr, 5,3 bis 6,6% Ni, 2,95 bis 4,3% Mn und rd. 2,2% Si. Der Stahl V 8 unterscheidet sich von allen übrigen Versuchsstählen durch seinen kleinen, nur wenig über 0,2% liegenden Kohlenstoffgehalt. Der Stahl V 11 ähnelt in der Zusammensetzung den Stählen V 8 bis V 10, enthält jedoch Wolfram und Vanadin.

Die Stähle A bis D wurden neben den Stählen V 1 bis V 11 lediglich für die Untersuchungen über die Nitrierhärtbarkeit herangezogen. Der Stahl A unterscheidet sich nur durch seinen höheren Kohlenstoffgehalt von dem Stahl V 1. Der niedriggekohlte Stahl B enthält neben Nickel und Chrom noch Zusätze von Molybdän, Kupfer, Tantal und Niob. Die beiden letzteren Elemente weist auch der Chrom-Nickel-Stahl C auf. Ein Chrom-Mangan-Stahl mit nur kleinem Nickelgehalt ist der Stahl D. Die Stähle C und D sind, ebenso wie der Stahl B, niedriggekohlt. Während die Stähle A und B eine rein austenitische Grundmasse haben, enthält der Stahl C neben Austenit noch 10 bis 20%, der Stahl D 30 bis 40% Ferrit.

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchsstähle.

Stahl-Bez.	C	Si	Mn	Ni	Cr	W	V	Al
	%							
V 1	0,50	1,73	0,74	13,0	15,8	2,07	—	—
V 2	0,40	1,50	0,68	10,0	15,8	2,35	—	—
V 3	0,43	3,0	1,13	8,8	19,2	0,90	—	
V 4	0,42	1,51	2,60	6,1	18,2	1,30	—	
V 5	0,45	1,68	4,03	4,2	18,7	1,00	—	—
V 6	0,47	1,61	6,63	4,2	13,1	1,06	—	2,55
V 7	0,43	4,26	6,80	4,3	13,1	1,05	—	—
V 8	0,23	2,22	2.95	6,6	20,2	—	0,6	—
V 9	0,50	2.22	3,42	6,0	16,2	—	1,13	—
V 10	0,55	2,30	4,32	5,3	17,9	—	0,77	—
V 11	0,53	1,78	3,42	6,2	16,1	0,70	0,86	—
A	0,95	1,63	0,74	12,8	15,1	2,45	—	—
B	0,1	n. b.	0,68	15,2	17,6	—	2,2% Mo	1.8% Cu 1,06% Ta+Nb
C	0,1	n. b.	0,72	8,9	17,7	—	—	0,94% Ta+Nb
D	0,1	n. b.	8,86	0,64	18,3	—	—	—



Eigenschaften der Versuchsstähle.

a) Gefüge.

Nach einstündiger Glühung bei 800° hatten die Versuchsstähle V 1 bis V 11 eine austenitische Grundmasse mit eingelagerten Karbiden. Ein nennenswerter Ferromagnetismus, der auf die Anwesenheit von Ferrit oder Martensit hingewiesen hätte, konnte bei keinem der Versuchsstähle festgestellt werden. Das Gefüge der 100 h bei 700° geglühten Versuchswerkstoffe geben Bild 1 bis 11 wieder. Auch in diesem Behandlungszustand sind im Gefüge aller Versuchsstähle nur Austenit und Karbide erkennbar. Die langzeitige Glühbehandlung bei 700° hat besonders bei den Stählen V 6, V 9 und V 11 zu einer ausgeprägten Karbidausscheidung auf den Korngrenzen geführt. Die Korngrenzenausscheidungen sind jedoch durchweg nicht zusammenhängend, sondern erscheinen in der Schliffläche infolge der langen Glühdauer in perlschnurartiger Anordnung. Einen deutlichen Ferromagnetismus nach dem langen Glühen bei 700° zeigten vor allem der Stahl V 6 sowie in viel geringerem Maße die Stähle V 5 und V 9. In diesen Stählen sind demnach die Gehalte an den γ-Mischkristall beständig machenden Elementen im Verhältnis zu den ferritbildenden Zusätzen unterbemessen, so daß ein Teil der austenitischen Grundmasse bei langzeitigem Glühen bei geeigneten Temperaturen sich in einen Gefügebestandteil mit α-Eisencharakter umwandelt. Diese Zerfallsneigung des Austenits ließe sich bei den Stählen V 5 und V 9 durch eine kleine, bei dem Stahl V 6 nur durch eine bedeutende Erhöhung des Nickel- oder Mangangehaltes beseitigen.

b) Spezifisches Gewicht, Wärmeausdehnung und Wärmeleitfähigkeit.

Das spezifische Gewicht der Versuchsstähle, das durch Ausmessen und Wägen von zylindrischen Proben

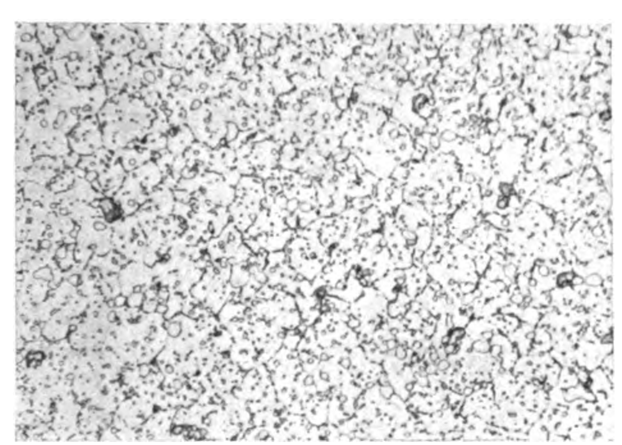


Bild 1. Stahl V 1.



Bild 2. Stahl V 2.

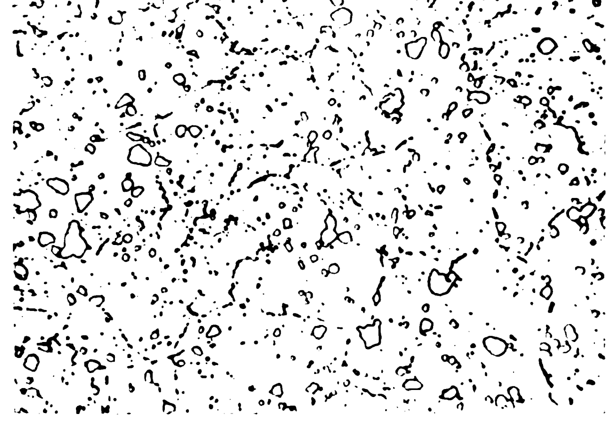


Bild 3. Stahl V 3.

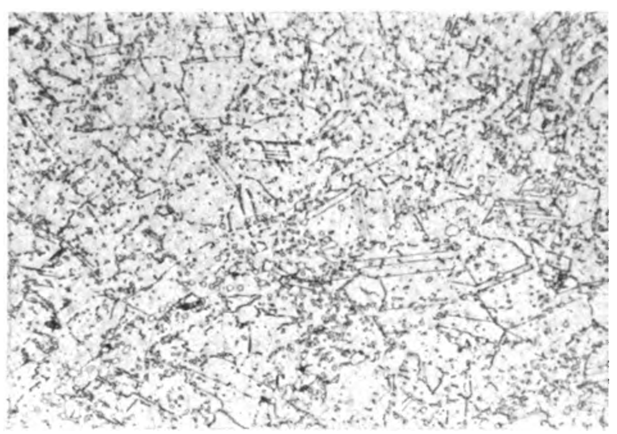


Bild 4. Stahl V 4.

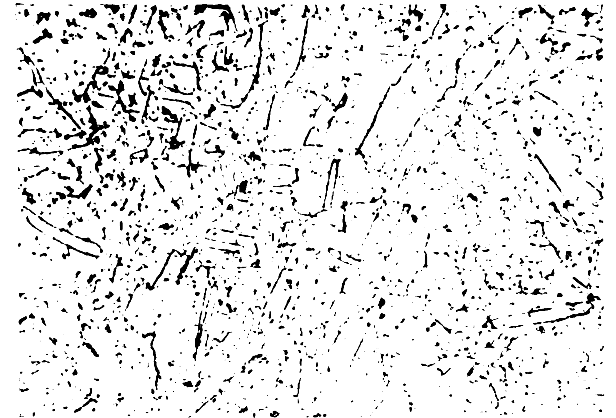


Bild 5. Stahl V 5.

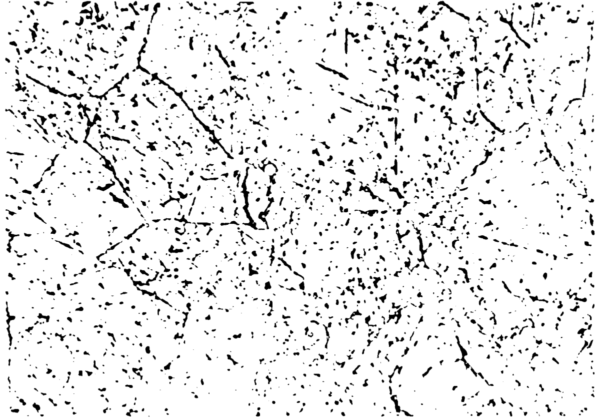


Bild 6. Stahl V 6.

Bild 1 bis 6. Gefüge der Versuchsstähle nach 100stündiger Glühung bei 700°. Vergr. 500fach.

Zahlentafel 2. Spezifisches Gewicht der Versuchsstähle. (Mittelwerte aus drei Messungen.)

Stahl	g/cm³
V 1	7,931
V 2	7,939
V 3	7,782
V 4	7,846
V 5	7,792
V 6	7,537
V 7	7,631
V 8	7,701
V 9	7,698
V 10	7,671
V 11	7,739

bei 20° bestimmt wurde, ist in Zahlentafel 2 angegeben. Das größte spezifische Gewicht haben die Stähle V 1 und V 2, die die höchsten Nickel- und Wolframgehalte besitzen. Mit fallendem Wolfram- und Nickelgehalt und gleichzeitig steigendem Mangangehalt sinkt das spezifische Gewicht der Versuchsstähle. Den Kleinstwert erreicht der mit Aluminium legierte Stahl V 6. Die Unterschiede im spezifischen Gewicht der Versuchsstähle sind nicht sehr erheblich. Die Größt- und Kleinstwerte sind 7,939 (Stahl V 2) und 7,537 g/cm³ (Stahl V 6).

Die mittleren Wärmeausdehnungsbeiwerte zwischen 20 und 800° der Versuchsstähle wurden durch Auswerten von Dilatometerkurven erhalten, die mit einem Differential-Dilatometer neuerer Bauart[1]) aufgenommen wurden. Es wurden Probestäbe mit 50 mm Länge und 4 mm Durchmesser benutzt. Als Vergleichswerkstoff diente Pyros. Die Temperaturänderungsgeschwindigkeit betrug 1,5°/min. — In Bild 12 sind die mittleren Wärmeausdehnungsbeiwerte für die Versuchsstähle in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Dieser Darstellung ist zu entnehmen, daß die mittleren Ausdehnungsbeiwerte der Werkstoffe V 3 bis V 11 mit kleinem Nickel- und entsprechend erhöhtem Mangangehalt mit der Temperatur erheblich stärker ansteigen als die Beiwerte der nickelreicheren und manganarmen Stähle V 1 und V 2. Letztere haben bei 20 bis 200° bzw. 20 bis 400° eine größere Wärmeausdehnung als die manganlegierten Stähle. Infolge der verschieden ausgeprägten Temperaturabhängigkeit der Wärmeausdehnung der nickelreichen Stähle einerseits und der manganlegierten Stähle andererseits sind jedoch die Unterschiede der mittleren Ausdehnungsbeiwerte der Versuchsstähle für das Temperaturgebiet von 20 bis 800° praktisch bedeutungslos. Den niedrigsten Wert für dieses Temperaturgebiet hat der Stahl V 6 mit $18{,}0 \cdot 10^{-6}$ mm · mm⁻¹ · °C⁻¹, den höchsten mit $19{,}0 \cdot 10^{-6}$ mm · mm⁻¹ · °C⁻¹ der Stahl

[1]) Bauart Leitz, mit Meßsystem nach F. Bollenrath; vgl. Z. Metallkde. Bd. 25 (1933), S. 163/65; 26 (1934), S. 62/65.

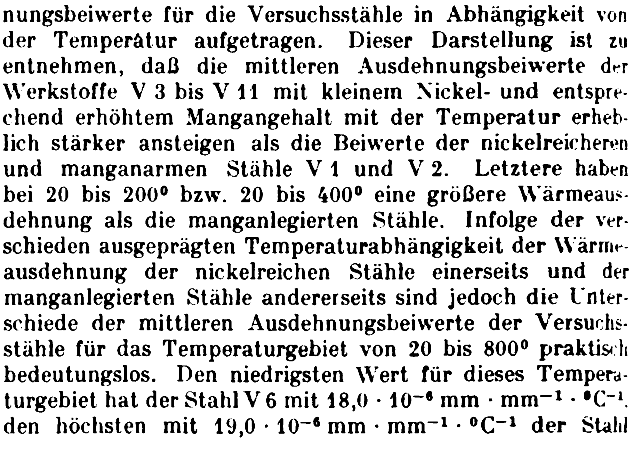


Bild 7. Stahl V 7.

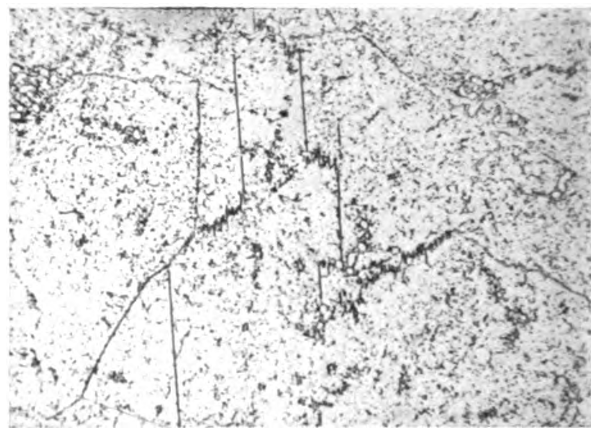


Bild 9. Stahl V 9.

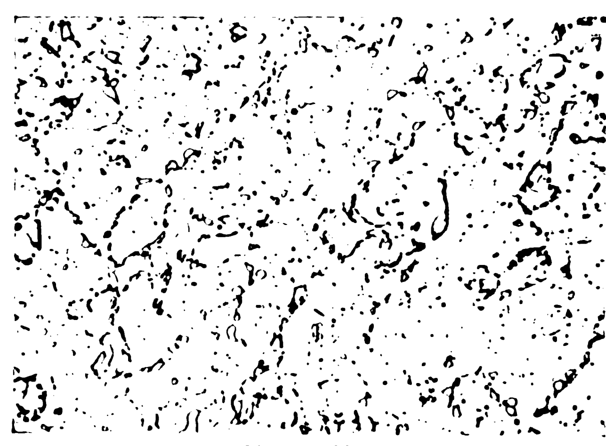
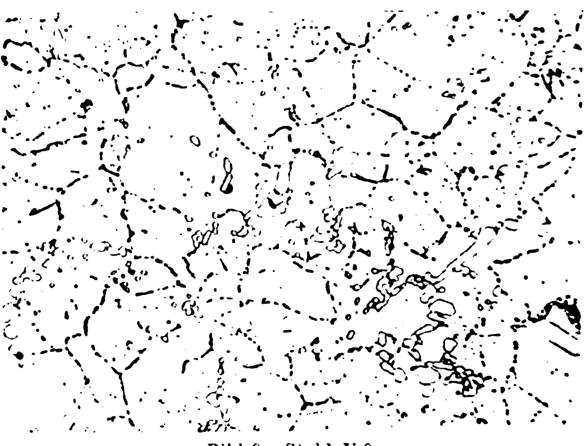


Bild 8. Stahl V 8.



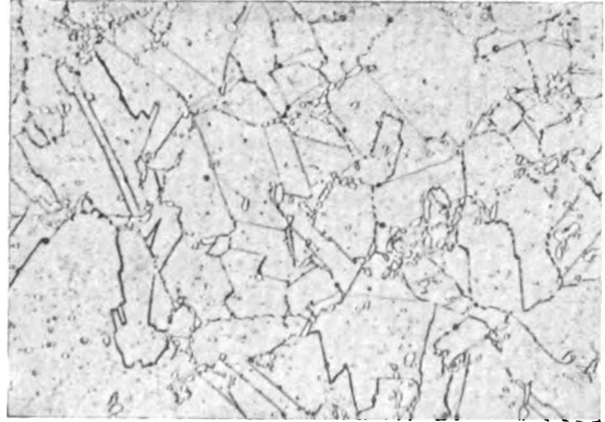


Bild 10. Stahl V 10.

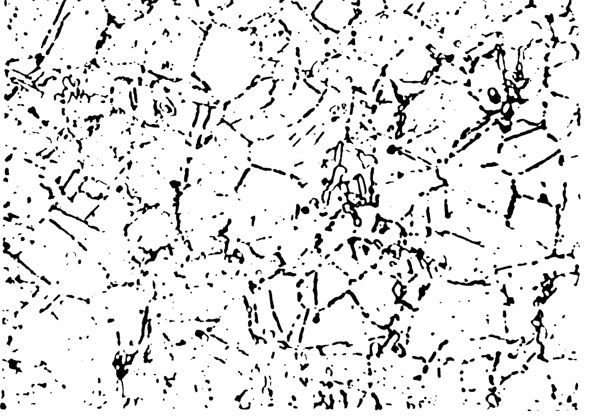


Bild 11. Stahl V 11.

Bild 7 bis 11. Gefüge der Versuchsstähle nach 100stündiger Glühung bei 700°. Vergr. 500fach.

V 7. Beide Stähle haben fast gleiche Gehalte an Kohlenstoff, Mangan, Nickel, Chrom und Wolfram, unterscheiden sich aber wesentlich im Silizium- (1,6% bei Stahl V 6, 4,3% bei Stahl V 7) und Aluminiumgehalt (2,35% bei Stahl V 6, 0% bei Stahl V 7). Der Stahl V 6 hat nach Bild 12 im gesamten Temperaturgebiet von 20 bis 800° die kleinste Wärmeausdehnung aller Versuchsstähle. Für keinen der Versuchsstähle wurden bis 900° Richtungsänderungen oder Unstetigkeiten der Dilatometerkurven festgestellt, die auf eine Umwandlung eines bedeutenden Anteiles der austenitischen Grundmasse hätten schließen lassen.

Die Wärmeleitfähigkeit der Versuchsstähle wurde durch Vergleichsmessungen bestimmt, für die die Wärmeleitfähigkeit des Stahles V 1 als bekannt angenommen wurde. Die Messungen wurden folgendermaßen ausgeführt: Stäbe aus den Versuchsstählen mit 10 mm Durchmesser und 200 mm Länge, die in Abständen von 25 mm bis zur Stabmitte geführte, radiale, gegeneinander versetzte Querbohrungen mit 1,5 mm Durchmesser zur Aufnahme von Thermoelementlötstellen besaßen, wurden mit ihrem einen, schwach konischen Ende in einen hitzebeständigen Metallblock eingepaßt, der noch eine etwas kleinere Wärmeausdehnung als der Stahl V 6 hatte. Der Metallblock wurde so in einen Röhrenofen eingesetzt, daß sich nur die dem Metallblock am nächsten liegende, erste Temperaturmeßstelle noch innerhalb des Ofens, und zwar bei allen Versuchen an der genau gleichen Stelle befand. Der Ofen wurde so beheizt, daß diese noch im Ofen liegende Meßstelle eine Temperatur von 600° im Beharrungszustand erreichte. Bei gleicher und gleichbleibender Raumtemperatur wurde dann wiederholt der Temperaturabfall an dem außerhalb des Ofens befindlichen Stabteil gemessen. Das kalte Stabende erreichte dabei Temperaturen von etwa 40°, bei einer Meßraumtemperatur von 20 ± 1°.

Die aus dem Verlauf der Temperatur über die Prüfstablänge und unter Benützung bekannter Wärmeleitzahlen des Stahles V 1 für alle Versuchsstähle ermittelten Wärmeleitzahlen sind in Zahlentafel 3 wiedergegeben. Die Werte für den Stahl V 1 entsprechen Angaben von F. Bollenrath und W. Bungardt[2]) auf Grund von Messungen, die F. Raisch ausführte. In Zahlentafel 3 sind für den Stahl V 1 die von Raisch bei der Abkühlung gemessenen Werte zugrunde gelegt, die größer sind als die bei der Erhitzung gemessenen. Trotzdem erscheinen die Wärmeleitzahlen für den Stahl V 1 noch sehr niedrig. Für den Vergleich der Versuchsstähle untereinander ist jedoch die absolute Richtigkeit der gewählten Vergleichswerte von untergeordneter Bedeutung. — Aus Zahlentafel 3 ergibt sich, daß die mittleren Wärmeleitzahlen der Versuchsstähle im Temperaturbereich von 50 bis 300° nur Abweichungen aufweisen, die nicht wesentlich über die Fehlergrenzen des Bestimmungsverfahrens hinausgehen. Die manganlegierten Versuchsstähle unterscheiden sich demnach in ihrer Wärmeleitfähigkeit im untersuchten Temperaturgebiet nur so wenig von den manganarmen, nickelreicheren Versuchsstählen, daß die Abweichungen praktisch bedeutungslos sind. Eine gegenüber dem Vergleichsstahl V 1 ziemlich eindeutig verminderte Wärmeleitfähigkeit zeigte der mit Aluminium legierte Stahl V 6.

c) Verschleißverhalten.

Zur Erlangung von Vergleichswerten für die Verschleißfestigkeit der Versuchsstähle wurden Versuche in der in Bild 13 schematisch dargestellten Art ausgeführt. Die Stahlprobe *P* wird mit der Spindel *S* verschraubt, die in der Führung *F* gehalten wird. Die Spindel überträgt die Belastung durch das 1000 g schwere Gewicht *G* auf die Probe. Diese wird hierdurch mit ihrer balligen Fläche auf die gußeiserne Platte *U* gepreßt, die beim Verschleißversuch hin- und herbewegt wird, so daß die Probe auf ihr einen Kreisbogen von 22 mm Länge mit einer mittleren Gleitgeschwindigkeit von 0,733 m/s beschreibt. Die Verschleißversuche wurden bei trockener Reibung mit gesamten Verschleißwegen von 2200 und 13200 m ohne Unterbrechung durchgeführt. Es entstand ein vorwiegend oxydischer Verschleißstaub. Als Maß für den Verschleiß der Proben aus den Versuchsstählen wurde der Durchmesser der Kreisfläche angenommen, die beim Verschleiß der balligen Probenfläche entsteht. Der Verschleiß der Gußeisenplatten wurde nicht ermittelt. — Die Proben und die gußeiserne Gleitfläche wurden zunächst poliert und unmittelbar vor dem Versuch durch zwei Striche über ungebrauchtes Schmirgelpapier 000 leicht aufgerauht. Das für die Unterlage verwendete Gußeisen enthielt 2,6% C, 2,2% Si, 0,7% Mn, 0,077% P, 0,057% S, 1,4% Ni und 1,15% Mo. Es wurde vergütet durch Abschrecken von 760° in Öl und einstün-

[2]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 9 (1935/36), S. 253/62.

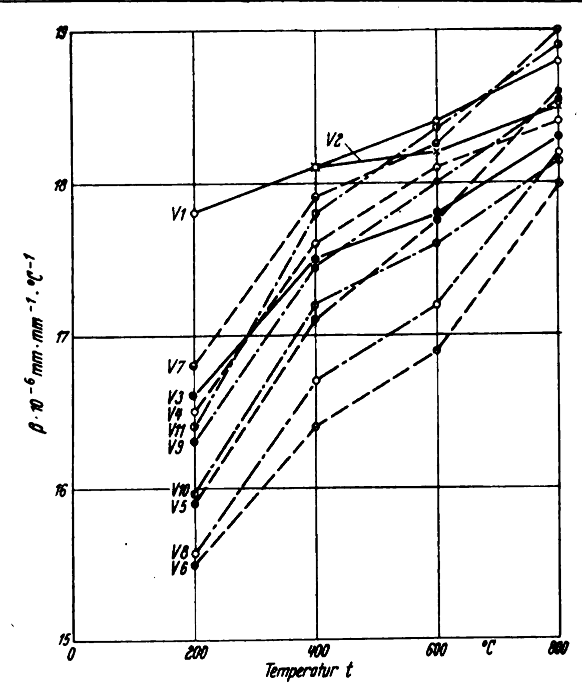


Bild 12. Mittlere Wärmeausdehnungsbeiwerte der Versuchsstähle zwischen 20 und *t*°.

Zahlentafel 3. Mittlere Wärmeleitfähigkeit der Versuchsstähle. (Mittelwerte aus 3 bis 4 Messungen.)

Stahl	Wärmeleitfähigkeit in cal/cm · s · °C bei		
	50 bis 100° C	100 bis 200° C	200 bis 300° C
V 1	0,028	0,029	0,030
V 2	$0{,}031_9$	$0{,}029_8$	0,032
V 3	$0{,}029_3$	$0{,}028_9$	$0{,}030_8$
V 4	$0{,}028_4$	$0{,}029_7$	0,031
V 5	$0{,}028_4$	0,030	$0{,}030_9$
V 6	$0{,}026_5$	$0{,}028_1$	$0{,}028_9$
V 7	$0{,}027_5$	$0{,}026_8$	$0{,}028_8$
V 8	$0{,}028_8$	$0{,}028_5$	$0{,}030_9$
V 9	$0{,}028_1$	$0{,}029_2$	$0{,}030_4$
V 10	$0{,}028_1$	$0{,}029_0$	$0{,}030_2$
V 11	$0{,}028_2$	$0{,}029_3$	$0{,}029_8$

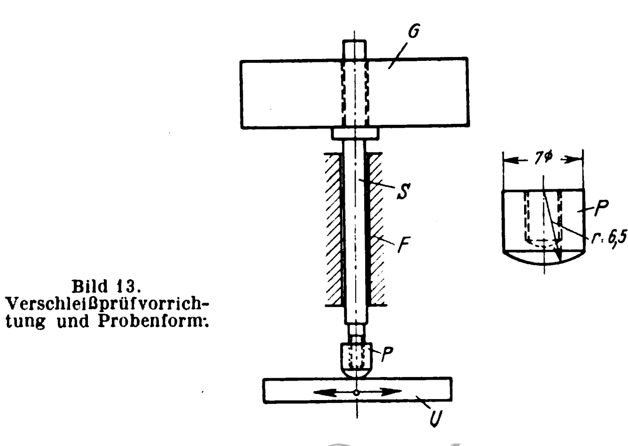


Bild 13. Verschleißprüfvorrichtung und Probenform.

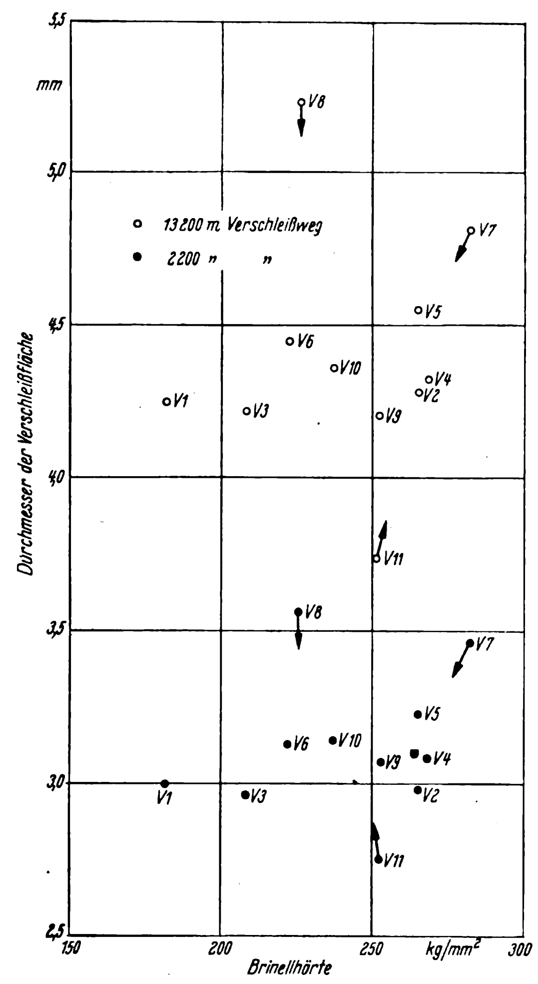


Bild 14. Ergebnisse der Verschleißversuche.

diges Anlassen bei 500°. Hierdurch ergab sich eine gleichmäßige, zwischen 344 und 353 kg/mm² liegende Brinellhärte.

Die Ergebnisse der Verschleißversuche sind in Bild 14 in Abhängigkeit von der Härte der Versuchsstähle aufgetragen. Der Verschleißstaub war vorwiegend oxydisch. Weder für den 2200 m noch für den 13200 m langen Verschleißweg ergibt sich eine klare Abhängigkeit des Verschleißes von der Härte. Auch ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Verschleißverhalten und Gefügeausbildung wie z. B. Korngröße des Austenits und der Karbide, ist den Versuchen nicht zu entnehmen. Die geringste Verschleißfestigkeit ergab sich für den Stahl mit dem kleinsten Kohlenstoffgehalt, V 8. Ebenfalls verhältnismäßig starkem Verschleiß unterlag der Stahl mit der höchsten Härte, V 7. Die größte Verschleißfestigkeit hatte der Stahl V 11. Von den übrigen Stählen haben die auf Chrom-Nickel-Legierungsbasis eine durchweg etwas höhere Verschleißfestigkeit bei den Versuchen bewiesen als die Stähle, die als Hauptlegierungselemente neben Chrom und Nickel noch Mangan enthielten. Der Schluß, daß die Chrom-Nickel-Mangan-den Chrom-Nickel-Ventilkegelstählen im Verschleißverhalten unterlegen seien, läßt sich jedoch aus den Versuchsergebnissen in dieser allgemeinen Form nicht ziehen. Hiergegen sprechen z. B. die mit Stahl V 11 erhaltenen Ergebnisse. Bei der Vielfaltigkeit von Einflüssen, die das Verschleißverhalten eines Werkstoffs selbst unter gegebenen Verschleißbedingungen bestimmen, kann der Wert der durchgeführten Verschleißversuche überhaupt nur in einer vorläufigen Orientierung gesehen werden.

d) Nitrierhärtbarkeit.

Die Nitrierhärtung hoch chromhaltiger sowie austenitischer Chrom-Nickel-Stähle ist dadurch erschwert, daß sich auf ihrer Oberfläche in Gegenwart oxydierender Mittel, u. a. von Luft, leicht eine dünne Oxydhaut bildet, der man z. B. die Rostbeständigkeit derartiger Stähle zuschreibt. Angaben über die Verstickung austenitischer Chrom-Nickel-Mangan-Stähle scheinen im Schrifttum noch nicht vorzuliegen. Es war aber zu erwarten, daß sie sich ähnlich wie austenitische Chrom-Nickel-Stähle verhalten, also verglichen mit den eigentlichen Nitrierstählen schwierig versticken lassen würden.

Alle Versuchsstähle (V 1 bis V 11 und A bis D) wurden für die Nitrierversuche im weichen Zustand (abgeschreckt von 1050 bis 1100°) verwendet. Für die Nitrierglühungen wurde eine Ofenanlage benutzt, in der laufend Bauteile aus Nitrierstahl verstickt werden. Die betriebsmäßige Arbeitsweise wurde für die Versuche nur insofern etwas abgeändert, als eine besonders sorgfältige Trocknung des Ammoniakgases vor dem Einleiten in die Nitriermuffel durchgeführt wurde. Die 30 × 8 × 6 mm³ großen Proben hingen während der Nitrierglühung an Drähten frei in der Muffel. Die Verstickungsversuche wurden bei 540 bis 550° über Zeiten von 90 und 120 h durchgeführt. Hierbei betrug der Ammoniakzersetzungsgrad 30 bis 34%. Die Vorbereitung der Probenoberfläche, die beim Versticken austenitischer Stähle eine besondere, oben schon angedeutete Rolle spielt, geschah nach sechs verschiedenen Verfahren, die zunächst angegeben werden:

Verfahren 1. Die mit Vaseline eingefetteten Proben wurden auf ebenfalls stark eingefettem Schmirgelpapier Nr. 0 geschliffen. Die Anwendung des Fettes sollte die Ausbildung einer Oxydhaut auf der frischgeschliffenen Oberfläche verhindern. Unmittelbar vor dem Einsetzen in die Nitriermuffel wurden die Proben sorgfältig entfettet.

Verfahren 2. Die Proben wurden mit Schmirgelpapier Nr. 000 geschliffen, mit Vaseline eingefettet und unmittelbar vor dem Beginn der Verstickung sorgfältig entfettet.

Verfahren 3. Die Proben wurden poliert und nach Verhalten 2 weiterbehandelt.

Verfahren 4. Die Proben wurden mit Schmirgel Nr. 0 geschliffen, sorgfältig entfettet und ohne voraufgegangenes Beizen elektrolytisch mit einem Kupferüberzug von 0,15 bis 0,25 μ Dicke (durch Wägung der Proben vor und nach dem Verkupfern bestimmt) versehen.

Verfahren 5. Mit Schmirgel Nr. 0 geschliffene und außerdem polierte Proben wurden sorgfältig entfettet, in heißer 10proz. Schwefelsäure angeätzt und wie im Verfahren 4 verkupfert[3]).

Verfahren 6. Mit Schmirgel Nr. 0 geschliffene und außerdem polierte Proben wurden sorgfältig entfettet, in einer salzsauren Kadmiumphosphatlösung bei Siedetemperatur geätzt[3]) und eine Stunde nach dem Ätzen in die Nitriermuffel eingesetzt. Die Ätzdauer war für den Stahl B etwa eine Stunde, für die übrigen Chrom-Nickel-Stähle etwa eine halbe Stunde und für die manganlegierten Stähle erheblich kürzer. Die Stähle V 6, V 7 und D wurden schon in wenigen Sekunden stark angegriffen und hatten hiernach ein dunkelgraues bis schwarzes Aussehen. Die übrigen Stähle hatten nach dem Beizen eine matte, hellgraue Oberfläche.

Die Ätzlösung wurde wie folgt hergestellt: 80 g Kadmium wurden in Salzsäure unter Erwärmen gelöst, die Lösung bis zur beginnenden Kristallisation eingedampft, mit 200 cm³ 85proz. Orthophosphorsäure versetzt und mit Wasser auf 600 cm³ aufgefüllt. Der entstehende Niederschlag löst sich beim Erwärmen.

Die Ergebnisse der Nitrierversuche mit den nach den Verfahren 1 bis 6 vorbehandelten Proben der Versuchsstähle sind in Zahlentafel 4 zusammengestellt. Diese Zahlentafel enthält außerdem die mittlere Härte der Stähle im Ausgangszustand und die mittlere Kernhärte nach den Nitrierglühungen. — Die nach Verfahren 1 behandelten Proben haben durch die 120stündige Glühung in Ammoniak bei 550° bis auf die Proben aus dem hochgekohlten Chrom-Nickel-Wolfram-Stahl A keine nennenswerte Steigerung der Oberflächenhärte erfahren. Die Härtesteigerung ist

[3]) B. Jones, J. Iron Steel Inst. Bd. 136 (1937), S. 169/85.



auch bei Stahl A nur gering und nicht gleichmäßig. Miteingesetzte Proben aus Nitrierstahl und Weicheisen waren, ebenso wie bei den im folgenden noch zu besprechenden Versuchen, einwandfrei verstickt. — Die nach Verfahren 2 behandelten Proben ließen sich, bis auf die aus Stahl V 2 und Stahl A, durch 120stündiges Glühen bei 550° in Ammoniak ebenfalls nicht versticken. Die von den Stählen V 2 und A erreichte Oberflächenhärte ist nicht befriedigend und, wie bei Stahl A nach Verfahren 1, auf den vorbehandelten Probenflächen nicht gleichmäßig. — Die Anwendung des Verfahrens 3 führte nach 120stündiger Glühung in Ammoniak bei 550° zu örtlich hohen Oberflächenhärten der Stähle V 1, V 2, V 6, A und C. Außer Stahl V 6, der 2,6 % Al enthält, gehören diese Stähle zu denen auf der Legierungsgrundlage Chrom-Nickel, von denen der Stahl V 3 mit leicht erhöhtem Mangangehalt und der Stahl B keine Nitrierhärtung erfuhren. Die Versuchsstähle auf der Legierungsbasis Chrom-Nickel-Mangan haben außer Stahl V 6 entweder überhaupt keine oder eine unerhebliche Oberflächenhärtung erfahren. Wie aus Zahlentafel 4 hervorgeht, ließ sich keiner der nach Verfahren 3 behandelten Stähle gleichmäßig nitrierhärten.

Aus den bisher angeführten Versuchsergebnissen ist schon zu entnehmen, daß die Nitrierhärtbarkeit austenitischer Stähle von der Art der chrom-nickel-legierten Versuchswerkstoffe mit steigender Oberflächengüte — wie bekannt — zunimmt und daß die manganlegierten Stähle sich durchweg schlechter versticken lassen als die Versuchsstähle mit Mangangehalten unter 1%.

Mit den nach Verfahren 4 behandelten, polierten Proben ergab sich nach 90stündigem Glühen in Ammoniak bei 550° eine als einwandfrei anzusehende Nitrierhärtung bei allen Chrom-Nickel-Stählen außer Stahl V 3 mit seinem etwas erhöhten Mangangehalt. Von den manganlegierten Stählen erfuhr dagegen wieder nur der Stahl V 6 eine Oberflächenhärtung. Die Oberflächenhärte und die Nitriertiefe der polierten Proben waren ziemlich gleichmäßig. Die mit Schmirgel Nr. 0 geschliffenen Proben hingegen hatten sowohl eine stark streuende Oberflächenhärte wie auch eine wechselnde Nitriertiefe. Bild 15 zeigt die Nitrierschicht einer polierten, Bild 16 die einer geschliffenen Probe aus Stahl V 1. Beide Proben waren nach Verfahren 4 behandelt. — Die Angaben in Zahlentafel 4 unter Verfahren 4 gelten für polierte Proben.

Von den nach Verfahren 5 (Ätzen vor dem Verkupfern) behandelten, bei 550° 90 h in Ammoniak geglühten, polierten bzw. geschliffenen Stahlproben waren alle aus den Chrom-Nickel-Stählen bestehenden Proben einwandfrei nitriert, mit Ausnahme wieder von Stahl V 3 mit erhöhtem Mangangehalt. Von den manganlegierten Stählen hingegen zeigte keiner eine Nitrierhärtung. Daß sich auch der Stahl V 6 nach diesem Verfahren im Gegensatz zum Verfahren 4 nicht versticken ließ, dürfte damit zusammenhängen, daß sich die manganlegierten Stähle sämtlich nach dem Beizen nicht gleichmäßig dicht und dünn verkupfern ließen. Die Wasserstoffabscheidung im Verkupferungsbad war an den geätzten Proben der manganlegierten Stähle sehr stark.

Zum Unterschied von Verfahren 4 führte das Verfahren 5 bei den Chrom-Nickel-Versuchsstählen nicht nur an polierten, sondern auch an geschliffenen Proben zu einer gleichmäßigen Verstickung. Der gleiche Vorteil wird auch bei Anwendung des Verfahrens 6 (Kadmiumphosphatätzung) erreicht. Die nach diesem Verfahren behandelten Proben aus allen Chrom-Nickel-Versuchsstählen, einschließlich des Stahles V 3 mit erhöhtem Mangangehalt, ließen sich im polierten und geschliffenen Zustand durch 90stündiges Glühen bei 550° in Ammoniak einwandfrei nitrieren. Der Streubereich der Oberflächenhärte und die Nitriertiefe waren bei den polierten und geschliffenen Proben praktisch gleich. Selbst die von der Probenherstellung her noch im geschlichteten Zustand befindlichen Nebenflächen der Proben waren ebenso wie die polierten und geschlichteten, für die Prüfung eigentlich vorgesehenen Flächen einwandfrei verstickt. Gleiche Feststellungen wie an allen Chrom-Nickel-Stählen ergaben sich an den manganlegierten Stählen

Zahlentafel 4. Ergebnisse der Nitrierversuche bei 540 bis 560°.
(Härte = Vickershärte mit 10 kg Last gemessen. Nitriertiefe mikroskopisch gemessen.)

Werkstoff	Härte vor dem Nitrieren	Kernhärte nach dem Nitrieren	Verfahren 1 [1]	Verfahren 2 [1]	Verfahren 3 [1]	Verfahren 4 [2]			Verfahren 5 [2] [3]			Verfahren 6 [2] [4]		
			Oberflächenhärte			Härte an der Oberfläche	Härte 0,03 mm unter der Oberfläche	Nitriertiefe in mm	Härte an der Oberfläche	Härte 0,03 mm unter der Oberfläche	Nitriertiefe in mm	Härte an der Oberfläche	Härte 0,03 mm unter der Oberfläche	Nitriertiefe in mm
V 1	200	206	256	250	254—945	834—895	700	0,105—0,110	1060—1150	1020	0,109	1050—1065	824	0,10—0,11
V 2	212	210	215	542	230—815	752—803	910	0,155—0,160	860—1130	1245	0,163	770—895	1033	0,170
V 3	235	224	237	245	260	235		0	240	—	0	680—745	1170	0,14—0,16
V 4	238	237	230	245	300	263	—	0	252	—	0	260—750	—	0,128
V 5	250	260	293	260	297—383	270	—	0	275	—	0	260—1130	1100	0—0,210
V 6	220—300	235	300	290	421—642	743—762	895	0,175—0,195	256	—	0	840—1010	824	0,260
V 7	260	257	270	250	322—383	315	—	0	320	—	0	350—880	1205	0—0,150
V 8	225	225	232	295	240	245	—	0	225	—	0	1080—1100	1200	0,15—0,16
V 9	270	270	300	290	290—385	317	—	0	270	—	0	365—824	1065	0—0,136
V 10	270	272	310	305	300	290	—	0	225	—	0	300—700	—	0—0,16
V 11	270	274	260	275	290—317	322	—	0	280	—	0	650—800	1020	0,200
A	250	242	365	450	297—824	660—720	790	0,090—0,100	820—824	1000	0,091	860—990	790	0,08—0,09
B	150	178	180	210	214	1000—1030	810	0,140—0,145	830—975	1130	0,132	900—1020	1290	0,142
C	160	153	190	193	206—724	1030—1260	810	0,170—0,195	850—950	1000	0,205	840—900	1130	0,23—0,28
D	200	208	205	212	210	195	—	0	210	—	0	210—770	510	0—0,16

[1] Nitrierdauer 120 h.
[2] Nitrierdauer 90 h.
[3] Die Angaben über Oberflächenhärte und Nitriertiefe gelten für polierte und geschliffene Proben.
[4] Die Angaben für die Stähle V 1, V 2, V 3, V 6, V 8, V 11, A, B und C gelten für geschliffene und polierte Proben. Die Angaben für die übrigen Stähle beziehen sich auf geschliffene und polierte Proben (kleine Oberflächenhärte und Nitriertiefe) sowie auf geschlichtete Proben (große Oberflächenhärte und Nitriertiefe).

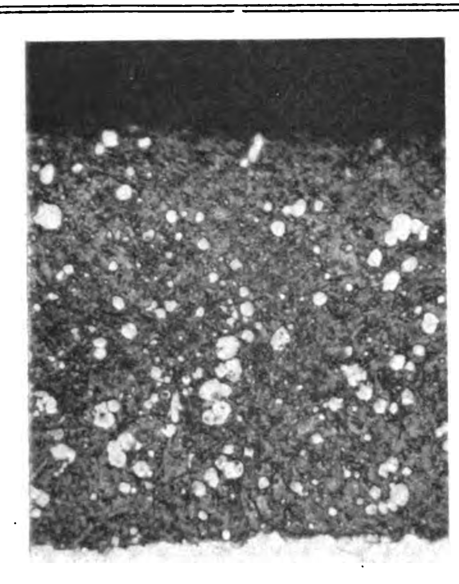


Bild 15. Poliert.

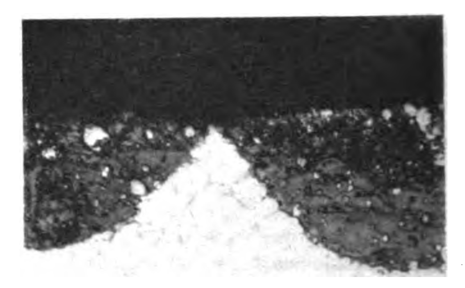


Bild 16. Geschliffen.

Bild 15 und 16. Nitrierschicht einer vor dem Nitrieren polierten und einer geschliffenen Probe aus Stahl V 1. Beide Proben nach Verfahren 4 behandelt.

Vergr. 500fach. Ätzmittel: 4proz. alkoholische Salpetersäure.

V 6, V 8 und auch V 11. Die ebenfalls manganlegierten Stähle V 4, V 5, V 7, V 9, V 10 und D hingegen zeigten an den polierten und geschliffenen Prüfflächen der Proben nur eine örtlich sehr begrenzte, fleckenweise Verstickung. Die nur geschlichteten Probenflächen der Stähle V 4, V 5, V 7 V 9, V 10 und D waren dagegen überraschenderweise einwandfrei verstickt.

Aus den Versuchen ist zu entnehmen, daß unter Bedingungen, die zur Verstickung der Versuchsstähle auf Chrom-Nickel-Legierungsbasis führten, sich die manganlegierten Versuchsstähle nur zum Teil, ungleichmäßig oder überhaupt nicht versticken ließen. Andererseits zeigen die Versuchsergebnisse, daß es möglich ist, auch manganlegierte Stähle von der Art der Versuchswerkstoffe zu versticken, und zwar unter Anwendung des Verfahrens 6 auf Teile aus diesen Stählen mit geschlichteter Oberfläche. Eine feinere Oberflächenbearbeitung, wie z. B. durch Polieren, scheint für die manganlegierten Stähle in vielen Fällen überraschenderweise nicht angebracht zu sein. Die eindeutige Klärung des günstigsten Oberflächenzustandes derartiger Stähle für die Verstickung erfordert weitere Versuche.

Vergleicht man die Wirksamkeit der einzelnen Vorbereitungsverfahren der Probenoberfläche für die Nitrierung miteinander, so ergibt sich, daß die Verfahren 1 bis 3 selbst bei Chrom-Nickel-Stählen kein befriedigendes Ergebnis gezeigt haben. Die »Entpassivierungsverfahren« 4 bis 6 haben bei Chrom-Nickel-Stählen zu guten Ergebnissen geführt. Für diese Stähle sind besonders die Verfahren 5 und 6 als gut und fast gleichwertig anzusehen. Für den Chrom-Nickel-Stahl V 3 mit leicht erhöhtem Mangangehalt hat sich jedoch von den geprüften Verfahren nur das Verfahren 6 als wirksam erwiesen. Es hat auch bei den manganlegierten Versuchsstählen zu hoffnungsvollen Ergebnissen der Nitrierversuche geführt.

Über den Einfluß der Zusammensetzung austenitischer Stähle auf ihre Nitrierbarkeit lassen sich aus Zahlentafel 4 über die Feststellung hinaus, daß die Verstickung manganlegierter Stähle unter manchen Bedingungen nicht eintrat, die bei Chrom-Nickel-Stählen zu einer Nitrierhärtung führten, noch einige Einzelheiten entnehmen. Hierzu werden in erster Linie die Versuchsergebnisse herangezogen, die an den nach Verfahren 6 behandelten Stählen erzielt wurden, da dieses Verfahren bei allen Stählen eine Nitrierhärtung ermöglichte. Ein Vergleich der Chrom-Nickel-Stähle V 1, V 2 und A bestätigt die bekannte Tatsache, daß die Nitriertiefe, die bei austenitischen Stählen viel kleiner als bei den eigentlichen Nitrierstählen ist, mit zunehmendem Nickelgehalt abnimmt[3]. Der Kohlenstoffgehalt dürfte von nur kleinem Einfluß auf die Nitriertiefe sein, da diese bei dem Stahl A (0,95% C) nur wenig kleiner gefunden wurde als bei dem vergleichbaren Stahl V 1 (0,50% C). Die Nitrierhärte scheint jedoch bei hohem Kohlenstoffgehalt der Chrom-Nickel-Ventilkegelstähle abzunehmen, worauf die Härte bei Stahl A hinweist. Schon ein nur wenig über dem üblichen liegender Mangangehalt, wie er bei Stahl V 3 vorliegt, hat bei den Versuchen die Nitrierbarkeit erschwert, so daß der Stahl V 3 sich nur im Behandlungszustand nach Verfahren 6 nitrieren ließ, ebenso wie die meisten manganlegierten Versuchsstähle. Bei diesen weicht die Härte der Nitrierschicht nicht grundsätzlich von der der vergleichbaren Chrom-Nickel-Versuchsstähle ab. Dagegen haben die mit Mangan legierten Stähle V 4 bis V 11 eine größere Nitriertiefe als der Chrom-Nickel-Stahl V 1. Man darf hieraus folgern, daß Mangan die Diffusion des Stickstoffs im austenitischen Stahl, wenn einmal die Bedingungen für die Einwanderung gegeben sind, weniger beeinträchtigt als Nickel. Eine besonders große Nitriertiefe hatte der nach Verfahren 6 behandelte, aluminiumhaltige Stahl V 6. Aluminium scheint bei diesem Stahl mit hohem Mangangehalt nicht nur die Stickstoffaufnahme, sondern auch die Wanderung des Stickstoffs zu begünstigen. Eine ebenfalls große Nitriertiefe zeigte auch der Stahl C, wahrscheinlich in erster Linie wegen seines verhältnismäßig niedrigen Nickelgehaltes. Die kleinste Nitriertiefe aller Versuchsstähle hatten die Stähle A und V 1, die neben Stahl B die höchsten Nickelgehalte haben. Unterschiede im Nickelgehalt scheinen den Einfluß von Unterschieden im Gehalt an weiteren Legierungselementen der Versuchsstähle, z. B. Chrom, auf die Nitriertiefe weitgehend zu verdecken. Bemerkenswert ist noch die Feststellung, daß der 1,8 % Cu enthaltende Stahl B sich versticken ließ, während ein Kupferzusatz von 1,2 % zu nichtaustenitischen, niedriglegierten Stählen deren Oberflächenhärtbarkeit durch Versticken aufhebt[4]. — Die geringsten Anforderungen an die Oberflächenbehandlung vor dem Versticken stellt der hochgekohlte Stahl A, der von allen Versuchsstählen am leichtesten Stickstoff aufnimmt, dabei allerdings eine nur kleine Nitriertiefe und Nitrierhärte erreicht.

Die höchsten Härten liegen im allgemeinen nicht an der Oberfläche der Nitrierschichten[3], wie die 0,03 mm unter der Oberfläche gemessenen, in Zahlentafel 4 angeführten Härtewerte beweisen. Ist jedoch schon die Oberflächenhärte sehr hoch, so ist im allgemeinen damit zu rechnen, daß

[4]) Shun-Ichi Satoh, Trans. Amer. Inst. min. metallurg. Ingrs. Iron and Steel Division Bd. 90 (1930) S. 192; vgl. a. H. Cornelius, Kupfer im technischen Eisen, Berlin (1940), S. 51.



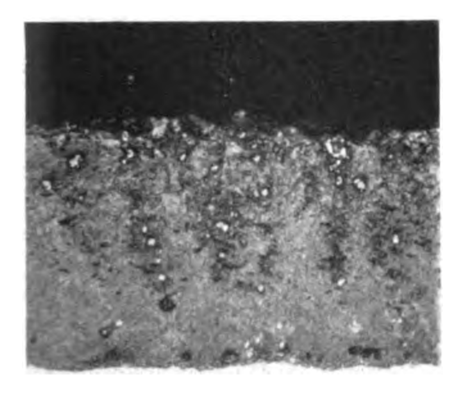


Bild 17. Stahl V 2.

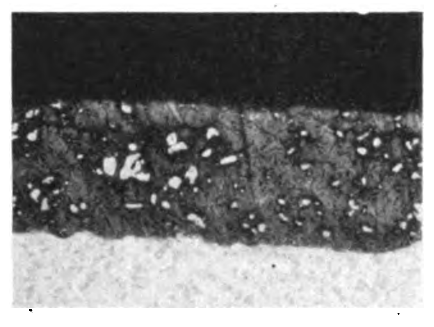


Bild 18. Stahl A.

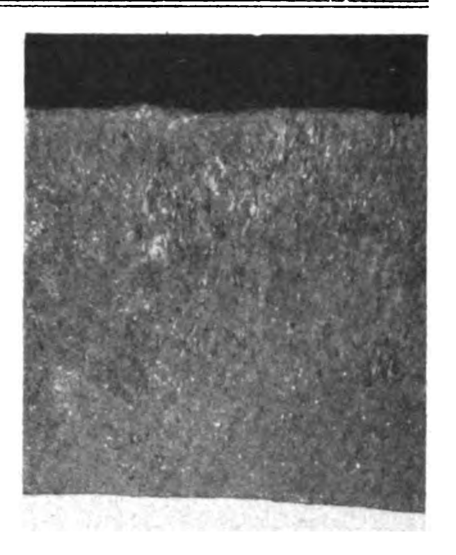


Bild 19. Stahl C.



Bild 20. Stahl V 5.

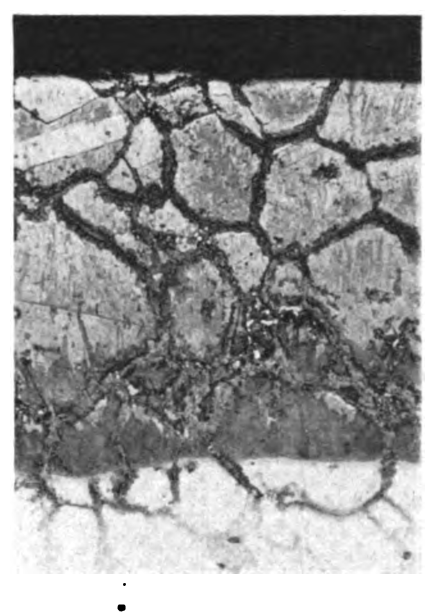


Bild 21. Stahl V 6.

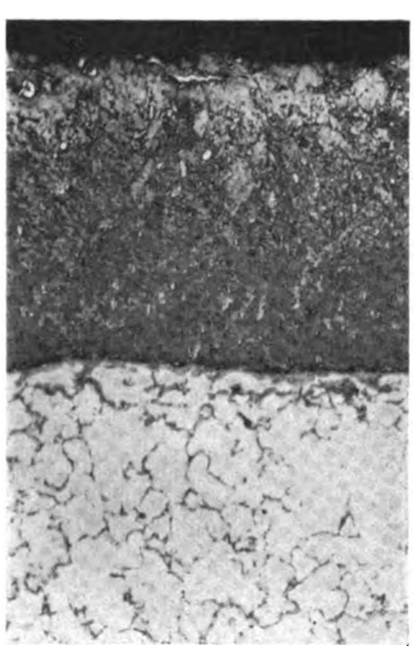


Bild 22. Stahl V 11.

Bild 17 bis 22. Gefüge der Nitrierschichten einiger nach dem Verfahren 6 vorbehandelter Versuchsstähle. (Die Stähle V 2, A, C, V 6 und V 11 waren an der nitrierten Oberfläche poliert, der Stahl V 5 dagegen nur geschlichtet.)
Vergr. 200fach. Ätzmittel: 4proz., alkoholische Salpetersäure.

die Härte bereits unmittelbar unter der Oberfläche absinkt. Die Höchsthärten der Nitrierschichten der Versuchsstähle haben vorwiegend ähnliche Werte, wie sie von den eigentlichen Nitrierstählen her bekannt sind.

Die metallographisch nachweisbare Nitrierschicht geht unvermittelt in den unnitrierten Kern der Versuchsstähle über. Das Gefüge der Nitrierschichten verschiedener Versuchsstähle zeigen Bild 15 und 17 bis 22. In allen Fällen wurde mit 4proz., alkoholischer Salpetersäure geätzt. Das Grundgefüge des Nitriersaumes von Stahl V 1 in Bild 15 wird durch das Ätzmittel gelbbraun gefärbt und besteht demnach aus der γ'-Phase, in der das Eisen teilweise durch Chrom, Wolfram (und Nickel) ersetzt sein kann[3]). Ein entsprechendes Gefüge haben auch die nitrierten Randschichten der Stähle V 2 und A nach Bild 17 und 18. Nach dem Ätzverhalten dürfte auch der Nitriersaum von Stahl C, Bild 19, in erster Linie aus der γ'-Phase bestehen. Die manganlegierten Stähle scheinen ähnlich auf das Ätzmittel anzusprechen wie die manganarmen Versuchsstähle. Demnach müßte auch bei diesen Stählen die γ'-Phase in den nitrierten Schichten vorherrschen. Jedoch läßt sich bei höheren Mangangehalten das Entstehen von Anlauffarben beim Ätzen häufig nicht vermeiden. Da noch keine röntgenographischen Feinstrukturuntersuchungen der nitrierten Randschichten von manganlegierten, austenitischen Stählen vorliegen, sollen aus dem Gefüge allein keine Schlüsse auf den Phasenaufbau der Nitriersäume derartiger Stähle gezogen werden. Es seien lediglich in Bild 20 bis 22 die Gefüge der Nitrierschichten der manganlegierten Versuchsstähle V 5, V 6 und V 11 wiedergegeben. Es ist noch bemerkenswert, daß in den Stählen C und D, die 10 bis 40% Ferrit enthalten, mikroskopisch kein Voreilen der Nitrierung in den an den Nitriersaum angrenzenden Ferritkristalliten festzustellen war, wohl dagegen auf den Korngrenzen von Stahl V 6, von denen offenbar der Austenitzerfall ausgeht, Bild 21.

e) Zunderverhalten.

Mit den Versuchsstählen V 1 bis V 11 wurden Verzunderungsversuche in ruhender Luft bei 800, 900 und 1000°

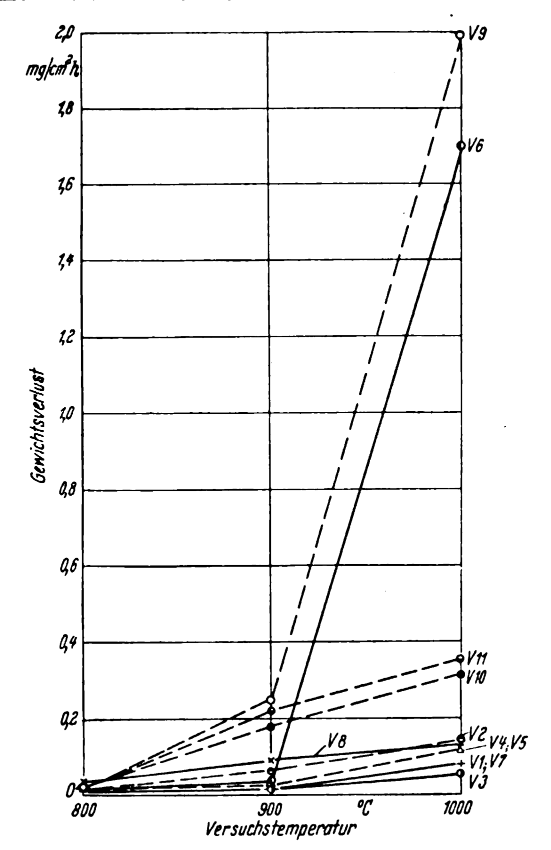


Bild 23. Verzunderung der Versuchsstähle in Luft.

durchgeführt. Die Versuchsdauer war 96 h. Jeweils nach 24 h wurden die Proben (10 mm Durchmesser, 25 mm Länge) dem Ofen entnommen, bis auf Raumtemperatur abgekühlt und erneut in den Ofen eingesetzt. Die Entzunderung am Schluß der Versuche geschah durch Klopfen und Bürsten der Stirnflächen der Proben. Von den Mantelflächen wurde der Zunder durch Stauchen der Proben um einige % und Bürsten entfernt. Bild 23 enthält die Ergebnisse der Verzunderungsversuche. Bei 800° haben hiernach alle Versuchsstähle eine hohe Zunderbeständigkeit. Bei 900° zundern die Stähle V 9, V 10 und V 11, bei 1000° außerdem noch der Stahl V 6 stärker als die übrigen Stähle. Vergleichsweise besonders ausgeprägt ist die Verzunderung der Stähle V 6 und V 9 bei 1000°.

Aus den Versuchen ist zu entnehmen, daß ein teilweiser Austausch von Nickel durch Mangan das Zunderverhalten der Versuchsstähle nicht ungünstig verändert. Die bei 900 bzw. 1000° stärker als die übrigen Stähle zundernden Werkstoffe V 6 und V 9 bis V 11 sind durch ihren Gehalt an Aluminium (V 6) und ihren 0,5% erheblich überschreitenden Vanadingehalt (V 9 bis V 11) gekennzeichnet. Der Stahl V 6 enthält zudem nur verhältnismäßig wenig Chrom (13,1%). Jedoch ist hierin nicht der Grund für seine ausgeprägte Verzunderung bei 1000° zu sehen, da der Stahl V 7 bei ebenfalls kleinem Chromgehalt eine hohe Zunderbeständigkeit besitzt. Dieser Stahl weist außerdem einen erhöhten Siliziumgehalt auf, dessen Zweck, nämlich die Verbesserung des Zunderverhaltens, in Stahl V 6 der Aluminiumzusatz erfüllen sollte und bei 800 und 900° auch erfüllt hat. Die schlechte Zunderbeständigkeit des Stahles V 6 bei 1000° ist darauf zurückzuführen, daß nach anfänglich schwacher Verzunderung unter Bildung von grüngrauem, offenbar viel Aluminiumoxyd enthaltendem Zunder bei zunehmender Glühdauer eine verstärkte Oxydation des Eisens einsetzt[5]), wobei der Zunder eine grauschwarze Färbung annimmt. Dieser Umschlag im Verlauf der Verzunderung war bei Stahl V 6 bei 800 und 900° nicht zu beobachten. — Nach H. Cornelius und W. Bungardt[6]) wird die Zunderbeständigkeit einiger hitzebeständiger Stähle durch 0,5% V nicht, durch etwa 2% V dagegen besonders bei Chrom-Nickel-Stählen mit hohem Nickelgehalt stark beeinträchtigt. In Übereinstimmung hiermit stehen die Ergebnisse der Verzunderungsversuche mit den Stählen V 8 bis V 10. Die Zunderbeständigkeit des Stahles V 8 mit nur 0,6% V entspricht fast der eines vergleichbaren. vanadinfreien Stahles. Die Zunderbeständigkeit der Stähle V 10 (0,77% V), V 11 (0,86% V) und V 9 (1,13% V) ist um so geringer, je höher der Vanadingehalt ist. In Bild 24 ist die Zeitabhängigkeit des Zunderverlustes der Stähle V 1, V 5 und V 9 bis V 11 bei 1000° in Luft dargestellt. Hiernach erfährt der Stahl V 9, der den höchsten Vanadingehalt der Versuchsstähle aufweist, nach anfänglich normaler Verzunderung bei längeren Versuchszeiten einen verstärkten Abbrand. Die gleiche Änderung in der Zeitabhängigkeit der Verzunderung, die nach Bild 24 bei den Versuchsstählen ohne oder mit nur kleineren Gehalten an Vanadin fehlt, konnte auch bei den früheren Untersuchungen von hitzebeständigen Stählen mit 2% V festgestellt werden[6]). Sie wurde, wie bei Aluminiumstählen[5]), mit dem Eintreten einer im Vergleich zu den Legierungselementen verstärkten Oxydation des Eisens begründet, die eine Zunahme der Verzunderungsgeschwindigkeit des gesamten Stahles zur Folge hat.

Nach den Ergebnissen der Verzunderungsversuche vermindert ein teilweiser Austausch von Nickel durch Mangan in Stählen von der Art des Versuchswerkstoffs V 1 die Zunderbeständigkeit nicht. Ein Zusatz von Aluminium kann sich bei 1000°, ein Zusatz von wesentlich mehr als 0,5% V schon bei 900° schädigend auf das Zunderverhalten auswirken.

f) Zerreiß- und Kerbschlagversuche vor und nach langzeitigem Glühen.

Mit den Versuchsstählen wurden nach 1stündigem Glühen bei 800° und nach 100stündigem Glühen bei 700° Zerreiß- und Kerbschlagversuche bei Raumtemperatur ausgeführt. Die Zerreißproben hatten bei 10 mm Durchmesser eine Meßlänge von 50 mm. Die Kerbschlagproben mit den Abmessungen $10 \times 10 \times 55$ mm³ und einem Rundkerb von 4 mm Tiefe und 1 mm Abrundungsradius unterschieden sich von der DVM-Probe durch den kleineren

[5]) A. Portevin, K. Prêtet und K. Jolivet, Rev. métallurg.. Mém. Bd. 31 (1934). S. 219/36, sowie E. Scheil und K. Kiwitt, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 9 (1935/36), S. 405/16.
[6]) Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 107/13.

Bild 24. Zeitabhängigkeit des Zunderverlustes einiger Versuchsstähle bei 1000° in Luft.

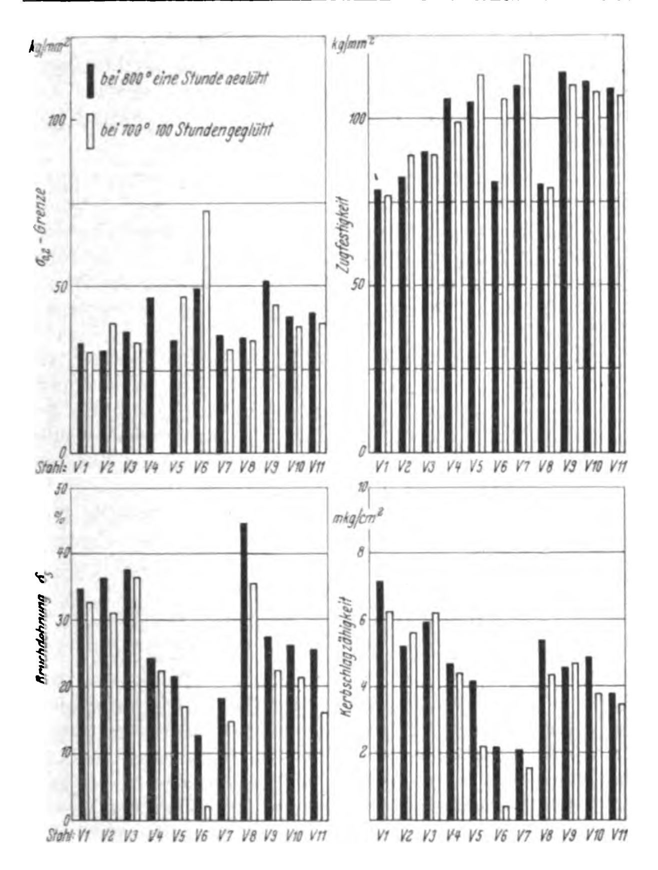


Bild 25. Mechanische Eigenschaften der Versuchsstähle. (Mittelwerte aus mindestens je zwei Versuchen.)

Schlagquerschnitt[7]) von 6 × 10 mm² an Stelle von 7 × 10 mm². Die Ergebnisse der Zerreiß- und Kerbschlagversuche sind in Bild 25 enthalten. Die $\sigma_{0,2}$-Grenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit der Chrom-Nickel-Wolfram-Stähle V 1, V 2 und V 3 erfahren durch die 100stündige Glühung bei 700° keine wesentlichen Veränderungen. Die Zugfestigkeit dieser Stähle ist sowohl nach dem Glühen bei 800 wie auch bei 700° durchweg niedriger als die der manganlegierten Stähle mit Ausnahme des bei 800° geglühten Stahles V 6 und des Stahles V 8 in beiden Glühzuständen. Dieser Umstand dürfte vorwiegend durch eine höhere Verfestigungsfähigkeit der manganlegierten Versuchsstähle bedingt sein. In der Kerbschlagzähigkeit liegen die Chrom-Nickel-Wolfram-Stähle V 1 bis V 3 durchweg höher als die manganlegierten Stähle. Dies gilt besonders in einigen Fällen bezüglich des durch das Glühen bei 700° bedingten Werkstoffzustandes. Zu der niedrigeren Kerbschlagzähigkeit der manganlegierten Stähle dürfte der Umstand mit beitragen, daß sie eine verhältnismäßig schwache Warmverformung erfahren haben, da die Stangen aus kleinen Versuchsschmelzen hergestellt wurden. Aus dem gleichen Grunde dürfte auch der Chrom-Nickel-Wolfram-Stahl V 2 die Kerbschlagzähigkeit der Stähle V 1 und V 3 nicht ganz erreicht haben, da nur die Stangen aus den letzteren aus betriebsmäßigen Blöcken hergestellt waren und demgemäß eine weitgehende Warmverformung erfahren hatten.

Hinsichtlich der Änderung der mechanischen Eigenschaften, wie sie nach 1stündigem Glühen bei 800° vorliegen, durch langzeitiges Glühen bei 700° unterscheiden sich einige der manganlegierten Stähle von den Stählen V 1 bis V 3 auf Chrom-Nickel-Legierungsbasis. Der Chrom-Nickel-Mangan-Wolfram-Stahl V 4 wird durch das Glühen bei 700° in seinen mechanischen Eigenschaften praktisch nicht verändert. Der von diesem Stahl durch seinen höheren Mangangehalt unterschiedene Stahl V 5 erfährt unter dem Einfluß der 700°-Glühung eine Zunahme der $\sigma_{0,2}$-Grenze und Zugfestigkeit, eine nicht erhebliche Abnahme der Bruchdehnung, aber eine erhebliche Kerbschlagzähigkeitsverminderung. Diese Eigenschaftsänderungen sind durch teilweisen Zerfall des Austenits zu Martensit bedingt, da sie von einer Zunahme des Ferromagnetismus begleitet sind (s. Abschnitt a). Viel stärker als bei dem Stahl V 5, aber durch die gleiche Ursache bedingt, sind die Eigenschaftsänderungen nach dem Glühen bei 700° bei dem Chrom-Mangan-Nickel-Wolfram-Aluminium-Stahl V 6. In beiden Stählen sind die Gehalte an Mangan und bzw. oder Nickel zu klein, um den Austenit auch bei langzeitigem Glühen bei 700° vollständig stabil zu erhalten. In Stahl V 6 tritt in erster Linie die den Ferrit beständig machende, starke Wirkung des Aluminiums in Erscheinung. Diese Wirkung hat sich auch gegenüber der entgegengesetzt gerichteten eines verhältnismäßig hohen Mangan- und Nickelgehaltes noch deutlich durchgesetzt. Nach dem Einfluß des Glühens bei 700° beurteilt ist die austenitische Grundmasse des Chrom-Mangan-Nickel-Silizium-Wolfram-Stahles V 7 weitgehend beständig. Die Dauerglühung hat eine geringe Zugfestigkeitssteigerung und kleine Abnahmen der Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit bewirkt, für deren Deutung die Annahme einer Karbidausscheidung ausreicht. Der Stahl V 7 hat bei hoher Zugfestigkeit ein auch für einen austenitischen Stahl kleines Streckgrenzenverhältnis. Der niedriggekohlte Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-Stahl V 8, der hinsichtlich seiner $\sigma_{0,2}$-Grenze, Zugfestigkeit und Bruchdehnung etwa dem Stahl V 1 entspricht, wird durch die 700°-Glühung nicht nennenswert beeinflußt. Gleiches gilt auch für den Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-Stahl V 9, obgleich er nach dem Glühen bei 700° einen deutlichen Ferromagnetismus zeigte. Die Stähle V 10 und V 11 wurden ebenfalls in ihren Festigkeitseigenschaften durch die langzeitige Glühung bei 700° nur wenig beeinflußt. Der Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-Stahl V 10 erfährt eine unbedeutende Abnahme der Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit, während bei dem Stahl V 11, der im Gegensatz zu den Stählen V 8 bis V 10 neben Vanadin noch Wolfram enthält, lediglich eine Dehnungsabnahme festzustellen ist. Die bei Stahl V 11 ausgeprägte Karbidausscheidung auf den Korngrenzen hat dagegen die Kerbschlagzähigkeit nicht erwähnenswert beeinträchtigt.

Die beschriebenen Versuchsergebnisse lassen den Schluß zu, daß manganlegierte Stähle von der Art der Versuchsstähle in der Beständigkeit der Festigkeitseigenschaften gegenüber langzeitiger Glühbehandlung dem Stahl V 1 nahekommen können.

g) Warmhärte.

Für die Ermittlung der Temperaturabhängigkeit der Härte der Versuchsstähle wurde ein Pendelfallhärte-Prüfgerät[8]) benutzt. Aus der durch Eichung bekannten Beziehung zwischen den bei der Fallhärteprüfung entstehenden Kugeleindrücken (Kugel mit 5 mm Dmr. aus einer Wolframkarbidlegierung) und der Brinell- bzw. Vickershärte wurde die Warmschlaghärte der Versuchswerkstoffe abgeleitet. — Die Ergebnisse der Warmhärtemessungen enthält Bild 26. Der Streubereich der Härte aller Stähle bei Raumtemperatur ist beträchtlich und macht etwa 125 kg/mm² aus. Bei 400° liegen die Härten innerhalb eines Bereiches von 40 und bei 900° von etwa 30 kg/mm². Erwartungsgemäß gleichen sich also die Schlaghärten der verschiedenen Stähle schon unter der höchsten Betriebstemperatur von Flugmotoren-Auslaßventilkegeln einander weitestgehend an. Zwischen 20 und 900° liegt die Härte der Chrom-Nickel-Stähle V 1 bis V 3 in der Nähe der unteren Grenze des Streubereiches der Härte. Die manganlegierten Stähle haben entweder die gleiche oder eine etwas höhere Warmhärte als die Chrom-Nickel-Stähle. Eine Ausnahme macht der niedriggekohlte Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-

[7]) Der kleinere Schlagquerschnitt wurde nicht aus besonderen Gründen gewählt, sondern ist auf einen Werkstattfehler zurückzuführen.

[8]) H. Cornelius und W. Trossen, Stahl und Eisen Bd. 60 (1940), S. 293/94.

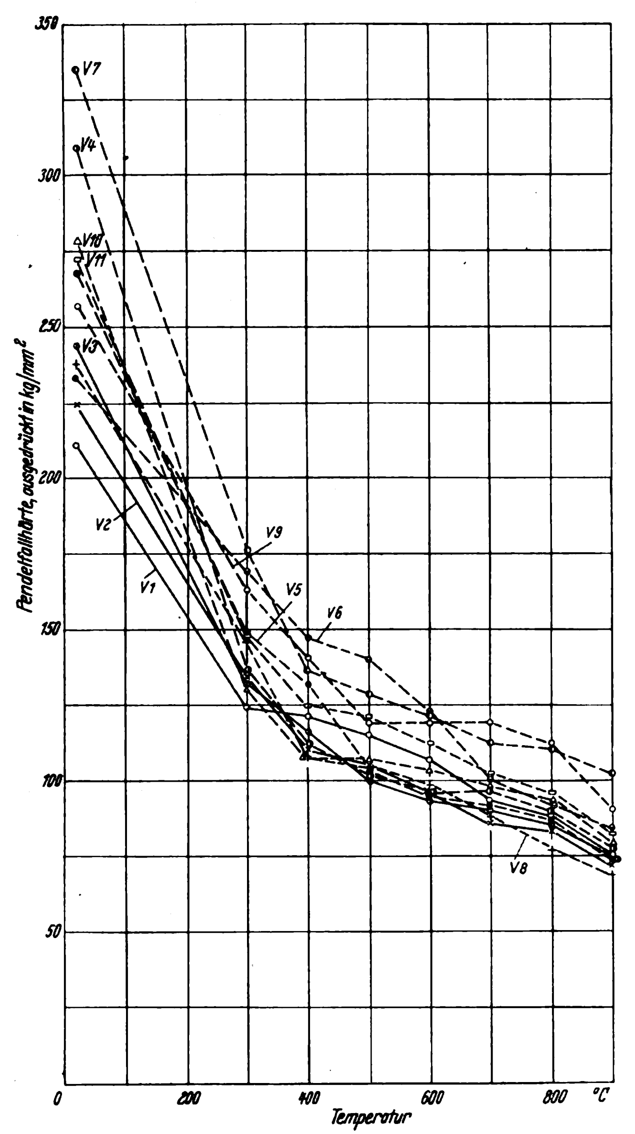


Bild 26. Temperaturabhängigkeit der Pendelfallhärte der Versuchsstähle.

Stahl V 8, der bei 800 und 900° die kleinste Fallhärte aller Versuchsstähle aufwies.

h) Dauerstandfestigkeit.

Die Dauerstandfestigkeit der eine Stunde bei 800° geglühten Versuchsstähle V 1 bis V 11 wurde bei 700° mit einem früher schon beschriebenen Prüfgerät[9]) an Stäben mit 10 mm Durchmesser und 100 mm Meßlänge bestimmt. Die Versuchsdauer war 300 bis 360 Stunden. Hierbei wurden folgende, in Zahlentafel 5 angegebene Kenngrößen ermittelt:

1. σ_{D1}: Nach dem DVM-Prüfverfahren A 117/118 (DIN-Vornorm) ermittelte Dauerstandfestigkeit.
2. σ_{D2}: Spannung, die zu einer Dehngeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 25. bis 35. Belastungsstunde führt.
3. σ_{D3}: Spannung, die zu einer Dehngeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100. bis 300. Belastungsstunde führt.
4. σ_{D4}: Spannung, die eine Dehngeschwindigkeit von $1 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100. bis 300. Belastungsstunde, also eine Kriechdehnung von 1% in 10000 h hervorruft (1%-Grenze), sofern die Kriechgeschwindigkeit nach der 300. Belastungsstunde keine Änderung mehr erfährt.
5. $\sigma_{1/300}$: Spannung, die in 300 h eine Gesamtdehnung von 1% erzeugt, und Berechnungen von Bauteilen zugrunde gelegt werden kann, für die eine Lebensdauer von nicht mehr als 300 h erwartet wird.
6. v_1: Kriechgeschwindigkeit, die von der Spannung σ_{D4} in der 25. bis 35. Belastungsstunde hervorgerufen wird.

Nach Zahlentafel 5 wird σ_{D1} für alle Versuchswerkstoffe erheblich größer als σ_{D4} gefunden. σ_{D3} ist entweder gleich oder kleiner als σ_{D1}. Unter σ_{D1} treten also in der 100. bis 300. Belastungsstunde noch Kriechgeschwindigkeiten von mindestens $5 \cdot 10^{-4}$ %/h auf. Da demnach in längeren Zeiten kein Abklingen, sondern ein Ansteigen der Kriechgeschwindigkeit und Brüche zu erwarten sind, ergibt sich, daß das DVM-Verfahren zur Bestimmung der Dauerstandfestigkeit (1%-Grenze) der Versuchsstähle bei 700° nicht geeignet ist. Über weitere Einschränkungen der Anwendbarkeit des DVM-Verfahrens ist schon mehrfach berichtet worden[10]). A. Krisch[10]) fand bei der Mehrzahl seiner Versuchsstähle, daß die 1%-Grenze einer Dehngeschwindigkeit von 4 bis $5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 25. bis 35. Stunde nach Aufbringen der Last entsprach. Obgleich die Versuchsdauer von 300 h bei den eigenen Versuchen zur genauen Bestimmung der 1%-Grenze als zu kurz anzusehen ist, läßt sich doch aus dem Vergleich von σ_{D2} und σ_{D4} in Zahlentafel 5 entnehmen, daß für die eigenen Versuchsstähle bei 700° keine einheitliche Beziehung zwischen der in der 25. bis 35. Belastungsstunde ermittelten Dehngeschwindigkeit und der 1%-Grenze besteht. Die durch σ_{D4} in der 25. bis 35. Belastungs-

[9]) F. Bollenrath, W. Bungardt und H. Cornelius, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 10 (1936/37), S. 555/57.

[10]) A. Pomp und A. Krisch, Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 22 (1940), S. 137/148; A. Krisch, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 14 (1940/41), S. 325/333. — A. Thum und K. Richard, Arch. Eisenhüttenwes. Bd. 15 (1941/42), S. 33/45. — H. Cornelius und W. Bungardt, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 305/10.

Zahlentafel 5. Dauerstandfestigkeit der Versuchsstähle bei 700°.

Stahl	Dauerstandfestigkeit, entsprechend einer Dehngeschwindigkeit von $10 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 25.—35. Belastungsstunde	$5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 25.—35. Belastungsstunde	$5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100.—300. Belastungsstunde	$1 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100.—300. Belastungsstunde	Gesamtdehnung von 1% in 300h	Durch σ_{D4} in der 25.—35. Belastungsstunde erzeugte Dehngeschwindigkeit
	σ_{D1} [1])	σ_{D2} [1])	σ_{D3}	σ_{D4}	$\sigma_{1/300}$	v_1
	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²	10^{-4} %/h
V 1	3,8	3,4	2,8	~2,4	4,3	—
V 2	7,5	6,2	6,6	4,8	—	2,8
V 3	5,1	5,0	5,1	4,7	5,6	1,2
V 4	5,8	5,3	5,8	4,1	—	1,0
V 5	6,8	5,5	6,6	4,9	—	4,0
V 6	~1,4	~0,8	—	—	~2,2	—
V 7	6,2	4,5	6,2	4,8	—	5,3
V 8	5,6	3,3	4,9	3,8	6,0	5,6
V 9	6,8	6,2	6,7	5,6	—	2,5
V 10	7,0	4,5	6,3	4,0	—	4,7
V 11	5,8	4,8	5,5	4,0	—	2,5

[1]) Bleibende Dehnung nach 45 h stets kleiner als 0,2 %.

Zahlentafel 6. Bewertung der Versuchsstähle.
1 = entspricht hohen Anforderungen; 2 = ausreichend; 3 = bedingt ausreichend; 4 = nicht ausreichend.

Stahl	Dauerstandverhalten bei 700°	Mechan. Eigenschaften vor langzeitigem Glühen	Mechan. Eigenschaften nach langzeitigem Glühen	Zunderbeständigkeit	Verschleißverhalten	Wärmeausdehnung	Wärmeleitfähigkeit	Nitrierhärtbarkeit
V 1	3—4	1	1	1	2	2	2	2
V 2	2	1—2	1—2	2	2	2	1—2	1
V 3	2	1	1	1	2	2	1—2	2—3
V 4	2—3	1	1	2	2	2	1—2	2—3
V 5	2	2	3	2	2	2	1—2	2—3
V 6	4	3	4	1 (4)[1]	2	2	2—3	2
V 7	2	3	3	1	2—3	2	2—3	2—3
V 8	3	1	2	2	3	2	1—2	2—3
V 9	1	2	2	4	2	2	2	2—3
V 10	2—3	2	2	3—4	2	2	2	2—3
V 11	2—3	2	2	3—4	1	2	2	2—3

[1]) bei 1000°.

stunde hervorgerufenen Dehngeschwindigkeiten v_1 liegen nach Zahlentafel 5 zwischen 1,0 und $5,6 \cdot 10^{-4}$ %/h. — Die in einzelnen Fällen für $\sigma_{1/300}$ bestimmten Werte, die nur auf Bauteile mit kurzer Lebensdauer mit dem Ziel einer weitgehenden Werkstoffausnutzung angewendet werden können, sind noch größer als die entsprechenden σ_{D1}-Werte. In keinem Falle trat vor oder nach dem Erreichen einer Gesamtdehnung von 0,7 bis 1% in 300 h der Bruch ein.

Nach den vorstehenden Ausführungen ist für den Vergleich der Versuchsstähle hinsichtlich ihres Dauerstandverhaltens bei 700° von den ermittelten Kenngrößen σ_{D4} am besten geeignet. Da σ_{D4} mit 2,4 kg/mm² für den Stahl V 1 ungewöhnlich niedrig gefunden wurde, soll dieser Stahl für den Vergleich der Chrom-Nickel- mit den Chrom-Nickel-Mangan-Stählen nicht berücksichtigt werden. Die für die Chrom-Nickel-Wolfram-Stähle V 2 und V 3 ermittelten σ_{D4}-Werte von 4,8 und 4,7 kg/mm² werden von dem Chrom-Nickel-Mangan-Wolfram-Stahl V 5, dem Chrom-Mangan-Nickel-Silizium-Wolfram-Stahl V 7 und dem Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-Stahl V 9 erreicht bzw. überschritten. Die manganlegierten Stähle V 4, V 10, V 11, V 8 und V 6 haben eine in dieser Reihenfolge abnehmende, den Chrom-Nickel-Stählen V 2 und V 3 unterlegene Dauerstandfestigkeit. Ein sehr ungünstiges Dauerstandverhalten bei 700° zeigte erwartungsgemäß der aluminiumlegierte Stahl V 6, der einen bei der Prüftemperatur teilweise unbeständigen Austenit enthält. In Anbetracht seines niedrigen Kohlenstoffgehaltes hat der Chrom-Nickel-Mangan-Vanadin-Stahl V 8 eine recht gute Dauerstandfestigkeit[11]). Das Verhalten der Stähle V 8 bis V 11 deutet an, daß ein Austausch von Wolfram durch Vanadin in Ventilkegelstählen ohne Beeinträchtigung des Dauerstandverhaltens durchführbar wäre; doch muß der Vanadinzusatz im Hinblick auf die Zunderbeständigkeit auf höchstens 0,5 bis 0,6% beschränkt werden. — Da alle Versuchsstähle für die Dauerstandversuche die gleiche Vorbehandlung erfuhren (1 h Glühen bei 800°), so ist bei ihrer verschiedenen Zusammensetzung zu erwarten, daß sie nicht alle in dem für die Dauerstandbeanspruchung bei 700° zweckmäßigsten Zustand vorlagen. Durch eine Anpassung der Vorbehandlung an die Stahlart könnten also die σ_{D4}-Werte in Zahlentafel 5 noch Änderungen erfahren. Aus den Dauerstandversuchen sollen daher keine ins einzelne gehenden Folgerungen über die Abhängigkeit der Dauerstandfestigkeit von der Zusammensetzung der Versuchsstähle gezogen werden. Ohne weiteres ist aber der Schluß berechtigt, daß das Dauerstandverhalten von Ventilkegelstählen auf Chrom-Nickel-Legierungsbasis auch mit Stählen zu erreichen ist, die Mangan als eins der Hauptlegierungselemente enthalten.

[11]) Nach A. M. Borsdyka und K. A. Lanskaja, Metallurg (1940) Heft 10, S. 25/31, wird die Kriechfestigkeit von Stahl mit 14% Cr, 14% Ni und rd. 2,5% W durch Kohlenstoffgehalte zwischen 0,15 und 0,45% nur wenig beeinflußt. Bei 600° betrug die Dauerstandfestigkeit 11 kg/mm² für 0,15% C und 12 kg/mm² für 0,45% C. Der höhere Kohlenstoffgehalt bedingt dagegen eine überlegene Warmfestigkeit im Kurzzerreißversuch.

IV. Folgerungen aus den Versuchen.

Für die Erörterung der Frage, ob die manganlegierten Versuchsstähle eine den Chrom-Nickel-Stählen vergleichbare Eignung für Ventilkegelstähle erwarten lassen, ist es erforderlich, alle untersuchten Eigenschaften der Werkstoffe zu berücksichtigen. Um die Übersicht zu erleichtern, wurde jede Eigenschaft bewertet mit 1 = hohen Anforderungen entsprechend, 2 = ausreichend, 3 = bedingt ausreichend, 4 = nicht ausreichend. Das Ergebnis dieser Bewertung enthält die Zahlentafel 6, die insofern unvollständig ist, als einige wichtige Eigenschaften der Versuchsstähle, wie z. B. die Zerspanbarkeit und die Beständigkeit gegen Verbrennungsgase von ethylfluidhaltigen Brennstoffen, von den Versuchen nicht erfaßt wurden.

Aus Zahlentafel 6 ergibt sich folgendes: Die besten Eigenschaften haben die Chrom-Nickel-Wolfram-Stähle V 2 und V 3. Letzterer ist dem Stahl V 2 lediglich in der Nitrierbarkeit infolge seines etwas erhöhten Mangangehaltes unterlegen. Der eigentliche Vergleichsstahl V 1 hatte ein schlechteres Dauerstandverhalten als die Stähle V 2 und V 3, was aber als für diesen Stahl nicht dem Normalen entsprechend anzusehen ist. Der Chrom-Nickel-Mangan-Wolfram-Stahl V 4 mit 2,6% Mn ist im Mittel den Chrom-Nickel-Stählen V 1 bis V 3 gleichwertig. Er würde bei seiner praktischen Verwendung also eine kleine Nickeleinsparung gegenüber Stahl V 3 und außerdem eine Wolframeinsparung gegenüber den Stählen V 1 und V 2 ermöglichen. Eine weitergehende Einschränkung der Verwendung von Nickel bei gleich niedrigem Wolframgehalt wie in dem Stahl V 3 läßt der Stahl V 5 zu. Seine Kerbschlagzähigkeit wird jedoch durch langzeitiges Glühen beeinträchtigt. Dieser Nachteil, der auf einem geringfügigen Austenitzerfall beruht, läßt sich jedoch durch Erhöhen des Mangangehaltes von 4 auf etwa 5% leicht beheben. Die Verwendung von Aluminium zur Erzielung einer hohen Zunderbeständigkeit bei niedrigem Chromgehalt entsprechend Stahl V 6 ist wegen der stark ferritbildenden Wirkung des Aluminiums unzweckmäßig. Hohe Gehalte an Mangan und Nickel wären zur Stabilisierung des Austenits erforderlich. Auf noch zu geringe Gehalte an diesen Elementen sind die ungünstigen Eigenschaften des mit Aluminium legierten Stahles V 6 vorwiegend zurückzuführen. Der Chrom-Mangan-Nickel-Silizium-Wolfram-Stahl V 7 mit ebenfalls kleinem Chromgehalt erscheint demgegenüber aussichtsreicher. Allerdings hat er bei ungewöhnlich niedrigem Streckgrenzenverhältnis und hoher Zugfestigkeit vor und nach langzeitigem Glühen eine verhältnismäßig kleine Kerbschlagzähigkeit. Der Chrom-Nickel-Mangan-Vandin-Stahl V 8 hat wegen seines niedrigen Kohlenstoffgehaltes eine verhältnismäßig kleine Verschleißfestigkeit. Ob auch die mäßige Dauerstandfestigkeit mit der Höhe des Kohlenstoffgehaltes zusammenhängt, ist an Hand der Versuche nicht zu entscheiden. Höher gekohlte, wolframfreie Stähle von der Art des Stahles V 8 lassen eine eingehendere Unter-

suchung als wünschenswert und aussichtsreich erscheinen. Stähle mit 0,5 bis 0,6% überschreitendem Vanadingehalt sind wegen ihrer verminderten Zunderbeständigkeit für Ventilkegel voraussichtlich nicht geeignet. Dies gilt nicht nur für manganlegierte Stähle von der Art der Versuchswerkstoffe V 9 bis V 11, sondern erst recht für Stähle auf der Chrom-Nickel-Legierungsgrundlage.

Für manganlegierte Ventilkegelstähle, die nach der vorliegenden, laboratoriumsmäßigen Untersuchung den Chrom-Nickel-Stählen V 1 bis V 3 nicht unterlegen sein werden, können an Hand der Erfahrungen mit den Stählen V 4 und V 5 folgende Gehaltsgrenzen angegeben werden: 0,42 bis 0,52% C, 1,5 bis 2,0% Si, 3,0 bis 5,0% Mn, 6,0 bis 4,5% Ni, 17,5 bis 18,5% Cr und 0,9 bis 1,3% W.

V. Zusammenfassung.

Auf Grund von Untersuchungen über eine Anzahl wesentlicher Eigenschaften von Stählen für hochbeanspruchte Auslaßventilkegel auf der Legierungsgrundlage Chrom-Nickel und Chrom-Nickel-Mangan mit Zusätzen von Wolfram, Vanadin, Silizium und Aluminium ergeben sich Legierungsvorschläge für Chrom-Nickel-Mangan-Wolfram-Ventilkegelstähle, die den gebräuchlichen Chrom-Nickel-Wolfram-Stählen gleichwertig sein dürften.

* * *

Für seine Mitarbeit bei der Versuchsdurchführung danke ich Herrn Ingenieur Kurt Fahsel.

Der Bericht wurde abgeschlossen im August 1941.

Zur Theorie der tragenden Linie im Instationären.

Von Karl Jaeckel, Berlin.

Gliederung.

I. Einleitung.

Für die Prandtlsche Wirbelfadentheorie haben sich mit der Zeit einige Verallgemeinerungen als notwendig ergeben, die für gewisse Fragen der Flugtechnik unerläßlich sind. Während diese Theorie in den bisher interessierenden Normalfällen hinreichend genaue Ergebnisse liefert, gibt es Fälle, in denen sie unmittelbar nicht mehr anwendbar ist. Zu diesen Ausnahmefällen gehört z. B. die instationär bewegte endliche Tragfläche. Daß dieses Versagen zusammenhängt mit der Besonderheit des Grenzüberganges aus einer allgemeineren Tragflächentheorie liegt auf der Hand; es mangelt daher nicht an Versuchen, den neuen Problemen auf diesem Wege beizukommen. [1] bis [10]. Die in dieser Richtung angestrebte Entwicklung wird aber wesentlich gehemmt durch die mathematischen Schwierigkeiten, die sich hierbei ergeben. Indessen bleibt uns keine andere Möglichkeit, wir müssen uns auch hier einer allgemeinen Tragflächentheorie zuwenden und werden versuchen, Näherungen im Sinne einer Wirbelfadentheorie zu entwickeln. Unser Ziel soll es hier sein, insbesondere für das Instationäre den Grenzübergang zur tragenden Linie bei gerader Anströmung zu vollziehen, wobei wir anstreben müssen, die bewährte Prandtlsche Theorie als Spezialfall im Stationären einzuschließen[1]).

II. Grundgleichungen für die räumliche und ebene Tragfläche.

1. Darstellung dieser Gleichungen bei vernachlässigbarer Dicke und Wölbung der Fläche.

Die Tragfläche denken wir uns, wie es im ebenen Fall bereits üblich ist, als dünne Fläche mit geringer Abweichung von der xy-Ebene, in der die Anströmung erfolgen wird. An dieser Fläche soll, damit an ihr überhaupt Kräfte auftreten können, ein Geschwindigkeitssprung vorliegen, der durch eine geeignete, zunächst unbekannte Wirbelschicht realisiert gedacht wird. Wir wissen aber aus der Potentialtheorie, daß an einer solchen Fläche nur Momente wirksam werden, wir müssen daher im Sinne der Prandtlschen Wirbelfläche, die sich hinter der tragenden Linie entwickelt, annehmen, daß der Geschwindigkeitssprung nicht nur an der Fläche selbst vorliegt, sondern noch hinter ihr vorhanden ist und sich bis ins Unendliche erstreckt. Diese Wirbelschicht sei der Einfachheit halber als ebene Wirbelfläche gedacht, die in der xy-Ebene liegt und von den Tangenten an die Tragfläche in Anströmungsrichtung begrenzt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir weiter annehmen, daß die Belegung dieser Doppelschicht am Rande des eben bezeichneten Gebietes verschwindet, denn außerhalb soll wirbelfreie Strömung herrschen. Wenn wir diese Festsetzung aus Stetigkeitsgründen vornehmen, so ist es nur sinngemäß, wenn wir verlangen, daß der Übergang von der Belegung auf der Fläche zu der der Schleppe ebenfalls stetig erfolgen soll.

[1]) Die der vorliegenden Fassung noch anhaftenden Einschränkungen bezüglich Flügelform und Frequenz der periodischen Bewegung lassen sich beheben, wie in einer weiteren Arbeit gezeigt werden soll, wie auch die Begründuug der einzelnen Schritte und die Abschätzung der Fehlergrößen etwas mehr zu ihrem Rechte kommen soll in dem Sinne, wie ich es in einem Vortrag vor der Berliner Mathematischen Gesellschaft dargelegt habe. Insbesondere läßt sich dabei auch die Darstellung vereinfachen, sodaß ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Verfasser leichter möglich ist.

Infolge der Gesamtbelegung wird im Außenraum des Gebietes $\mathfrak{B}$ ein Geschwindigkeitsfeld erzeugt mit der Potentialfunktion

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\Phi(x,y,z,t) &= \iint\limits_{\mathfrak{B}} \varphi(\xi,\eta,t)\,\frac{z}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^{\,3}}\,d\xi\,d\eta, \\ \Phi(x,y+o,t)-\Phi(x,y-o,t) &= \varphi(x,y,t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei haben wir bereits davon Gebrauch gemacht, daß die Belegungsdichte $\varphi\,(x\,y\,t)$ auf die xy-Ebene projiziert wird;

$$\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}$$

bedeutet dabei die Entfernung eines Punktes $(\xi,\eta,0)$ der Wirbelfläche von einem Punkte (x,y,z) außerhalb der Belegung.

Aus der Darstellung für das räumliche Problem findet man die für das ebene Problem, wenn man bei einer Belegungsdichte, die von η unabhängig ist, über den doppeltunendlichen Flügel integriert. Es ergibt sich die auf bekannte Formeln führende Darstellung:

$$2\pi\Psi(x,z,t) = \int\limits_{C} \varphi(\xi,t)\,\frac{z}{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi, \qquad (2)$$

wobei die Kurve C einen Schnitt an der Stelle y durch das vorher bezeichnete Wirbelgebiet in Anströmungsrichtung bedeutet. Beachtenswert ist dabei, daß auch für das ebene Problem mit einer Belegungsdichte hinter dem Profil zu rechnen ist, sowohl im instationären als auch im stationären Falle.

2. Einige Umformungen und allgemeine Bemerkungen.

Durch Teilintegration finden wir aus (1), wenn $l_1(\eta)$ und $l_2(\eta)$ bzw. $b_1(\xi)$ und $b_2(\xi)$ die Koordinaten der Flächenanfangs- und -endpunkte in einem Schnitt $\xi =$ konst. bzw. $\eta =$ konst. und die entsprechende Bezeichnungsweise ohne Argument die Lage der Stützlinien der Fläche angibt, folgende wichtige Darstellungen: Es gilt

$$\begin{aligned} 4\pi\Phi(x,y,z,t) &= \int\limits_{l_1}^{\infty}\left(\int\limits_{b_1(\xi)}^{b_2(\xi)} \varphi(\xi,\eta,t)\,\frac{z\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^{\,3}}\right)d\xi \\ &= \int\limits_{l_1}^{\infty}\left(\varphi(\xi,\eta,t)\cdot\frac{z}{(\xi-x)^2+z^2}\cdot\frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}\right)_{b_1(\xi)}^{b_2(\xi)}d\xi \\ &\quad -\iint\limits_{\mathfrak{B}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi,\eta,t)\cdot\frac{z}{(\xi-x)^2+z^2}\cdot\frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}$$

so daß wir wegen des Verschwindens der Belegungsdichte am Rande erhalten:

$$4\pi\Phi(x,y,z\,t) = -\iint\limits_{\mathfrak{W}} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(\xi,\eta,t)\times$$

$$\times\frac{z}{(\xi-x)^2+z^2}\cdot\frac{\eta-y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}\,d\xi\,d\eta\quad\ldots\quad(3)$$

Für die nächste Umformung ist es notwendig, die Übergangsbedingung von der Fläche zur Wirbelschleppe schon jetzt zu benutzen, die erst für die Auswertung von (3) von Bedeutung wäre. Wenn wir mit

$$\varphi_F(\xi,\eta,t)\quad\text{und}\quad\varphi_W(\zeta,\eta,t)$$

die Belegungen auf der Fläche F bzw. auf dem anschließenden Wirbelband W bezeichnen, so soll gelten:

$$\varphi_W(\zeta,\eta,t) = \varphi_F(l_2(\eta),\eta,t+\Lambda(\zeta-l_2(\eta)))\quad\ldots\quad(4)$$

Die Funktion $\Lambda\,(\zeta - l_2\,(\eta))$ soll dabei die eindeutige Zuordnung der Belegungsdichte des Bandes mit den Werten der Flächenbelegung an der Hinterkante zum Ausdruck bringen. Es gilt zunächst

$$4\pi\Phi(x,y,z,t) = \iint\limits_F \varphi_F(\xi,\eta,t)\frac{z}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\xi\,d\eta$$

$$+\iint\limits_W \varphi_W(\zeta,\eta,t)\frac{z}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\zeta\,d\eta.$$

Nun läßt sich das Integral über das Wirbelband in folgender Weise umformen:

$$\iint\limits_W \frac{\varphi_W(\zeta,\eta,t)}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\varphi\,d\eta$$

$$=\int\limits_{b_1}^{b_2}\left(\int\limits_{l_2(\eta)}^{\infty}\frac{\varphi_F(l_2(\eta),\eta,t+\Lambda(\zeta-l_2(\eta)))}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\zeta\right)d\eta$$

$$=\int\limits_{b_1}^{b_2}\left[\int\limits_{l_1(\eta)}^{l_2(\eta)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{\varphi_F(\xi,\eta,t+\Lambda(\zeta-\xi))}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\zeta\right\}d\xi\right]d\eta,$$

denn bei Ausführung der Integration über ξ liefert die untere Grenze keinen Beitrag, da $\varphi_F\,(l_1\,(\eta),\eta,t)$ zu allen Zeiten gleich Null ist. Führt man die Differentiation aus, so findet man, daß der ursprüngliche Bestandteil über die Fläche gerade herausfällt und sich ergibt:

$$4\pi\Phi(x,y,z,t)$$

$$=\iint\limits_F\left\{\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{d\varphi_F}{d\xi}(\xi,\eta,t+\Lambda(\zeta-\xi))\frac{z}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\zeta\right\}d\xi\,d\eta.$$

$$\ldots\quad(5)$$

Für den stationären Fall entsteht hieraus nach Integration über ζ die einfache Form:

$$4\pi\Phi(x,y,z)$$

$$=\iint\limits_F\frac{\partial\varphi_F}{\partial\xi}(\xi,\eta)\frac{z}{(\eta-y)^2+z^2}\left(1-\frac{\xi-x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}\right)d\xi\,d\eta,$$

$$\ldots\quad(6)$$

womit der Zusammenhang mit dem Prandtlschen Beschleunigungspotential hergestellt ist, denn wegen der differentiierten Gleichung (6)

$$4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z) = \iint\limits_F\frac{\partial\varphi_F}{\partial\xi}(\xi,\eta)\frac{z}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\xi\,d\eta$$

lassen sich für $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ potentialtheoretische Methoden ansetzen, wie sie in den Arbeiten [2] und [3] verfolgt werden. Dabei wird der vorangehenden Darstellung lediglich die Eigenschaft der Funktion Φ entnommen, Potentialfunktion zu sein, die an der Fläche gewissen Bedingungen genügen muß, nach denen die möglichen Lösungen der Potentialgleichung ausgewählt werden müssen.

Es besteht aber noch die Möglichkeit, wesentlich von der Integraldarstellung Gebrauch zu machen und eine Integralgleichung für die gesuchte Belegungsdichte aufzustellen. Dieses Verfahren wollen wir der Vollständigkeit halber zum Schluß noch kurz andeuten.

Wir gehen aus von der Gleichung (1) und (vgl. [4]) zerlegen das Integral über das Gesamtgebiet B in die Teile über die Fläche F und das Band W, so daß gilt

$$4\pi\Phi(x,y,z,t) = -\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_F\frac{\varphi_F(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}$$

$$+\iint\limits_W\varphi_W(\zeta,\eta,t)\frac{z}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}^3}\,d\zeta\,d\eta,$$

wobei wir im ersten Integral die Differentiation nach z vorangezogen haben. Für die Geschwindigkeit in z-Richtung erhalten wir daraus

$$4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z,t) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint\limits_F\varphi_F(\xi,\eta,t)\frac{d\xi\,d\eta}{r}$$

$$+\iint\limits_W\varphi_W(\zeta,\eta,t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)d\zeta\,d\eta$$

mit

$$r=\sqrt{\left(\begin{Bmatrix}\xi\\\zeta\end{Bmatrix}-x\right)^2+(\eta-y)^2+z^2}.$$

Wegen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r} = \left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}=0$$

gilt dann auch die Schreibweise

$$4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z,t) = \Delta\iint\limits_F\varphi_F\frac{d\xi\,d\eta}{r}+\iint\limits_W\varphi_W\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)d\zeta\,d\eta,$$

in der man für Punkte der Fläche den Grenzübergang $z\to 0$ ausführen kann. Setzen wir

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,o,t) = W(x,y,t),$$

so ergibt sich folgende Darstellung

$$\Delta\iint\limits_F\frac{\varphi_F(\xi,\eta,t)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta$$

$$+\iint\limits_W\frac{\varphi_W(\zeta,\eta,t)}{\sqrt{(\zeta-x)^2+(\eta-y)^2}^3}\,d\zeta\,d\eta = 4\pi W(x,y,t)\quad\ldots\quad(7)$$

aus der bei bekanntem $W(x, y, t)$ und Berücksichtigung der Gleichung (4) die Belegungsdichte φ_F zu ermitteln ist.

Die entsprechende ebene Formulierung finden wir aus (2) auf ähnliche Weise. Es gilt

$$2\pi\Psi(x,z,t) = \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{l_1}^{l_2}\varphi_F(\xi,t)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi$$

$$+\int\limits_{l_2}^{\infty}\varphi_W(\zeta,t)\frac{z}{(\zeta-x)^2+z^2}\,d\zeta$$

und

$$2\pi\frac{\partial\Psi}{\partial z}(x,z,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{l_1}^{l_2}\varphi_F(\xi,t)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}\,d\xi$$

$$+\int\limits_{l_2}^{\infty}\varphi_W(\zeta,t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\zeta-x^2)+z^2}\right)d\zeta$$

wegen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\ln\sqrt{(\xi-x)^2+z^2}=0.$$

Mit $z\to 0$ für Punkte des Profils erhalten wir schließlich:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{l_1}^{l_2}\varphi_F(\xi,t)\ln|\xi-x|\,d\xi+\int\limits_{l_2}^{\infty}\frac{\varphi_W(\zeta,t)\,d\zeta}{(\zeta-x)^2}=2\pi w(x,t),$$

$$\ldots\quad(8)$$

wobei wir entsprechend

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}(x,o,t)=w(x,t)$$

gesetzt haben.

Der systematische Weg zur Behandlung der Integralgleichungen (7) und (8) liegt darin, daß man die Eigenfunktionen der beiden nicht eigentlich, singulären Kerne, nämlich

$$((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)^{-1} \quad \text{und} \quad \ln |\xi - x|$$

feststellen und die gesuchten Belegungsfunktionen auf der Fläche nach ihnen entwickeln kann. Während die Eigenfunktionen des Kernes $\ln |\xi - x|$ bekannt und für jedes Profil zu benutzen sind, hat man beim räumlichen Problem die verschiedenen Umrißformen zu berücksichtigen. Es gelingt aber wenigstens für den Fall eines elliptisch geformten Flügels diese Funktionen zu bestimmen und sie zur Lösung der Integralgleichung (7) heranzuziehen [4]. Es liegen indessen Lösungsdurchführungen noch nicht abgeschlossen vor, so daß wir uns mit diesen Andeutungen begnügen müssen und uns nun der angekündigten Näherungstheorie zuwenden wollen.

III. Behandlung des Grenzfalles verschwindender Tiefe.

Zur Durchführung dieses Sonderfalles, für den wir der Einfachheit halber gerade Anströmung und gerade Hinterkante voraussetzen, gehen wir von der Gleichung (3) aus und bilden die z-Komponente der Geschwindigkeit:

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z, t) = -\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\xi - x)^2 + z^2}\right) \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}\, d\xi\, d\eta$$
$$+ \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \frac{z^2}{(\xi - x)^2 + z^2} \cdot \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}^3}\, d\xi\, d\eta.$$

Das hintere Integral können wir mit $z \to 0$ fortlassen, denn wegen

$$\frac{z^2}{(\xi - x)^2 + z^2} = 1 - \frac{(\xi - x)^2}{(\xi - x)^2 + z^2},$$

nach Anwendung des Mittelwertsatzes, strebt es mit $z \to 0$ gegen Null. Im ersten Integral zerlegen wir die Integration über $\mathfrak{B}$ in die Teile über F und W und erhalten

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z, t) = -\iint_F \frac{\partial \varphi_F}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2} \cdot \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}\, d\xi\, d\eta$$
$$- \iint_W \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\zeta - x)^2 + z^2}\right) \cdot \frac{\eta - y}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}^3}\, d\zeta\, d\eta.$$

Hierin läßt sich für schlanke Flügel in genügender Entfernung vom Aufpunkt auf F

$$((\xi - x)^2 + z^2 \ll (\eta - y)^2)$$

$$\frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}} \quad \text{durch} \quad \frac{\eta - y}{|\eta - y|}$$

ersetzen, was gleichbedeutend damit ist, daß wir den durch den ersten Ausdruck erklärten Winkel als klein ansehen und seinen cos mit ± 1 in der Rechnung weiterführen. Diese Näherung ist in unmittelbarer Nachbarschaft des Aufpunktes nicht mehr zutreffend; da aber der ursprüngliche wie der neue Kern in dieser Umgebung keinen Beitrag zum Integral liefert, wird der tatsächliche Fehler gering sein, wenn wir allgemein mit dieser Näherung weiterrechnen. Demnach dürfen wir schreiben:

$$4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z, t) = -\iint_F \frac{\partial \varphi_F}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2} \cdot \frac{\eta - y}{|\eta - y|}\, d\xi\, d\eta$$
$$- \iint_W \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(\zeta - x)^2 + z^2}\right) \frac{\eta - y}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}\, d\zeta\, d\eta.$$

Im Integral über F benutzen wir wie früher die Identität

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}$$

und lassen den Aufpunkt an die Fläche heranrücken. Wir finden mit

$$z \to o \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, o, t) = W(x, y, t)$$

$$4\pi W(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_F \frac{\partial \varphi_F}{\partial \eta}(\xi, \eta, t) \frac{\eta - y}{|\eta - y|} \ln |\xi - x|\, d\xi\, d\eta$$
$$- \iint_W \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{\eta - y}{(\zeta - x)^2 \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}}\, d\zeta\, d\eta \qquad (9)$$

wobei die Singularität im Integral über W wegen der angenommenen geraden Hinterkante keine Schwierigkeiten bereitet.

1. Verknüpfung der räumlichen und ebenen Formeln.

Führen wir nun die Integration über η aus, wobei wir beachten, daß die Belegungsdichte an den Grenzen für jeden Schnitt $\xi =$ konst. verschwindet, so erhalten wir

$$4\pi W(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{l_1(y)}^{l_2} \varphi_F(\xi, \eta, t) \ln |\xi - x|\, d\xi$$
$$- \iint_W \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{\eta - y}{(\zeta - x)^2 \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}}\, d\zeta\, d\eta.$$

Diese Darstellung erinnert stark an die ebene Formel (8). Verwenden wir sie in der Bezeichnungsweise

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{l_1(y)}^{l_2} \varphi_F(\xi, y, t) \ln |\xi - x|\, d\xi + \int_{l_2}^{\infty} \frac{\varphi_W(\zeta, y, t)}{(\zeta - x)^2}\, d\zeta = 2\pi w(x, y, t),$$

wobei der Parameter y die ebenen Verhältnisse des Schnittes an der Stelle y charakterisieren soll, so können wir schreiben:

$$4\pi W(x, y, t) = 4\pi w(x, y, t) - 2 \int_{l_2}^{\infty} \frac{\varphi_W(\zeta, y, t)}{(\zeta - x)^2}\, d\zeta$$
$$- \iint_W \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{\eta - y}{(\zeta - x)^2 \sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}}\, d\zeta\, d\eta$$

und im nächsten Schritt, indem wir das hinzutretende Integral als Doppelintegral ansetzen

$$-2 \int_{l_2}^{\infty} \frac{\varphi_W(\zeta, y, t)}{(\zeta - x)^2}\, d\zeta = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\eta - y}{|\eta - y|} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\int_{l_2}^{\infty} \frac{\varphi_W(\zeta, \eta, t)}{(\zeta - x)^2}\, d\zeta \right) d\eta =$$

$$= \iint_W \frac{\eta - y}{|\eta - y|} \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t) \frac{d\zeta\, d\eta}{(\zeta - x)^2}$$

schließlich nach Zusammenfassung:

$$W(x, y, t) = w(x, y, t) + \frac{1}{4\pi}\int_{b_1}^{b_2} \frac{\eta - y}{|\eta - y|}\left\{\int_{l_2}^{\infty} \frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta, t)\frac{1}{(\zeta - x)^2}\left(1 - \frac{|\eta - y|}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}}\right) d\zeta\right\} d\eta \quad \ldots \quad (10)$$

Wir haben damit im Rahmen unserer Näherung das räumliche Problem für schlanke Flügel auf das entsprechende ebene zurückgeführt unter Hinzufügung einer gewissen Korrektur, die die Verschiedenheit der Belegungsdichten der zugehörigen Bänder berücksichtigt.

2. Grenzübergang zur Prandtlschen Theorie.

Betrachten wir zunächst den stationären Fall, für den

$$\frac{\partial \varphi_W}{\partial \eta}(\zeta, \eta) = \frac{d}{d\eta}\varphi_W(l_2, \eta) = \frac{d}{d\eta}\varphi_F(l_2, \eta)$$

gilt, so können wir mit den Abkürzungen

$$\zeta - x = \varrho; \quad \eta - y = \sigma; \quad l_2 - x = \lambda$$

die Integration über ζ durchführen und erhalten

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{|\sigma|}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}}\right) d\varrho = \frac{1}{|\sigma|}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}\right)$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{|\sigma|}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}\right) = \frac{1}{|\sigma|}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2} + |\sigma|}\right),$$

woraus im Rahmen unserer Näherung mit

$$\frac{|\sigma|}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}} \cong 1$$

das Ergebnis

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{|\sigma|}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}}\right) d\varrho \simeq \frac{1}{|\sigma|}\left(1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}\right) \quad (11)$$

folgt, das in λ auch bei nachfolgender Integration über η regulär ist. Lassen wir nun im Sinne der Prandtlschen Theorie die Tiefe gegen Null gehen, was besagen soll, daß wir die Veränderlichkeit der Abwindverteilung längs der Tiefe außer acht lassen wollen, so erhalten wir als Korrekturglied das bekannte Prandtlsche Integral, das als Größe erster Ordnung eine bedeutende Rolle spielt, während die übrigen Korrekturen als von geringerer Größenordnung im Rahmen der vorliegenden linearen Theorie vernachlässigt werden. Aus (10) entsteht demnach für diesen Fall mit

$$-W(x, y) = v\left(\alpha - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right),$$

wobei v die Fluggeschwindigkeit, α den geometrischen Anstellwinkel und $f(xy)$ die Flächenfunktion bedeutet, die folgende Beziehung

$$-w(x, y) =$$
$$= v\left(\alpha - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi v}\int_{b_1}^{b_2} \frac{d\varphi_F}{d\eta}(l_2, \eta)\frac{d\eta}{\eta - y}\right), \quad (12)$$

aus der sich unter Heranziehung der Hilfsmittel der ebenen stationären Theorie leicht die Prandtlsche Zirkulationsgleichung ergibt.

3. Näherungstheorie für das instationäre Problem bei langsamen periodischen Bewegungen der Tragfläche.

Zur Behandlung der Gleichung (10) im Instationären beschränken wir uns auf rein periodische Vorgänge und nehmen an, daß das Wirbelband mit der gleichförmigen Fluggeschwindigkeit abläuft; wir setzen demgemäß

$$\varphi_W(\zeta, \eta, t) = \varphi_F\left(l_2, \eta, t - \frac{\zeta - l_2}{v}\right),$$

woraus mit dem Ansatz

$$\varphi_F(\xi, \eta, t) = \text{Real}\{\varphi(\xi, \eta)\cdot e^{i\nu t}\}$$

$$\varphi_w(\zeta, \eta, t) = \text{Real}\left\{\varphi(l_2, \eta)\cdot e^{i\nu t}\cdot e^{\frac{i\nu}{v}(l_2 - x)}\cdot e^{-\frac{i\nu}{v}(\zeta - x)}\right\} \quad (13)$$

folgt. Damit erhalten wir das gesuchte Integral aus (10) mit den Abkürzungen

$$(\zeta - x) = \varrho; \quad \frac{\nu}{v} = \varkappa; \quad (\eta - y) = \sigma; \quad (l_2 - x) = \lambda$$

in der Form

$$\int_{l_2}^{\infty} \frac{\partial \varphi_w}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{(\zeta - x)^2}\left(1 - \frac{|\eta - y|}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2}}\right) d\zeta$$

$$= \text{Real}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(l_2, \eta)\cdot e^{i\nu t}\cdot e^{i\varkappa\lambda}\cdot\int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-i\varkappa\varrho}}{\varrho^2}\left(1 - \frac{|\sigma|}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}}\right) d\varrho\right\}. \quad \ldots\ldots (14)$$

Setzen wir die Funktion

$$I(\varkappa, \lambda, \sigma) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2} - |\sigma|\int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}}, \quad (15)$$

so können wir sie mit Hilfe der Integrale

$$\left.\begin{aligned} U(\varkappa, \lambda) &= \int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2}; \\ W(\varkappa, \lambda, \sigma) &= \int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}} \\ \text{bzw.} \quad V(\varkappa, \lambda, \sigma) &= \int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

von denen die ersten beiden den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial \varkappa} - \frac{1}{\varkappa}U = -\frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\varkappa\lambda},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varkappa^2} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial W}{\partial \varkappa} - \sigma^2 W = \frac{i}{\varkappa}\cdot\frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}$$

genügen, verhältnismäßig leicht darstellen. Es gilt nämlich auf Grund der Differentialgleichung für W:

$$Z(\varkappa, \lambda, \sigma) = -\int_{\lambda}^{\infty} e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial W}{\partial \varkappa} + \frac{i}{\varkappa}\cdot\frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}, \quad \ldots\ldots (17)$$

woraus V durch zweimalige Integration nach $\varkappa$ folgt und $I(\varkappa, \lambda, \sigma)$ somit mit Hilfe bekannter Funktionen dargestellt werden kann[2]). Als Lösungen der Differentialgleichungen finden wir:

$$U(\varkappa, \lambda) = \varkappa\left(C(\lambda) + \frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\varkappa\lambda} + i\ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\varkappa\lambda} - \lambda\int_0^{\varkappa}\ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa}\,d\varkappa\right),$$

$$W(\varkappa, \lambda, \sigma) = C_1(\lambda, \sigma)\cdot\varkappa\cdot J_1(i|\sigma|\varkappa) + C_2(\lambda, \sigma)\times$$
$$\times\varkappa\cdot H_1^{(1)}(i|\sigma|\varkappa) - \frac{\lambda}{\sigma^2}\cdot\frac{e^{-i\lambda\varkappa}}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}$$
$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{\sigma}\cdot\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}\left(\varkappa\cdot J_1(i|\sigma|\varkappa)\int_0^{\varkappa} H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa\right.$$
$$\left.-\varkappa H_1^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)\int_0^{\varkappa} J_0(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa\right).$$

[2]) Der hier eingeführten Funktion W entspricht in anderer Bezeichnungsweise die wichtige Funktion 𝔊 in der Arbeit [7], mit deren Hilfe es gelingt, die induzierte Geschwindigkeit des dort zugrunde gelegten Wirbelsystems zu bestimmen und sehr weitgehend auszuwerten.

Zur Konstantenbestimmung für W stehen zunächst die Anfangsbedingungen

$$W(o, \lambda, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}\right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varkappa}(o, \lambda, \sigma) = -\frac{i}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}$$

zur Verfügung, mit denen sich aber nur eine Integrationskonstante bestimmen läßt, was in dem Verschwinden der Wronskischen Determinante der Fundamentallösungen an dieser Stelle begründet ist. Es ergibt sich:

$$C_2(\lambda, \sigma) = -\frac{\pi}{2|\sigma|}.$$

Um die zweite Konstante bestimmen zu können, ziehen wir daher die Darstellung (17) heran

$$-\int_\lambda^\infty e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+\sigma^2}} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial W}{\partial \varkappa} + \frac{i}{\varkappa}\frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}},$$

deren Differentation nach λ, unter Berücksichtigung unseres Ergebnisses, für $\varkappa = 0$ den Hauptbestandteil von C_1 erkennen läßt:

$$\frac{\partial C_1}{\partial \lambda} = -\frac{i}{|\sigma|\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}};$$

$$C_1(\lambda, \sigma) = -\frac{i}{|\sigma|}\ln\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{|\sigma|} + c_1(\sigma).$$

$c_1(\sigma)$ dürfen wir demgemäß für beliebige λ und $\varkappa$ bestimmen, z. B. auch für $\lambda \to \varkappa \to 0$. Man findet wegen [12]

$$\int_0^\infty e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+\sigma^2}} = \frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa) - \frac{i\pi}{2}J_0(i|\sigma|\varkappa) + \frac{\pi}{2}\Omega^{(0)}(i|\sigma|\varkappa)$$

schließlich

$$c_1(\sigma) = \frac{\pi}{2|\sigma|}$$

und somit

$$W(\varkappa, \lambda, \sigma) = \left(\frac{\pi}{2|\sigma|} - \frac{i}{|\sigma|}\ln\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{|\sigma|}\right)\varkappa\cdot J_1(i|\sigma|\varkappa) - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varkappa}{|\sigma|}H_1^{(1)}(i|\sigma|\varkappa) - \frac{\lambda}{\sigma^2}\cdot\frac{e^{-i\lambda\varkappa}}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}$$
$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{|\sigma|}\cdot\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}\cdot\varkappa\left(J_1(i|\sigma|\varkappa)\int_0^\varkappa H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa - H_1^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)\int_0^\varkappa J_0(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa\right) \quad (18)$$

Das in Gleichung (17) definierte Integral Z läßt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$Z(\varkappa, \lambda, \sigma) = \left(\frac{i\pi}{2} + \ln\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{|\sigma|}\right)J_0(i|\sigma|\varkappa) - \frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)$$
$$+\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}\left(J_0(i|\sigma|\varkappa)\int_0^\varkappa H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa - H_0^{(1)}(i|\sigma|\varkappa)\int_0^\varkappa J_0(i|\sigma|\varkappa)e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa\right), \quad (19)$$

woraus sich V durch zweimalige Integration ergibt:

$$V(\varkappa, \lambda, \sigma) = -\frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{\lambda}\right) - \frac{i\varkappa}{|\sigma|}\ln\frac{|\sigma|+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{\lambda} + \int_0^\varkappa\int_0^\varkappa Z(\varkappa, \lambda, \sigma)\,d\varkappa\,d\varkappa \quad (20)$$

In ähnlicher Weise verfahren wir für die Darstellung für $U(\varkappa, \lambda)$, es gilt nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial \varkappa} = -i\int_\lambda^\infty e^{-i\varkappa\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho} = C(\lambda) + i\ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa} - \lambda\int_0^\varkappa \ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa, \quad (21)$$

woraus nach Differentiation nach λ für $\varkappa = 0$

$$\frac{\partial C(\lambda)}{\partial \lambda} = 0;\quad C(\lambda) = c + i\,d$$

folgt. Daher darf man wieder die Koeffizienten bei beliebigem $\varkappa$ und λ bestimmen. Trennung von (21) in Real- und Imaginärteil liefert schließlich

$$c = -\frac{\pi}{2};\quad d = \ln\gamma = 0{,}577\ldots$$

Somit erhalten wir für $U(\varkappa, \lambda)$:

$$U(\varkappa, \lambda) = \varkappa\left(-\frac{\pi}{2} + i\ln\gamma + \frac{e^{-i\lambda\varkappa}}{\lambda\varkappa} + i\ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa} - \lambda\int_0^\varkappa \ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa\right). \quad (22)$$

Gleichung (15) ist damit vollständig bestimmbar, man erhält mit (20) und (22):

$$I(\varkappa, \lambda, \sigma) = U(\varkappa, \lambda) - |\sigma|\,V(\varkappa, \lambda, \sigma) =$$
$$= \frac{e^{-i\varkappa\lambda}}{\lambda} + \varkappa\left(-\frac{\pi}{2} + i\ln\gamma\right) + i\varkappa\cdot\ln|\varkappa\lambda|\cdot e^{-i\varkappa\lambda}$$
$$-\lambda\varkappa\cdot\int_0^\varkappa \ln|\lambda\varkappa|\cdot e^{-i\lambda\varkappa}d\varkappa$$
$$+\frac{1}{|\sigma|}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}\right) - \frac{1}{\lambda}\frac{|\sigma|}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}$$
$$+i\varkappa\cdot\ln\frac{|\sigma|+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{b} - i\varkappa\ln\frac{\lambda\varkappa}{b\varkappa}$$
$$-|\sigma|\int_0^\varkappa\int_0^\varkappa Z(\varkappa, \lambda, \sigma)\,d\varkappa\,d\varkappa \quad (23)$$

Für kleine Werte $\varkappa$ läßt sich hieraus eine wesentlich übersichtlichere Darstellung finden, wenn wir $\varkappa^n$ gegen $\varkappa$ und $\varkappa^n\ln\varkappa$ gegen $\varkappa\ln\varkappa$ vernachlässigen. Es ergibt sich

$$I(\varkappa, \lambda, \sigma) = \frac{1}{|\sigma|}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}+|\sigma|}\right) + \varkappa\left(-\frac{\pi}{2} + i\ln\gamma - i\right) + i\varkappa\ln b\varkappa + i\varkappa\ln\frac{|\sigma|+\sqrt{\lambda^2+\sigma^2}}{b},$$

wobei die zweifache Integration über Z in dieser Näherung ebenfalls fortgelassen werden konnte. Der vorliegende Ausdruck ist bezüglich λ regulär, wir können daher entsprechend dem Verfahren im Stationären auch hier den Grenzfall $\lambda \to 0$ bilden, um die Formulierung weiterhin zu vereinfachen. Wir finden:

$$I(\varkappa, o, \sigma) = \frac{1}{|\sigma|} + i\varkappa\cdot\ln\frac{b\varkappa\gamma}{e} - \frac{\pi}{2}\varkappa + i\varkappa\ln\frac{|\sigma|}{b/2}$$

und in der ursprünglichen Bezeichnungsweise

$$I\left(\frac{\nu}{v}, 0, \eta - y\right) = \frac{1}{|\eta - y|} + i\frac{\nu}{v}\cdot\ln\frac{b\nu\cdot\gamma}{v\cdot e} - \frac{\pi}{2}\frac{\nu}{v} + \frac{i\nu}{v}\ln\frac{|\eta - y|}{b/2} \quad (24)$$

Das erste Glied entspricht der Prandtlschen Abwindkorrektur und ist für langsame Vorgänge als das Hauptglied anzusehen. Im Sinne einer linearen Theorie, die Korrekturgrößen von nur dieser ersten Ordnung berücksichtigt, haben wir die weiteren Glieder als von geringerer Größenordnung fortzulassen.

Für den Grenzfall verschwindender Tiefe bei langsamen Bewegungen des Flügels wird demnach das in (10) auftretende Integral von der Form:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(l_2,\eta)\frac{d\eta}{\eta-y}\cdot e^{i\nu t}.$$

Beachten wir nun, daß der Zusammenhang zwischen der Dichte der Gesamtbelegung φ_F mit der Dichte der gebundenen Wirbel γ_F auf der Fläche in der ebenen Theorie [11] gegeben ist durch

$$\varphi_F(x,\eta,t)=\int_{l_1(\eta)}^{x}\gamma\left(\xi,\eta,t-\frac{x-\xi}{v}\right)d\xi, \quad . . . (25)$$

so finden wir mit

$$\gamma_F(\xi,\eta,t)=\gamma(\xi,\eta)\cdot e^{i\nu t};\ \varphi_F(x,\eta,t)=\varphi(x,\eta)\cdot e^{i\nu t},$$

daß $\varphi(l_2\eta)$ dargestellt wird durch

$$\varphi(l_2,\eta)=\int_{l_1(\eta)}^{l_2}\gamma(\xi,\eta)\cdot e^{-\frac{i\nu}{v}(l_2-\xi)}d\xi.$$

Diesen Ausdruck denken wir uns für kleine $\frac{\nu}{v}$ entwickelt

$$\varphi(l_2,\eta)=\int_{l_1(\eta)}^{l_2}\gamma(\xi,\eta)\left(1-\frac{i\nu}{v}(l_2-\xi)+\ldots\right)d\xi$$

und dürfen, da das erste Glied bereits in der Endgleichung eine Korrekturgröße erster Ordnung zur Folge hat, wie oben alle weiteren vernachlässigen, wonach also gilt:

$$\varphi(l_2,\eta)=\int_{l_1(\eta)}^{l_2}\gamma(\xi,\eta)\,d\xi=\Gamma(\eta).$$

Im Rahmen unserer Näherung erhalten wir somit aus (10) für langsame periodische Vorgänge die Darstellung

$$W(x,y,t)=w(x,y,t)+\frac{1}{4\pi}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\Gamma(\eta,t)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\eta-y} \quad (26)$$

4. Auswertung der entwickelten Beziehungen.

Zunächst stellen wir aus (26) die zugehörige Zirkulationsgleichung her. Mit den Ansätzen

$$\left.\begin{aligned}W(x,y,t)&=-2v\left(\frac{b_0(y)}{2}+\sum_1^\infty b_n(y)\cos n\varphi\right)\cdot e^{i\nu t},\\ w(x,y,t)&=-2v\left(\frac{P_0(y)}{2}+\sum_1^\infty P_n(y)\cos n\varphi\right)\cdot e^{i\nu t},\end{aligned}\right\} (27)$$

wobei $W(x,y,t)$ wegen der Undurchdringlichkeit der Fläche als gegeben anzusehen ist, unter Verwendung der Bezeichnungsweise der Arbeit [11], ergibt sich

$$-2v\left(\frac{1}{2}(b_0(y)-P_0(y))+\sum_1^\infty(b_n(y)-P_n(y))\cos n\varphi\right)=\frac{1}{4\pi}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\Gamma(\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\eta-y},$$

$$(\Gamma(y,t)=\Gamma(y)\cdot e^{i\nu t})$$

und schließlich durch Koeffizientenvergleich

$$P_0(y)=b_0+\frac{1}{4\pi v}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\Gamma(\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\eta-y};\ P_n(y)=b_n(y) \quad (28)$$

Wegen (vgl. [11])

$$\Gamma(y)=\pi v\,l(y)(Z_0(y)+Z_1(y))$$

finden wir zunächst

$$\Gamma(y)=\pi v\,l(y)\left\{P_0(y)\cdot\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)+i\frac{l\nu}{2v}\right)-P_1(y)\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)\right)-P_2(y)\cdot\frac{i}{2}\cdot\frac{l\nu}{2v}\right\}$$

und nach Einsetzung von (28) schließlich

$$\Gamma(y)=\pi v\,l(y)\left\{\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)+i\frac{l\nu}{2v}\right)\times\left(b_0(y)+\frac{1}{4\pi v}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\Gamma(\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\eta-y}\right)-\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)\right)b_1(y)-\frac{i}{2}\cdot\frac{l\nu}{2v}\cdot b_2(y)\right\} \quad . . . (29)$$

Wenn wir uns zunächst auf den Fall des harmonisch schwingenden ungewölbten Flügels ohne Anstellwinkeländerung beschränken, wobei der stationäre Anteil hierbei außer acht zu lassen ist, so haben wir zu setzen

$$b_0(y)=-\frac{\dot z(y)}{v};\ b_n(y)=0$$

($\dot z(y)$ als Betrag der Aufwärtsgeschwindigkeit des Flügels) und erhalten die einfache Zirkulationsgleichung

$$\Gamma(y)=\pi v\,l(y)\cdot\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)+i\frac{l\nu}{2v}\right)\times\left(-\frac{\dot z(y)}{v}+\frac{1}{4\pi v}\int_{b_1}^{b_2}\frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta}\frac{d\eta}{\eta-y}\right) \quad (30)$$

Für ihre Auswertung, für die infolge $l(y)$ auch der Faktor

$$\frac{1}{2}\left(1+T\left(\frac{l\nu}{2v}\right)+i\frac{l\nu}{2v}\right)=R(y)+iJ(y)$$

von y abhängig ist, können wir diesen zunächst durch einen geeigneten Mittelwert R_0+iJ_0 ersetzen. Man überzeugt sich in der Tat durch numerische Rechnung, daß dies für langsame Vorgänge zulässig ist und weiterhin, daß der hier auftretende komplexe Korrekturfaktor geringe Abweichungen zur Folge hat gegenüber dem mit vernachlässigtem Imaginärteil, so daß die bisher wenig beachtete »Quasistationäre Theorie«, die Professor Schmeidler in dieser Form als erster entwickelt und angewandt hat [5], [6], als gute Näherung zu ihrem Rechte kommt. Die Prandtlsche Zirkulationsgleichung behält demnach auch im Instationären ihre Bedeutung bei, sogar auch bei zusätzlicher Drehbewegung des Flügels in der Form

$$\Gamma(y,t)=\pi v\,l^*(y)\left(\alpha^*(y)+\frac{1}{4\pi v}\int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial\Gamma(\eta,t)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\eta-y}\right) \quad (31)$$

mit $\alpha^*(y)$ als dem wirksamen Anstellwinkel und $l^*(y)$ als der wirksamen Tiefe, für die gilt

$l^*(y)=l(y)$ für den stationären Anteil,

$l^*(y)=R_0\cdot l(y)$ für den harmonischen Anteil.

Für genauere weitere Untersuchungen stehen die Gleichungen (29) bzw. (30) zur Verfügung, deren Auswertung mit denselben Hilfsmitteln gelingt.

IV. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird auf Grund der dargelegten Tragflächentheorie ein Grenzübergang zur tragenden Linie vollzogen, wobei das benutzte Verfahren für das Stationäre auf die Prandtlsche Zirkulationsgleichung führt. Für langsame periodische Vorgänge wird nachgewiesen, daß diese Gleichung ihre Bedeutung beibehält und im Rahmen einer »Quasistationären Theorie« gute Näherungslösungen liefert. Für den allgemeinen Fall ist eine Formulierung gefunden worden, die wie die Prandtlsche im Stationären wesentlich von der zugehörigen ebenen Theorie Gebrauch macht.

V. Schrifttum.

Vgl. auch die Hinweise in den einzelnen Arbeiten.

[1] L. Prandtl, Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche, Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936) S. 360.

[2] W. Kinner, Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Ing. Arch. Bd. 8 (1937) S. 47.

[3] K. Krienes, Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 65.



[4] W. Schmeidler, Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 183 (1941) S. 175.

[5] W. Schmeidler, Dynamik des Schwingenfluges. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935) S. 128.

[6] W. Schmeidler, Flugzeuge mit Flügelantrieb. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936) S. 111.

[7] W. Schmeidler, Vortrieb und Widerstand. Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939) S. 65.

[8] W. Schmeidler, Zur Theorie des Schwingenfluges. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. XXXVIII/IX S. 64.

[9] H. G. Küssner, Allgemeine Tragflächentheorie. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940) S. 370.

[10] S. v. Borbely, Über einen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938) S. 319.

[11] K. Jaeckel, Über die Bestimmung der Zirkulationsverteilung . . . Luftf.-Forschg. Bd. 16 (1939) S. 135.

[12] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Teubner 1904. S. 127.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 26. April 1942 | Lfg. 3

Laminare Grenzschichten.

Ein kritischer Literaturbericht.

I. Teil. Grundlagen der Grenzschichttheorie.

Von Harry Schmidt und Kurt Schröder.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Direktion Flugwerk.

Die Mitteilung bildet den ersten Teil eines kritischen, nach systematischen Gesichtspunkten geordneten Berichts über laminare Grenzschichten, dessen weitere Teile sich auf Methoden zur Integration der Grenzschichtgleichung, auf Rechenschemata und Zahlenbeispiele sowie auf einschlägige Meßergebnisse beziehen sollen.

Dabei lassen wir uns von dem Wunsch leiten, einerseits eine Klärung von vielfach noch offenen Fragen prinzipieller Natur anzubahnen, andererseits durch ausführliche Erläuterung von praktisch üblichen Rechenverfahren, durch Behandlung von Beispielen sowie durch Zusammenstellung von Zahlen- und Meßergebnissen den Bedürfnissen des Ingenieurs möglichst weitgehend entgegenzukommen.

Gliederung.

Vorbemerkungen.

Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir eine möglichst durchgehend einheitliche Bezeichnungsweise. Eine vollständige Liste aller von uns benutzten Symbole in alphabetischer Anordnung (lateinisch-griechisch) befindet sich am Schluß der Arbeit.

Das einschlägige Schrifttum ist gleichfalls am Ende des Berichts zusammengestellt. Auf jede Veröffentlichung wird im Text durch in eckige Klammern eingeschlossene Zahlen verwiesen.

Zur fortlaufend vorgenommenen Formelnumerierung dienen in runde Klammern gesetzte Zahlen.

Einleitung[1].

Für flugtechnische Anwendungen interessiert in erster Linie die Kenntnis solcher Bewegungen einer als inkompressibel und homogen vorausgesetzten zähen Flüssigkeit, die ohne Einwirkung äußerer Kräfte bei allseitig sich ins Unendliche erstreckendem Strömungsgebiet einen ruhenden Festkörper von im allgemeinen zeitlich veränderlicher Gestalt umfließen.

Indem wir uns hier auf das ebene Problem beschränken, denken wir uns das Außengebiet B_0 der vorgegebenen Profilkontur C_0 auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem bezogen. Dann müssen die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = v_x(x, y, t)$$

und

$$v_y = v_y(x, y, t)$$

sowie der Druck $p = p(x, y, t)$ zu jedem Zeitpunkt t an jeder auf B_0 gelegenen Stelle (x, y) neben der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left\{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right\},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left\{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right\}$$

genügen, in denen ϱ_0 die konstante Dichte und ν die konstante kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit bedeuten.

Ferner hat man die Erfüllung der beiden — im Sinne von Grenzübergängen aus B_0 auf C_0 zu verstehenden — Haftbedingungen

$$[v_x(x, y, t)]_{C_0} = 0, \quad [v_y(x, y, t)]_{C_0} = 0$$

zu verlangen, und mit unbegrenzt wachsender Entfernung von C_0 müssen die gesuchten Funktionen v_x, v_y bzw. p gegen die entsprechenden Größen der Grundströmung konvergieren.

Eine Lösung des hiermit formulierten Umströmungsproblems konnte bisher für kein Profil gefunden werden. Ebensowenig ist gegenwärtig die Frage nach einschlägigen Existenz- und Einzigkeitssätzen geklärt.

Um angesichts einer derartigen Sachlage weiter zu kommen, stellen wir uns von vornherein auf den folgenden Standpunkt:

[1]) Der sachlich wesentliche Teil dieser Einleitung stimmt mit dem zweiten Abschnitt der Arbeit von H. Schmidt und K. Schröder [38] überein.

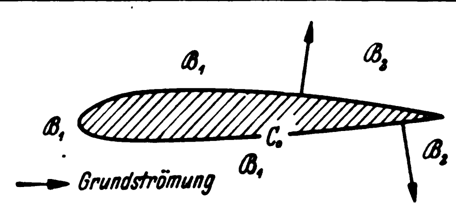


Bild 1. Erläuterung der Gebiete B_1 und B_2.

1. Für praktisch gebräuchliche Profile gibt es stets ein und nur ein Funktionentripel (v_x, v_y, p), das den zuvor aufgezählten Forderungen entspricht.
2. Bei bekannter Lösung würden die physikalisch maßgebenden Einzelheiten des wirklichen Vorgangs — zum mindesten innerhalb eines passend abzugrenzenden Teilgebiets von B_0 — in geeigneten analytischen Eigenschaften der Funktionen v_x, v_y und p ihr genügend genaues gedankliches Gegenstück besitzen.

Auf diese Weise eröffnen wir uns grundsätzlich die Möglichkeit, nunmehr durch Berufung auf Resultate der experimentellen Forschung eine planmäßig vereinfachte Theorie zu entwickeln.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Erfahrungstatsache, daß sich bei schwach reibenden Flüssigkeiten — wie Luft oder Wasser — dem der Anströmung zugewandten Profilteil (der u. U. mit dem Gesamtprofil übereinstimmen kann) nach vorn und seitlich (vgl. Bild 1) ein Gebiet B_1 anlegt, in dem

1. starke Geschwindigkeitsunterschiede gegenüber der Grundströmung lediglich in unmittelbarer Nähe der Körperkontur auftreten;
2. weiter draußen in der freien Flüssigkeit sowohl der qualitative Charakter des Stromlinienbildes als auch — in quantitativer Hinsicht — die praktisch vorhandene Ortsunabhängigkeit des Gesamtdrucks

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\varrho_0 \cdot (v_x^2 + v_y^2)$$

die Annahme von nahezu wirbelloser Bewegung rechtfertigen.

Dort bleibt demnach der hemmende Einfluß der Haftbedingungen im wesentlichen auf einen schmalen, durch die feste Wand geführten Streifen beschränkt, der als Grenzschicht bezeichnet und auf B_1 als alleiniger Träger der direkten Zähigkeitswirkungen angesehen wird.

In dem stromabwärts an B_1 sich anschließenden Restgebiet B_2 von B_0 ist die Flüssigkeit auch noch in größerem Wandabstand beständig von Wirbeln durchsetzt, die von einer Ablösung der Grenzschicht herrühren. Demgemäß wollen wir die Trennung von B_1 und B_2 durch die äußeren Normalen in denjenigen Punkten der Profilkontur C_0 vollziehen, in denen die Ablösung stattfindet[2]).

Die Aufgabe, den Verlauf der Geschwindigkeitsprofile im Innern der Grenzschicht und die Lage der Ablösestelle zu ermitteln, bildet den Gegenstand der von L. Prandtl im Jahre 1904 begründeten Grenzschichttheorie. Sie hat inzwischen eine umfangreiche Literatur hervorgerufen, über die wir — unter ausschließlicher Berücksichtigung laminarer Vorgänge — in einer Folge von vier Veröffentlichungen einen kritischen Bericht zu erstatten beabsichtigen.

Der vorliegende erste Teil dieses Berichts befaßt sich mit den Grundlagen der Theorie; wir beginnen ihn — bewußt auf den Gebrauch der Vektorsymbolik verzichtend — mit einigen kurzen Bemerkungen über die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik, um alsdann die für spätere Zwecke benötigte Transformation auf krummlinige Orthogonalkoordinaten etwas eingehender zu behandeln.

[2]) Die Frage, ob die Grenzschichtströmung vor ihrer Ablösung turbulent geworden ist, braucht bei dieser Vereinbarung nicht berücksichtigt zu werden.

A. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik.

1. Die Kontinuitätsgleichung, der Impulssatz und die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen.

In der theoretischen Hydrodynamik wird eine Flüssigkeit zu einem homogenen materiellen Kontinuum idealisiert, das ein beschränktes oder auch nichtbeschränktes, von freien Oberflächen, von starren Wänden oder von der Begrenzung eingetauchter fester Körper berandetes Raumgebiet T_0 erfüllt. Die Gesamtberandung dieses Gebiets T_0, das einfach oder mehrfach zusammenhängend sein kann, nennen wir S_0. Ausdrücklich sei hervorgehoben, daß T_0 nur aus inneren Punkten besteht.

Die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik lassen sich im Rahmen der heute üblichen Auffassung auf Grund von drei physikalischen Prinzipien gewinnen, die ihr unmittelbares analytisches Gegenstück in gewissen Verknüpfungen zwischen den für die Strömungslehre wesentlichen Begriffsbildungen erhalten.

An die Spitze stellen wir das Fundamentalpostulat der Mechanik kontinuierlich verteilter Materie, demzufolge zu jedem Zeitpunkt bei jedem aus dem Kontinuum abgegrenzten, als starr zu denkenden Flüssigkeitsteil die jeweils dort wirksamen äußeren Kräfte gemeinsam mit den entsprechenden Trägheitswiderständen sich im Gleichgewichtszustand befinden müssen. Hierfür notwendig und hinreichend ist das Verschwinden sowohl der resultierenden Kraft als auch des resultierenden Moments. Demnach sollen also, wenn T ein beliebiges, von einer ganz in T_0 verlaufenden beschränkten geschlossenen Fläche S berandetes Teilgebiet von T_0 bezeichnet[3]), zu jedem Zeitpunkt t die beiden Relationentripel

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left(K_x - \frac{d v_x}{d t}\right) d\tau + \int_{(S)} S_{nx}\, d\omega = 0,\\
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left(K_y - \frac{d v_y}{d t}\right) d\tau + \int_{(S)} S_{ny}\, d\omega = 0,\\
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left(K_z - \frac{d v_z}{d t}\right) d\tau + \int_{(S)} S_{nz}\, d\omega = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left\{(y \cdot K_z - z \cdot K_y) - \left(y \cdot \frac{d v_z}{d t} - z \cdot \frac{d v_y}{d t}\right)\right\} d\tau\\
&\qquad + \int_{(S)} (y \cdot S_{nz} - z \cdot S_{ny})\, d\omega = 0,\\
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left\{(z \cdot K_x - x \cdot K_z) - \left(z \cdot \frac{d v_x}{d t} - x \cdot \frac{d v_z}{d t}\right)\right\} d\tau\\
&\qquad + \int_{(S)} (z \cdot S_{nx} - x \cdot S_{nz})\, d\omega = 0,\\
&\int_{(T)} \varrho_0 \cdot \left\{(x \cdot K_y - y \cdot K_x) - \left(x \cdot \frac{d v_y}{d t} - y \cdot \frac{d v_x}{d t}\right)\right\} d\tau\\
&\qquad + \int_{(S)} (x \cdot S_{ny} - y \cdot S_{nx})\, d\omega = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

bestehen, wobei bedeuten:

x, y, z die auf ein raumfestes rechtwinkliges Rechtssystem bezogenen Ortskoordinaten;

v_x, v_y, v_z die substantiellen Geschwindigkeitskomponenten, die gemäß

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= v_x\left\{x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right\},\\
v_y &= v_y\left\{x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right\},\\
v_z &= v_z\left\{x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

[3]) Die Willkür in der Wahl von T unterliege jedoch der Einschränkung, daß die später zu machenden Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes stets legal sind.
Des weiteren werde gleich hier bemerkt, daß Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften für alle von uns zu betrachtenden Funktionen in dem jeweils erforderlichen Umfang im allgemeinen stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt werden.

als Funktionen der zugehörigen Teilchenkoordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sowie der Zeit t aufzufassen sind;
K_x, K_y, K_z die resultierenden Komponenten der auf die Masseneinheit bezogenen äußeren Kräfte;
S_{nx}, S_{ny}, S_{nz} die Komponenten desjenigen Spannungsvektors, der der positiven, stets ins Innere von T weisenden, längs S variierenden Normalenrichtung n zugeordnet ist;
ϱ_0 die Dichte der homogenen Flüssigkeit, die bei Annahme von Inkompressibilität die Rolle einer Materialkonstanten spielt.

Ausführlicher haben wir

$$K_x = K_x(x, y, z, t), \quad K_y = K_y(x, y, z, t), \quad K_z = K_z(x, y, z, t) \quad \ldots\ldots (3a)$$

und

$$\left.\begin{array}{c} S_{nx} = S_{nx}(x, y, z, t), \quad S_{ny} = S_{ny}(x, y, z, t), \\ S_{nz} = S_{nz}(x, y, z, t) \end{array}\right\} \quad (3b)$$

zu schreiben, wodurch die Massenkräfte bzw. Spannungen als lokale (im allgemeinen zeitlich veränderliche) Größen gekennzeichnet werden. Der nicht endgültige Charakter der Gleichungen (1a), (1b) wird daher allein schon aus dem Nebeneinander von Termen substantieller sowie lokaler Natur ohne weiteres ersichtlich. Für unsere Zwecke empfiehlt sich die Bevorzugung der lokalen Betrachtungsweise, so daß die substantiellen Beschleunigungskomponenten $\frac{d v_x}{d t}$, $\frac{d v_y}{d t}$, $\frac{d v_z}{d t}$ unter Benutzung der zu (3a), (3b) analogen Feldfunktionen

$$v_x = v_x(x, y, z, t), \quad v_y = v_y(x, y, z, t), \quad v_z = v_z(x, y, z, t) \quad (3c)$$

durch die aus (2) fließenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{d v_x}{d t} &= v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \frac{d v_y}{d t} &= v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ \frac{d v_z}{d t} &= v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

zu ersetzen sind.

Zum zweiten Prinzip erheben wir das Gesetz von der Erhaltung der Masse, das in der Punktmechanik durch Auffassung der einzelnen Massenpunktsmassen als Konstanten von vornherein berücksichtigt wird, in der Mechanik der Kontinua dagegen eine besondere Formulierung verlangt: Die pro Zeiteinheit in einem beliebig aus T_0 abgegrenzten Teilgebiet T erfolgende Massenänderung muß bei Abwesenheit von Quellen und Senken zu jedem Zeitpunkt t dem gesamten pro Zeiteinheit durch die Berandung S von T vor sich gehenden Massentransport gleich sein. Dies führt zu der für jedes Teilgebiet T von T_0 zu verlangenden Forderung

$$\int_{(T)} \frac{\partial \varrho_0}{\partial t}\, d\tau = \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_n\, d\omega \quad \ldots\ldots (5)$$

mit

$$v_n = v_x \cdot \cos(n, x) + v_y \cdot \cos(n, y) + v_z \cdot \cos(n, z), \quad (5a)$$

die sich bei inkompressiblen Flüssigkeiten nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes zu

$$\int_{(T)} \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} d\tau = 0$$

vereinfacht. Hieraus leitet sich alsdann — der Integrand wird als eine auf ganz T_0 stetige Ortsfunktion angenommen — durch eine bekannte Schlußweise das an jeder Stelle (x, y, z) von T_0 beständig gültige Feldgesetz

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots (6)$$

her, das als die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik bezeichnet wird.

Wegen (6) lassen sich die Identitäten (4) auf die Form

$$\begin{aligned} \frac{d v_x}{d t} &= \frac{\partial}{\partial x}(v_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(v_x \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(v_x \cdot v_z) + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \frac{d v_y}{d t} &= \frac{\partial}{\partial x}(v_y \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(v_y \cdot v_z) + \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ \frac{d v_z}{d t} &= \frac{\partial}{\partial x}(v_z \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_z \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z^2) + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned}$$

bringen, so daß bei Beachtung des Gaußschen Integralsatzes für jeden (nicht notwendig zeitunabhängigen) Teilbereich $T + S$ von T_0 unter Beibehaltung von (5a) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{d v_x}{d t}\, d\tau &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_x \cdot v_n\, d\omega, \\ \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{d v_y}{d t}\, d\tau &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_y \cdot v_n\, d\omega, \\ \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{d v_z}{d t}\, d\tau &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_z \cdot v_n\, d\omega \end{aligned}$$

zutreffen. Die pro Zeiteinheit in T erfolgende Impulsproduktion erscheint hierdurch in zwei Summanden zerlegt, deren erster den in T verbleibenden und deren zweiter den durch die Berandung S hindurch nach außen abgegebenen Anteil mißt. Gemäß (1a) wird demnach

$$\left.\begin{aligned} \int_{(T)} \varrho_0 \cdot K_x\, d\tau + \int_{(S)} S_{nx}\, d\omega &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_x \cdot v_n\, d\omega, \\ \int_{(T)} \varrho_0 \cdot K_y\, d\tau + \int_{(S)} S_{ny}\, d\omega &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_y \cdot v_n\, d\omega, \\ \int_{(T)} \varrho_0 \cdot K_z\, d\tau + \int_{(S)} S_{nz}\, d\omega &= \int_{(T)} \varrho_0 \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t}\, d\tau - \int_{(S)} \varrho_0 \cdot v_z \cdot v_n\, d\omega, \end{aligned}\right\} (7)$$

womit als hydrodynamisches Integralgesetz der Impulssatz vorliegt.

Zu einer grundsätzlich wichtigen, auf die Struktur des inneren Spannungsfeldes einer Flüssigkeit bezüglichen Schlußfolgerung gelangt man durch Spezialisierung von (1a) auf ein tetraedrisch begrenztes Raumgebiet, dessen eine Randkomponente die beliebige Normalenrichtung n besitzt, während die drei übrigen Randflächen den Koordinatenebenen parallel laufen. Wird dabei auf die einzelnen Raum- bzw. Flächenintegrale der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung angewendet, so resultieren nach Zusammenziehung des Tetraeders auf einen Punkt die für jede Richtung n gültigen Relationen

$$\left.\begin{aligned} S_{nx} &= S_{xx} \cdot \cos(n, x) + S_{yx} \cdot \cos(n, y) + S_{zx} \cdot \cos(n, z), \\ S_{ny} &= S_{xy} \cdot \cos(n, x) + S_{yy} \cdot \cos(n, y) + S_{zy} \cdot \cos(n, z), \\ S_{nz} &= S_{xz} \cdot \cos(n, x) + S_{yz} \cdot \cos(n, y) + S_{zz} \cdot \cos(n, z), \end{aligned}\right\} (8)$$

die die Spannung als eine Tensorgröße charakterisieren.

Wenn man nunmehr (8) zunächst in (1a) einsetzt und die über S zu erstreckenden Flächenintegrale auf Grund des Gaußschen Integralsatzes in Raumintegrale umwandelt, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \int_{(T)} \left\{ \varrho_0 \cdot \left(K_x - \frac{d v_x}{d t} \right) - \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} \right) \right\} d\tau = 0, \\ \int_{(T)} \left\{ \varrho_0 \cdot \left(K_y - \frac{d v_y}{d t} \right) - \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} \right) \right\} d\tau = 0, \\ \int_{(T)} \left\{ \varrho_0 \cdot \left(K_z - \frac{d v_z}{d t} \right) - \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right) \right\} d\tau = 0, \end{aligned}$$

dem in Anbetracht der Willkür des Integrationsgebiets T sofort die mit Berücksichtigung von (4) zu verstehenden Feldgesetze

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 \cdot \frac{d v_x}{d t} &= \varrho_0 \cdot K_x - \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z} \right), \\ \varrho_0 \cdot \frac{d v_y}{d t} &= \varrho_0 \cdot K_y - \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z} \right), \\ \varrho_0 \cdot \frac{d v_z}{d t} &= \varrho_0 \cdot K_z - \left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned}\right\} (9)$$

zu entnehmen sind. Mit ihnen sowie mit (8) läßt sich alsdann (1b) durch eine analoge Überlegung auf die Identitäten

$$S_{yz} = S_{zy}, \quad S_{zx} = S_{xz}, \quad S_{xy} = S_{yx} \quad \ldots \quad (10)$$

reduzieren, so daß der Spannungstensor eines materiellen Kontinuums stets ein symmetrischer Tensor ist.

Das dritte und letzte prinzipiell-physikalische Fundament der klassischen Hydrodynamik bildet die Voraussetzung eines linearen Zusammenhangs zwischen den Komponenten der Spannung und der Deformationsgeschwindigkeit, der für inkompressible Flüssigkeiten unter Einführung des hydrostatischen Drucks p und des Reibungskoeffizienten μ bei Beachtung von (10) durch die beiden Gleichungstripel

$$\left.\begin{aligned} S_{xx} &= p - 2\mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ S_{yy} &= p - 2\mu \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ S_{zz} &= p - 2\mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11\text{a})$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} S_{xy} = S_{yx} &= -\mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ S_{xz} = S_{zx} &= -\mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ S_{yz} = S_{zy} &= -\mu \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11\text{b})$$

zum Ausdruck gelangt. Im Hinblick auf die Kontinuitätsgleichung (6) berechnen sich daher die auf die Volumeneinheit bezogenen inneren Kräfte einer Strömung zu

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zx}}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta v_x, \\ -\left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zy}}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta v_y, \\ -\left(\frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta v_z \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

mit

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \ldots\ldots \quad (12\text{a})$$

Indem man schließlich statt μ die durch

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

definierte kinematische Zähigkeit ν benutzt, geht (9) mit (4) sowie mit (12) in die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &\quad = K_x - \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta v_x, \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ &\quad = K_y - \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \Delta v_y, \\ &\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &\quad = K_z - \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \Delta v_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

über, die in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung das vollständige System der lokalen Bewegungsgleichungen einer inkompressiblen Flüssigkeit repräsentieren.

Sind l bzw. V_0 eine in jedem Einzelfall zweckmäßig gewählte Länge bzw. Geschwindigkeit, und denken wir uns für den Augenblick einerseits

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad z^* = \frac{z}{l} \quad \ldots \quad (15\text{a})$$

sowie

$$v_x^* = \frac{v_x}{V_0}, \quad v_y^* = \frac{v_y}{V_0}, \quad v_z^* = \frac{v_z}{V_0}, \quad (15\text{b})$$

andererseits

$$t^* = \frac{V_0}{l} \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16\text{a})$$

sowie

$$p^* = \frac{p}{\varrho_0 \cdot V_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16\text{b})$$

und

$$K_x^* = \frac{l}{V_0^2} \cdot K_x, \quad K_y^* = \frac{l}{V_0^2} \cdot K_y, \quad K_z^* = \frac{l}{V_0^2} \cdot K_z \quad (16\text{c})$$

gesetzt, so nehmen, falls auf die so definierten dimensionslosen Größen der Einfachheit halber sogleich die ursprüngliche Bezeichnungsweise übertragen und unter

$$R = \frac{l \cdot V_0}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

die Reynoldssche Zahl verstanden wird, die Gleichungen (14) die Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} &= K_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} &= K_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \cdot \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} &= K_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \Delta v_z \end{aligned}\right\} (18)$$

an.

Führt man ferner die (dimensionslosen) Komponenten

$$w_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad w_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (19)$$

des doppelten »Wirbel«-Vektors ein, die offenbar der Bedingung

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (19\text{a})$$

genügen, so gilt mit

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

zunächst

$$\begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2}\right) - (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2}\right) - (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x), \end{aligned}$$

und bei Beachtung der Kontinuitätsgleichung wird

$$\Delta v_x = -\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right), \quad \Delta v_y = -\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right),$$

$$\Delta v_z = -\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right).$$

Demnach ist (18), wenn die äußeren Massenkräfte gemäß

$$K_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad K_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad K_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (21)$$

als konservative Kräfte vorausgesetzt werden, dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2} + p + U\right) - (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) \\ &\quad = -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right), \\ &\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} + p + U\right) - (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z) \\ &\quad = -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right), \\ &\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v^2}{2} + p + U\right) - (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \\ &\quad = -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} (22)$$

äquivalent.

2. Die Bewegungsgleichungen in beliebigen Orthogonalkoordinaten.

Gelegentlich erscheint es nützlich, die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen nebst der Kontinuitätsgleichung auf ein krummliniges Orthogonalsystem ξ, η, ζ umzuschreiben, das wir uns durch die Substitutionen

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \qquad (23)$$

unter den folgenden Voraussetzungen eingeführt denken:

1. Auf einem Gebiet T_0 des ξ, η, ζ-Raums seien die Funktionen (23) überall stetig sowie mit stetigen partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung versehen;
2. die Funktionaldeterminante

$$D = D(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad . \ . \ (23\text{a})$$

   sei auf einem beschränkten Teilbereich $T + S$ von T_0 durchweg positiv[4]);
3. die Beziehungen (23) seien auf $T + S$ gemäß

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z) \quad (23\text{b})$$

   eindeutig nach ξ, η, ζ auflösbar;
4. je zwei Exemplare aus zwei verschiedenen derjenigen drei Flächenscharen, die durch (23) mit konstantem ξ bzw. η bzw. ζ festgelegt werden, sollen sich ausnahmslos rechtwinklig schneiden.

Dann stellen, wenn $T + S$ den durch (23) im x, y, z-Raum gelieferten Bildbereich von $T + S$ bezeichnet, die jedem Punkt $P(x, y, z)$ auf $T + S$ durch (23b) umkehrbar-eindeutig zugeordneten Größen ξ, η, ζ drei auf $T + S$ stetige, daselbst dreimal stetig partiell differenzierbare Funktionen von x, y, z dar, die sich als allgemeine orthogonale Koordinaten von P auffassen lassen.

Unter Benutzung der auf $T + S$ zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}}, \\ h_2 = h_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}}, \\ h_3 = h_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

können die Orthogonalitätsbedingungen, indem wir überdies zwecks formaler Vereinfachung der weiteren Rechnungen vorübergehend

$$x = x_1, \ y = x_2, \ z = x_3 \ \text{und} \ \xi = \xi_1, \ \eta = \xi_2, \ \zeta = \xi_3$$

setzen, zu

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\lambda} = \frac{\delta_{\varkappa\lambda}}{h_\varkappa^2} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3) \quad . \ . \ (25)$$

mit

$$\delta_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} 1 \ \text{für} \ \lambda = \varkappa, \\ 0 \ \text{für} \ \lambda \neq \varkappa \end{cases} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (25\text{a})$$

vervollständigt werden. Demnach ergibt sich durch Quadrieren von (23a) bei Bildung des Determinantenquadrats durch Zeilen-Zeilen-Komposition unmittelbar

$$D^2 = \frac{1}{h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2},$$

so daß wegen $D > 0$ notwendig

$$D = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (26)$$

sein muß.

Sind $D_{\varkappa\lambda} = D_{\varkappa\lambda}(\xi, \eta, \zeta)$ die algebraischen Komplemente der Elemente von D, so werden die mit jeweils festem $\varkappa = 1, 2, 3$ zu verstehenden linearen Gleichungssysteme

$$\sum_{\sigma=1}^{3} t_\sigma^{(\varkappa)} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\lambda} = \frac{\delta_{\varkappa\lambda}}{h_\varkappa^2} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

für die Unbekannten $t_\lambda^{(\varkappa)}$ einerseits nach der Cramerschen Regel durch

$$t_\lambda^{(\varkappa)} = \frac{D_{\varkappa\lambda}}{D \cdot h_\varkappa^2},$$

andererseits gemäß (25) durch

$$t_\lambda^{(\varkappa)} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\varkappa}$$

erfüllt. Wegen der Einzigkeit der Lösung darf hieraus auf

$$\frac{D_{\varkappa\lambda}}{D} = h_\varkappa^2 \cdot \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\varkappa} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3) \quad . \ . \ . \ (27)$$

geschlossen werden, womit (25) in

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{D_{\varkappa\sigma}}{D} \cdot \frac{D_{\lambda\sigma}}{D} = h_\varkappa^2 \cdot \delta_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, 3) \quad (27\text{a})$$

übergeht.

Bezeichnen

$$u_1 = u_x = u_x(x, y, z), \quad u_2 = u_y = u_y(x, y, z), \quad u_3 = u_z = u_z(x, y, z)$$

bzw.

$$u_1^* = u_\xi = u_\xi(\xi, \eta, \zeta), \quad u_2^* = u_\eta = u_\eta(\xi, \eta, \zeta), \quad u_3^* = u_\zeta = u_\zeta(\xi, \eta, \zeta)$$

die auf das x, y, z-System bzw. die auf das ξ, η, ζ-System bezogenen Komponenten einer Vektorgröße, so wird

$$u_\varkappa^* = \sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma \cdot \cos(\xi_\varkappa, x_\sigma) = h_\varkappa \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \ (\varkappa = 1,2,3) \quad (28\text{a})$$

und

$$u_\varkappa = \sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma^* \cdot \cos(x_\varkappa, \xi_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma^* \cdot h_\sigma \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial \xi_\sigma} \ (\varkappa = 1,2,3). \quad (28\text{b})$$

Ferner leiten sich aus den für eine auf $T + S$ partiell differenzierbare Ortsfunktion $f(x, y, z)$ allgemein bestehenden Identitäten

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_\varkappa} = \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \qquad (29\text{a})$$

durch Auflösung nach $\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}$ bei Beachtung von (27) die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} = \frac{1}{D} \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} D_{\sigma\varkappa} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{3} h_\sigma^2 \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial \xi_\sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi_\sigma} \ (\varkappa = 1, 2, 3) \quad . \ . \ . \ . \ (29\text{b})$$

her. Insbesondere folgt demnach

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{D} \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} \sum_{\varrho=1}^{3} D_{\varrho\sigma} \cdot \frac{\partial u_\sigma}{\partial \xi_\varrho}$$

oder

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial u_\sigma}{\partial u_\sigma} = \frac{1}{D} \cdot \left\{ \sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \sum_{\sigma=1}^{3} D_{\varrho\sigma} \cdot u_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{3} u_\sigma \sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial D_{\varrho\sigma}}{\partial \xi_\varrho} \right\};$$

da aber[5])

$$\sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial D_{\varrho\varkappa}}{\partial \xi_\varrho} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3) \quad . \ . \ . \ . \ (30)$$

sowie wegen (27) und (28a)

$$\sum_{\sigma=1}^{3} D_{\varrho\sigma} \cdot u_\sigma = D \cdot h_\varrho^2 \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varrho} \cdot u_\sigma = D \cdot h_\varrho \cdot u_\varrho^*$$

gilt, so ist damit die Beziehung

---

[4]) Die hier allein wesentliche Voraussetzung lautet $D \neq 0$ auf $T + S$. Gilt alsdann $D > 0$ irgendwo auf $T + S$, so muß überall auf $T + S$ aus Stetigkeitsgründen $D > 0$ bleiben. Sollte jedoch $D(\xi, \eta, \zeta) < 0$ sein, so genügt z. B. die Umbenennung $\xi = \eta^*$, $\eta = \xi^*$ und $\zeta = \zeta^*$, um in den neuen Variablen ξ^*, η^*, ζ^* die Gültigkeit von $D(\xi^*, \eta^*, \zeta^*) > 0$ zu erreichen.

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial u_\sigma'}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{D} \cdot \sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} (D \cdot h_\varrho \cdot u_\varrho^*) \quad \ldots \quad (31)$$

gewonnen.

Für eine durch

$$U_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad U_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad U_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \ldots \quad (32)$$

mit (u_x, u_y, u_z) zusammenhängende Vektorgröße (U_x, U_y, U_z) liefert (28a) zunächst

$$U_\xi = h_1 \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} U_\sigma \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi} = h_1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix},$$

wenn die bei der Entwicklung der Determinante auftretenden formalen Produkte der Elemente der zweiten und dritten Zeile jeweils durch die entsprechenden Differentialquotienten ersetzt werden[6]). Unter Berücksichtigung von (29b) und (28b) erhält man alsdann auf Grund geläufiger Determinantenumformungen

$$U_\xi = h_1 \cdot h_2^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta} & \frac{\partial f_2}{\partial \eta} & \frac{\partial f_3}{\partial \eta} \end{vmatrix} - h_1 \cdot h_3^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

mit

$$f_\varkappa = h_2 \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial \eta} \cdot u_\eta + h_3 \cdot \frac{\partial x_\varkappa}{\partial \zeta} \cdot u_\zeta \qquad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

oder

$$U_\xi = h_1 \cdot \left\{ h_2^2 \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \eta} \cdot D_{3\sigma} - h_3^2 \cdot \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \zeta} \cdot D_{2\sigma} \right\},$$

was sich bei Beachtung von (27) und (26) über

$$U_\xi = D \cdot h_1 \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \left\{ \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \zeta} - \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \eta} \right\}$$

$$= h_2 \cdot h_3 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \sum_{\sigma=1}^{3} f_\sigma \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{\sigma=1}^{3} f_\sigma \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \eta} \right\}$$

wegen (25) auf

$$U_\xi = h_2 \cdot h_3 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\zeta}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u_\eta}{h_2} \right) \right\}$$

reduzieren sowie durch zyklische Vertauschung der Veränderlichen ξ, η, ζ sofort zu

$$\left.\begin{aligned} U_\xi &= h_2 \cdot h_3 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\zeta}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u_\eta}{h_2} \right) \right\}, \\ U_\eta &= h_3 \cdot h_1 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u_\xi}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\zeta}{h_3} \right) \right\}, \\ U_\zeta &= h_1 \cdot h_2 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_\eta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_\xi}{h_1} \right) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (32\text{a})$$

ergänzen läßt.

Nunmehr haben wir sämtliche Hilfsmittel in Händen, um die den Substitutionen (23) entsprechende Transformation der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen ohne weiteres durchführen zu können. Dabei denken wir uns die neuen Koordinaten ξ, η, ζ von vornherein als dimensionslose Größen gewählt.

Setzen wir unter Beibehaltung der zu (32) analogen Bezeichnungen (19) für den Augenblick

$$u_x = v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y, \quad u_y = v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z, \quad u_z = v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x$$

und — wiederum in Analogie zu (32) —

$$W_x = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}, \quad W_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad W_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

so schreibt sich (22) in der hier verwendeten Kurzfassung

$$\frac{\partial v_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\frac{v^2}{2} + p + U \right) - u_\sigma = - \frac{1}{R} \cdot W_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, 3),$$

woraus (unter Annahme eines zeitunabhängigen ξ, η, ζ-Systems) durch Multiplikation mit $h_\varkappa \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa}$ und Summation über σ gemäß (28a) und (29a)

$$\frac{\partial v_\varkappa^*}{\partial t} + h_\varkappa \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\varkappa} \left(\frac{v^2}{2} + p + U \right) - u_\varkappa^* = - \frac{1}{R} \cdot W_\varkappa^* \quad (\varkappa = 1, 2, 3)$$

folgt. Die auf das ξ, η, ζ-System transformierten Navier-Stokesschen Differentialgleichungen lauten daher im Hinblick auf (32a)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_\xi}{\partial t} + h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v^2}{2} + p + U \right) - (v_\eta \cdot w_\zeta - v_\zeta \cdot w_\eta) \\ &\quad = - \frac{h_2 \cdot h_3}{R} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w_\zeta}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{w_\eta}{h_2} \right) \right\}, \\ &\frac{\partial v_\eta}{\partial t} + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v^2}{2} + p + U \right) - (v_\zeta \cdot w_\xi - v_\xi \cdot w_\zeta) \\ &\quad = - \frac{h_3 \cdot h_1}{R} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{w_\xi}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w_\zeta}{h_3} \right) \right\}, \\ &\frac{\partial v_\zeta}{\partial t} + h_3 \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v^2}{2} + p + U \right) - (v_\xi \cdot w_\eta - v_\eta \cdot w_\xi) \\ &\quad = - \frac{h_1 \cdot h_2}{R} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{w_\eta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{w_\xi}{h_1} \right) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} w_\xi &= h_2 \cdot h_3 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_\zeta}{h_3} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v_\eta}{h_2} \right) \right\}, \\ w_\eta &= h_3 \cdot h_1 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v_\xi}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v_\zeta}{h_3} \right) \right\}, \\ w_\zeta &= h_1 \cdot h_2 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v_\eta}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_\xi}{h_1} \right) \right\}, \end{aligned}\right\} \quad (33\text{a})$$

während die Kontinuitätsgleichung (6) gemäß (31) und (26) in

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v_\xi}{h_2 \cdot h_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v_\eta}{h_3 \cdot h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{v_\zeta}{h_1 \cdot h_2} \right) = 0 \qquad (34)$$

übergeht.

Wir beschließen den vorliegenden Abschnitt mit der Spezialisierung der soeben abgeleiteten Resultate auf den Fall einer ebenen Strömung, die ohne Einwirkung von äußeren Kräften vor sich geht. Zu diesem Zweck haben wir einerseits

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta) \quad \ldots \quad (35\text{a})$$

und $z = \zeta$, d. h. also

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2}} \quad (35\text{b})$$

und $h_3 = 1$, andererseits

$$v_\xi = v_\xi(\xi, \eta), \qquad v_\eta = v_\eta(\xi, \eta) \quad \ldots \quad (35\text{c})$$

und $v_\zeta = 0$ zu wählen, was neben $U = 0$ als Navier-Stokessche Gleichungen

---

[5]) Aus

$$\sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \cdot D_{\varrho\sigma} = D \cdot \delta_{\varrho\varkappa}$$

ergibt sich einerseits

$$\sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \cdot D_{\varrho\sigma} = \frac{\partial D}{\partial \xi_\varkappa},$$

andererseits

$$\frac{\partial D}{\partial \xi_\varkappa} = \sum_{\varrho=1}^{3} \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varrho} \right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\varkappa} \left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varrho} \right) = \sum_{\varrho=1}^{3} \sum_{\sigma=1}^{3} D_{\varrho\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \right),$$

also

$$\sum_{\varrho=1}^{3} \sum_{\sigma=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \cdot D_{\varrho\sigma} \right) - D_{\varrho\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_\varrho} \left(\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} \right) \right\} = 0$$

oder

$$\sum_{\sigma=1}^{3} A_\sigma \cdot \frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi_\varkappa} = 0 \quad \text{mit} \quad A_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{3} \frac{\partial D_{\varrho\varkappa}}{\partial \xi_\varrho},$$

so daß (30) wegen $D \neq 0$ zutrifft.

[6]) Man beachte, daß U_x, U_y bzw. U_z gemäß (32) als die algebraischen Komplemente von α_1, α_2 bzw. α_3 in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

aufgefaßt werden können.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial t} + h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v^2}{2}+p\right) - v_\eta \cdot w = -\frac{h_2}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial t} + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v^2}{2}+p\right) + v_\xi \cdot w = \frac{h_1}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

mit

$$v^2 = v_\xi^2 + v_\eta^2 \quad \ldots \ldots \quad (36\text{a})$$

und

$$w = h_1 \cdot h_2 \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v_\eta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v_\xi}{h_1}\right)\right\} \quad \ldots \quad (36\text{b})$$

sowie als Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v_\xi}{h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v_\eta}{h_1}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

liefert.

3. Parallelkurven und Normalen eines ebenen Kurvenstücks als Koordinatenlinien eines ebenen Orthogonalsystems.

Sei c_0 ein orientiertes (also mit bestimmtem Durchlaufungssinn versehenes), in der x,y-Ebene gelegenes stetig gekrümmtes und doppelpunktfreies Kurvenstück, das unter Benutzung der — natürlich mit x und y zugleich dimensionslosen — Bogenlänge s als Parameter durch die beiden Gleichungen

$$x = x^{(0)}(s), \quad y = y^{(0)}(s) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

dargestellt werde. Dabei sind also $x^{(0)}(s)$ und $y^{(0)}(s)$ zwei auf einem Intervall $s_1 \leq s \leq s_2$ stetige, daselbst zweimal stetig differenzierbare Funktionen von s, die der Bedingung

$$\left(\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\right)^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad (38\text{a})$$

genügen, so daß die längs c_0 variierende (nicht notwendig positive) Krümmung $k(s)$ durch

$$\left.\begin{aligned} k(s) &= \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\cdot\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2} - \frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\cdot\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s} \\ &= \pm\sqrt{\left(\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

gegeben ist.

In jedem Punkt von c_0 existiert ein Tangentenvektor

$$\{\cos(s,x),\ \cos(s,y)\} = \left\{\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s},\ \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\right\}$$

nebst zugehörigem, gegen den Tangentenvektor im mathematisch positiven Sinn um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ verdrehten Normalenvektor

$$\{\cos(n,x),\ \cos(n,y)\} = \left\{-\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s},\ \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\right\},$$

und mit

$$x^{(n)}(s) = x^{(0)}(s) + n\cdot\cos(n,x) = x^{(0)}(s) - n\cdot\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s},$$

$$y^{(n)}(s) = y^{(0)}(s) + n\cdot\cos(n,y) = y^{(0)}(s) + n\cdot\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}$$

wird durch die Relationen

$$x = x^{(n)}(s), \quad y = y^{(n)}(s)$$

bei festem (dimensionslosen) $n \neq 0$ ein zu c_0 äquidistantes Kurvenstück c_n definiert (vgl. Bild 2), das wir eine Parallelkurve von c_0 nennen wollen. Da nach Voraussetzung die Ableitungen

$$\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s} = \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s} - n\cdot\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2}, \quad \frac{d\,y^{(n)}}{d\,s} = \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s} + n\cdot\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}$$

auf dem abgeschlossenen Intervall $s_1 \leq s \leq s_2$ stetig sind, mithin wegen

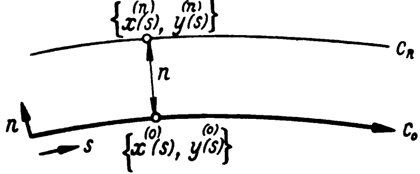


Bild 2. Zum Begriff der Parallelkurven eines Kurvenstücks.

$$\left(\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,y^{(n)}}{d\,s}\right)^2 = 1 - 2n\cdot\left\{\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\cdot\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2} - \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\cdot\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\right\} + n^2\cdot\left\{\left(\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2}\right)^2\right\}$$

oder gemäß (39)

$$\left(\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,y^{(n)}}{d\,s}\right)^2 = \{1 - n\cdot k(s)\}^2 \quad \ldots \quad (40)$$

für hinreichend kleines $|n|$ stets

$$\left(\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,y^{(n)}}{d\,s}\right)^2 \neq 0$$

gilt, so gibt es gewiß eine kontinuierliche Schar von Parallelkurven, deren Glieder in jedem Punkt einen vom Nullvektor verschiedenen Tangentenvektor $\left\{\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s},\ \frac{d\,y^{(n)}}{d\,s}\right\}$ besitzen. Bei festem s steht dieser Vektor wegen

$$\begin{aligned} &\cos(n,x)\cdot\frac{d\,x^{(n)}}{d\,s} + \cos(n,y)\cdot\frac{d\,y^{(n)}}{d\,s} \\ &= -\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\cdot\left\{\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s} - n\cdot\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2}\right\} + \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\cdot\left\{\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s} + n\cdot\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\right\} \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{d}{d\,s}\left\{\left(\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\right)^2 + \left(\frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\right)^2\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

auf dem entsprechenden Normalenvektor $\{\cos(n,x),\ \cos(n,y)\}$ von c_0 senkrecht, so daß Parallelkurven durch Parallelität ihrer Tangenten gekennzeichnet sind.

Fassen wir nunmehr $x^{(n)}(s)$ und $y^{(n)}(s)$ gemäß

$$x^{(n)}(s) = x(s,n), \quad y^{(n)}(s) = y(s,n) \quad \ldots \quad (41)$$

als Funktionen der beiden Veränderlichen s und n auf, so muß (vgl. Bild 3) die durch

$$x = x(s,n), \quad y = y(s,n)$$

gegebene Verknüpfung zwischen x, y und s, n auf einer gewissen (natürlich — vgl. Bild 4 — hinreichend klein zu wählenden) Umgebung jedes Punktes $P(s,0)$ von c_0 notwendig umkehrbar-eindeutig sein, da die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = 1 - n\cdot\left\{\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s}\cdot\frac{d^2 y^{(0)}}{d\,s^2} - \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}\cdot\frac{d^2 x^{(0)}}{d\,s^2}\right\} = 1 - n\cdot k(s)$$

längs c_0 (d. h. also für $n = 0$) nirgends verschwindet. Jedem solchen $P(s,0)$ kommt also eine ihn überdeckende Kreisfläche zu, auf der Schnittpunkte derjenigen Normalen, die von dem auf der Kreisfläche liegenden Teil des Kurvenstücks c_0 ausgehen, sicherlich nicht auftreten können.

Wird (vgl. Bild 5) das einerseits von c_{-n} und c_n, andererseits von den in den Endpunkten $(s_1, 0)$ und $(s_2, 0)$ gezogenen c_0-Normalen berandete Gebiet mit B_n bezeichnet, so folgt des weiteren leicht, daß für hinreichend kleines $n > 0$

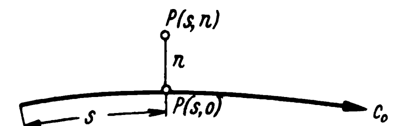


Bild 3. s und n als Punktkoordinaten.

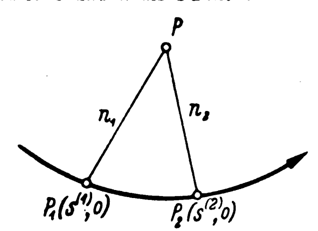


Bild 4. Beispiel eines durch (s, n) nicht umkehrbar-eindeutig erfaßbaren Punktes.

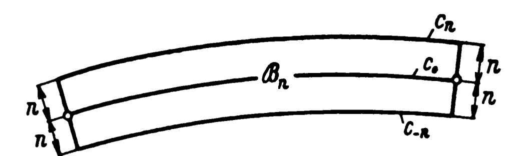


Bild 5. Veranschaulichung des Gebiets B_n.

auf B_n überhaupt keine Schnittpunkte zweier beliebiger Normalen von c_0 vorhanden sind. Wenn es nämlich, entgegen der Behauptung, bei jedem $n = n_\lambda$ mit

$$\lim_{\lambda \to \infty} n_\lambda = 0 \quad (n_\lambda > 0 \text{ für jedes } \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

stets ein Punktpaar $P_\lambda^{(1)}$, $P_\lambda^{(2)}$ auf c_0 gäbe, für das die jeweiligen Normalen einen auf B_{n_λ} gelegenen Punkt Q_λ gemeinsam hätten, so würde die beschränkte unendliche Punktmenge $\left\{P_\lambda^{(1)}\right\}$ mindestens einen dem Kurvenstück c_0 angehörenden Häufungspunkt P_0 besitzen, der wegen

$$P_\lambda^{(1)} Q_\lambda < n_\lambda \text{ und } P_\lambda^{(2)} Q_\lambda < n_\lambda, \text{ mithin } P_\lambda^{(1)} P_\lambda^{(2)} < 2\, n_\lambda,$$

zugleich ein Häufungspunkt der Folgen $\left\{P_\lambda^{(2)}\right\}$ und $\left\{Q_\lambda\right\}$ wäre. Sowohl aus $\left\{P_\lambda^{(1)}\right\}$ als auch aus $\left\{P_\lambda^{(2)}\right\}$ vermöchte man daher eine in beiden Fällen nebst den zugeordneten Schnittpunkten aus $\left\{Q_\lambda\right\}$ gegen P_0 konvergierende Teilfolge auszusondern, so daß jede ε-Umgebung von P_0 unbegrenzt viele Punkte jener Teilfolgen enthalten müßte. Dies würde jedoch zu der am Schluß des vorhergehenden Absatzes gemachten Feststellung im Widerspruch stehen.

Unter den oben formulierten Voraussetzungen existiert demnach ein das (offene) Kurvenstück c_0 einbettendes Gebiet B_n der x, y-Ebene derart, daß sich seine Punkte P (x, y) vermöge der Substitutionen umkehrbar-eindeutig auf ein orthogonales, aus Parallelkurven bzw. Normalen von c_0 als Koordinatenlinien gebildetes s, n-System beziehen lassen (vgl. wieder Bild 3). Dabei gilt

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s, n) = x^{(0)}(s) - n \cdot \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}, \\ y &= y(s, n) = y^{(0)}(s) + n \cdot \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

$$1 - n \cdot k(s) > 0 \text{ auf } B_n \quad \ldots \ldots \quad (42\text{a})$$

sowie bei Beachtung von (40) und (41)

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}} = \frac{1}{1 - n \cdot k(s)}, \quad (42\text{b})$$

während wegen (38a)

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)^2}} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (42\text{c})$$

wird.

Wenn die längs c_0 stetige Krümmungsverteilung $k(s)$ eine dort gleichfalls stetige Ableitung $k'(s)$ besitzt, so nehmen die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen bzw. die Kontinuitätsgleichung in dem durch (42) nebst (42a) definierten s, n-System gemäß (36) bzw. (37) die Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2} + p\right)}{1 - n \cdot k(s)} - v_n \cdot w = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}, \\ &\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2} + p\right) + v_s \cdot w = \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\partial w}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

mit

$$v^2 = v_s^2 + v_n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43\text{a})$$

und

$$w = \frac{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s}{1 - n \cdot k(s)} - \frac{\partial v_s}{\partial n} \quad \ldots \ldots \quad (43\text{b})$$

bzw.

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\left[\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot v_n\right] = 0 \quad \ldots \quad (44)$$

an. Dabei werde bezüglich der jeweiligen Lage des s, n-Systems ein für allemal die Voraussetzung getroffen, daß dem Strömungsgebiet stets die Punkte (s, n) mit $n > 0$ angehören sollen. Durch Elimination von v^2 und w geht (43) mit Berücksichtigung von (44) in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - k(s) \cdot v_n\right\} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{1}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \\ &\quad = \frac{1}{R \cdot \left\{1 - n \cdot k(s)\right\}} \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - k(s) \cdot v_n\right\}\right]\right. \\ &\quad \left. - \frac{k(s)}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\} + \frac{\partial}{\partial n}\left[\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n}\right]\right\}, \\ &\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\} + v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} \\ &\quad = \frac{1}{R \cdot \left\{1 - n \cdot k(s)\right\}} \cdot \left\{\frac{k(s)}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - k(s) \cdot v_n\right\}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{1 - n \cdot k(s)} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial n}\left[\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

über, wofür wir unter Einführung des durch

$$\varrho(s) = \frac{1}{k(s)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

definierten (nicht notwendig positiven) Krümmungsradius $\varrho(s)$ von c_0 auch

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_n}{\varrho(s)}\right\} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \\ &\quad = \frac{1}{R} \cdot \frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_n}{\varrho(s)}\right\}\right]\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{v_s}{\varrho(s)}\right\} + \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\varrho(s) - n}{\varrho(s)} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n}\right]\right\}, \\ &\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{v_s}{\varrho(s)}\right\} + v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} \\ &\quad = \frac{1}{R} \cdot \frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{1}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - \frac{v_n}{\varrho(s)}\right\}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\varrho(s)}{\varrho(s) - n} \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{v_s}{\varrho(s)}\right\}\right] + \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\varrho(s) - n}{\varrho(s)} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

schreiben können, während die zugehörige Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\varrho(s)-n}{\varrho(s)}\cdot v_n\right]=0 \quad \ldots \quad (48)$$

lautet.

Will man im Fall einer durchweg **negativen** Krümmung $k(s)$ — wie z. B. der Kreiskontur $x^2+y^2=a^2$ mit $a>0$, deren Parameterdarstellung bei radial nach außen weisender Richtung von n durch

$$x=a\cdot\cos\left(\pi-\frac{s}{a}\right),\quad y=a\cdot\sin\left(\pi-\frac{s}{a}\right)$$

gegeben ist — entgegen der mathematisch üblichen, durch (46) gekennzeichneten Auffassung mit einem **positiven** »Krümmungsradius« $r=r(s)$ rechnen, so kann man (47) und (48) durch die Substitution $\varrho(s)=-r$ umformen. Die so erhaltenen Gleichungen sind jedoch bei Anwendung auf Konturen von im Vorzeichen wechselnder Krümmung mit gebührender Vorsicht zu benutzen[7]).

B. Einführung der Grenzschichtgleichung.

1. Das Vorgehen von Prandtl und Blasius.

Den Kernpunkt der Grenzschichttheorie bildet — bei Beschränkung auf das ebene Problem — eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich unter geeigneten Voraussetzungen aus den Navier-Stokesschen Gleichungen gewinnen läßt. Sie wurde zuerst von L. Prandtl [33] im Rahmen eines kurzen Kongreßberichtes mitgeteilt, und zwar auf Grund von Erwägungen, die wir hier in enger Anlehnung an die ausführlichere Darstellung von H. Blasius [2] wiedergeben wollen[8]).

Die Betrachtungen fassen zunächst den Fall einer **ebenen Wand** ins Auge, deren Spur auf der x-Achse liegt. Für die Grenzschichtdicke wird eine Größenordnung ε eingeführt, die gegenüber der Größenordnung 1 der Funktionen

$$v_x,\ \frac{\partial v_x}{\partial t},\ \frac{\partial v_x}{\partial x},\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

als klein anzusehen sei. Dann soll die Tatsache, daß die Geschwindigkeitskomponente v_x innerhalb der Grenzschicht vom Wert Null längs der Wand auf den der äußeren Potentialströmung entsprechenden Wert von der Größenordnung 1 ansteigen muß, unmittelbar die beiden Relationen

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\sim\varepsilon^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49\,a)$$

und

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\sim\varepsilon^{-2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49\,b)$$

nach sich ziehen; des weiteren wird der Ansatz

$$v_y\sim\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50\,a)$$

mit der Bemerkung gerechtfertigt, daß die Kontinuitätsgleichung im Hinblick auf die gemachten Annahmen die Aussage

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}\sim 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50\,b)$$

liefert. Fügt man nun den einzelnen Gliedern der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen die ihnen auf diese Weise zukommenden Größenordnungen bei, so erhält man das Schema

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\cdot\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\cdot\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{R}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\
\quad 1 \qquad\quad 1\cdot 1 \qquad\quad \varepsilon\cdot\varepsilon^{-1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \qquad\quad \varepsilon^{-2}\\
\dfrac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\cdot\dfrac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\cdot\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{1}{R}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right),\\
\quad \varepsilon \qquad\quad 1\cdot\varepsilon \qquad\quad \varepsilon\cdot 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon \qquad\quad \varepsilon^{-1}
\end{array}\right\}\ (51)$$

woraus einerseits, um Reibungs- und Trägheitsterme von gleicher Größenordnung zu gewährleisten, ein Zusammenhang zwischen Reynoldsscher Zahl und Grenzschichtdicke von der Form

$$R\sim\varepsilon^{-2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51\,a)$$

andererseits

$$\frac{\partial p}{\partial x}\sim 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51\,b)$$

gefolgert wird. In der ersten Gleichung dürfe demnach das Glied $\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ vernachlässigt werden, während die zweite Gleichung sich auf

$$\frac{\partial p}{\partial y}\sim\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

reduziere; mithin könnten die innerhalb der Grenzschicht für jeweils feste Abszisse x möglichen Druckunterschiede höchstens die Größenordnung ε^2 erreichen. Dies besagt offenbar, daß die Funktionen p und $\frac{\partial p}{\partial x}$ praktisch von y unabhängig sind, und so entsteht, wenn wir $\frac{\partial p}{\partial x}$ durch $p'(x;t)$ ersetzen, die Grenzschichtgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}=-p'(x;t)+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (53)$$

in der $p'(x;t)$ die Rolle einer der Grenzschicht durch die äußere Potentialströmung »eingeprägten« **Vorgabe** spielt.

Der Einfluß einer etwaigen **Krümmung** der Kontur soll — wie von Blasius nur kurz erwähnt, etwas eingehender von K. Hiemenz [12], Fr. Noether [31], G. B. Schubauer [39] sowie S. Goldstein [9] erörtert wird — die vorgebrachten Überlegungen lediglich insofern modifizieren, als der Druckgradient in jeweils zur Wand senkrechter Richtung die Größenordnung 1, die zugehörige maximale Druckdifferenz also die Größenordnung ε besitzt, was nach wie vor mit ausreichender Genauigkeit die zu (53) völlig analoge, auf die im dritten Abschnitt von Teil A definierten Orthogonalkoordinaten s, n umgeschriebene Gleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s}+v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}=-p'(s;t)+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad (54)$$

[7]) In dem gesamten am Schluß dieses Berichts aufgeführten Schrifttum ist eine vollständig korrekte Fassung der auf das s, n-System bezogenen Bewegungsgleichungen zäher Flüssigkeiten lediglich bei W. Tollmien [43] und bei S. Goldstein [9] zu finden; indessen gebraucht Tollmien als »Krümmungsradius« der Kontur die Größe $r=-\varrho(s)$, während Goldstein bei der auch von uns gewählten Orientierung der positiven n-Richtung (und damit zugleich der positiven s-Richtung) statt (39) die Funktion $-k(s)$ als »Krümmung« verwendet.

Die ersten einschlägigen Angaben macht K. Hiemenz [12], der den »Krümmungsradius« mit $r=-\varrho(s)$ identifiziert und näherungsweise $r+n$ durch r ersetzt; die erste der so erhaltenen Relationen weist jedoch mehrere Fehler auf. Ebenso verfährt — übrigens ohne ausdrückliche Hervorhebung — Fr. Noether [31], dessen Ergebnisse auch nach Berücksichtigung dieser Korrekturen völlig unzutreffend sind.

In den von R. Fuchs [7] mitgeteilten Gleichungen wird stillschweigend sowohl $\varrho(s)$ statt $\varrho(s)-n$ geschrieben, als auch jedes Glied, bei dem n als Faktor auftritt, gestrichen; auf der rechten Seite der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung steht aber fälschlich

$$\frac{1}{\varrho(s)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n}\ \text{an Stelle von}\ -\frac{2}{\varrho(s)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n}.$$

Ein offensichtlicher Druckfehler auf der linken Seite der ersten Navier-Stokesschen Gleichung (drittes Glied) ist in R. Fuchs [8] berichtigt worden; auf der rechten Seite der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung wurde das Glied $-v_n/\varrho(s)^2$ hinzugefügt, womit dort nunmehr

$$\frac{1}{\varrho(s)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n}\ \text{durch}\ \frac{1}{\varrho(s)}\cdot\left(\frac{\partial v_s}{\partial s}-\frac{\partial v_n}{\partial n}\right)$$

zu ersetzen ist.

Dieselben Vernachlässigungen wie Fuchs nimmt G. B. Schubauer [39] vor; allein hier muß es auf der rechten Seite der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung

$$-\frac{1}{\varrho(s)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n}\ \text{statt}\ \frac{1}{\varrho(s)}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n}$$

heißen.

Die auf Grund des Fuchsschen Vorgehens aus (47) und (48) resultierenden Beziehungen finden sich bei L. Bairstow [1] und bei J. J. Green [10], allerdings wiederum ohne Erwähnung der vorgenommenen Vereinfachungen.

Schließlich führen R. v. Mises [27] bzw. H. J. Luckert [22] sowie R. v. Mises und G. Schulz [28], die stets die Größe $r=-\varrho(s)$ benutzen, auf der rechten Seite der zweiten Navier-Stokesschen Gleichung die Terme

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial v_n}{\partial s}-\frac{v_s}{r}\right)\ \text{bzw.}\ \frac{r}{r+n}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial v_n}{\partial s}-\frac{v_s}{r}\right)$$

an, während der richtige Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{r}{r+n}\cdot\left(\frac{\partial v_n}{\partial s}-\frac{v_s}{r}\right)\right]$$

lautet.

[8]) Diese Darstellung findet sich — von einigen hier im einzelnen nicht anzuführenden Lehrbüchern abgesehen — prinzipiell ungeändert bei L. Hopf [13], H. Faxén und C. W. Oseen [5], O. Tietjens [42], W. Tollmien [43], Fr. Noether [31], W. Müller [30], sowie bei S. Goldstein [9].

ergibt. Eine kritische Würdigung derartiger Gedankengänge begegnet von vornherein der grundsätzlichen Schwierigkeit, daß der bei ihnen zu entscheidender Bedeutung gelangende Größenordnungsbegriff einer für jede strengere Deduktion unentbehrlichen Präzision ermangelt. Gewiß beruhen die verschiedenen Ansätze im einzelnen durchaus auf charakteristischen Eigenschaften von Grenzschichtströmungen; allein ihr Nebeneinanderbestehen bleibt einer bündigen Beurteilung prinzipiell unzugänglich. So braucht z. B. weder dort, wo mit wachsendem Abstand von der festen Wand eine rasche Zunahme von v_x stattfindet, zugleich überall (49a) zu gelten, noch brauchen solche y- bzw. n-Intervalle, auf denen dies zutrifft, mit denjenigen Intervallen übereinzustimmen, auf denen (49b) richtig ist — die Stellen starker Steigung der Geschwindigkeitsprofile werden vielmehr im allgemeinen keineswegs mit den Stellen starker Krümmung identisch sein. Und wenn tatsächlich jedem der von R freien Glieder, die in der ersten Navier-Stokesschen Gleichung auftreten, schlechthin eine Größenordnung 1 zukäme, so wäre damit noch nicht ohne weiteres die Behauptung begründet, daß auch für die Summe jener Glieder die Zulässigkeit derselben Abschätzung gesichert sei.

2. Ergänzungen und Erweiterungen.

Welche unklaren Vorstellungen mit dem bei Diskussionen der Grenzschichtvernachlässigungen benutzten Größenordnungsbegriff verbunden werden, erhellt zur Genüge aus Äußerungen von G. B. Schubauer [39], nach denen — in im wesentlichen wörtlicher Übersetzung — eine Funktion von der Größenordnung 1 »die Werte ± 1 oder gar ± 10 erreichen, aber gelegentlich auch viel kleinere Zahlenbeträge, selbst Null, annehmen kann. Ein Faktor 10 oder möglicherweise ein größerer ist für eine Abänderung der Größenordnung noch nicht als ausreichend zu betrachten; dagegen bewirkt etwa der Faktor 100 den Übergang zu einer höheren Ordnung.« Im übrigen wird hier zwar ausdrücklich hervorgehoben, daß die in der Grenzschichtgleichung beibehaltenen Glieder in gewissen Gebieten der Grenzschicht durchaus auf die Größenordnung der bei der Herleitung jener Gleichung vernachlässigten Terme abzusinken vermögen; allein die angeschlossene Bemerkung, daß dieser Umstand »angesichts der Form der Gleichungen keinerlei bedeutsame zusätzliche Unsicherheit« zu bedingen scheint, darf doch wohl kaum als eine befriedigende Erledigung solcher Fundamentalfragen anzuerkennen sein.

Die in einer späteren Veröffentlichung von L. Prandtl [36] sowie auf grundsätzlich gleiche Weise schon früher von R. Fuchs [7] — vgl. auch die etwas abweichende Fassung in R. Fuchs [8] —, von L. Bairstow [1] und von Cl. B. Millikan [24] befolgte Methode, bei der statt y die (gleichfalls dimensionslose) Koordinate $\eta = \frac{l}{\delta} \cdot y$ mit δ als Grenzschichtdicke Verwendung findet, läuft letzten Endes auf eine rein formale Modifikation des ursprünglichen Verfahrens hinaus. Während nämlich Blasius aus $v_x \sim 1$ über (49a) auf (49b) schließt, wird jetzt die analoge Beziehung unter Berufung auf

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{l^2}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2}$$

aus der ebenso unbegründeten Annahme $\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} \sim 1$ gefolgert[9]). Im übrigen leuchtet natürlich von vornherein ein, daß eine bloße Koordinatentransformation an sich noch keinen Weg zur Überwindung prinzipieller Schwierigkeiten eröffnen kann.

Lediglich der Vollständigkeit halber ist eine Arbeit von T. Sakurai [37] zu erwähnen, in der die Grenzschichtgleichung unter naheliegender Erweiterung des Prandtl-Blasiusschen Vorgehens auf den Fall einer beliebig gegen die Grundströmung bewegten Kontur übertragen wird.

[9]) Daß hierin eine Annahme liegt, hat anscheinend bisher nur S. Goldstein [9] hervorgehoben.

Für räumliche Grenzschichtvorgänge in der Umgebung eines Festkörpers, dessen Berandung gewissen Regularitätsvoraussetzungen genügt, hat T. Levi-Civita [21] ein System von zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen abgeleitet. Dabei werden die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe des absoluten Differentialkalküls zunächst auf krummlinige, nicht notwendig orthogonale Koordinaten umgeschrieben, die alsdann auf ein orthogonales ξ, η, ζ-System spezialisiert werden, bei dem die ξ-Richtung normal zu der betr. Körperoberfläche gewählt wird, während die Gleichungen $\eta =$ konst. bzw. $\zeta =$ konst. abwickelbare orthogonale, die Flächen $\xi =$ konst. längs der Krümmungslinien schneidende Regelflächen darstellen. Nach diesen Vorbereitungen gelingt eine sehr erhebliche Vereinfachung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen an Hand von Größenordnungsabschätzungen, die voll und ganz im Rahmen der Prandtlschen Auffassung bleiben. Auf die Wiedergabe von Einzelheiten darf hier um so eher verzichtet werden, als die Levi-Civitaschen Grenzschichtgleichungen bisher noch keine Anwendung gefunden haben.

Etwas näher sind vielmehr ausschließlich axial-symmetrische Strömungen um Rotationskörper untersucht worden. Läßt man einen durch (38) unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$y^{(0)}(s) \geqq 0 \quad \text{für} \quad s_1 \leqq s \leqq s_2$$

in der x, y-Ebene erklärten Kurvenbogen c_0, der wieder allen schon früher (vgl. S. 71 und S. 72) geforderten Stetigkeitsbedingungen genügen möge, um die x-Achse rotieren, so entsteht eine Drehfläche, in deren — hinreichend klein zu wählender — Umgebung[10]) man die von $(x, 0, 0)$ verschiedenen, nicht zur Fläche gehörenden Raumpunkte (x, y, z) durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x = x(s, n, \vartheta) = x^{(0)}(s) - n \cdot \frac{d\,y^{(0)}}{d\,s}, \\ y = y(s, n, \vartheta) = h \cdot \cos\vartheta, \quad z = z(s, n, \vartheta) = h \cdot \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

mit $n > 0$ und

$$h = y^{(0)}(s) + n \cdot \frac{d\,x^{(0)}}{d\,s} > 0 \quad . \; . \; . \quad (55\text{a})$$

umkehrbar-eindeutig auf ein krummliniges Orthogonalsystem s, n, ϑ derart beziehen kann (vgl. Bild 6), daß einerseits die (dimensionslosen) Koordinaten s und n hinsichtlich c_0 dieselbe Bedeutung wie im dritten Abschnitt von Teil A besitzen, andererseits die der Einschränkung $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ unterworfene Variable ϑ das Azimut einer durch die x-Achse hindurchgelegten Halbebene bedeutet[11]). Dann gilt gemäß (24) mit Beachtung von (38a) und (39)

$$h_1 = \frac{1}{1 - n \cdot k(s)}, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = \frac{1}{h} \qquad (h > 0),$$

und da bei axialer Anströmung im Hinblick auf die Symmetrieverhältnisse

[10]) Auszunehmen wären von vornherein, falls ein Endpunkt von c_0 auf der x-Achse liegt und zugleich für ihn $\frac{d\,x^{(0)}}{d\,s} \neq 0$ gilt, die entsprechenden Flächenpunkte $\{ x^{(0)}(s_1), 0,0 \}$ bzw. $\{ x^{(0)}(s_2), 0,0 \}$.

[11]) Die dem Wert $h = 0$ und damit den auf der x-Achse gelegenen Raumpunkten $(x, 0,0)$ — sofern sie der oben erwähnten Umgebung angehören — vorerst einzuräumende Sonderstellung ist durch die Unbestimmtheit von ϑ bedingt.

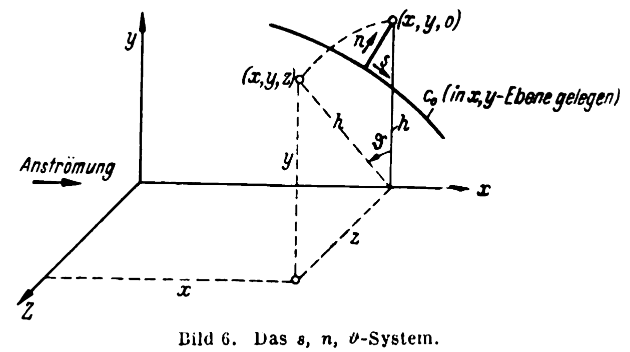


Bild 6. Das s, n, ϑ-System.

$$v_s = v_s(s,n), \quad v_n = v_n(s,n), \quad v_\vartheta = 0$$

sein muß, so reduzieren sich die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (33) für kräftefreie Bewegungen auf

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}+p\right)}{1-n\cdot k(s)} - v_n\cdot w = -\frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial w}{\partial n}+\frac{w}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial n}\right\},\\ &\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}+p\right) + v_s\cdot w = \frac{\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{w}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s}}{R\cdot\{1-n\cdot k(s)\}}\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

mit

$$v^2 = v_s^2 + v_n^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56\text{a})$$

und

$$w = \frac{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s)\cdot v_s}{1-n\cdot k(s)} - \frac{\partial v_s}{\partial n}, \quad . \; . \; . \quad (56\text{b})$$

während die Kontinuitätsgleichung (34) zu

$$\frac{\partial}{\partial s}(h\cdot v_s) + \frac{\partial}{\partial n}\left[h\cdot\{1-n\cdot k(s)\}\cdot v_n\right] = 0 \quad (57)$$

wird. Nachträglich erkennt man jetzt leicht, daß (56) und (57) auch an solchen Stellen der betrachteten Umgebung der Rotationsfläche sinnvoll bleiben, in denen $h = 0$ wird. Denn denkt man sich die in Frage kommenden Punkte der x, y-Ebene für den Augenblick statt durch (s, n) nebst $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ wieder durch (x, y) erfaßt, so gilt $h = |y|$ sowie

$$w_z(x,y) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

mit

$v_x(x, -y) = v_x(x, y), \quad v_y(x, -y) = -v_y(x, y)$ für $y > 0$; aus Stetigkeitsgründen haben wir daher

$$[w_z(x,y)]_{y=0} = 0,$$

mithin wegen $w = \pm w_z(x, y)$ auch

$$[w]_{h=0} = [w(s,n)]_{h=0} = 0$$

zu setzen, und bei jedem längs einer glatten Kurve $x = x(y)$ erfolgenden Übergang auf die x-Achse wird

$$\lim_{h\to 0}\frac{w}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{[w(x,y)]_{x=x(y)}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{d}{dy}[w(x,y)]_{x=x(y)}.$$

Damit ist aber unsere — für (57) selbstverständliche — Behauptung bezüglich (56) bereits bewiesen.

Als Grundlage der zugehörigen Grenzschichttheorie hat zunächst E. Boltze [3] — und zwar im wesentlichen unter Verzicht auf explizite Benutzung der vollständigen Bewegungsgleichungen[12]) — durch anschauliche, sogleich mit Größenordnungsbetrachtungen im Sinne von Prandtl-Blasius verbundene Überlegungen die Beziehungen

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad (58)$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim -\frac{v_s^2}{h} \sim 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58\text{a})$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial s}(h\cdot v_s) + \frac{\partial}{\partial n}(h\cdot v_n) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

gewonnen. Bei konsequenter Anwendung der im ersten Abschnitt dieses Paragraphen dargelegten Methode vereinfachen sich tatsächlich die erste der Gleichungen (56) bzw. Gleichung (57) zu den Relationen (58) bzw. (59); dagegen muß (58a) in

$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim -\frac{v_s^2}{\varrho(s)} \sim 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

abgeändert werden.

Cl. B. Millikan [24] — dem die Arbeit von Boltze unzugänglich war — beginnt zwecks Herleitung der Grenzschichtgleichung für symmetrisch umströmte Rotationskörper mit der Bemerkung, daß sich das s, n, ϑ-System bei hinreichend schwach gekrümmtem Kurvenstück c_0 in erster Näherung durch

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = \frac{1}{h}$$

charakterisieren lasse; dies ergibt gemäß (33)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s}\\ &\quad = \frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial s\,\partial n} - \frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial n}\cdot\left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial n}\right)\right\},\\ &\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n}\\ &\quad = \frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial s\,\partial n} + \frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s}\cdot\left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial n}\right)\right\},\end{aligned}$$

entspricht aber keineswegs dem offensichtlichen Ziel des Verfassers, diejenige Form der Bewegungsgleichungen zu bekommen, die — natürlich erst nach Ausführung der Differentiationen $\frac{\partial w}{\partial s}$ und $\frac{\partial w}{\partial n}$ — aus (56) bei Ersatz von $1 - n\cdot k(s)$ durch 1 hervorgeht[13]). Alsdann werden die Substitutionen

$$n = \frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\eta, \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{R}}\cdot v_\eta(s,\eta)$$

angewendet (vgl. hierzu S. 74) und nach Streichung sämtlicher Glieder, die hierbei eine höhere als die erste Potenz von $\frac{1}{\sqrt{R}}$ als Faktor erhalten, wieder rückgängig gemacht. Die so gefundene Beziehung

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} + \frac{1}{h}\cdot\frac{\partial h}{\partial n}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

stimmt nicht mit (58) überein — sehr einfach deshalb nicht, weil $\frac{\partial h}{\partial n} = \sqrt{R}\cdot\frac{\partial h}{\partial \eta}$ geschrieben und keineswegs bedacht wird, daß die rein geometrische Größe $\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{d\,x^{(0)}}{ds} = \cos(s, x)$ von R völlig unabhängig ist!

M. H. Lyon [23] hat (61) von Millikan übernommen, für ihre Rechnungen jedoch die Gleichung (58) benutzt, die sie ihrerseits an Hand einer Größenordnungsüberlegung aus (61) folgert.

Auf die sich speziell auf die Grenzschichttheorie an einer Kugel beziehende Arbeit von A. Miyadzu [29] kommen wir am Schluß des ersten Abschnitts von Teil C zurück.

3. Die Grenzschichtvernachlässigungen in systematischer Betrachtungsweise.

Um den physikalischen und mathematischen Sinn der Grenzschichttheorie unter scharfer Formulierung sämtlicher einschlägigen Einzelheiten möglichst klar herauszuschälen, knüpfen wir unsere Untersuchungen an das ebene Problem einer im allgemeinen instationären Profilströmung an[14]).

Die hinsichtlich Gestalt und Lage zeitlich unveränderliche Profilkontur C_0 sei als eine geschlossene Kurve der x, y-Ebene vorgegeben. Wir betrachten fortan nur eines der beiden in einem — erst weiter unten durch die Forderungen I implizit festgelegten — Punkt Q_0 beginnenden (stromabwärts sich erstreckenden) Stücke von C_0, nennen dieses c_0 und denken uns dessen Punkte $Q = Q(s)$ durch die ihnen entsprechende, von Q_0 aus gezählte Bogenlänge $s \geqq 0$ voneinander unterschieden (vgl. Bild 7).

Der Krümmungsverlauf von c_0 werde durch eine überall stetige und stetig differenzierbare Funktion $k(s)$ dargestellt, mithin c_0 als ein durchweg glatt gekrümmtes Kurvenstück angenommen. Alsdann kann c_0 (bis auf seine End-

[12]) Die Gleichungen (56) bzw. (57) werden überhaupt nicht angeführt bzw. unmittelbar in der Form (59) erhalten — letzteres deshalb, weil sowohl die Kontinuitätsgleichung in allgemeinen Orthogonalkoordinaten (l. c. S. 7) als auch der Wert der einschlägigen Funktionaldeterminante (l. c. S. 8) unrichtig wiedergegeben sind.

[13]) Denselben Fehlschluß macht S. Goldstein [9], der auf diese Weise mit Hilfe von Größenordnungsabschätzungen zu (58) gelangt.

[14]) Die folgenden Darlegungen sind eine wörtliche Wiedergabe der Abschnitte 4. bis 8. der Arbeit von H. Schmidt und K. Schröder [38].

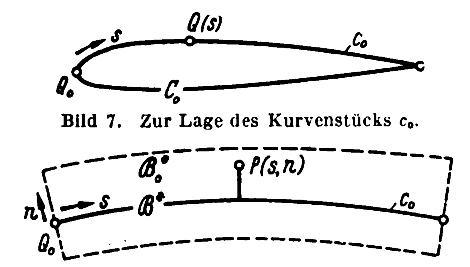


Bild 7. Zur Lage des Kurvenstücks c_0.

Bild 8. Die Gebiete B^* und B_0^*.

punkte) in ein Gebiet B^* eingebettet werden, dessen Punkte $P(x, y)$ sich ausnahmslos umkehrbar eindeutig auf das aus den Parallelkurven bzw. Normalen von c_0 gebildete orthogonale s, n-System beziehen lassen (vgl. hierzu den dritten Abschnitt von Teil A); die Berandung von B^* bestehe aus zwei auf entgegengesetzten Seiten von c_0 gelegenen Parallelkurven sowie den beiden in den Endpunkten von c_0 errichteten Normalen (vgl. Bild 8). Das dem Strömungsfeld um die Profilkontur C_0 angehörende Teilgebiet von B^* werden mit B_0^* bezeichnet. Ohne wesentliche Einschränkung sei sodann unter c_0 speziell derjenige Teilbogen von C_0 verstanden, dessen positive Normalen in das Innere von B_0^* weisen, so daß für jeden Punkt $P(s, n)$ von B_0^* stets $n > 0$ gilt.

Indem wir lediglich die in B_0^* sich abspielenden Vorgänge ins Auge fassen, präzisieren wir nunmehr die bereits in der Einleitung angeführte Erfahrungstatsache zu den folgenden, für die ganze Theorie fundamentalen, der Übersichtlichkeit halber in drei Gruppen gegliederten Voraussetzungen[15]:

I. Bei jeder Reynoldsschen Zahl $R > R_0$ mit hinreichend großem $R_0 > 0$ existieren zu jedem Zeitpunkt $t > 0$

1. eine größte (u. U. mit der Bogenlänge von c_0 übereinstimmende, allenfalls mit R variierende) positive Größe $s_0 = s_0(t)$, so daß
$$v_s > 0 \text{ für } 0 < s \leq s_0,\ t > 0 \text{ und jedes } n > 0 \qquad (62)$$
bleibt;

2. ein stetiges, durch $n = d$ mit
$$d = d(s, t;\ R) > 0 \text{ für } 0 < s \leq s_0,\ t > 0$$
eindeutig erfaßtes Kurvenstück $c_1 = c_1(t; R)$ sowie eine positive, von s und t unabhängige Größe $\varepsilon = \varepsilon(R)$ derart, daß neben
$$0 \leq |w(s, n, t)| < \varepsilon \text{ für } n > d\ (0 \leq s < s_0,\ t > 0) \qquad (63\text{a})$$
zugleich
$$\lim_{R \to \infty} d(s, t;\ R) = 0 \quad (0 \leq s \leq s_0,\ t > 0) \quad . \ . \qquad (63\text{b})$$
und
$$\lim_{R \to \infty} \varepsilon(R) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (63\text{c})$$
zutrifft;

3. der Grenzwert
$$\lim_{R \to \infty} [v_s]_{n=d} = U_s \quad (0 < s \leq s_0,\ t > 0) \ . \ . \ . \qquad (64)$$
mit
$$U_s = U_s(s, t) > 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (64\text{a})$$

Das von c_0, c_1 und den in Q_0 bzw. $Q(s_0)$ gezogenen c_0-Normalen berandete Teilgebiet
$$0 < s < s_0, \quad 0 < n < d$$
von B_0^* nennen wir B_1^* und seinen Rand C_1^* (vgl. Bild 9).

II. Des weiteren sei (vgl. Bild 10) bei festem $R > R_0$ jedem positiven, für spätere Zwecke sogleich der Einschränkung $0 < \Theta < 1$ unterworfenen Θ ein in dem Bereich $B_1^* + C_1^*$ gelegenes, durch $n = \delta > 0$ mit
$$\delta = \delta(s, t;\ R, \Theta) \leq d \quad \text{für} \quad 0 < s \leq s_0,\ t > 0)$$
eindeutig beschriebenes Kurvenstück $c = c(t; R, \Theta)$ derart zugeordnet, daß für die Geschwindigkeitskomponente v_s der Grenzwert

[15]) Bei unseren Überlegungen, die sich auf den Grenzübergang $R \to \infty$ beziehen, nehmen wir auf den Umstand, daß die Bewegung oberhalb eines gewissen kritischen Werts von R turbulent wird, keinerlei Rücksicht. Die auf diese Weise in asymptotischer Näherung erhaltenen Ergebnisse denken wir uns lediglich als Aussagen über laminare Strömungsvorgänge mit großem R gewertet.

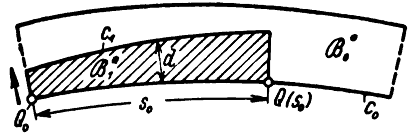




Bild 9. B_1^* als Teilgebiet von B_0^*.

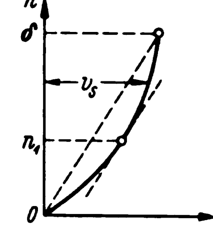


Bild 11. Die Bedeutung von $n = n_1$.

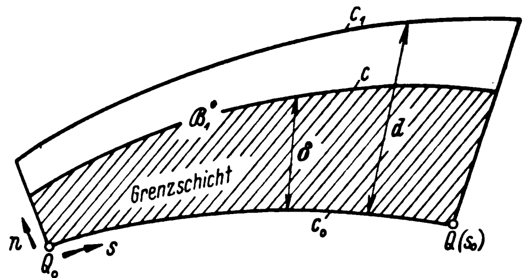


Bild 10. Die Grenzschicht als Teilgebiet von B_1^*.

$$\lim_{R \to \infty} [v_s]_{n=\delta} = V_s \quad (0 < s \leq s_0,\ t > 0) \qquad (65)$$
mit
$$V_s = V_s(s, t;\ \Theta) > 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \qquad (65\text{a})$$
und
$$|V_s - U_s| < \Theta \quad (0 < \Theta < 1) \ . \ . \ . \ . \qquad (65\text{b})$$
existiert. Nun gibt es dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung zufolge ein dem offenen Intervall $0 < n < \delta$ angehörendes $n_1 = n_1(s, t;\ R, \Theta)$, mit dem unter Beachtung der ersten der beiden Haftbedingungen
$$\lim_{n \to 0} v_s = 0, \quad \lim_{n \to 0} v_n = 0 \quad (0 \leq s \leq s_0,\ t > 0) \qquad (66)$$
nach Wahl von s aus $0 < s \leq s_0$, von $t > 0$ sowie von $R > R_0$ und Θ aus $0 < \Theta < 1$ die Beziehung
$$[v_s]_{n=\delta} = \delta \cdot \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} \quad (0 < n_1 < \delta) \qquad (67)$$
besteht (vgl. Bild 11). Wegen (65) wird daher
$$\lim_{R \to \infty} \left\{\delta \cdot \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1}\right\} = V_s, \quad . \ . \ . \ . \qquad (68)$$
eine Feststellung, die wir durch die durchaus wesentliche, in ihrer anschaulichen Bedeutung leicht zu überblickende Voraussetzung ergänzen, daß einerseits n_1 gemäß
$$\frac{\partial v_s}{\partial n} \neq \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} \text{ für jedes } n \text{ aus } n_1 < n < \delta \qquad (69)$$
als jeweils größte derartige Zahl angesehen werden kann, andererseits mit von s, t und R unabhängigen positiven Zahlen α bzw. β für jedes $R > R_0$ stets
$$\frac{\delta - n_1}{\delta} \geq \alpha \quad (\alpha > 0) \quad . \ . \ . \ . \ . \qquad (69\text{a})$$
bzw.
$$\frac{n_0 - n_1}{\delta} \geq \beta \quad (\beta > 0) \quad . \ . \ . \ . \ . \qquad (69\text{b})$$
ausfällt, je nachdem sich beim $\frac{\partial v_s}{\partial n}$-Verlauf für n aus $n_1 < n \leq \delta$ die Möglichkeit (vgl. wieder Bild 11)
$$\frac{\partial v_s}{\partial n} > 0 \text{ für jedes } n \text{ aus } n_1 < n \leq \delta \qquad (70\text{a})$$
bzw. (vgl. Bild 12)
$$\frac{\partial v_s}{\partial n} \begin{cases} > 0 \text{ für } n_1 < n < n_0 & (n_0 < \delta), \\ = 0 \text{ für } n = n_0, \\ < 0 \text{ für } n_0 < n < n_0 + \varepsilon_0 & (\varepsilon_0 > 0;\ n_0 + \varepsilon_0 \leq \delta) \end{cases} \qquad (70\text{b})$$
verwirklicht findet[16]). Ferner sei, falls der durch (70a) gekennzeichnete Fall vorliegt, für $R > R_0$ die Abschätzung

[16]) Man beachte, daß die Funktion $\frac{\partial v_s}{\partial n}$ an der Stelle $n = n_1$ gemäß (62) und (67) gewiß positiv ist, während sie nach der weiter unten gewonnenen Identität (76) wegen (64a) an der Stelle $n = d$ für hinreichend großes R das Vorzeichen von $k(s)$ besitzt.

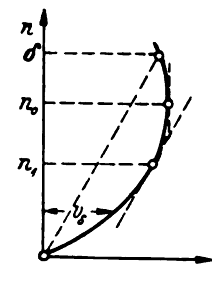


Bild 12. Die Bedeutung von $n = n_1$.

$$\frac{\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta}}{\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1}} \leq \Theta \qquad (0 < s \leq s_0,\ t > 0) \quad . \ . \ (71)$$

zutreffend[17]).

Das durch das Kurvenstück c von B_1^* abgetrennte Teilgebiet

$$0 < s < s_0, \qquad 0 < n < \delta$$

sehen wir (vgl. nochmals Bild 10) als den Träger der **Grenzschicht** an[18]). Die **Grenzschichtdicke** δ sei bei festem t, festem R und festem Θ eine auf ihrem abgeschlossenen Definitionsintervall $0 \leqq s \leqq s_0$ stetige Funktion von s.

III. Im Einklang mit physikalischen Erwägungen erscheint schließlich die Erwartung berechtigt, daß sich die Funktionen

$$v_s,\ \frac{\partial v_s}{\partial t},\ \frac{\partial v_s}{\partial s},\ \frac{\partial^2 v_s}{\partial s\, \partial t},\ \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} \text{ sowie } \frac{\partial p}{\partial s}$$

für $R \to \infty$ **beschränkt** verhalten, und zwar **gleichmäßig** für alle Werte von s aus $0 \leq s \leq s_0$, von n aus $0 < n \leq d$ und von $t > 0$. Demnach dürfen und werden wir die Relationen

$$\left.\begin{array}{c} v_s = O(1), \quad \frac{\partial v_s}{\partial t} = O(1), \quad \frac{\partial v_s}{\partial s} = O(1), \\ \frac{\partial^2 v_s}{\partial s\, \partial t} = O(1), \quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} = O(1) \\ (0 \leq s \leq s_0, \quad 0 < n < d, \quad t > 0) \end{array}\right\} \quad (72\text{a})$$

sowie

$$\frac{\partial p}{\partial s} = O(1) \quad (0 \leq s \leq s_0,\ 0 < n \leq d,\ t > 0) \quad (72\text{b})$$

postulieren, während hinsichtlich der Normalkomponente der Geschwindigkeit lediglich die Richtigkeit der recht vorsichtigen Abschätzung

$$\delta \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2} = O(1) \quad (0 \leq s \leq s_0,\ 0 < n \leq \delta,\ t > 0) \quad (72\text{c})$$

verlangt werden muß[19]).

Nachdem hiermit — bis auf eine einzige, die Berücksichtigung der Zähigkeitswirkungen betreffende, erst später (S. 78) zu erwähnende Ausnahme — diejenigen Hypothesen aufgezählt sind, die wir einer rationellen Theorie laminarer Grenzschichten in inkompressiblen Flüssigkeiten zugrunde legen, gehen wir jetzt zu den aus ihnen unter Berufung auf die zuständigen Bewegungsgleichungen (vgl. hierzu S. 72)

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - k(s) \cdot v_n\right\} + \frac{\partial p}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_s \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\}}{1 - n \cdot k(s)} + v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\partial w}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (73)$$

mit

$$w = \frac{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s}{1 - n \cdot k(s)} - \frac{\partial v_s}{\partial n} \quad . \ . \ . \ . \ (73\text{a})$$

und

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\left[\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot v_n\right] = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (74)$$

zu ziehenden **Folgerungen** über.

Wir beginnen mit der Kontinuitätsgleichung (74), die durch Integration nach n im Hinblick auf die zweite der Haftbedingungen (66) zu

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot v_n = -\int_0^n \frac{\partial v_s}{\partial s}\, dn$$

und damit durch Differentiation nach t bzw. s zu

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} = -\int_0^n \frac{\partial^2 v_s}{\partial s\, \partial t}\, dn$$

bzw.

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial s} - n \cdot k'(s) \cdot v_n = -\int_0^n \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}\, dn$$

führt. Mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir daher die Beziehungen

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot v_n = -n \cdot \left[\frac{\partial v_s}{\partial s}\right]_{n = n_1^*} \qquad (0 < n_1^* < n),$$

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} = -n \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial s\, \partial t}\right]_{n = n_2^*} \qquad (0 < n_2^* < n),$$

$$\left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial s} - n \cdot k'(s) \cdot v_n = -n \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}\right]_{n = n_3^*} \qquad (0 < n_3^* < n),$$

die für jedes n aus $0 < n \leq d^*$ mit $0 < d^* \leq d$ wegen

$$n = O(d^*) \qquad (0 < n < d^*)$$

sowie wegen (72a) die Aussagen

$$\left.\begin{array}{c} v_n = O(d^*), \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} = O(d^*), \quad \frac{\partial v_n}{\partial s} = O(d^*) \\ (0 < s < s_0, \quad 0 < n \leq d^*, \quad t > 0) \end{array}\right\} \quad (75)$$

ergeben[20]). Sodann bedienen wir uns neben der in der Form

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} - k(s) \cdot v_n = 0$$

geschriebenen Kontinuitätsgleichung der daraus durch Differentiation nach s hervorgehenden Identität

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \left\{1 - n \cdot k(s)\right\} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial n\, \partial s} - k'(s) \cdot \left\{v_n + n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n}\right\} - k(s) \cdot \frac{\partial v_n}{\partial s} = 0,$$

um nacheinander die Gültigkeit der beiden Abschätzungen

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = O(1) \quad (0 \leqq s \leq s_0,\ 0 < n \leq d^*,\ t > 0) \quad (75\text{a})$$

und

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial n\, \partial s} = O(1) \quad (0 \leq s \leq s_0,\ 0 < n < d^*,\ t > 0) \quad (75\text{b})$$

einzusehen.

Da sich gemäß (73a)

$$\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=d} = \frac{\left[\frac{\partial v_n}{\partial s}\right]_{n=d} + k(s) \cdot [v_s]_{n=d}}{1 - d \cdot k(s)} - [w]_{n=d}$$

[17]) Bezüglich der anschaulichen Deutung dieser Voraussetzung ist zu bedenken, daß $\frac{\partial v_s}{\partial n}$ gemäß (76) bzw. (68) für $R \to \infty$ an der Stelle $n = d$ einem endlichen Grenzwert zustrebt, an der Stelle $n = n_1$ dagegen unbegrenzt wächst.

[18]) In dem zwischen $n = \delta$ und $n = d$ gelegenen Teilgebiet von B_1^* vollzieht sich — anschaulich-physikalisch gesprochen — der Übergang von den durch die Zähigkeit beeinflußten Grenzschichtvorgängen längs der Wand zu der äußeren, praktisch als Potentialströmung gedeuteten Flüssigkeitsbewegung; die dort herrschende Strömung wird also angenähert als **reibungslos**, nicht aber zugleich als **wirbelfrei** anzusehen sein.

Ein entsprechender, auch von T. **Levi-Civita** [21] erwähnter Hinweis findet sich (auf S. 123) bei L. **Hopf** [13].

[19]) Ist $f(R)$ eine für keinen Wert von $R > 0$ verschwindende Funktion von R, so pflegt man, falls mit festem positiven M

$$\left|\frac{F(R)}{f(R)}\right| < M \text{ für } R \to \infty \text{ bzw. } \lim_{R \to \infty} \frac{F(R)}{f(R)} = 0$$

gilt, kurz

$$F(R) = O(f(R)) \text{ bzw. } F(R) = o(f(R))$$

zu schreiben — eine Symbolik, von der wir im folgenden fortgesetzt Gebrauch machen.

[20]) Ein für allemal sei hier hervorgehoben, daß alle im folgenden gewonnenen Abschätzungen **gleichmäßig** für die jeweils in Betracht kommenden Variablen-Intervalle gelten.

berechnet, so lehren (63b), (64) und (75) für $d^* = d$ in Verbindung mit (63a) und (63c) unmittelbar

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=d} = k(s) \cdot U_s \quad (0 < s \leq s_0, \ t > 0). \quad (76)$$

Ferner läßt sich (69) aus Stetigkeitsgründen unter der Voraussetzung (70a) bzw. (70b) wegen (71) zu

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} < \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} \text{ für jedes } n \text{ aus } n_1 < n \leq \delta \quad (77\text{a})$$

bzw. zu

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} < \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} \text{ für jedes } n \text{ aus } n_1 < n < n_0 \quad (77\text{b})$$

präzisieren, mithin (67) zu

$$\delta \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} = O(1) \quad \text{für} \quad n_1 \leq n \leq \delta \quad . \ . \ . \quad (78\text{a})$$

bzw. zu

$$\delta \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} = O(1) \quad \text{für} \quad n_1 \leq n < n_0 \quad . \ . \quad (78\text{b})$$

ergänzen.

Wenn wir nunmehr den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jeweils feste Werte von s aus $0 < s \leq s_0$, von $t > 0$, von $R > R_0$ und von Θ aus $0 < \Theta < 1$ sowie für irgendein n aus $n_1 \leq n \leq \delta$ auf die stetig nach n differenzierbare Funktion $\frac{\partial v_s}{\partial n}$ gemäß

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} + (n - n_1) \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right]_{n=n^*} \qquad (n_1 < n \leq \delta)$$

mit

$$n^* = n^*(s, n, t; \ R, \Theta) \quad \text{und} \quad n_1 < n^* < n$$

anwenden, so gelangen wir — indem wir bei Vorliegen von (70a) bzw. (70b) die Wahl $n = \delta$ bzw. $n = n_0$ treffen — durch Multiplikation mit δ einerseits zu

$$\delta \cdot (\delta - n_1) \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right]_{n=n_2} = \delta \cdot \left\{\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta} - \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1}\right\}$$

$$\text{mit } n_2 = [n^*]_{n=\delta},$$

andererseits unter Beachtung von (68) wegen

$$\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_0} = 0$$

zu

$$\lim_{R \to \infty} \left\{\delta \cdot (n_0 - n_1) \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right]_{n=n_2}\right\} = -V_s$$

$$\text{mit } n_2 = [n^*]_{n=n_0}.$$

Da aber mit (70a) bzw. (71) die Abschätzungen

$$\delta \cdot \left\{\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} - \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta}\right\} < \delta \cdot \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} = [v_s]_{n=\delta}$$

bzw.

$$\delta \cdot \left\{\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1} - \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta}\right\} \geq \delta \cdot (1 - \Theta) \cdot \left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=n_1}$$

$$= (1 - \Theta) \cdot [v_s]_{n=\delta}$$

gelten, so darf in beiden Fällen wegen (69a) bzw. (69b) auf

$$\delta^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right]_{n=n_2} = O(1) + o(1) \quad . \ . \ . \ . \quad (79)$$

und hiermit wiederum auf

$$\delta^2 \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{n=n_2} = O(1) + o(1) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (80)$$

geschlossen werden; denn gemäß

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\frac{\partial^2 v_n}{\partial s \, \partial n} + k(s) \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n}}{1 - n \cdot k(s)} + \frac{k(s) \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\}}{\left\{1 - n \cdot k(s)\right\}^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (81)$$

gilt bei Beachtung von (75b) und (75) für $d^* = \delta$ sowie von (72a) mit Rücksicht auf (78a) bzw. (78b) gewiß

$$\delta^2 \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right) = o(1) \quad \text{für} \quad n_1 \leq n < \delta \ . \ . \quad (81\text{a})$$

bzw.

$$\delta^2 \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right) = o(1) \quad \text{für} \quad n_1 \leq n \leq n_0, \quad (81\text{b})$$

so daß immer

$$\delta^2 \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right]_{n=n_2} = o(1)$$

ist.

Andererseits zeigt die erste der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (73), daß sich $\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}$ für $R \to \infty$ wegen (72a), (72b) und (75) mit $d^* = \delta$ sowie wegen (78a) bzw. (78b) für jedes n aus $n_1 \leq n \leq \delta$ bzw. $n_1 \leq n \leq n_0$ beschränkt verhält; insbesondere muß demnach bei den beiden zuvor erläuterten, mit (70a) bzw. (70b) im Zusammenhang stehenden Bedeutungen von n_2 stets

$$\frac{1}{R} \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{n=n_2} = O(1) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (82)$$

sein.

Diese Tatsache erweitern wir nunmehr zu

$$\frac{1}{R} \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]_{n=n_2} = O(1) + o(1) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (83)$$

und sehen die hiermit vorgenommene, bereits oben angekündigte Vervollständigung unserer Voraussetzungen als eine unmittelbare analytische Auswirkung der physikalischen Forderung an, daß die Vorgänge in der Grenzschicht auch bei kleinen Beträgen der kinematischen Zähigkeit ν noch immer sehr wesentlich durch den Einfluß der Flüssigkeitsreibung bestimmt werden sollen[21]).

Indem wir alsdann (80) mit (83) über

$$R \cdot \delta^2 = O(1) + o(1) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (84)$$

zu

$$\delta = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (85)$$

kombinieren, haben wir als erstes Ergebnis der Grenzschichttheorie eine scharf erfaßte asymptotische Verknüpfung zwischen der Grenzschichtdicke δ und der Reynoldschen Kennzahl R in Händen.

Integriert man die auf die s-Richtung bezügliche Bewegungsgleichung für festes s aus $0 \leq s \leq s_0$ und festes $t > 0$ nach n, und zwar für (70a) bzw. (70b) von n bis δ bzw. von n bis n_0, so wird gemäß (73)

$$J_1^{(1)} + J_2^{(1)} = -\frac{1}{R} \cdot [w]_{n=\delta} + \frac{w}{R} \qquad (0 < n \leq \delta) \quad (86\text{a})$$

bzw.

$$J_1^{(2)} + J_2^{(2)} = -\frac{1}{R} \cdot [w]_{n=n_0} + \frac{w}{R} \qquad (0 < n \leq \delta) \quad (86\text{b})$$

mit

$$J_1^{(1)} = \int_n^\delta \left\{\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial s} - k(s) \cdot v_n\right\} + \frac{\partial p}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)}\right\} dn$$

und

$$J_2^{(1)} = \int_n^\delta v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} \, dn = [v_s \cdot v_n]_n^\delta - \int_n^\delta v_s \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} \, dn,$$

während $J_1^{(2)}$, $J_2^{(2)}$ aus $J_1^{(1)}$, $J_2^{(1)}$ nach Ersatz der oberen Integrationsgrenze δ durch n_0 hervorgehen. Auf Grund von (72a) und (72b) sowie von (75) und (75a) für $d^* = \delta$ gilt aber

$$J_1^{(1)} = O(\delta), \quad J_2^{(1)} = O(\delta) \quad (0 < n \leq \delta) \ . \ . \quad (87\text{a})$$

und

$$J_1^{(2)} = O(\delta), \quad J_2^{(2)} = O(\delta) \quad (0 < n \leq \delta), \ . \ . \quad (87\text{b})$$

so daß (86a) bzw. (86b) unter Verwendung von (73a) mit (78a) bzw. (78b) stets das Resultat

---

[21]) Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß wir den hier betrachteten Zähigkeitseinfluß lediglich an der durch (79) geometrisch-anschaulich gekennzeichneten Stelle $n = n_2$ postulieren; im übrigen kann natürlich auch innerhalb der Grenzschicht (z. B. in Wendepunkten der v_s-Profile) durchaus $\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} = o(1)$ werden.

$$\delta \cdot w = O(1) \text{ für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta \quad . \; . \; (88)$$

sichert, auf das sich ihrerseits gemäß (73a) die Relation

$$\delta \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} = O(1) \text{ für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta \quad . \; . \; (89)$$

stützt. Hiermit ergeben (73) bzw. (81) sofort

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} = O(1) \text{ für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta \quad . \; . \; (90)$$

bzw.

$$\delta \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right) = O(1) \text{ für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta, \; (91)$$

und aus der Identität

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} = {} & \frac{\frac{\partial^2 v_n}{\partial s^2} + k(s) \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + k'(s) \cdot v_s}{1 - n \cdot k(s)} \\ & + \frac{n \cdot k'(s) \cdot \left\{\frac{\partial v_n}{\partial s} + k(s) \cdot v_s\right\}}{\{1 - n \cdot k(s)\}^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s}\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

läßt sich in Verbindung mit (72c) mühelos die Abschätzung

$$\delta \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s}\right) = O(1) \text{ für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta \quad (92\text{a})$$

herleiten.

Schreiben wir jetzt die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (73) unter Benutzung von (81) und (92) in der Form

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = \delta \cdot H_1(s, n, t; R),$$

$$k(s) \cdot v_s^2 + \{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s} = \delta \cdot H_2(s, n, t; R),$$

indem wir zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$H_1(s, n, t; R) = -\frac{1}{R \cdot \delta^2} \cdot \left\{\delta \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{n}{\delta} \cdot k(s) \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{v_n}{\delta} \cdot \left(\delta \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n}\right)\right\} + k(s) \cdot v_s \cdot \frac{v_n}{\delta}$$

und

$$H_2(s, n, t; R) = \frac{1}{R \cdot \delta^2} \cdot \left\{\delta \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s}\right)\right\} - v_s \cdot \left(\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial s}\right)$$
$$- \{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \left(\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v_n}{\delta} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n}\right)$$

wählen, so lehren (72a), (75) für $d^* = \delta$, (84) sowie (89), (90), (91) bzw. (75a) für $d^* = \delta$, (92a) sowohl

$$H_1(s, n, t; R) = O(1) \quad \text{für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta$$

als auch

$$H_2(s, n, t; R) = O(1) \quad \text{für jedes } n \text{ aus } 0 < n \le \delta.$$

Demnach wird für jedes n aus $0 < n \le \delta$ gewiß

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = O(\delta), \\ k(s) \cdot v_s^2 + \{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s} = O(\delta),\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

eine Tatsache, die wir im Hinblick auf das uns vorschwebende Ziel einer planmäßig vereinfachten Theorie zum Anlaß nehmen wollen, die für die Grenzschichtvorgänge maßgeblichen Bewegungsgleichungen in asymptotischer Näherung auf

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \\ (0 < s < s_0, \quad 0 < n < \delta, \quad t > 0)\end{aligned}\right\} \quad (94\text{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned}k(s) \cdot v_s^2 + \{1 - n \cdot k(s)\} \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s} \\ (0 < s < s_0, \quad 0 < n < \delta, \quad t > 0)\end{aligned}\right\} \quad (94\text{b})$$

zu reduzieren.

Um mit Hilfe dieser Relationen die Grenzschichtgleichung in ihrer **definitiven** Gestalt zu gewinnen, lösen wir (94b) gemäß

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -k(s) \cdot \frac{v_s^2}{1 - n \cdot k(s)} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s}}{1 - n \cdot k(s)}$$

nach $\frac{\partial p}{\partial n}$ auf und gelangen durch Integration nach n wegen [21a]

$$\int_0^n \frac{\frac{\partial^2 v_s}{\partial n \, \partial s}}{1 - n \cdot k(s)} dn = \frac{\frac{\partial v_s}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} + k(s) \cdot \int_0^n \frac{\frac{\partial v_s}{\partial s}}{\{1 - n \cdot k(s)\}^2} dn$$

zu

$$p - [p]_{n \to 0} = -\frac{\frac{\partial v_s}{\partial s}}{R \cdot \{1 - n \cdot k(s)\}}$$
$$- k(s) \cdot \int_0^n \frac{\{1 - n \cdot k(s)\} \cdot v_s^2 + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s}}{\{1 - n \cdot k(s)\}^2} dn.$$

Hieraus fließt nun — wie man ohne Durchführung der Rechnung im einzelnen sogleich übersieht — bei Differentiation nach s

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} [p]_{n \to 0} = O(\delta) \qquad (0 < n < \delta) \quad . \; . \; (95)$$

und damit natürlich auch

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \left[\frac{\partial p}{\partial s}\right]_{n \to \delta} = O(\delta) \qquad (0 < n < \delta)$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial s} = p'(s; t) + O(\delta) \qquad (0 < n < \delta) \quad . \; . \; . \; . \; (96)$$

mit

$$p'(s; t) = \left[\frac{\partial p}{\partial s}\right]_{n \to \delta}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (96\text{a})$$

Einsetzung von (96) in (94a) liefert alsdann die Beziehung

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + p'(s; t) - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = O(\delta),$$

die wir — im Zuge der zuvor bereits vorgenommenen Vernachlässigungen durchaus folgerichtig — zu der **endgültigen Grenzschichtgleichung**

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} + p'(s; t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \\ (0 < s < s_0, \; 0 < n < \delta, \; t > 0)\end{aligned}\right\} \quad (97)$$

vereinfachen. Ihr stellt sich — wiederum bei analogem Vorgehen — die **Kontinuitätsgleichung** in der Form

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0 \qquad (0 < s < s_0, \; 0 < n < \delta, \; t > 0) \qquad (98)$$

zur Seite, da gemäß (74)

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = k(s) \cdot \left\{v_n + n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n}\right\},$$

wegen (75) und (75a) mit $d^* = \delta$ aber

$$v_n + n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial n} = O(\delta)$$

gilt.

Die gemäß (96a) auf dem Intervall $0 < s < s_0$ für jedes $t > 0$ definierte, in der Grenzschichttheorie als **Vorgabe** aufgefaßte Funktion $p'(s; t)$ wäre grundsätzlich durch den Druckgradienten der Strömung längs der Kurve $n = \delta$ festzulegen. Jene Strömung kann jedoch im allgemeinen nicht ermittelt werden; sie wird ja keineswegs allein durch den geometrischen Charakter der jeweiligen Profilkontur, sondern zugleich auch ganz wesentlich durch die in Gebieten mit $s > s_0$ sich abspielenden physikalischen Vorgänge bedingt. Daher ist man bei fast allen Anwendungen der Theorie auf die Verwertung von **Druckverteilungsmessungen** angewiesen, und so gewinnt die auf (95) sich gründende Bemerkung, daß im Rahmen der hier für aus-

[21a]) Hier — und fortan immer — wird angenommen, daß die in den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen vorkommenden Funktionen beim Übergang von B_0 auf C_0 endlichen Grenzwerten zustreben.

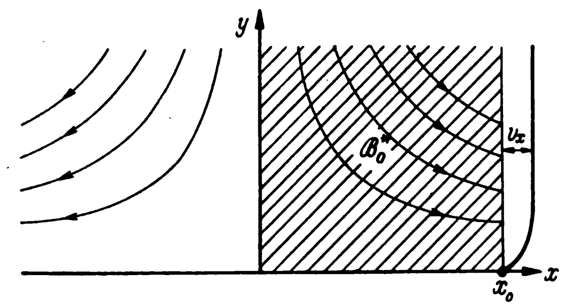


Bild 13. Zum Verlauf der Staupunktsströmung.

reichend erachteten Näherung die in (97) auftretende Größe $p'(s;t)$ unbedenklich mit $\frac{\partial}{\partial s}[p]_{n\to 0}$ identifiziert werden darf, eine entscheidende praktische Bedeutung.

4. Eine strenge Lösung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen als Beispiel.

Wie bereits in der Einleitung hervorgehoben wurde, steht gegenwärtig die exakte, dem Einfluß der Flüssigkeitsreibung Rechnung tragende Erledigung eines ebenen Umströmungsproblems nicht zur Verfügung. Trotzdem bietet sich die Möglichkeit, die zu Beginn des letzten Abschnitts postulierten Voraussetzungen der Grenzschichttheorie an einem den bekannten Integralen der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen entlehnten Beispiel einer Nachprüfung zu unterwerfen.

Zu diesem Zweck betrachten wir die von L. Prandtl [36] behandelte stationäre, aus der oberen Halbebene $y > 0$ gegen die als feste Wand zu denkende x-Achse anfließende Bewegung einer zähen Flüssigkeit, die gemäß

$$\lim_{y\to\infty}\frac{v_x}{v_x^{(0)}}=1,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{v_y}{v_y^{(0)}}=1,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{p}{p^{(0)}}=1 \quad (99)$$

bei unbegrenzt wachsendem Abstand von der Kontur $y = 0$ asymptotisch in die durch

$$v_x^{(0)}=b\cdot x,\quad v_y^{(0)}=-b\cdot y,\quad p^{(0)}=p_0-\frac{b^2}{2}\cdot(x^2+y^2) \quad (99\,a)$$

mit konstantem $b > 0$ und konstantem $p_0 > 0$ erfaßte Potentialströmung (Staupunktsströmung) übergehen soll (vgl. Bild 13). Mit den unter Benutzung der Symbolik $f'(y;R) = \frac{d}{dy}f(y;R)$ zu verstehenden Ansätzen

$$v_x = x\cdot f'(y;R),\qquad v_y=-f(y;R) \quad . \; . \; . \quad (100\,a)$$

sowie

$$p=p_0-\frac{b^2}{2}\cdot\{x^2+F(y;R)\} \quad . \; . \; . \; . \quad (100\,b)$$

ergeben die Navier-Stokesschen Gleichungen

$$v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right\},$$
$$v_x\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right\}$$

zur Bestimmung der beiden einstweilen noch unbekannten Funktionen $f(y;R)$ bzw. $F(y;R)$ die Relationen

$$x\cdot\{f'(y;R)^2-f(y;R)\cdot f''(y;R)\}=b^2\cdot x+\frac{x}{R}\cdot f'''(y;R) \quad . \; . \; . \quad (101\,a)$$

bzw.

$$f(y;R)\cdot f'(y;R)=\frac{b^2}{2}\cdot F'(y;R)-\frac{1}{R}\cdot f''(y;R), \quad (101\,b)$$

während die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

identisch befriedigt ist. Die Haftbedingungen

$$\lim_{y\to 0} v_x=0,\qquad \lim_{y\to 0} v_y=0$$

verlangen alsdann

$$\lim_{y\to 0} f'(y;R)=0,\qquad \lim_{y\to 0} f(y;R)=0, \quad (102)$$

und die Erfüllung der Forderungen (99) wird gewiß durch

$$\lim_{y\to\infty}\frac{f'(y;R)}{b}=1,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{f(y;R)}{b\cdot y}=1,\quad \lim_{y\to\infty}\frac{F(y;R)}{y^2}=1 \quad . \; . \; . \quad (103)$$

gewährleistet.

Schreiben wir nun (101b) in der Form

$$F'(y;R)=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{d}{dy}\left\{f(y;R)^2+\frac{2}{R}\cdot f'(y;R)\right\},$$

so folgt hieraus unmittelbar — indem wir als additive Integrationskonstante erlaubter Weise Null wählen — die Identität

$$F(y;R)=\frac{1}{b^2}\cdot\left\{f(y;R)^2+\frac{2}{R}\cdot f'(y;R)\right\}, \quad (104)$$

gemäß der sich die zu lösende Aufgabe auf die Integration der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung (101a) für die Funktion $f(y;R)$ reduziert. Die Substitutionen

$$f(y;R)=\sqrt{\frac{b}{R}}\cdot\varphi(\eta) \text{ mit } \eta=\sqrt{b\cdot R}\cdot y \quad . \; . \quad (105)$$

führen (101a) nach Division durch $b^2\cdot x$ in

$$\varphi'''(\eta)+\varphi(\eta)\cdot\varphi''(\eta)-\varphi'(\eta)^2+1=0, \quad . \; . \quad (106)$$

desgleichen (102) in

$$\lim_{\eta\to 0}\varphi(\eta)=0,\qquad \lim_{\eta\to 0}\varphi'(\eta)=0 \quad . \; . \; . \quad (106\,a)$$

sowie die erste der drei Bedingungen (103) in

$$\lim_{\eta\to\infty}\varphi'(\eta)=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (106\,b)$$

über. Es wird sich zeigen, daß (106b) zugleich die Gültigkeit aller in (103) genannten Grenzbeziehungen bewirkt. Überdies lehrt (106) gemäß

$$\varphi'''(\eta)=-\{1-\varphi'(\eta)^2\}-\varphi(\eta)\cdot\varphi''(\eta) \quad . \; . \quad (107\,a)$$

die beliebig häufige Differenzierbarkeit der Funktion $\varphi(\eta)$, wobei insbesondere

$$\varphi''''(\eta)=\varphi'(\eta)\cdot\varphi''(\eta)-\varphi(\eta)\cdot\varphi'''(\eta) \quad . \; . \quad (107\,b)$$

wird.

Wenngleich eine mathematisch strenge Untersuchung des durch (106) nebst (106a) und (106b) gekennzeichneten — übrigens auch im direkten Zusammenhang mit der Grenzschichtgleichung wichtigen — Problems noch fehlen dürfte, wurde bereits von H. Blasius [2], K. Hiemenz [12], V. M. Falkner und S. W. Skan [4], L. Howarth [14] sowie von D. R. Hartree [11] mit Hilfe numerischer Methoden eine Lösung ermittelt[22]), deren Eigenschaften das Zutreffen eines Existenz- und Einzigkeitssatzes als fast selbstverständlich erscheinen lassen.

Indem wir diesen Zahlenergebnissen (vgl. Bild 14) die Aussagen

1. die Funktionen $\varphi(\eta)$ und $\varphi'(\eta)$ sind für jedes $\eta > 0$ positiv sowie monoton steigend, während $\varphi''(\eta)$ für jedes $\eta > 0$ positiv und monoton fallend ist;
2. neben

$$\varphi(\eta)\to\infty \quad \text{für} \quad \eta\to\infty \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (108\,a)$$

[22]) Die besten — miteinander übereinstimmenden — Resultate stammen von Howarth und von Hartree.

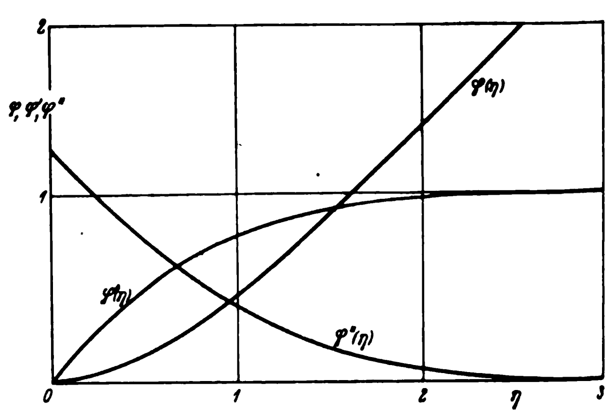


Bild 14. Verlauf der Funktionen $\varphi(\eta)$, $\varphi'(\eta)$ und $\varphi''(\eta)$.

gilt

$$\lim_{\eta\to\infty}\varphi''(\eta)=0,\quad \lim_{\eta\to\infty}\varphi'''(\eta)=0,\quad \lim_{\eta\to\infty}\varphi''''(\eta)=0 \quad . . . (108b)$$

entlehnen, folgern wir:

1. Die Funktion $\varphi'''(\eta)$ ist für jedes $\eta>0$ nicht positiv, also $\varphi''''(\eta)$ wegen (107b) für jedes $\eta>0$ positiv.
   Demnach ist $\varphi'''(\eta)$ eine für jedes $\eta>0$ negative, monoton steigende Funktion von η.
2. Gemäß (106b) wird

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{\varphi'(\eta)}{(\eta)'}=\lim_{\eta\to\infty}\varphi'(\eta)=1,$$

mithin

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{\varphi(\eta)}{\eta}=1 \quad . . . . (109)$$

3. Mit Benutzung von (106b) und (108b) entnimmt man (107b) nach Einsetzen von (107a) die Relation

$$\lim_{\eta\to\infty}\left[\varphi(\eta)\cdot\left\{1-\varphi'(\eta)^2\right\}+\varphi(\eta)^2\cdot\varphi''(\eta)\right]=0;$$

da aber die beiden in eckigen Klammern stehenden Summanden stets positiv sind, so muß jeder von ihnen dem Grenzwert Null zustreben. Insbesondere wird daher

$$\lim_{\eta\to\infty}\varphi(\eta)^2\cdot\varphi''(\eta)=\lim_{\eta\to\infty}\left\{\frac{\varphi(\eta)}{\eta}\right\}^2\cdot\left\{\eta^2\cdot\varphi''(\eta)\right\}=0,$$

woraus sich bei Beachtung von (109)

$$\lim_{\eta\to\infty}\left\{\eta^2\cdot\varphi''(\eta)\right\}=0 \quad . . . . (110)$$

und somit erst recht

$$\lim_{\eta\to\infty}\left\{\eta\cdot\varphi''(\eta)\right\}=0 \quad . . . . . . (110a)$$

ergibt.

Wegen

$$\frac{f(y;R)}{b\cdot y}=\frac{\varphi(\eta)}{\eta}$$

und

$$\frac{F(y;R)}{y^2}=\left\{\frac{\varphi(\eta)}{\eta}\right\}^2+2\cdot\frac{\varphi'(\eta)}{\eta^2}$$

erkennt man im Hinblick auf (109), daß (106b) tatsächlich die Richtigkeit aller Beziehungen (103) nach sich zieht.

Der im dritten Abschnitt erwähnte Punkt Q_0 fällt — wie aus dem Folgenden hervorgeht — mit dem Ursprung (0,0) des x, y-Systems zusammen. Ist nun c_0 für ein beliebiges $x_0>0$ mit dem Intervall $0\leq x<x_0$ identisch, so kann man als B_0^* (vgl. Bild 13) das Gebiet $0<x<x_0$, $y>0$ wählen.

Bei der Prüfung unserer Voraussetzungen der Grenzschichttheorie beginnen wir mit der auf S. 76 genannten Gruppe I:

1. Wegen

$$v_x=b\cdot x\cdot\varphi'(\eta)$$

wird

$$v_x>0 \quad \text{für} \quad 0<x<x_0 \quad \text{und jedes} \quad y>0,$$

in Übereinstimmung mit (62).

2. Zur Fixierung des hier durch die Gleichung $y=d$ gekennzeichneten Kurvenstücks c_1 diene die Größe

$$d=\frac{2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[4]{R}} \quad . . . . (111)$$

Da $|w(x,y)|$ wegen

$$w(x,y)=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\sqrt{b^3\cdot R}\cdot x\cdot\varphi''(\eta) \quad (112)$$

bei festem x eine für jedes $y>0$ monoton fallende Funktion von y darstellt, gilt zunächst

$$|[w(x,y)]_{y\geq d}|<\left|[w(x,y)]_{y=\frac{d}{2}}\right|=\sqrt{b^3\cdot R}\cdot x\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=b\cdot\sqrt[4]{R}},$$

d. h. erst recht

$$|w(x,y)|<x_0\cdot\sqrt{b^3\cdot R}\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=b\cdot\sqrt[4]{R}} \quad \text{für } y\geq d,$$

so daß (63a) für

$$\varepsilon=\frac{x_0}{\sqrt{b}}\cdot\left(b\cdot\sqrt[4]{R}\right)^2\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=b\cdot\sqrt[4]{R}} \quad . . (113)$$

gewiß zutrifft. Überdies sind (63b) bzw. (63c) auf Grund von (111) bzw. auf Grund von (113) und (110) gesichert.

3. Die Bestätigung von (64), (64a) wird durch

$$\lim_{R\to\infty}[v_x]_{y=d}=U_x\cdot\lim_{R\to\infty}[\varphi'(\eta)]_{\eta=2b\cdot\sqrt[4]{R}}$$

mit

$$U_x=U_x(x)=b\cdot x>0 \quad \text{für} \quad 0<x<x_0 \quad . . (114)$$

in Anbetracht von (106b) geliefert.

Hiermit sind die zuvor erwähnten Voraussetzungen der Gruppe I restlos erledigt.

Weiter läßt sich, um jetzt zur Gruppe II überzugehen, jedem Θ aus $0<\Theta<1$ eine positive Zahl $\eta_0=\eta_0(\Theta)$ derart zuordnen, daß einerseits — man beachte (106b) —

$$b\cdot x\cdot|[\varphi'(\eta)]_{\eta=\eta_0}-1|<\Theta \quad . . . . . (115)$$

ausfällt, andererseits — man beachte (106b) und (110a) — für die nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gemäß

$$[\varphi'(\eta)]_{\eta=\eta_0}=\eta_0\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta^*} \quad \text{mit} \quad 0<\eta^*<\eta_0 \quad . . (116)$$

eindeutig festgelegte Größe η^* die Abschätzung

$$\frac{[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta_0}}{[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta^*}}=\frac{\eta_0\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta_0}}{[\varphi'(\eta)]_{\eta=\eta_0}}<\Theta \quad (116a)$$

besteht. Setzt man nun

$$R_0=\left(\frac{\eta_0}{2b}\right)^4 \quad . . . . (117)$$

und definiert die Grenzschichtdicke δ durch

$$\delta=\frac{\eta_0}{\sqrt{b\cdot R}} \quad \text{für} \quad R>R_0, \quad . . . . (117a)$$

so bleibt offenbar — unserer früheren Annahme entsprechend (vgl. Bild 10 auf S. 76) stets

$$\delta\leq d \quad \text{für} \quad R>R_0;$$

ferner ist (65), (65a) wegen

$$V_x=\lim_{R\to\infty}[v_x]_{y=\delta}=b\cdot x\,[\varphi'(\eta)]_{\eta=\eta_0}>0 \quad . (118)$$

erfüllt, womit zugleich (65b) gemäß (114) auf (115) hinausläuft.

Da die hier ins Auge gefaßte Strömung wegen

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\sqrt{b^3\cdot R}\cdot x\cdot\varphi''(\eta)\geq 0 \quad \text{für} \quad 0\leq x\leq x_0 \quad \text{und} \quad y>0$$

den durch die Bedingung (70a) charakterisierten Fällen angehört, haben wir als letzte der in der Gruppe II vereinigten Voraussetzungen die Ungleichungen (69a) und (71) zu prüfen, die sich auf die bei unserem Beispiel eindeutig durch

$$[v_x]_{y=\delta}=\delta\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=y_1} \qquad (0<y_1<\delta) \quad . . (119)$$

definierte Zahl

$$y_1=\frac{\eta_1}{\sqrt{b\cdot R}} \quad \text{für} \quad R>R_0 \quad . . . . (119a)$$

beziehen. Nun ist aber (119) wegen (117a) und (119a) mit

$$[\varphi'(\eta)]_{\eta=\eta_0}=\eta_0\cdot[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta_1}$$

identisch, woraus nach (116) $\eta_1=\eta^*<\eta_0$, also

$$\frac{y_1}{\delta}=\frac{\eta_1}{\eta_0}=\frac{\eta^*}{\eta_0}<1$$

oder

$$\frac{\delta-y_1}{\delta}=\alpha \qquad (\alpha>0 \text{ für } R>R_0)$$

mit der von x und von $R>R_0$ unabhängigen Größe

$$\alpha=\frac{\eta_0-\eta^*}{\eta_0}$$

folgt. Dies Resultat steht mit (69a) im Einklang, während (71) unter Berücksichtigung von (116a) wegen $\eta_1=\eta^*$ seine Bestätigung durch

$$\frac{\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=\delta}}{\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=n_1}} = \frac{[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta_0}}{[\varphi''(\eta)]_{\eta=\eta_1}} < \Theta$$

findet.

Daß ferner die Voraussetzungen der Gruppe III Gültigkeit besitzen, geht unmittelbar aus den für jedes zulässige x zutreffenden Beziehungen

$$v_x = b \cdot x \cdot \varphi'(\eta) < b \cdot x_0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = b \cdot \varphi'(\eta) < b, \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$$

sowie

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| = b^2 \cdot x \leq b^2 \cdot x_0$$

und

$$\delta \cdot \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = 0$$

hervor.

Bilden wir endlich den Ausdruck

$$\frac{1}{R} \cdot \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| = |-b^2 \cdot x \cdot \varphi'''(\eta)| = b^2 \cdot x \cdot |\varphi'''(\eta)|$$

und bedenken, daß $|\varphi'''(\eta)| = -\varphi'''(\eta)$ eine für jedes $\eta > 0$ monoton fallende Funktion von η ist, so sehen wir — unter Beschränkung auf solche Werte von y, die dem Intervall $0 < y < \delta$ zu entnehmen sind — wegen (117a) gemäß

$$\frac{1}{R} \cdot \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| > \frac{1}{R} \cdot \left|\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=\delta}\right| = b^2 \cdot x \cdot [\varphi'''(\eta)]_{\eta=\eta_0}$$

$$\text{für } R > R_0 \quad (0 < y < \delta)$$

die Existenz einer von $R > R_0$ völlig unabhängigen, sicherlich nichtverschwindenden unteren Schranke der als Funktion von R aufgefaßten Größe $\frac{1}{R} \cdot \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|$ ein. Demnach muß für die gemäß (79) unter der Voraussetzung (70a) durch

$$\delta^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right]_{y=y_2} = O(1) + o(1) \text{ mit } y_1 < y_2 < \delta$$

gekennzeichneten Stelle $y = y_2$ notwendig

$$\frac{1}{R} \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=y_2} + o(1)$$

sein, womit auch die in (83) vollzogene Erweiterung von (82) bei der als Beispiel gewählten Staupunktsströmung als zulässig erkannt ist.

Abschließend bemerken wir, daß für den von uns betrachteten Bewegungsvorgang die Relation (117a) das in (85) formulierte Ergebnis des asymptotischen Zusammenhangs zwischen δ und R bestätigt, und daß die Grenzschichtgleichung wegen

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -b^2 \cdot x = p'(x)$$

mit der zugehörigen ersten Navier-Stokesschen Differentialgleichung übereinstimmt.

C. Die Ansätze von v. Kármán und Pohlhausen.

1. Die Kármánsche Spezialisierung der Stromfunktion.

Bekanntlich kann man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\left[\{1 - n \cdot k(s)\} \cdot v_n\right] = 0$$

unter Einführung einer hinreichend häufig partiell und stetig differenzierbaren Stromfunktion $\psi = \psi(s, n, t)$ ganz allgemein durch die Ansätze

$$v_s = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \{1 - n \cdot k(s)\} \cdot v_n = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \quad . \quad . \quad (120)$$

integrieren; alsdann reduzieren sich die unter Beibehaltung von (43a) und (43b) in der Form

$$\left.\begin{aligned} \{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial t} - v_n \cdot w + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}\right\} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2} + p\right), \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + v_s \cdot w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\partial w}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} &= -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2} + p\right) \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

geschriebenen Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (43) auf ein nichtlineares System von zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, in dem lediglich $\psi(s, n, t)$ und $p(s, n, t)$ als unbekannte Funktionen auftreten.

Erweitert man nun die den bisherigen Betrachtungen zugrunde gelegten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen durch die Forderungen, daß neben $k''(s)$ und $k'''(s)$ auch die Ableitungen

$$\frac{\partial^3 v_s}{\partial s^2 \partial n}, \quad \frac{\partial^3 v_s}{\partial n^3}; \quad \frac{\partial^3 v_n}{\partial s \partial n^2}, \quad \frac{\partial^3 v_n}{\partial s^3}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial n}$$

als stetige Funktionen ihrer Argumente s, n und t existieren sollen, so läßt sich der Druck p aus (121) durch Differentiation nach n bzw. s eliminieren. Die auf diese Weise resultierende Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \left\{\frac{\partial v_s}{\partial t} - v_n \cdot w + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_s \cdot w - \frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\partial w}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)}\right\} = 0$$

führt bei Verwendung von (120) zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\{1 - n \cdot k(s)\} \cdot \left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial t} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial n}\right\} + w \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{1 - n \cdot k(s)} - w \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}\right\} = 0$$

mit

$$w = -\frac{n \cdot k'(s) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s}}{\{1 - n \cdot k(s)\}^3} - \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}}{\{1 - n \cdot k(s)\}^2} + \frac{k(s) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n}}{1 - n \cdot k(s)} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2},$$

die sich insbesondere für eine durch die Annahmen

$$k(s) = 0, \quad s = x, \quad n = y$$

gekennzeichnete geradlinige Kontur zu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\Delta \psi) = \frac{1}{R} \cdot \Delta \Delta \psi \quad (122)$$

mit

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122a)$$

und

$$\Delta \Delta \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122b)$$

vereinfacht.

Um die Grenzschichtgleichung unter Beschränkung auf den Spezialfall einer ebenen Platte $y = 0$ zu gewinnen, knüpft Th. v. Kármán [18] — ohne ausdrückliche Erwähnung der damit verbundenen zusätzlichen Annahmen — an (122) an und macht, da die Grenzschichtströmung

1. an der Wand $y = 0$ haften, also den Bedingungen

$$[v_x]_{y \to 0} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]_{y \to 0} = 0, \quad [v_y]_{y \to 0} = -\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{y \to 0} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

genügen soll;

2. in einiger Entfernung von der Kontur durch die Reibung nicht mehr merklich beeinflußt sei, d. h. die Stromfunktion ψ für $y \geq \delta$ in eine als bekannt vorausgesetzte Potentialfunktion $\psi_0 = \psi_0(x, y, t)$ mit den zugehörigen (dimensionslosen) Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x^{(0)} = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad v_y^{(0)} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

übergehen müsse, den Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,y,t)=\psi_0(x,y,t)-y\cdot\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}\\+\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\psi_1(x,\eta,t)\end{aligned}\right\}\quad(125)$$

mit

$$\eta=\sqrt{R}\cdot y\qquad(y>0),\quad\ldots\quad(125\,a)$$

dem im einzelnen die folgenden Erläuterungen hinzugefügt werden:

1. Wegen

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\partial\psi_0}{\partial y}-\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta},\\v_y&=-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}-\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad(126)$$

muß, wenn man — was bei v. Kármán ohne besondere Hervorhebung geschieht — die Voraussetzung

$$[v_y^{(0)}]_{y\to 0}=-\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right]_{y=0}=0\quad\ldots\quad(127)$$

trifft[23]), gemäß (123)

$$\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\right]_{\eta\to 0}=0,\quad\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]_{\eta\to 0}=0\quad\ldots\quad(128)$$

werden. Da ferner nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\psi_0=[\psi_0]_{y=0}+y\cdot\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}+\frac{y^2}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right]_{y=y^*}(0<y^*<y)$$

gilt, und da im Hinblick auf (127) offenbar

$$[\psi_0]_{y=0}=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(129)$$

sowie überdies für hinreichend kleine Werte von $|y|$

$$\frac{y^2}{2}\cdot\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right]_{y=y^*}\sim 0\quad\ldots\ldots\quad(129\,a)$$

gewählt werden darf, so erhält man auf Grund von (125) die Relation

$$\psi\sim\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\psi_1\quad\text{für}\quad 0<y<\delta,\quad\ldots\quad(130)$$

die die Bezeichnung von $\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\psi_1$ als »Stromfunktion der Grenzschichtströmung« gerechtfertigt erscheinen läßt.

2. Mit der Forderung

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]_{y=\delta}=\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\right]_{\eta=\delta\cdot\sqrt{R}}=\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}\quad(131)$$

ergibt sich gemäß (126) und (124)

$$[v_x]_{y=\delta}=[v_x^{(0)}]_{y=\delta}\quad\ldots\ldots\quad(132\,a)$$

sowie

$$\left.\begin{aligned}[v_y]_{y=\delta}=[v_y^{(0)}]_{y=\delta}+\delta\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\right]_{\eta=\delta\cdot\sqrt{R}}\\-\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right]_{\eta=\delta\cdot\sqrt{R}},\end{aligned}\right\}\quad(132\,b)$$

womit die zuvor verlangte Übergangsbedingung

$$[\psi]_{y=\delta}=[\psi_0]_{y=\delta}$$

als praktisch erfüllt angesehen wird.

Eine physikalische Motivierung des Ansatzes (125) und der daran angeschlossenen, soeben erwähnten Postulate hat v. Kármán nicht zu liefern versucht.

Wird jetzt (125) in (122) eingeführt, näherungsweise einerseits — unter Berücksichtigung von (129) —

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\,\partial y}\right]_{y=0}\cdot y,\quad\ldots\quad(133\,a)$$

andererseits

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y}=\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}+\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right]_{y=0}\cdot y\qquad(133\,b)$$

gesetzt, alles auf die Variable $\eta=\sqrt{R}\cdot y$ umgeschrieben, nach Potenzen von $\sqrt{R}$ geordnet und nur das Glied in $\sqrt{R}$ beibehalten, so bekommt man die Gleichung

$$\frac{\partial^3\psi_1}{\partial t\,\partial\eta^2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^3\psi_1}{\partial x\,\partial\eta^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\eta^3}-\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\eta^4}=0,$$

die durch Integration nach η in

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\,\partial\eta}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial\eta}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\eta^3}=f(x,t)\quad(134)$$

mit einer einstweilen willkürlich bleibenden Funktion $f(x,t)$ übergeht. Innerhalb der Grenzschicht $(0<y<\delta)$ werden nun unter Hinweis auf (126) und (133b) bzw. (133a) die Identitäten

$$v_x=\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\quad\text{bzw.}\quad v_y=-\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\quad\ldots\quad(135)$$

für richtig gehalten, so daß (134) nach Wiedereinführung von y die Form

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}=f(x,t)+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\quad(136)$$

annimmt, während am Rand der Grenzschicht $(y=\delta)$ die Funktionen v_x und $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ mit den entsprechenden, dort der äußeren Potentialströmung zugeordneten Werten übereinstimmen sollen, die ihrerseits mit den Größen $[v_x^{(0)}]_{y\to 0}$ bzw. $\left[\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x}\right]_{y\to 0}$ identifiziert werden. Indem man ferner $\left[v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=\delta}$ und $\frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right]_{y=\delta}$ vernachlässigt, reduziert sich (134) für $y=\delta$ auf die Beziehung

$$\left[\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial t}+v_x^{(0)}\cdot\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x}\right]_{y\to 0}=f(x,t),\qquad(136\,a)$$

die alsdann durch Vergleich mit der ersten Eulerschen Bewegungsgleichung idealer Flüssigkeiten die unbekannte Funktion $f(x,t)$ gemäß

$$f(x,t)=-\frac{\partial p}{\partial x}=-p'(x;t)\quad\ldots\quad(136\,b)$$

festzulegen und damit (136) als die bei einer ebenen Platte zuständige Prandtlsche Grenzschichtgleichung (53) zu erkennen gestattet.

Zwecks kritischer Erörterung dieser Deduktionen im Sinne einer strengen Theorie begnügen wir uns mit der Bemerkung: die stillschweigend gemachte Annahme, daß die beim Einsetzen von (125) in (122) als Faktoren der verschiedenen Potenzen von $\sqrt{R}$ auftretenden Ausdrücke auf dem Intervall $0<\eta<\delta\cdot\sqrt{R}$ bei festem x unabhängig von R beschränkt bleiben, entbehrt von vornherein jedweder plausibel erscheinenden Begründung.

Von A. Miyadzu [29] wurden die v. Kármánschen Überlegungen auf den Fall der stationären Umströmung eines Kugelkörpers übertragen (vgl. Bild 15). Die so gefundene Grenzschichtgleichung stimmt mit (58) nach Streichung des Gliedes $\frac{\partial v_s}{\partial t}$ überein; dagegen wird die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{\partial v_n}{\partial n}+\frac{1}{a}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{s}{a}\right)\cdot v_s=0\quad\ldots\quad(137)$$

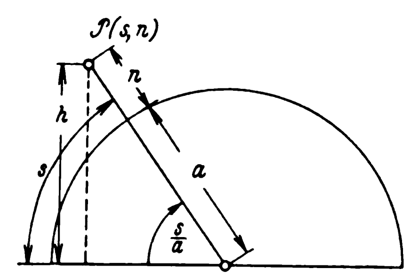


Bild 15. Zur Grenzschichtströmung um einen Kugelkörper.

[23]) Diese Voraussetzung ist keineswegs selbstverständlich, sofern man nicht ausdrücklich $\psi_0(x,y,t)$ als die Stromfunktion der der Kontur zugeordneten Potentialströmung einführt.

angegeben, während sie wegen

$$h = (a + n) \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right)$$

gemäß (59)

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{1}{a} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{s}{a}\right) \cdot v_s + \frac{v_n}{a+n} = 0 \quad (137\,\mathrm{a})$$

lauten würde.

2. Die Pohlhausensche Modifikation des Kármánschen Ansatzes.

Benutzt man zur Behandlung stationärer Vorgänge in der Nähe einer ebenen Platte nach K. Pohlhausen [32] den durch die beiden unbestimmten Exponenten $\varkappa$ und $\lambda > 0$ charakterisierten Ausdruck

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + R^{\varkappa} \cdot \psi_2(x, \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

mit

$$\eta = R^{\lambda} \cdot y \qquad (y > 0;\ \lambda > 0), \quad . \quad . \quad (138\,\mathrm{a})$$

wobei $\psi_0(x, y)$ anscheinend die Stromfunktion der zugehörigen Potentialbewegung bezeichnen soll, so liefert (122), wenn die unter Beachtung von (122a) bzw. (122b) nach Ersatz von y durch η bestehenden Identitäten

$$\Delta \psi_2 = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + R^{2\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139\,\mathrm{a})$$

bzw.

$$\Delta \Delta \psi_2 = \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial x^4} + 2 R^{2\lambda} \cdot \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial x^2 \partial \eta^2} + R^{4\lambda} \cdot \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \eta^4} \quad (139\,\mathrm{b})$$

zu

$$\Delta \psi_2 = R^{2\lambda} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140\,\mathrm{a})$$

bzw.

$$\Delta \Delta \psi_2 = R^{4\lambda} \cdot \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \eta^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140\,\mathrm{b})$$

verstümmelt werden, die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} & R^{\varkappa + 2\lambda} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial \eta^2} - R^{\varkappa + 3\lambda} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \eta^3} \\ & + R^{2\varkappa + 3\lambda} \cdot \left\{\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \eta^3}\right\} \\ & = R^{\varkappa + 4\lambda - 1} \cdot \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \eta^4} \,. \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Bei Pohlhausen steht jedoch auf der linken Seite

$$R^{\varkappa + 2\lambda} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \eta^3} \text{ statt } R^{\varkappa + 3\lambda} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \eta^3},$$

womit seine anschließende Darlegung hinfällig wird[24]). Vielmehr müßte, um dem Pohlhausenschen Gedankengang zu folgen, schon jetzt von der innerhalb der Grenzschicht ($0 < y < \delta$) zulässigen Näherung[25])

$$\psi_0(x, y) = \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot y \qquad (0 < y < \delta) \quad . \quad . \quad (142)$$

Gebrauch gemacht werden, damit sich aus (141) zunächst durch Exponentenvergleich

$$\varkappa + 2\lambda = 2\varkappa + 3\lambda = \varkappa + 4\lambda - 1$$

oder

$$2\lambda = 1, \quad \varkappa - \lambda = -1,$$

d. h.

$$\lambda = \frac{1}{2}, \qquad \varkappa = -\frac{1}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

und damit alsdann

$$\left.\begin{aligned} & \left\{\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}\right\} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial \eta^2} \\ & - \left\{\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot \eta\right\} \cdot \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^4 \psi_2}{\partial \eta^4} \end{aligned}\right\} \quad (144)$$

ergibt. Allein gleich hier sei hervorgehoben, daß sowohl jener Exponentenvergleich als auch die durch die Reduktion von (139a) bzw. (139b) auf (140a) bzw. (140b) begangenen Vernachlässigungen sinnlos bleiben, solange über das asymptotische Verhalten der in (141) bzw. in (139a) und (139b) jeweils als Koeffizienten der einzelnen R-Potenzen auftretenden Ableitungen der Funktion $\psi_2(x, \eta)$ beim Grenzübergang $R \to \infty$ nichts bekannt ist oder zum mindesten vorausgesetzt wird — eine Tatsache von durchaus grundsätzlicher Bedeutung, die Pohlhausen — ebenso wie v. Kármán (vgl. den vorletzten Absatz des vorhergehenden Abschnitts) — völlig außer acht läßt.

Mit der Abkürzung

$$G(x, \eta) = \psi_2(x, \eta) + \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot \eta \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

geht (138) wegen (143) in

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \left\{G(x, \eta) - \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot \eta\right\}, \quad (146)$$

desgleichen (144) in

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial \eta^2} - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} = \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^4} \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

über. Demnach muß wegen (142)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \quad (148)$$

sein, so daß die Haftbedingungen

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \eta}\right]_{\eta \to 0} = 0, \qquad \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{\eta \to 0} = 0 \qquad (148\,\mathrm{a})$$

verlangen; statt dessen schreibt Pohlhausen

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \eta}\right]_{\eta \to 0} = 0, \qquad [G(x, \eta)]_{\eta \to 0} = 0 \quad (148\,\mathrm{b})$$

vor, womit freilich unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen zugleich (148a) gilt. Überdies wird, um für $\eta \to \infty$ den Anschluß von $\psi(x, y)$ an $\psi_0(x, y)$ zu erreichen, im Hinblick auf (146)

$$\left\{G(x, \eta) - \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0} \cdot \eta\right\}_{\eta \to \infty} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

gefordert, was offenbar unter Berücksichtigung von (138a) nebst (143) so gemeint ist, daß $\eta \to \infty$ in Anbetracht des als sehr groß vorauszusetzenden Betrages von R den Übergang aus der Grenzschicht auf ihre äußere Berandung ($y = \delta$) zum Ausdruck bringt[26]). Aus (147) folgt nun durch Integration nach η die mit einer willkürlich wählbaren Funktion $f(x)$ gebildete Relation

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^3} + f(x),$$

die gemäß (138a) und (143) über

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = f(x)$$

wie bei v. Kármán (vgl. Abschnitt 1 dieses Teils) zu der Prandtlschen Grenzschichtgleichung für stationäre Strömungen längs einer ebenen Platte führt[27]). Bezüglich der Übertragbarkeit dieser Gleichung auf krummlinige Konturen wird auf die Arbeit von K. Hiemenz [12] verwiesen, und zur Rechtfertigung der Abschätzung $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$ für die Grenzschichtdicke δ dient die ohne jede Begründung geäußerte Ansicht, daß für $y = \delta$ notwendig $\eta \sim 1$ sein müsse.

3. Die Kármánsche Integralbedingung.

Indem Th. v. Kármán [18] den physikalischen Sinn der Grenzschichttheorie für die ebene Platte in den Aussagen

---

[24]) Derselbe Fehler findet sich bei W. Müller [30], wo die Pohlhausensche Darstellung ungeändert übernommen wird.

[25]) Man beachte, daß die Kontur $y = 0$ bei der durch die Stromfunktion $\psi_0(x, y)$ dargestellten Strömung laut Voraussetzung eine Stromlinie, also $[\psi_0(x, y)]_{y=0} = C$ eine Konstante ist.

[26]) Pohlhausen gibt statt (149) die unverständliche Bedingung

$$\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{\eta \to \infty} = \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right]_{y=0}$$

an, benutzt aber im folgenden tatsächlich (149).

[27]) Die hierbei von Pohlhausen im Widerspruch zu (148) erwähnten Beziehungen $\frac{\partial G}{\partial y} = v_x$ und $\frac{\partial G}{\partial x} = -v_y$ beruhen offensichtlich auf einem Irrtum.

$$[v_x]_{y=\delta} = [v_x^{(0)}]_{y\to 0}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = p'(x,t) \quad . \quad . \quad (150)$$

erblickt, gelangt er durch eine rein anschaulich gehaltene Impulsbetrachtung in der x-Richtung unter Vernachlässigung der »Reibung an der Übergangsfläche zwischen Grenzschicht und äußerem Feld« zu der Relation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\delta} v_x\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\,dy - [v_x^{(0)}]_{y\to 0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x\,dy \\ &\quad = -\delta\cdot p'(x,t) - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y\to 0}, \end{aligned}\right\} \quad (151)$$

die man seither als die **Kármánsche Integralbedingung** zu bezeichnen pflegt[28]).

Zwecks strenger Durchführung der einschlägigen Überlegungen greifen wir auf den in (7) für räumliche Vorgänge formulierten Impulssatz der Hydrodynamik zurück, der sich bei **ebenen** Strömungen, die ohne Einwirkung äußerer Kräfte vor sich gehen, in dimensionsloser Schreibweise zu den beiden Gleichungen

$$\int_{(C)} S_{nx}\,ds = \int_{(B)} \frac{\partial v_x}{\partial t}\,d\omega - \int_{(C)} v_x\cdot v_n\,ds \quad . \quad . \quad (152\text{a})$$

und

$$\int_{(C)} S_{ny}\,ds = \int_{(B)} \frac{\partial v_y}{\partial t}\,d\omega - \int_{(C)} v_y\cdot v_n\,ds \quad . \quad . \quad (152\text{b})$$

vereinfacht, falls

$$\left.\begin{aligned} S_{nx} &= S_{xx}\cdot\cos(n,x) + S_{yx}\cdot\cos(n,y), \\ S_{ny} &= S_{xy}\cdot\cos(n,x) + S_{yy}\cdot\cos(n,y) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (153)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} &S_{xx} = p - \frac{2}{R}\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad S_{yy} = p - \frac{2}{R}\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ &S_{xy} = S_{yx} = -\frac{1}{R}\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (153\text{a})$$

gesetzt wird; überdies sollen $B + C$ einen beliebigen Teilbereich des Außengebiets B_0 der Profilkontur C_0 sowie n die positive, ins Innere von B weisende Normalenrichtung längs C bedeuten.

Wählt man nun als C_0 die positive x-Achse, als B bei hinreichend kleinem $h > 0$ das aus Bild 16 ersichtliche Gebiet, so liefert (152a), wenn $x = \delta^*(y,t)$ die als eindeutig vorausgesetzte Auflösung von $y = \delta(x,t)$ nach x darstellt[29]), wegen

$$\cos(n,x) = -\frac{dy}{ds}, \qquad \cos(n,y) = \frac{dx}{ds}$$

sowie wegen der Haftbedingungen (123) zunächst

$$\int_{x_0}^{x_0+h} [S_{yx}]_{y\to 0}\,dx - \left\{\int_0^{\delta(x_0+h,t)} [S_{xx}]_{x=x_0+h}\,dy - \int_0^{\delta(x_0,t)} [S_{xx}]_{x=x_0}\,dy\right\}$$

$$+\int_{\delta(x_0,t)}^{\delta(x_0+h,t)} [S_{xx} + v_x^2]_{x=\delta^*(y,t)}\,dy - \int_{x_0}^{x_0+h} [S_{yx} + v_x\cdot v_y]_{y=\delta(x,t)}\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h}\left\{\int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial v_x}{\partial t}\cdot dy\right\}dx + \left\{\int_0^{\delta(x_0+h,t)} [v_x]^2_{x=x_0+h}\,dy - \int_0^{\delta(x_0,t)} [v_x]^2_{x=x_0}\,dy\right\}.$$

Alsdann ergibt sich unter der Annahme, daß $\delta(x,t)$ in bezug auf x partiell differenzierbar ist, nach Anwendung von Mittelwertsätzen sowie nach Division durch $h > 0$ mit passend bestimmten, den Einschränkungen

$$x_0 < x_\varkappa^* < x_0 + h \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

unterworfenen Werten von $x_\varkappa^*$ die Beziehung

$$[S_{yx}]_{x=x_1^*,\,y\to 0} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta(x,t)} S_{xx}\,dy\right]_{x=x_2^*}$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\{\delta(x,t)\}\right]_{x=x_3^*}\cdot[S_{xx} + v_x^2]_{x=x_3^*,\,y=\delta(x_3^*,t)}$$

$$-[S_{yx} + v_x\cdot v_y]_{x=x_4^*,\,y=\delta(x_4^*,t)}$$

$$= \int_0^{\delta(x_5^*,t)}\left[\frac{\partial v_x}{\partial t}\right]_{x=x_5^*} dy + \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta(x,t)} v_x^2\,dy\right]_{x=x_6^*},$$

aus der beim Grenzübergang $h\to 0$ unter Ersatz von x_0 durch x über

$$[S_{yx}]_{y\to 0} - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} S_{xx}\,dy + \frac{\partial\delta}{\partial x}\cdot[S_{xx} + v_x^2]_{y=\delta}$$

$$-[S_{yx} + v_x\cdot v_y]_{y=\delta} = \int_0^{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\,dy$$

wegen (153a) und der Kontinuitätsgleichung nach einfacher Umformung

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta} v_x^2\,dy + [v_x\cdot v_y]_{y=0} - \frac{\partial\delta}{\partial x}\cdot[v_x^2]_{y=\delta} \\ &= -\int_0^{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}\,dy + \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{y=\delta} - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y\to 0} \end{aligned}\right\} (154)$$

folgt.

Unter Beachtung des Zusammenhangs, der zwischen dem Impulssatz und den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen besteht (vgl. hierzu den ersten Abschnitt von Teil A), ist übrigens von vornherein klar, daß (154) mit

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\delta}\frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \int_0^{\delta} v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + \int_0^{\delta} v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy \\ &\quad = -\int_0^{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}\,dy + \frac{1}{R}\cdot\int_0^{\delta}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)dy \end{aligned}\right\} \quad (154\text{a})$$

identisch sein muß. Tatsächlich wird bei Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung einerseits

$$\int_0^{\delta} v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = [v_x\cdot v_y]_{y=\delta} - \int_0^{\delta} v_x\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy$$

$$= [v_x\cdot v_y]_{y=\delta} + \int_0^{\delta} v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy,$$

also

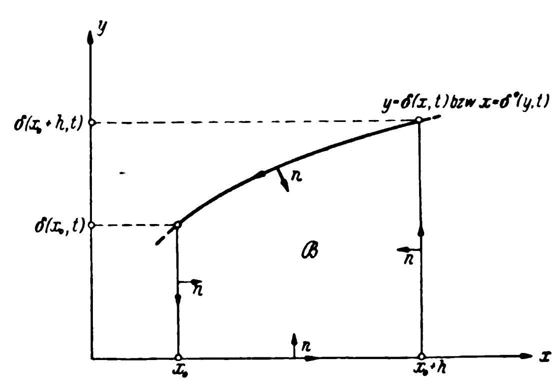


Bild 16. Veranschaulichung des zu einer speziellen Impulsbetrachtung benutzten Gebiets B.

---

[28]) Vgl. jedoch Fußnote 30!

[29]) Von den nicht eindeutig nach x auflösbaren Funktionen $\delta = \delta(x,t)$ kommt praktisch nur der Fall δ = konst. in Betracht, für den sich die nachstehende Rechnung in leicht ersichtlicher Weise vereinfacht.

$$\int_0^\delta v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + \int_0^\delta v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y}\,dy = [v_x \cdot v_y]_{y=\delta} + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(v_x^2)\,dy$$

$$= [v_x \cdot v_y]_{y=\delta} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x^2\,dy - \frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot [v_x^2]_{y=\delta},$$

andererseits

$$\int_0^\delta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) dy = -\int_0^\delta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) dy$$

$$= -\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_0^\delta,$$

womit (154a) in (154) übergeht.

Um jetzt (154) mit der Kármánschen Integralbedingung (151) vergleichen zu können, machen wir von der Identität

$$[v_y]_{y=\delta} - \frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot [v_x]_{x=\delta} = \int_0^\delta \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy - \frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot [v_x]_{x=\delta}$$

$$= -\left\{\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot [v_x]_{x=\delta}\right\}$$

oder

$$[v_x \cdot v_y]_{y=\delta} - \frac{\partial \delta}{\partial x}\cdot [v_x^2]_{x=\delta} = -[v_x]_{y=\delta}\cdot \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x\,dy$$

Gebrauch, die (154) durch

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x^2\,dy - [v_x]_{y=\delta}\cdot \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x\,dy \\ &= -\int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial x}\,dy + \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{y=\delta} - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y\to 0} \end{aligned}\right\} \quad (154\text{b})$$

zu ersetzen gestattet. Nach Zulassung der Näherungen (150) resultiert demnach, wenn man zugleich

$$\frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]_{y=\delta} \sim 0$$

als Auswirkung der obenerwähnten Kármánschen Bemerkung über die Reibung längs $y = \delta(x, t)$ annimmt, die Relation

Als allgemeineres, auch bei nicht-geradlinigen Konturen zuständiges Analogon zu (154a) liefert die erste der beiden Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (73) nach Multiplikation mit $\frac{1}{\delta}\cdot\{1 - n\cdot k(s)\}$ die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\delta}\cdot\int_0^\delta \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + \{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial n}\right] dn \\ &= k(s)\cdot\int_0^\delta \frac{n}{\delta}\cdot\left\{\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{v_n}{n} + \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial n}\right\} dn, \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

deren linke Seite im Hinblick auf die im dritten Abschnitt von Teil B teils vorausgesetzten, teils gefolgerten Abschätzungen für $R \to \infty$ beschränkt bleibt, während die rechte Seite aus gleichen Gründen gegen Null konvergiert. Im Rahmen der von uns vertretenen Auffassung darf daher (156) für hinreichend große Werte von R zunächst durch

$$\int_0^\delta \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + \{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n} + p'(s;\,t) + \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial w}{\partial n}\right] dn = 0$$

oder bei Berücksichtigung von (73a) sowie der Haftbedingungen (66) weiterhin durch

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\delta \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + \{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right] dn \\ &= -\delta\cdot p'(s;\,t) - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0} + \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta} \end{aligned}\right\} \quad (157)$$

approximiert werden. Wegen der Kontinuitätsgleichung (74) wird nun bei partieller Integration

$$\int_0^\delta \{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\,dn$$

$$= \Big[\{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot v_s\Big]_{n=\delta} + \int_0^\delta v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s}\,dn,$$

also — vgl. hierzu die bei der Umformung von (154) in (154b) angestellte Rechnung —

$$\int_0^\delta \left[v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + \{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right] dn$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\left\{-\Big[\{1 - n\cdot k(s)\}\cdot v_n\Big]_{n=\delta} + \frac{\partial \delta}{\partial s}\cdot [v_s]_{n=\delta}\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\left\{\int_0^\delta \frac{\partial v_s}{\partial s}\,dn + \frac{\partial \delta}{\partial s}\cdot [v_s]_{n=\delta}\right\} = \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s\,dn,$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x^2\,dy - [v_x^{(0)}]_{y\to 0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x\,dy \\ &= -\delta\cdot p'(x, t) - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y\to 0}, \end{aligned}\right\} \quad (155)$$

mit der (151) lediglich im Fall einer stationären Strömung übereinstimmt[30]).

[30]) In der unrichtigen Gleichung (151), die sich auch bei L. Hopf [13] und W. Müller [30] findet, muß also auf der linken Seite

$$\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy \quad \text{statt} \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta v_x\,dy$$

oder bei partiell nach t differenzierbarer Grenzschichtdicke $\delta(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta v_x\,dy - [v_x^{(0)}]_{y\to 0}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \text{statt} \quad \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta v_x\,dy$$

stehen, was — anscheinend zuerst — von A. Stodola [41] und später von W. Tollmien [43] ausdrücklich bemerkt worden ist.

Eine anschaulich-impulsmäßige Ableitung von (155) gibt S. Goldstein [9] wieder, ohne die erste der Näherungen (150) zu benutzen.

Auch L. Prandtl [36] verfährt ähnlich, verwendet jedoch als obere Integrationsgrenze eine Größe $h > 0$ derart, daß »die Flüssigkeitsteilchen zwischen $y = 0$ und $y = h$ praktisch alle durch die Reibung beeinflußten Teilchen umfassen«. Die Geschwindigkeitskomponente $v_x^{(0)}$ soll der Bedingung $[v_x^{(0)}]_{y=h} = [v_x]_{y=h}$ genügen und auf dem »kleinen« Intervall $0 < y \leq h$ lediglich als eine Funktion von x und t anzusehen sein; überdies wird h als von x und t unabhängig vorausgesetzt, so daß Differentiationen nach x bzw. t mit einer Integration nach y von 0 bis h ohne weiteres vertauscht werden können.

W. Tollmien [43] erhält (155) mit $[v_x^{(0)}]_{y=\delta}$ an Stelle von $[v_x^{(0)}]_{y\to 0}$ durch Integration der Grenzschichtgleichung und fügt eine — wiederum rein anschaulich gehaltene — Deutung als »Impulssatz für die x-Richtung« an.

so daß (157) mit

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\delta \frac{\partial v_s}{\partial t}\,dn + \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s\,dn\\&= -\delta\cdot p'(s;t) - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0} + \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta}\end{aligned}\right\}\quad(158)$$

identisch ist. Für den Spezialfall einer geradlinigen Kontur ($s = x$, $n = y$) ergibt (158) die Relation

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial t}\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x^2\,dy - [v_x]_{y=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x\,dy\\&= -\delta\cdot p'(x;t) - \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y\to 0} + \frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=\delta},\end{aligned}\right\}\quad(158\,a)$$

die sich von (155) — wenn wir den ersten der beiden Ansätze (150) außer acht lassen — durch das Auftreten des — bisher von sämtlichen Autoren ohne weiteres vernachlässigten — Gliedes $\frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=\delta}$ unterscheidet. Die hiermit zusammenhängenden Fragen können wir jedoch erst im zweiten Teil unseres Berichts im einzelnen behandeln.

Schließlich sei hervorgehoben, daß (158) unmittelbar durch Integration der Grenzschichtgleichung (97) entsteht, da die zugehörige Kontinuitätsgleichung (98) die Gültigkeit der Identität

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\delta\left\{v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right\}dn &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s^2\,dn\\&\quad - [v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta v_s\,dn\end{aligned}\right\}\quad(159)$$

nach sich zieht.

Obwohl daher die Integralbedingung lediglich als eine Teilaussage der Grenzschichtgleichung zu werten ist[31]), kann sie nach einem Vorschlag von Th. v. Kármán [18] dazu dienen, aus einer plausibel angenommenen einparametrigen Schar von v_s-Profilen ein bestimmtes Profil auszusondern. Die praktische Durchführung eines solchen Verfahrens stammt von K. Pohlhausen [32], der die Integralbedingung aus der Grenzschichtgleichung ableitet, dabei aber die Integration nach n primär von 0 bis ∞ erstreckt und in der später tatsächlich benutzten Wahl von δ als oberer Integrationsgrenze nur eine für rechnerische Anwendungen zweckmäßige Näherung sieht. Auch die Erörterung dieser Dinge wird ihren naturgemäßen Platz im zweiten Teil unseres Berichts finden.

Um die zuvor für das ebene Problem angestellten Überlegungen auf räumliche rotationssymmetrische Vorgänge zu übertragen, müßte der Impulssatz (7) auf das in Bild 6 veranschaulichte orthogonale s, n, ϑ-System transformiert, die erste der so erhaltenen Gleichungen bei festem t auf das durch

$$s_0 < s < s_0 + \sigma,\quad 0 < n < \delta(s,t),\quad 0 \leq \vartheta < 2\pi\quad(\sigma > 0)$$

gekennzeichnete ringförmige Gebiet T (vgl. die Schnittskizze in Bild 17) angewendet und alsdann der Grenzübergang $\sigma \to 0$ vollzogen werden. Dasselbe Ziel vermag man offenbar (vgl. Bild 18) einfacher dadurch zu erreichen, daß man die mit $\frac{h}{\cos(s,x)}$ multiplizierte erste der beiden Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (56) über n von 0 bis $\delta(s,t)$ sowie über ϑ von 0 bis 2π integriert; da aber der Integrand lediglich eine Funktion von s, n und t ist, so gelangen wir nach Division durch den von n unabhängigen Faktor $\frac{2\pi}{\cos(s,x)}$ zu der Beziehung

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}\,dn + \int_0^\delta h\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}+p\right)}{1-n\cdot k(s)}\,dn - \int_0^\delta h\cdot v_n\cdot w\,dn\\&= \frac{1}{R}\cdot\left\{[h\cdot w]_{n\to 0} - [h\cdot w]_{n=\delta}\right\},\end{aligned}\right\}\quad(160)$$

in der nunmehr die einschlägigen Grenzschichtvernachlässigungen vorzunehmen wären.

Durch Integration der mit h multiplizierten Grenzschichtgleichung wurde die für symmetrisch angeströmte Rotationskörper zuständige Integralbedingung von Cl. B. Millikan [24] gewonnen. Im Sinne der Prandtl-Blasiusschen Auffassung wäre bei einem derartigen Vorhaben gemäß (58) von

$$\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}\,dn + \int_0^\delta h\cdot v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s}\,dn + \int_0^\delta h\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\,dn = -p'(s;t)\cdot\int_0^\delta h\,dn + \frac{1}{R}\cdot\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\,dn$$

auszugehen. Nun gilt einerseits wegen der Kontinuitätsgleichung (59) in Analogie zu (159)

$$\int_0^\delta h\cdot v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s}\,dn + \int_0^\delta h\cdot v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\,dn = \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s\,dn,$$

andererseits

$$\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\,dn = \int_0^\delta\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right) - \frac{\partial h}{\partial n}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right\}dn = \left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta} - \left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0} - \int_0^\delta\frac{\partial h}{\partial n}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\,dn,$$

womit das gewünschte Resultat

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}\,dn + \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s^2\,dn - [v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s\,dn\\&= -p'(s;t)\cdot\int_0^\delta h\,dn\\&+\frac{1}{R}\cdot\left\{\left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta} - \left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0} - \int_0^\delta\frac{\partial h}{\partial n}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\,dn\right\}\end{aligned}\right\}\quad(161)$$

[31]) Man beachte, daß sich zwar (158) aus (97), keineswegs aber umgekehrt (97) aus (158) folgern läßt!

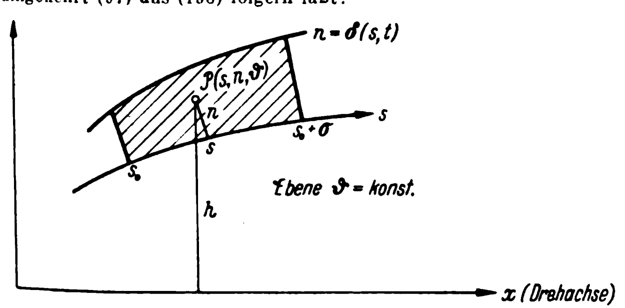


Bild 17. Schnittskizze des Ringgebiets T.

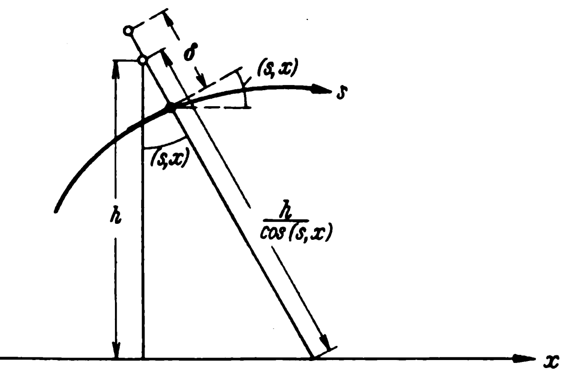


Bild 18. Zur Impulsbetrachtung bei Rotationskörpern.

lauten würde. Statt dessen bekommt Millikan bei Beschränkung auf **stationäre** Zustände die Relation

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}\int_0^\delta h\cdot v_s^2\,dn-[v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{d}{ds}\int_0^\delta h\cdot v_s\,dn\\=-p'(s)\cdot\int_0^\delta h\,dn-\frac{1}{R}\cdot\left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0},\end{aligned}\right\}\quad(162)$$

deren Herleitung — unter Einschaltung einer anschaulich-physikalischen Hilfsüberlegung — auf (61) sowie auf die Annahme

$$\frac{1}{R}\cdot\left[\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n=\delta}=0$$

gegründet wird[32]).

Eine dem v. Kármánschen Vorbild (vgl. den Beginn dieses Abschnitts) angepaßte Impulsbetrachtung für rotationssymmetrische Strömungen findet sich zuerst bei M. H. Lyon [23], und zwar ohne Benutzung der Tatsache, daß der in der s-Richtung herrschende Druckgradient innerhalb der Grenzschicht als von n unabhängig angesehen werden darf; ferner bei S. Goldstein [9], der die Beziehung

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\delta h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial t}\,dn+\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s^2\,dn-[v_s]_{n=\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\delta h\cdot v_s\,dn\\=-p'(s;t)\cdot\int_0^\delta h\,dn-\frac{1}{R}\cdot\left[h\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}\right]_{n\to 0}\end{aligned}\right\}\quad(162\text{a})$$

als Erweiterung von (162) auf **instationäre** Bewegungen angibt.

D. Die v. Misessche Gleitschichttheorie.

1. Aufstellung der Grundgleichungen.

In der Absicht, die Theorie der laminaren Grenzschichten »der exakten Theorie der zähen Flüssigkeiten einzuordnen« sowie zugleich »den Prandtlschen Ansatz etwas verallgemeinert und unter etwas anderen Voraussetzungen« zu erhalten, betrachtet R. v. Mises [25] eine ganz beliebige, dem jeweiligen Strömungsfeld angehörende Stromlinie mit beschränkter Krümmungsverteilung. Die Punkte $P(x, y)$ einer gewissen Umgebung dieser Stromlinie werden zunächst — an Hand der aus dem dritten Abschnitt von Teil A bekannten Transformationen — auf das krummlinige orthogonale s, n-System bezogen gedacht; alsdann bewirken die Substitutionen

$$\xi=s,\quad \eta=n\cdot\sqrt{R}\,;\qquad v_\xi=v_s,\quad v_\eta=v_n\cdot\sqrt{R}\qquad(163)$$

bei Deutung der neuen Veränderlichen ξ und η als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten »eine doppelte Verzerrung des Strömungsbildes« insofern, als »der Bogen s auf die gerade ξ-Achse abgewickelt« und daneben »quer zur Stromrichtung alles $\sqrt{R}$-fach gedehnt« wird. Durch den Grenzübergang $R\to\infty$ soll nunmehr auf Grund »einer sehr einfachen Rechnung« das — nach Berichtigung eines offensichtlichen Druckfehlers — mit den Gleichungen der Grenzschichttheorie »wesentlich identische« System

$$\left.\begin{aligned}v_\xi\cdot\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+v_\eta\cdot\frac{\partial v_\xi}{\partial\eta}=-\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial\eta^2},\\\frac{\partial p}{\partial\eta}=0,\\\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial v_\eta}{\partial\eta}=0\end{aligned}\right\}\quad(164)$$

resultieren, bezüglich dessen Ableitung jedoch drei Unterschiede gegenüber der Prandtlschen Methode hervorzuheben seien:

1. Den Ausgangspunkt bildet eine beliebige Stromlinie im Innern der Strömung (und nicht wie bei Prandtl die Profilkontur), was »deutlicher den Sinn der ganzen Überlegung« zeigt.
2. Es wird »nicht irgendeine Annahme über den Bewegungsverlauf zugrunde gelegt«, insbesondere nicht »etwa die, daß ein Randgebiet von bestimmter Größenordnung existiert, in dem die Geschwindigkeit rapid anwächst, während im übrigen Strömungsgebiet Potentialbewegung herrscht«; vielmehr »müssen das Bestehen einer solchen Schichte und die Bedingungen hierfür erst als ein **Ergebnis** der weiteren Rechnung erscheinen«.
3. Durch die »exakte Form der Ableitung« wird »jeder Zweifel beseitigt, ob etwa der Einfluß der Krümmung vollständig berücksichtigt ist«.

Schließlich präzisiert v. Mises den Sinn seines — im Rahmen eines Vortragsberichts nur kurz skizzierten — Gedankengangs dahin, daß für $R\to\infty$ die auf die angegebene Weise doppelt verzerrte Strömung in der Umgebung einer beliebigen Stromlinie im limes den Gleichungen (164) folgt. Irgendeine willkürliche, über den Navier-Stokesschen Ansatz hinausgehende Hypothese soll dabei nicht gemacht sein.

In kritischer Hinsicht wäre zunächst zu bemerken, daß die herausgegriffene Stromlinie für $R\to\infty$ offenbar gegen eine **durchweg glatt** gekrümmte Kurve konvergieren muß. Vor allem aber werden — worauf schon L. Prandtl [34] hingewiesen hat — die Ableitungen nach den durch (163) eingeführten Veränderlichen ξ und η ohne besondere Erwähnung unabhängig von R als **beschränkt** vorausgesetzt; überdies enthält der Ansatz für η die von vornherein gewiß durch nichts gerechtfertigte Aussage, daß die Ableitungen in der n-Richtung wie $\sqrt{R}$ wachsen. Mit anderen Worten: Die eigentlichen Schwierigkeiten des Problems werden hier einfach dadurch umgangen, daß für die Strömung in der Umgebung der ins Auge gefaßten Stromlinie ungenannte, in ihrer Bedeutung nicht zu überblickende **Annahmen** gemacht werden, die zu dem gewünschten Ergebnis führen. Eine physikalische Begründung dieser Annahmen wird weder versucht noch deren Notwendigkeit auch nur erwähnt; vielmehr wird ja ausdrücklich betont, daß über die den Navier-Stokesschen Gleichungen zugrunde liegenden physikalischen Voraussetzungen nicht hinausgegangen sei. Ferner setzt die Gültigkeit der Relationen (164) auch gemäß der v. Misesschen Herleitung **notwendig** eine Schicht mit großem Geschwindigkeitsanstieg (und sogar noch spezieller die Größenordnung dieses Anstiegs!) normal zur betrachteten Stromlinie — also eben nichts anderes als das Vorhandensein einer Grenzschicht — voraus; demnach bleibt grundsätzlich unverständlich, wie sich aus jenen Gleichungen **hinreichende** Bedingungen für die Existenz einer derartigen Schicht gewinnen lassen sollen. Gerade hierin aber erblickt der Verfasser — vgl. R. v. Mises [26] — den wesentlichen Inhalt seiner Theorie, während er sich »an den Prandtlschen Satz« — d. h. die Existenz einer Grenzschicht beim ebenen Umströmungsproblem mit den früher genannten Eigenschaften — »gar nicht herangewagt« hat, in der Überzeugung, daß »unsere heutigen mathematischen Kenntnisse nicht im entferntesten ausreichen, ihn zu beweisen oder die Bedingungen, unter denen er gilt, abzugrenzen«.

Die etwas ausführlicheren Darstellungen von R. v. Mises [27] sowie von R. v. Mises und G. Schulz [28] laufen, soweit sie sich auf die Grundgleichungen der Gleitschichttheorie beziehen, hauptsächlich auf zusätzliche Erläuterungen zu den Transformationen (163) hinaus. Würde man voraussetzen, daß die gewünschte Lösung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (nebst den in Betracht kommenden partiellen Ableitungen) für $R\to\infty$ gegen bestimmte Grenzwerte konvergiert, so müßte die Grenzlösung den **Eulerschen** Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik genügen. Sollen also — unter Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung der Grenzstromlinie — die

[32]) In einer am Schluß der Arbeit angefügten Bemerkung wird gezeigt, daß die im Text zusätzlich benutzte Annahme $[v_n]_{n=\delta}=0$ entbehrt werden kann.



durch die Reibung bedingten Glieder nicht sämtlich gestrichen werden, so ist zum mindesten für einzelne Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten ein unbegrenztes Anwachsen bei $R \to \infty$ zu fordern. Nun bleiben als für $R \to \infty$ unter gewissen Voraussetzungen nicht ohne weiteres verschwindende Zähigkeitsterme in der ersten der beiden auf $r = -\varrho(s)$ umgeschriebenen Navier-Stokesschen Gleichungen[33] (47) lediglich die Größen

$$\frac{1}{R}\cdot\left\{\frac{1}{r+n}\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n}+\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\right\}$$

übrig, woraus nach v. Mises folgen soll, daß »die Ableitungen nach der Normalrichtung $\frac{\partial}{\partial n}$ wie $\sqrt{R}$ wachsen« müssen; gemeint ist damit offenbar zunächst das Zutreffen der Abschätzungen

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = O(\sqrt{R}) + o(\sqrt{R}), \quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = O(R) + o(\sqrt{R}) \quad (165)$$

für das z. B.

$$v_s(s, n; R) = v_s(s, \eta; R) \quad \text{mit} \quad \eta = n\cdot\sqrt{R} \quad (165a)$$

unter den zusätzlichen Bedingungen

$$\frac{\partial v_s}{\partial \eta} = O(1) + o(1), \frac{\partial^2 v_s}{\partial \eta^2} = O(1) + o(1) \quad (\eta = n\cdot\sqrt{R}) \quad (165b)$$

hinreichend wäre[34]). Andererseits kann — indem wir bei unserer Auslegung der v. Misesschen Angaben verbleiben — neben (165) nicht auch

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = O(\sqrt{R}) + o(\sqrt{R})$$

richtig sein, da im Widerspruch hierzu die Kontinuitätsgleichung (48) nach Division durch $\sqrt{R}$ die Relation

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial n} = 0$$

ergibt. Infolgedessen glaubt v. Mises den gewiß gänzlich ungerechtfertigten Schluß

$$v_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

ziehen zu müssen.

Um die Auswirkungen derartiger Überlegungen »hervortreten zu lassen«, werden die Ansätze (163) eingeführt, die unter stillschweigender Verwendung von (165b) das Gleichungssystem (164) liefern. Die hieran angeknüpfte Gegenüberstellung einer »infinitesimalen Umgebung« der Grundstromlinie und einer Punktmenge, deren Elemente »in endlicher Entfernung« von jener Stromlinie liegen, ist mathematisch sinnlos. Die Substitution $\eta = n\cdot\sqrt{R}$ bedingt für jedes von Null verschiedene n beim Grenzübergang $R \to \infty$ ein unbegrenzt großes η, während $n = 0$ dem Wert $\eta = 0$ entspricht; demnach ist nicht ersichtlich, in welchem Gebiet der ξ, η-Ebene die Gültigkeit der v. Misesschen Gleitschichtgleichungen geltend zu machen wäre. Überdies wird letzten Endes auch hier wieder auf unscharfe Größenordnungsbetrachtungen zurückgegriffen und damit zugleich — wie zuvor schon erwähnt — von vornherein die Existenz einer Grenzschicht gemäß der üblichen Auffassung vorausgesetzt.

2. Die Wärmeleitungsanalogie.

Die der stationären Grenzschichtgleichung

$$v_s\cdot\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\cdot\frac{\partial v_s}{\partial n} + p'(s) = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \quad (166)$$

zugeordnete Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0 \quad . . . . (167)$$

kann durch die Stromfunktion

$$\psi = \psi(s, n) = \int_{(c^{(0)})} (v_s\, dn - v_n\, ds) \quad . . . . . (168)$$

[33]) Vgl. hierzu den Schlußabsatz der Fußnote 7 auf S. 73.

[34]) v. Mises nimmt anscheinend — ebenso wie H. Blasius [2] und die in der Fußnote 8 auf S. 73 zitierten Autoren — an, daß die erste der Relationen (165) ohne weiteres die zweite nach sich zieht!

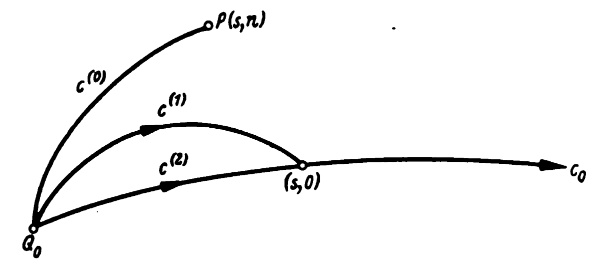


Bild 19. Zum Beweis der Konstanz von $\psi(s, n)$ längs des Kurvenstücks c_0.

wegen

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -v_n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = v_s \quad . . . . (168a)$$

integriert werden; dabei bedeutet $c^{(0)}$ einen beliebigen, samt seinen beiden Endpunkten ganz dem abgeschlossenen Gebiet (d. h. also dem Bereich)

$$0 < s < s_0, \; 0 \leq n \leq \delta \quad . . . . . (168b)$$

angehörenden Weg, der von einer an sich willkürlich wählbaren, hier zweckmäßig mit dem Punkt Q_0 des Konturstücks c_0 (vgl. Bild 7) identifizierten Ausgangsstelle zu dem in der Grenzschicht variierenden Aufpunkt $P(s, n)$ führt. Gemäß Bild 19 wird alsdann für jeden auf c_0 gelegenen Punkt $P(s, 0)$ bei Beachtung der Haftbedingungen offensichtlich

$$\int_{(c^{(1)})} (v_s\, dn - v_n\, ds) = \int_{(c^{(2)})} (v_s\, dn - v_n\, ds) = 0,$$

womit (168) die Beziehung

$$[\psi(s, n)]_{n=0} = 0 \qquad (0 \leq s \leq s_0) \quad . . . (168c)$$

ergibt. Demnach entspricht jedem $P(s, n)$ aus (168b) ein durch (168) wohlbestimmter Wert von ψ.

Denken wir uns das Kurvenstück c_0 auf das Intervall $0 \leq \xi \leq \xi_0$ einer ξ-Achse abgewickelt, und fassen wir die Veränderliche ξ nebst der durch (168) eindeutig definierten Größe ψ als Punktkoordinaten (ξ, ψ) in bezug auf ein ebenes kartesisches Rechtssystem auf, so gelangt der Zusammenhang zwischen dem s, n-System und dem ξ, ψ-System durch die Gleichungen

$$\xi = s, \qquad \psi = \psi(s, n) \quad . . . . . . (169)$$

zum Ausdruck. Mit

$$x_1 = \xi, \; x_2 = \psi, \; x_3 = z \text{ und } \xi_1 = s, \; \xi_2 = n, \; \xi_3 = z$$

lautet die zu (23a) analoge Funktionaldeterminante D im Hinblick auf (169) sowie (168a)

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -v_n & 0 \\ 0 & v_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = v_s,$$

bleibt also wegen

$$v_s > 0 \text{ für } 0 < s \leq s_0 \text{ und jedes } n \text{ aus } 0 < n \leq \delta$$

auf jedem Teilgebiet von (168b) positiv; ferner folgt bei Anwendung von (29a) auf $f = n$ und $\varkappa = 2$ die Relation

$$1 = \frac{\partial n}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial n}{\partial \psi}\cdot v_s,$$

so daß

$$n = \int_{\psi^*}^{\psi} \frac{1}{v_s}\, d\psi + [n(s, \psi)]_{\psi=\psi^*} \text{ für } 0 < s < s_0 \text{ und } 0 < n < \delta \quad . . . . (170)$$

mit $\psi^* \neq 0$ sowie mit $n(s, \psi)$ als der zu $\psi = \psi(s, n)$ bei festem s aus $0 < s \leq s_0$ inversen, wegen

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = v_s > 0 \text{ für } 0 < s \leq s_0 \text{ und } 0 < n < \delta \quad (171)$$

gewiß existierenden Funktion $n = n(s, \psi)$ sein muß. Da aber gemäß (171) die Funktion $\psi(s, n)$ bei festem s aus $0 < s \leq s_0$ auf dem Intervall $0 \leq n \leq \delta$ durchweg monoton steigt, mithin wegen (168c)

$$n(s, \psi) \longrightarrow 0 \text{ für } \psi \longrightarrow 0 \quad (0 < s < s_0)$$



gilt, so behält das auf der rechten Seite von (170) auftretende Integral auch für $\psi^* \to 0$ einen Sinn, und jene Gleichung läßt sich zu

$$n = \int_0^{\psi} \frac{1}{v_s}\, d\psi \text{ für } 0 < s \leq s_0 \text{ und jedes } n \text{ aus } 0 \leq n < \delta \quad (172)$$

vereinfachen.

Setzen wir nunmehr

$$[v_s(s, n)]_{n = n(s, \psi)} = v_s^*(s, \psi), \quad \ldots \ldots (173)$$

so besteht zunächst die Identität

$$v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} = v_s^* \cdot \frac{\partial v_s^*}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v_s^{*2}}{2}\right),$$

weil unter Berücksichtigung von (168a) einerseits

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} = \frac{\partial v_s^*}{\partial s} + \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial v_s^*}{\partial s} - v_n \cdot \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi},$$

andererseits

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} = v_s \cdot \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi}$$

zutrifft. Ferner wird

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n}\left(v_s^* \cdot \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi}\right) = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(v_s^* \cdot \frac{\partial v_s^*}{\partial \psi}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} = v_s \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left(\frac{v_s^{*2}}{2}\right),$$

und so nimmt (166) fast unmittelbar die Form

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{v_s^{*2} + 2 \cdot \int_0^s p'(s)\, ds\right\} = \frac{v_s^*}{R} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\left\{v_s^{*2} + 2 \cdot \int_0^s p'(s)\, ds\right\}$$

an, die bei Benutzung der Abkürzung

$$\chi(s, \psi) = v_s^{*2} + 2 \cdot \int_0^s p'(s)\, ds \quad \ldots \ldots (174)$$

in

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\chi(s, \psi) - 2 \cdot \int_0^s p'(s)\, ds} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} \quad (175)$$

übergeht.

Die derart transformierte Grenzschichtgleichung stationärer Strömungen stellt ein Analogon der Wärmeleitungsgleichung für einen Stab mit orts- und temperaturabhängiger Wärmekapazität dar; sie wurde zuerst von R. v. Mises [25] veröffentlicht, jedoch bereits früher von L. Prandtl — vgl. die diesbezüglichen Angaben in L. Prandtl [34] — aufgefunden. Ein wirklich wesentlicher Fortschritt ist damit vorläufig noch nicht erreicht, denn eine systematische Integrationstheorie der Differentialgleichung (175) fehlt bis jetzt[35]).

Da R. v. Mises[36]) statt (166) und (167) das Gleichungssystem (164) zugrunde legt, erhält er — von den Ansätzen

$$v_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \qquad v_\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

ausgehend — statt (175) die Beziehung

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \sqrt{\chi(\xi, \psi) - 2\, p(\xi)} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2}, \quad \ldots (176)$$

wobei die Funktion $\chi(\xi, \psi)$ mit dem doppelten für $R \to \infty$ resultierenden Grenzwert der Strömungsenergie

$$\frac{1}{2}\left(v_\xi^2 + \frac{v_\eta^2}{R}\right) + p(\xi, \eta)$$

einer idealen Flüssigkeit identifiziert wird. Für das Vorhandensein einer Gleitschicht soll alsdann eine gemäß

$$\left[\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right]_{\psi = 0} \not\equiv 0 \quad \ldots \ldots \ldots (176a)$$

längs der Grundstromlinie $\psi = 0$ nicht-konstante »Strömungsenergie« hinreichen. Einerseits nämlich wäre unter der Annahme (176a) wegen (176) auf

$$\left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2}\right]_{\psi = 0} \not\equiv 0$$

und damit bei passend gewähltem $\psi_1^* > 0$ auf

$$\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \not\equiv 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \psi \leq \psi_1^*, \quad \ldots \ldots (177\text{a})$$

andererseits aus (163) auf

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \psi} = \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial n} \quad \ldots (177\text{b})$$

zu schließen; demnach bedinge die gemäß (177a) nicht identisch verschwindende Steigung einer der Kurven

$$\chi = [\chi(\xi, \psi)]_{\xi = \text{konst.}}$$

»ein unendlich starkes Quergefälle der Geschwindigkeit in der urspünglichen Strömung«. Unabhängig hiervon entstehe eine Gleitschicht immer dann, wenn die Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt $\xi = 0$ »schon das unendliche Gefälle aufweist«.

Offensichtlich sind solche Überlegungen reiner Leerlauf, weil sie wesentlichen Gebrauch von der Differentialgleichung (176) machen, bei deren Ableitung die Existenz einer Gleitschicht bereits vorausgesetzt wurde. Außerdem ist die Relation (177b) unverständlich, in der die Variablen η bzw. n in zwei verschiedenen Bedeutungen nebeneinander benutzt werden, nämlich sowohl im Sinne von $\eta = n \cdot \sqrt{R}$ mit endlichem R als auch nach vollzogenem Grenzübergang $R \to \infty$.

3. Die auf die Richtungen der Stromlinien und ihrer orthogonalen Trajektorien bezogenen Bewegungsgleichungen ebener stationärer Strömungen.

Sei B ein Teilgebiet eines ebenen stationären Strömungsfeldes, in dem der Geschwindigkeitsbetrag v an keiner Stelle den Wert Null annimmt. Dann versteht man unter Stromlinien bzw. ihren orthogonalen Trajektorien solche orientierten Kurven, deren überall stetige Tangente bzw. Normale in jedem Punkt $P(x, y)$ von B die positive bzw. negative Richtung des dort herrschenden Geschwindigkeitsvektors $\{v_x, v_y\}$ besitzt. Mit der von einem jeweils willkürlich wählbaren Bezugspunkt aus gezählten Bogenlänge s bzw. σ soll demnach längs einer Stromlinie

$$\cos(s, x) = \frac{v_x}{v}, \qquad \cos(s, y) = \frac{v_y}{v} \quad (v > 0),$$

dagegen längs einer orthogonalen Trajektorie

$$\cos(\sigma, x) = -\frac{v_y}{v}, \quad \cos(\sigma, y) = \frac{v_x}{v} \quad (v > 0)$$

sein, woraus bei Benutzung der Parameterdarstellungen

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \ldots \ldots (178\text{a})$$

bzw.

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma) \quad \ldots \ldots (178\text{b})$$

einerseits

$$x'(s) = \frac{v_x}{v}, \quad y'(s) = \frac{v_y}{v} \quad (v > 0), \quad \ldots (179\text{a})$$

andererseits

$$x'(\sigma) = -\frac{v_y}{v}, \quad y'(\sigma) = \frac{v_x}{v} \quad (v > 0) \quad \ldots (179\text{b})$$

folgt. Jedes dieser beiden Relationenpaare bildet aber bei Vorgabe von

$$v_x = v_x(x, y), \qquad v_y = v_y(x, y)$$

und damit auch von

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v(x, y) > 0$$

ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannten Funktionen (178a) bzw. (178b), das wegen der bezüglich v_x und v_y von vornherein zu fordernden Eigenschaften auf Grund des einschlägigen Existenz- und Einzigkeitssatzes stets eine und

[35]) Die von R. v. Mises [25] — vgl. überdies R. v. Mises [27] sowie R. v. Mises und G. Schulz [28] — unter Berufung auf (175) gezogenen Schlüsse hinsichtlich der für die Integration des Systems (166), (167) maßgeblichen Randbedingungen sind nicht stichhaltig, da sie, ohne daß dieser sicherlich nicht unwichtige Umstand — bis auf einen in der von v. Mises angeregten Dissertation H. J. Luckert [22] kurz ausgesprochenen Vorbehalt — irgendwie betont wird, einer rein heuristischen Übertragung von Eigenschaften der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung mit konstanter (allenfalls lediglich ortsabhängiger) Wärmekapazität entspringen.

Einige weitere hierhergehörige Einzelheiten werden im zweiten Teil unseres Berichts Erwähnung finden.

[36]) Vgl. die in der vorhergehenden Fußnote zitierten Mitteilungen.

nur eine Lösung zuläßt, deren geometrisches Bild bis an die Berandung des Gebiets B heranführt[37]).

Im Zusammenhang mit diesem Ergebnis bemerken wir:

1. Ist $\psi(x, y)$ gemäß
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \quad \ldots \ldots \quad (180)$$
die Stromfunktion der in B stattfindenden Flüssigkeitsbewegung, so stimmt die Kurvenschar
$$\psi(x, y) = \text{konst.}$$
mit der Menge aller das Gebiet B bedeckenden Stromlinien überein. Denn durch Kombination von (179a) und (180) ergibt sich über
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot x'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot y'(s) = 0$$
die Identität
$$\frac{d}{ds} \psi\{x(s), \ y(s)\} = 0,$$
die die Behauptung beweist.
2. In dem von der Grenzschicht erfüllten Gebiet (vgl. den dritten Abschnitt von Teil B)
$$0 < s < s_0, \ 0 < n < \delta$$
trifft die Voraussetzung $v > 0$ zu, da hier unter Beachtung von (62)
$$v = \sqrt{v_s^2 + v_n^2} > |v_s| = v_s > 0$$
wird.

Durch jeden Punkt des Grenzschichtgebiets geht daher sowohl eine und nur eine Stromlinie als auch eine und nur eine orthogonale Trajektorie hindurch.

Die auf ebene stationäre und kräftefreie Vorgänge spezialisierten Gleichungen (9) lauten in dimensionsloser Schreibweise
$$\frac{d v_x}{dt} = -\left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad (181\text{a})$$
und
$$\frac{d v_y}{dt} = -\left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right), \quad \ldots \quad (181\text{b})$$
wobei gemäß (153a)
$$\left.\begin{aligned} S_{xx} &= p - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad S_{yy} = p - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y}, \\ S_{xy} &= S_{yx} = -\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (182)$$
gilt. Um jetzt hieraus die auf die jeweiligen s- und σ-Richtungen (vgl. Bild 20) bezogenen Bewegungsgleichungen abzuleiten, machen wir zunächst von den Relationen
$$\cos(\sigma, x) = -\cos(s, y), \ \cos(\sigma, y) = \cos(s, x) \quad (183)$$
und
$$v_x = v \cdot \cos(s, x), \ v_y = v \cdot \cos(s, y) \quad \ldots \quad (184)$$
Gebrauch. Ferner benutzen wir

1. die Transformationsgesetze der Tensorkomponenten, nach denen sich
$$\left.\begin{aligned} S_{ss} &= S_{xx} \cdot \cos^2(s, x) + 2\, S_{xy} \cdot \cos(s, x) \cdot \cos(s, y) \\ &\quad + S_{yy} \cdot \cos^2(s, y), \\ S_{s\sigma} &= S_{\sigma s} = S_{xx} \cdot \cos(s, x) \cdot \cos(\sigma, x) \\ &\quad + S_{yy} \cdot \cos(s, y) \cdot \cos(\sigma, y) \\ &\quad + S_{xy}\{\cos(s, y) \cdot \cos(\sigma, x) + \cos(s, x) \cdot \cos(\sigma, y)\}, \\ S_{\sigma\sigma} &= S_{xx} \cdot \cos^2(\sigma, x) + 2\, S_{xy} \cdot \cos(\sigma, x) \cdot \cos(\sigma, y) \\ &\quad + S_{yy} \cdot \cos^2(\sigma, y) \end{aligned}\right\} \quad (185\text{a})$$
sowie umgekehrt
$$\left.\begin{aligned} S_{xx} &= S_{ss} \cdot \cos^2(s, x) + 2\, S_{s\sigma} \cdot \cos(s, x) \cdot \cos(\sigma, x) \\ &\quad + S_{\sigma\sigma} \cdot \cos^2(\sigma, x), \\ S_{xy} &= S_{yx} = S_{ss} \cdot \cos(s, x) \cdot \cos(s, y) \\ &\quad + S_{\sigma\sigma} \cdot \cos(\sigma, x) \cdot \cos(\sigma, y) \\ &\quad + S_{s\sigma}\{\cos(\sigma, x) + \cos(s, y) + \cos(s, x) \cdot \cos(\sigma, y)\}, \\ S_{yy} &= S_{ss} \cdot \cos^2(s, y) + 2\, S_{s\sigma} \cdot \cos(s, y) \cdot \cos(\sigma, y) \\ &\quad + S_{\sigma\sigma} \cdot \cos^2(\sigma, y) \end{aligned}\right\} \quad (185\text{b})$$
berechnet;

2. die Richtungsableitungen
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(s, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos(s, y), \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\sigma, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos(\sigma, y), \end{aligned}\right\} \quad (186\text{a})$$
mit denen
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \cos(s, x) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \cos(\sigma, x), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \cos(s, y) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \cos(\sigma, y) \end{aligned}\right\} \quad (186\text{b})$$
wird.

Schließlich werden noch die für die Krümmungen k_s bzw. k_σ der Stromlinien bzw. der orthogonalen Trajektorien maßgebenden Ausdrücke
$$k_s = \frac{\partial}{\partial s}(s, x), \qquad k_\sigma = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\sigma, x) \quad \ldots \quad (187)$$
benötigt[38]).

Setzen wir (182) in (185a) ein, so erhalten wir wegen (186a) sowie wegen (184) und (187) die Beziehungen
$$\left.\begin{aligned} S_{ss} &= p - \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad S_{\sigma\sigma} = p - \frac{2}{R} \cdot v \cdot k_\sigma, \\ S_{s\sigma} &= S_{\sigma s} = -\frac{1}{R} \cdot \left\{\frac{\partial v}{\partial \sigma} + v \cdot k_s\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (188)$$
während die Kontinuitätsgleichung
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$
bei Anwendung von (186b) in
$$\frac{\partial v}{\partial s} + v \cdot k_\sigma = 0 \quad \ldots \ldots \quad (189)$$
übergeht[39]). Das gleiche Verfahren führt nach Vornahme der aus (185b) ersichtlichen Substitutionen zu
$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} \\ &= \left\{\frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial \sigma} + k_\sigma \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) - 2\, k_s \cdot S_{s\sigma}\right\} \cdot \cos(s, x) \\ &+ \left\{\frac{\partial S_{\sigma\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial s} + k_s \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) + 2\, k_\sigma \cdot S_{s\sigma}\right\} \cdot \cos(\sigma, x) \end{aligned} \quad \ldots \quad (190\text{a})$$
und
$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \\ &= \left\{\frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial \sigma} + k_\sigma \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) - 2\, k_s \cdot S_{s\sigma}\right\} \cdot \cos(s, y) \\ &+ \left\{\frac{\partial S_{\sigma\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial s} + k_s \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) + 2\, k_\sigma \cdot S_{s\sigma}\right\} \cdot \cos(\sigma, y); \end{aligned} \quad \ldots \quad (190\text{b})$$

[37]) Vgl. hierzu etwa E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, § 15 und § 16; Leipzig 1930.

[38]) Hierbei ist z. B. unter $(s\ x)$ derjenige Winkel zu verstehen, der die positive x-Achse im mathematisch positiven Sinn in die positive s-Richtung dreht (vgl. wieder Bild 20).

[39]) Aus (188) und (189) folgt
$$S_{ss} + S_{\sigma\sigma} = 2\,p,$$
im Einklang mit der Tatsache, daß gemäß
$$S_{ss} + S_{\sigma\sigma} = S_{xx} + S_{yy}$$
die Spur des Spannungstensors eine Invariante sein muß.

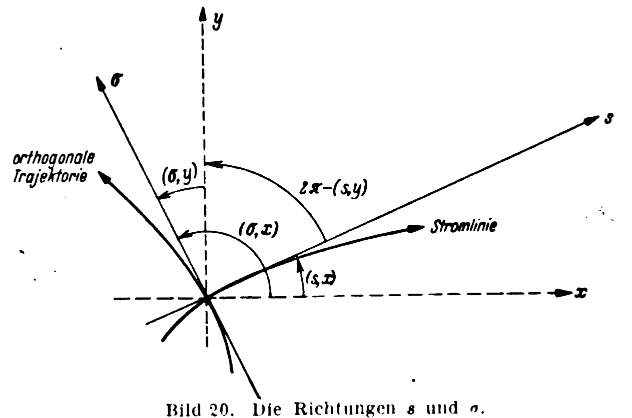


Bild 20. Die Richtungen s und σ.

überdies liefert (184)

$$\frac{d v_x}{d t} \cdot \cos(s, x) + \frac{d v_y}{d t} \cdot \cos(s, y) = \frac{d v}{d t} = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{d s}{d t} = v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}$$

oder

$$\frac{d v_x}{d t} \cdot \cos(s, x) + \frac{d v_y}{d t} \cdot \cos(s, y) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right), \qquad (191\,\text{a})$$

dagegen

$$\frac{d v_x}{d t} \cdot \cos(\sigma, x) + \frac{d v_y}{d t} \cdot \cos(\sigma, y) = 0, \qquad (191\,\text{b})$$

wie man sofort im Hinblick auf (183) erkennt.

Multipliziert man nunmehr (181 a) bzw. (181 b) einerseits mit $\cos(s, x)$ bzw. $\cos(s, y)$, andererseits mit $\cos(\sigma, x)$ bzw. $\cos(\sigma, y)$, so entstehen nach jedesmaliger Addition die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\left\{\frac{\partial S_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial \sigma} + k_\sigma \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) - 2\, k_s \cdot S_{s\sigma}\right\} \quad \ldots\ldots (192\,\text{a})$$

sowie

$$\frac{\partial S_{\sigma\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial S_{s\sigma}}{\partial s} + k_s \cdot (S_{ss} - S_{\sigma\sigma}) + 2\, k_\sigma \cdot S_{s\sigma} = 0, \qquad (192\,\text{b})$$

die in Verbindung mit (189) das vollständige System der gewünschten Bewegungsgleichungen in Richtung der Stromlinien und ihrer orthogonalen Trajektorien darstellen.

Auf dieser Grundlage wollen Th. v. Kármán und Cl. B. Millikan [19] — bei denen (192 a) fehlerhaft und (192 b) überhaupt nicht angegeben ist — die Grenzschichttheorie dadurch aufbauen, daß sie — übrigens ohne jede physikalische Rechtfertigung — die folgenden Annahmen machen: Innerhalb der Grenzschicht sollen sich für $R \to \infty$

1. die Ableitungen in der σ-Richtung asymptotisch wie $\sqrt{R}$,
2. die Ableitungen in der s-Richtung beschränkt,
3. die Krümmung k_s gleichfalls beschränkt

verhalten. Als Grenzschichtgleichung sollen sodann

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2} + p\right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} \quad \ldots\ldots (193)$$

mit

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \quad \ldots\ldots (193\,\text{a})$$

resultieren, was im Rahmen der üblichen Größenordnungsbetrachtungen unter den Voraussetzungen

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} \sim \sqrt{R}, \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial v}{\partial \sigma}\right) \sim \sqrt{R}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} \sim R$$

und

$$v \sim 1, \quad \frac{\partial v}{\partial s} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \sim 1$$

sowie

$$k_s \sim 1, \quad k_\sigma \sim 1$$

und

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial k_s}{\partial \sigma} \ll 1, \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial k_\sigma}{\partial \sigma} \ll 1$$

zutreffend erscheint. Indem nunmehr die Richtungsableitungen $\frac{\partial}{\partial s}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \sigma}$ durch partielle Ableitungen nach den Koordinaten s bzw. n des zuvor wiederholt von uns benutzten s, n-Systems ersetzt werden, gelangen v. Kármán und Millikan mit Hilfe der im vorangehenden Abschnitt erwähnten Transformationen zu der v. Misesschen Wärmeleitungsgleichung (175), wobei jedoch einerseits neben ψ statt s als zweite unabhängige Veränderliche eine mit der gemessenen Druckverteilung im Zusammenhang stehende Größe Verwendung findet, andererseits in der abhängigen Veränderlichen (174) statt der s-Komponente der Betrag der Geschwindigkeit auftritt.

E. Einige weitere einschlägige Fragestellungen.

1. Eine Bemerkung von Jeffreys.

An Hand sehr allgemein gehaltener Erwägungen will H. Jeffreys [17] die Existenz von Grenzschichten als eine aus den Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik zwangsläufig ableitbare Folgerung nachweisen. Da jedoch diese Darlegungen, für die bezüglich der einen oder anderen Einzelheit auf H. Jeffreys [15] und H. Jeffreys [16] verwiesen sei, keineswegs klar zu durchschauen sind, müssen wir uns mit einer kurzen Hervorhebung des anscheinend wesentlichen Gedankens begnügen.

Die unter geeignet ergänzten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (vgl. hierzu die analogen Ausführungen zu Beginn des ersten Abschnitts von Teil C) durch Elimination des Drucks p aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen (36) mit $\xi = x$ und $\eta = y$ hervorgehende Relation

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{R} \cdot \Delta w \qquad (194)$$

läßt sich mit Benutzung der zeitlich-substantiellen Änderung des Wirbels w kürzer in der Form

$$\frac{d w}{d t} = \frac{1}{R} \cdot \Delta w \quad \ldots\ldots (194\,\text{a})$$

schreiben. Hieraus schließt nun Jeffreys auf eine der »Wärmeleitungsgleichung« — offenbar richtiger der Differentialgleichung der mit Konvektionsströmung verbundenen Wärmeleitung — gehorchende, von der Wand in die Flüssigkeit sich ausbreitende Wirbelverteilung, die »den Faktor $e^{-\frac{R \cdot n^2}{4t}}$ enthält, falls die Flüssigkeit während des Zeitintervalls t eine Kontur überstrichen hat«. Für im Vergleich zu $2 \cdot \sqrt{\frac{t}{R}}$ große Werte des Wandabstands n soll daher die Bewegung in Anbetracht der Kleinheit jenes Faktors praktisch wirbelfrei sein, worin eine »theoretische Rechtfertigung der Prandtlschen Grenzschichttheorie« erblickt wird.

2. Die Smithsche Begründung der Grenzschichttheorie durch ein Variationsprinzip.

Von der Bemerkung ausgehend, daß in gewissen Spezialfällen eine formale Analogie zwischen stationären Grenzschichtvorgängen und dem Verhalten elektrischer Ströme besteht, hat R. H. Smith [40] versucht, die Grenzschichttheorie auf das folgende Minimaltheorem zu gründen:

»Für Bewegungen einer zähen Flüssigkeit, die — wie z. B. Grenzschichtströmungen — unter der Wirkung von Schubspannungen erzeugt und aufrecht erhalten werden, ist das Verhältnis der beim Passieren eines beliebigen Teilgebiets des Strömungsfeldes durch innere Reibung verzehrten Energie zu der hindurchtretenden Energie ein Minimum.«

Die Anwendung dieses Prinzips bleibt zunächst auf den Fall einer laminaren Grenzschicht mit konstanter Druckverteilung längs einer ebenen Platte beschränkt, wobei offenbar das aus Bild 21 ersichtliche Gebiet zugrundegelegt und anschließend der Grenzübergang $h \to 0$ vollzogen wird. Die durch innere Reibung bei zweidimensionalen Strömungen pro Zeit- und Volumeneinheit dissipierte Energie E läßt sich (in dimensionsloser Schreibweise) durch

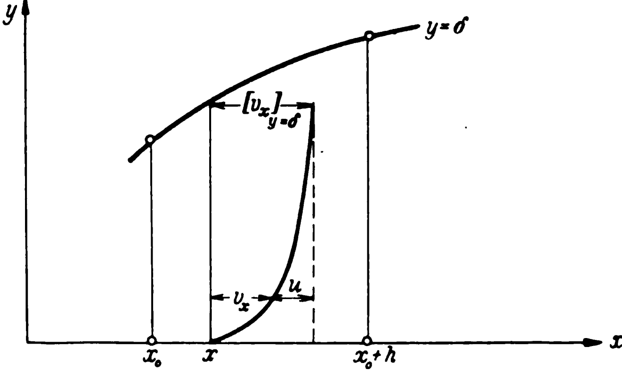


Bild 21. Die Bedeutung der Funktion $u(x, y)$.

$$E = \frac{1}{R} \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (195)$$

zum Ausdruck bringen[40]); statt dessen benutzt Smith den Ansatz

$$E = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (196)$$

mit

$$u(x, y) = [v_x]_{y=\delta} - v_x(x, y), \quad \ldots \quad (196\,a)$$

so daß hier insbesondere die den üblichen Grenzschichtvorstellungen entsprechenden Vernachlässigungen von vornherein vorgenommen werden. Auf eine Wiedergabe des Rechnungsgangs, der im wesentlichen in der Behandlung eines Variationsproblems mit Nebenbedingung besteht, müssen wir verzichten, da uns mancherlei grundsätzliche Einzelheiten undurchsichtig geblieben sind.

3. Grenzschichtbetrachtungen von Klose im Rahmen einer Theorie der Luftkräfte bei verschwindender Reibung.

Gelegentlich ist die Vermutung geäußert worden, daß die Lösung des Umströmungsproblems durch den Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit eine Helmholtzsche Potentialströmung mit Totwasser ergibt. Tatsächlich läßt sich die Richtigkeit dieser Ansicht nach K. Friedrichs [6] an Hand gewisser hinreichender Voraussetzungen für den ebenen Fall mathematisch leicht sicherstellen — Erwägungen, gegen die jedoch L. Prandtl [35] verschiedene physikalische Bedenken geltend gemacht hat.

Die Annahme einer diskontinuierlichen Potentialströmung als Grenzform einer beliebigen Flüssigkeitsbewegung für $R \to \infty$ bildet die Grundlage einer kürzlich veröffentlichten Arbeit von A. Klose [20], die trotz ihrer abweichenden Zielsetzung mancherlei Berührungspunkte mit der Grenzschichttheorie aufweist, und die wir daher im erforderlichen Umfang in unseren Bericht einbeziehen wollen.

Bei Verwendung der Relationen

$$v_x = v \cdot \cos(v, x), \quad v_y = v \cdot \cos(v, y), \quad v_z = v \cdot \cos(v, z) \quad (197)$$

wird zunächst vorausgesetzt, daß sowohl der Geschwindigkeitsbetrag v als auch die drei Funktionen $\cos(v, x)$, $\cos(v, y)$ und $\cos(v, z)$ nebst ihren jeweils benötigten örtlichen und zeitlichen partiellen Ableitungen für festes $R > 0$ in dem abgeschlossenen Strömungsgebiet $T_0 + S_0$ — allenfalls mit Ausnahme gewisser singulärer Randpunkte — stetig sind.

Ferner wird eine in T_0 verlaufende Parallelfläche S_1 im Abstand h von S_0 eingeführt, und wenn P bzw. Q zwei der gleichen (ins Innengebiet von S_0 weisenden) Flächennormalen angehörende Punkte auf S_1 bzw. S_0 bezeichnen, so gibt es nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gewiß einen auf der Strecke PQ gelegenen Punkt P^*, mit dem zu jedem festen Zeitpunkt t eine Beziehung von der Form

$$[v]_P = [v]_Q - h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q + \frac{h^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right]_{P^*} \quad (198)$$

besteht. Für $R \to \infty$ soll alsdann $h \to 0$ gehen, und zwar derart, daß einerseits

$$[v]_P \longrightarrow [v^{(0)}]_Q \quad \ldots \ldots \quad (199\,a)$$

mit $v^{(0)}$ als Geschwindigkeitsbetrag der für $R \to \infty$ resultierenden Potentialströmung, andererseits

$$h^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right]_{P^*} \longrightarrow 0 \quad \ldots \ldots \quad (199\,b)$$

gilt, mithin (198) sich wegen der Haftbedingung auf

$$\lim_{R \to \infty} \left\{ h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q \right\} = -[v^{(0)}]_Q \quad \ldots \ldots \quad (200)$$

reduzieren läßt.

Die Annahme (199b) läuft offenbar darauf hinaus, daß die Geschwindigkeitsprofile mit wachsenden Werten von R asymptotisch geradlinig werden; sie stellt daher nur eine ganz grobe Wiedergabe der wirklich vorliegenden Verhältnisse dar.

[40]) Vgl. hierzu H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Aufl., S. 655; Leipzig und Berlin 1931.

Überdies trifft die in (200) formulierte Schlußfolgerung für das von uns im vierten Abschnitt von Teil B betrachtete Beispiel nicht zu. Gemäß (100a) in Verbindung mit (105) wird nämlich

$$[v]_P = \left[\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right]_{y=h} = \left[\sqrt{b^2 \cdot x^2 \cdot \varphi'(\eta)^2 + \frac{b}{R} \cdot \varphi(\eta)^2} \right]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot h},$$

während man wegen (99a)

$$[v^{(0)}]_Q = [v^{(0)}]_{y \to 0} = b \cdot x \qquad (x > 0)$$

zu setzen hat. Zwecks Erfüllung der Forderung (199a) ist demnach

$$\lim_{R \to \infty} [\varphi'(\eta)]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot h} = 1$$

und

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{R} \cdot \varphi(\eta)^2 \right]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot h} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{\eta^2}{R} \cdot \left\{ \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \right\}^2 \right]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot h} = 0$$

zu verlangen, was im Hinblick auf Bild 14 zu

$$h \cdot \sqrt{R} \longrightarrow \infty \text{ für } R \longrightarrow \infty \quad \ldots \ldots \quad (201)$$

bzw. bei Beachtung von (109) zu

$$h \longrightarrow 0 \text{ für } R \longrightarrow \infty$$

führt. Weiter ergibt sich

$$h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q = -h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{y \to 0} = -h \cdot \left[\frac{v_x}{v} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{v_y}{v} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]_{y \to 0}$$

oder

$$h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q = -h \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_y}{v_x} \right)^2}} \cdot \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{v_y}{v_x} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \right\} \right]_{y \to 0}$$

mit

$$\frac{v_y}{v_x} = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{b \cdot R}} \cdot \left[\frac{\varphi(\eta)}{\varphi'(\eta)} \right]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y}$$

sowie mit

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = x \cdot \sqrt{b^3 \cdot R} \cdot [\varphi''(\eta)]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y}$$

und

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -b \cdot [\varphi'(\eta)]_{\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y}.$$

Da man aber den numerischen Resultaten nach Bild 14 unmittelbar

$$\lim_{\eta \to 0} \varphi''(\eta) \neq 0,$$

also gemäß (106a) auch die Relation

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\varphi(\eta)}{\varphi'(\eta)} = \lim_{\eta \to 0} \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi''(\eta)} = 0$$

entnimmt, so wird

$$\lim_{y \to 0} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

sowie

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial v_x}{\partial y} = x \cdot \sqrt{b^3 \cdot R} \cdot \lim_{\eta \to 0} \varphi''(\eta), \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

mithin

$$h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q = -h \cdot \sqrt{b \cdot R} \cdot b \cdot x \cdot \lim_{\eta \to 0} \varphi''(\eta).$$

Wegen (201) wächst daher die Funktion $h \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]_Q$ für $R \to \infty$ unbegrenzt — im Gegensatz zu der in (200) formulierten Aussage der Kloseschen Theorie.

Zum Beweis des Prandtlschen Satzes über den Druckverlauf im Innern der Grenzschicht, der in der Fassung

$$\lim_{R \to \infty} [p]_P = [p^{(0)}]_Q \quad \ldots \ldots \quad (202)$$

ausgesprochen wird, dient unter Voraussetzung der Existenz von $\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}$ die zu (198) analoge Beziehung

$$[p]_P = [p]_Q - h \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]_Q + \frac{h^2}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right]_{P^{**}}.$$

Ohne den Gedankengang in seinen Einzelheiten wiederzugeben, begnügen wir uns mit der Aufzählung einiger Einwände, die in diesem Zusammenhang zu erheben sind:

1. Die Relation
$$h^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right]_{P^{**}} \to 0 \text{ für } R \to \infty$$
wird als richtig angesehen, sobald
$$h^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right]_Q \to 0 \text{ für } R \to \infty$$
feststeht.
2. Der aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen hergeleitete Ausdruck für $\left[\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}\right]_Q$ ist offenbar fehlerhaft.
3. Die stillschweigend gemachte, in durchaus wesentlicher Weise benutzte Annahme, daß sich die örtlichen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\cos(v, x)$, $\cos(v, y)$, $\cos(v, z)$ auf S_0 bei unbegrenzt wachsendem R beschränkt verhalten, entbehrt jeder Begründung.

Wenn ferner die Funktion $h^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right]_Q$ für $R \to \infty$ als beschränkt vorausgesetzt wird, so wäre hier natürlich — selbst falls statt Q korrekt P^{**} gewählt würde — eine bloße Berufung auf die für den Punkt P^* postulierte Beziehung (199b) von vornherein keineswegs als stichhaltig anzuerkennen.

Entscheidende Bedeutung für die weiteren Überlegungen von Klose besitzen die Grenzwerte

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{\Delta v}{R}\right]_P$$

und

$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}\,\right]_{R \to \infty},$$

deren Ermittlung vor allem zu folgenden Beanstandungen Anlaß bietet:

1. Die ohne weiteres gebrauchten Identitäten
$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{\partial p}{\partial x_\varkappa}\right]_P = \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \left\{\lim_{R \to \infty} [p]_P\right\} \quad (\varkappa = 1, 2, 3)$$
mit $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$ sind gerade bei Grenzschichtbetrachtungen ($h \to 0$ für $R \to \infty$!) sicherlich nichts weniger als trivial.
2. Durch einen offensichtlichen Fehlschluß wird aus der Beschränktheit einer Summe von zwei Funktionen die Beschränktheit der beiden Summanden f_1 und f_2 gefolgert. Gilt nämlich unter einer speziellen Bedingung $f_2 \to 0$, so ist f_1 beschränkt und soll es auch dann noch bleiben, wenn f_2 bei stetiger Änderung jener Bedingung nicht mehr gegen Null konvergiert!
3. Die Aussage
$$\lim_{R \to \infty} \left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]_Q = \left[\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t}\right]_Q$$
ist unverständlich, da die linke Seite wegen der Haftbedingung auf jeden Fall, hingegen die rechte Seite im allgemeinen nur bei stationären Potentialströmungen verschwindet.

Im übrigen wird die Stichhaltigkeit der Ausführungen des Verfassers durch mancherlei sonstige Mängel an entscheidenden Stellen erheblich beeinträchtigt.

Unter den Ergebnissen der Arbeit, in denen man insgesamt wegen der Unsicherheit ihrer Grundlagen kaum mehr als unbewiesene Behauptungen zu erblicken vermag, sei insbesondere die Aussage hervorgehoben, daß nur solche Potentialströmungen mit Totwasser als physikalisch möglich erscheinen sollen, bei denen der Geschwindigkeitsbetrag längs jeder Wandstromlinie, mit dem Wert Null im jeweiligen Staupunkt beginnend, monoton bis zu dem in der zugehörigen Ablösungsstelle angenommenen Wert wächst; demnach müßte die Ablösung im Grenzfall $R \to \infty$ stets an der Stelle des Druckminimums stattfinden. Für den »Prandtlschen Ablösungssatz«, demzufolge sich die Strömung einer zähen Flüssigkeit lediglich in einem Gebiet ansteigenden Drucks von der Wand trennen kann, wird ein Beweis geboten, der — von anderen Unzulänglichkeiten abgesehen — nicht erkennen läßt, inwiefern dabei überhaupt eine den Ablösungspunkt charakterisierende Eigenschaft Berücksichtigung findet.

Zusammenfassung.

Die Prandtlsche Grenzschichtgleichung, die in der modernen Hydro- und Aerodynamik als Grundlage der Theorie laminarer Grenzschichten zu großer praktischer Bedeutung gelangt ist, wurde bisher ausschließlich auf Grund von anschaulichen, in mathematischer Hinsicht wenig befriedigenden Plausibilitätsbetrachtungen abgeleitet. Die Einwände, die sich gegen derartige Überlegungen erheben lassen, werden nach einer Darstellung der physikalischen Fundierung der allgemeinen Grundgleichungen sowie ihrer Transformation auf beliebige Orthogonalkoordinaten im einzelnen aufgezeigt.

Im dritten Abschnitt von Teil B wird eine kürzlich von den Verfassern an anderer Stelle veröffentlichte Arbeit wiedergegeben, in der die Grenzschichtgleichung unter sorgfältiger Formulierung der erforderlichen Voraussetzungen als asymptotische Näherung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für zähe inkompressible Flüssigkeiten bei unbegrenzt wachsender Reynoldsscher Kennzahl gewonnen wurde. An einer strengen Lösung der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen kann (vgl. den vierten Abschnitt von Teil B) die Zulässigkeit aller von uns gemachten Annahmen ihre Bestätigung finden.

Liste der benutzten Bezeichnungen.

a	Radius eines Kreises bzw. einer Kugel;
$A_\varkappa$	in Fußnote 5 benutzte Hilfsgrößen;
b	eine bei der Staupunktsströmung (vgl. den vierten Abschnitt von Teil B) auftretende positive Konstante;
B	Teilgebiet von B_0;
B_0	Außengebiet der Profilkontur C_0 beim ebenen Problem;
B_1, B_2	aus Bild 1 ersichtliche Teilgebiete von B_0;
B_n	aus Bild 5 ersichtliches ebenes Gebiet;
B^*	aus Bild 8 ersichtliches ebenes Gebiet;
B_0^*	das zu B_0 gehörende Teilgebiet von B^* (vgl. Bild 8);
B_1^*	aus Bild 9 ersichtliches Teilgebiet von B_0^*;
c	äußerer Rand der Grenzschicht (vgl. Bild 10);
c_0	Kurvenstück, insbesondere (vgl. Bild 7) ein Teilstück von C_0;
c_1	das durch $n = d$ auf c_0 bezogene Kurvenstück (vgl. Bild 9);
c_n, c_{-n}	Parallelkurven von c_0 im Abstand n (vgl. Bild 2 bzw. Bild 5);
$c^{(0)}$, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$	aus Bild 19 ersichtliche Kurvenstücke;
C	Berandung des ebenen Gebiets B;
C_0	Profilkontur (vgl. Bild 1 bzw. Bild 7);
C_1^*	Berandung des ebenen Gebiets B_1^*;
d	Abstand derjenigen Punkte aus B_0^* von c_0, für die (63a) mit (63b) und (63c) zutrifft (vgl. Bild 9 und 10);
d^*	eine der Einschränkung $0 < d^* < d$ unterworfene Zahl;
D	die durch (23a) definierte Funktionaldeterminante;
$D_{\varkappa\lambda}$	algebraische Komplemente der Elemente der Determinante (23a);
E	die durch innere Reibung pro Zeit- und Volumeneinheit dissipierte Energie;
f	(evtl. zeitabhängige) Ortsfunktion; in Fußnote 19 eine nicht-verschwindende Funktion von R;

bei der Staupunktsströmung eine in den Ansätzen (100a) auftretende Funktion von y und R;
f_1, f_2 im dritten Abschnitt von Teil E benutzte Funktionen;
$f_\varkappa$ zum Beweis von (32a) benutzte Hilfsfunktionen;
f' bei der Staupunktsströmung die Ableitung der Funktion $f(y; R)$ nach y;
F in Fußnote 19 eine Funktion von R;
bei der Staupunktsströmung eine in dem Ansatz (100b) auftretende Funktion von y und R;
G vorübergehend benutzte, durch (124) erklärte Funktion;
h Abstand von einer Drehachse (vgl. Bild 6, 15, 17 und 18);
gemäß Bild 16 und 21 benutzte Differenz zweier Werte von x;
in Fußnote 30 bei der Prandtlschen Form der Kármánschen Integralbedingung benutzte Größe;
im dritten Abschnitt von Teil E benutzter Abstand einer Parallelfläche S_1 von S_0;
h_1, h_2, h_3 durch (24) im Zusammenhang mit der Koordinatentransformation (23) definierte Hilfsfunktionen;
h_1, h_2 durch (35b) für die Transformation (35a) allgemein definierte, in (42b), (42c) für das s, n-System spezialisierte Hilfsfunktionen;
H_1, H_2 bei der Herleitung von (93) benutzte Hilfsgrößen;
$J_1^{(1)}, J_2^{(1)}$ in (86a) auftretende Integrale;
$J_1^{(2)}, J_2^{(2)}$ in (86b) auftretende Integrale;
$k(s)$ durch (39) definierter Krümmungsverlauf längs c_0;
k_s, k_σ im dritten Abschnitt von Teil D die Krümmungen der Stromlinien bzw. ihrer orthogonalen Trajektorien;
K_x, K_y, K_z Komponenten der äußeren Massenkraft im x, y, z-System, ab (18) jedoch in der Bedeutung von K_x^*, K^*, K_z^* benutzt;
K_x^*, K_y^*, K_z^* dimensionslose Massenkraftskomponenten, definiert durch (16c);
l Bezugslänge zur Einführung dimensionsloser Größen;
M eine in Fußnote 19 benutzte positive Zahl;
n positive Normalenrichtung längs einer Fläche oder Kurve;
Orthogonalkoordinate in der n-Richtung (vgl. Bild 3);
gelegentlich in verschiedenen speziellen Bedeutungen als Orthogonalkoordinate benutzt;
die bei festem s zu $\psi = \psi(s, n)$ inverse Funktion $n = n(s, \psi)$;
n_0 durch (70b) definierter Wert der Orthogonalkoordinate n (vgl. Bild 12);
n_1 durch (67) nebst (69) definierter Wert der Orthogonalkoordinate n (vgl. Bild 11 und 12);
n_1, n_2 in Bild 4 benutzte spezielle Werte der Orthogonalkoordinate n;
n_2 in (79) auftretender Wert der Orthogonalkoordinate n mit $n_2 > n_1$;
n_λ Element einer Nullfolge von n-Werten;
n^* vorübergehend benutzter spezieller Wert der Orthogonalkoordinate n mit $n^* > n_1$;
n_1^*, n_2^*, n_3^* vorübergehend benutzte spezielle Werte der Orthogonalkoordinate n;
(n, x), (n, y), (n, z) Winkel zwischen der n- und der x-, y- bzw. z-Richtung;
$o(f(R))$ vgl. die in Fußnote 19 angegebene Erklärung;
$O(f(R))$ vgl. die in Fußnote 19 angegebene Erklärung;
p statischer Flüssigkeitsdruck, ab (18) jedoch in der Bedeutung von p^* benutzt;
p_0 eine in den Ansätzen (99a) mit (100b) auftretende konstante (dimensionslose) Druckgröße;
$p^{(0)}$ (dimensionsloser) statischer Druck einer Potentialströmung;
p' der in der Grenzschichttheorie als von y bzw. n unabhängig angesehene Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial p}{\partial s}$ [vgl. etwa (96a)];
p^* dimensionsloser Flüssigkeitsdruck, definiert durch (16b);
P Punkt im Raum oder in einer Ebene;
P_0 Häufungspunkt der Punktfolge $\{P_\lambda^{(1)}\}$;
$P_\lambda^{(1)}, P_\lambda^{(2)}$ Elemente zweier beschränkter Punktfolgen auf c_0;
P^*, P^{**} im dritten Abschnitt von Teil E benutzte Punkte auf der Strecke PQ;
Q Punkt auf c_0 als Teilstück von C_0 (vgl. Bild 7); im dritten Abschnitt von Teil E benutzter Punkt auf S_0;
Q_0 Anfangspunkt des Kurvenstücks c_0 (vgl. Bild 7);
Q_λ Element einer Punktfolge;
r vorübergehend statt der Größe $-\varrho(s)$ benutzt;
R durch (17) definierte Reynoldssche Kennzahl des jeweils betrachteten Strömungsvorgangs;
R_0 spezieller (hinreichend großer) Wert von R;
s (dimensionslose) Bogenlänge bzw. Orthogonalkoordinate in der s-Richtung (vgl. Bild 3);
s_0 der größte der durch (62) gekennzeichneten Werte der Bogenlänge s längs c_0;
s_1, s_2 spezielle Werte der Orthogonalkoordinate s;
$s^{(1)}, s^{(2)}$ in Bild 4 benutzte spezielle Werte der Orthogonalkoordinate s;
(s, x), (s, y) Winkel zwischen der s- und der x- bzw. y-Richtung;
S Berandung des Raumgebiets T;
$\mathcal{S}$ Berandung des Raumgebiets $\mathcal{T}$;
S_0 Berandung des Raumgebiets T_0;
S_1 Parallelfläche im Abstand h von S_0;
S_{nx}, S_{ny}, S_{nz} Komponenten des der n-Richtung zugeordneten Spannungsvektors in bezug auf das x, y, z-System;
S_{xx}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yx}, S_{yy}, S_{yz}, S_{zx}, S_{zy}, S_{zz} vgl. S_{nx}, S_{ny}, S_{nz} mit $n = x$, $n = y$ bzw. $n = z$;
$S_{ss}, S_{s\sigma}$, $S_{\sigma s}, S_{\sigma\sigma}$ Komponenten des ebenen Spannungstensors für die Richtungen s und σ;
t Zeitkoordinate, ab (18) jedoch in der Bedeutung von t^* benutzt;
im ersten Abschnitt von Teil E ein (dimensionsloses) Zeitintervall;
$t_\lambda^{(\varkappa)}$ beim Beweis von (27) benutzte Hilfsgrößen;
t^* dimensionslose Zeitkoordinate, definiert durch (16a);
T beliebiges Teilgebiet von T_0;
durch (23) im x, y, z-Raum geliefertes Bildgebiet von $\mathcal{T}$;
$\mathcal{T}$ Teilgebiet von $\mathcal{T}_0$;
T_0 räumliches Strömungsgebiet;
$\mathcal{T}_0$ Definitionsgebiet der Funktionen (23);
u gemäß Bild 21 benutzte Bezeichnung für $[v_x]_{y=\delta} - v_x$;
u_1, u_2, u_3 vorübergehend statt u_x, u_y, u_z benutzt;
u_x, u_y, u_z Vektorkomponenten im x, y, z-System;
u_ξ, u_η, u_ζ Komponenten von $\{u_x, u_y, u_z\}$ im ξ, η, ζ-System;
u_1^*, u_2^*, u_3^* vorübergehend statt u_ξ, u_η, u_ζ benutzt;
U Potential der äußeren Massenkraft;
U_1, U_2, U_3 vorübergehend statt U_x, U_y, U_z benutzt;
U_s Grenzwert von $[v_s]_{n=d}$ für $R \to \infty$;
U_x, U_y, U_z mit u_x, u_y, u_z durch (32) zusammenhängende Vektorkomponenten im x, y, z-System;
U_ξ, U_η, U_ζ Komponenten von $\{U_x, U_y, U_z\}$ im ξ, η, ζ-System;
v (dimensionsloser) Betrag der Strömungsgeschwindigkeit;
v_n ab (18) als dimensionslos aufzufassende Geschwindigkeitskomponente in der n-Richtung;
v_s (dimensionslose) Geschwindigkeitskomponente in der s-Richtung;
v_s^* die aus $v_s(s, n)$ durch die Substitution $n = n(s, \psi)$ hervorgehende Funktion von s und ψ;
v_x, v_y, v_z lokale Geschwindigkeitskomponenten im x, y, z-System, ab (18) jedoch in der Bedeutung von v_x^*, v_y^*, v_z^* benutzt;

v_ξ, v_η, v_ζ (dimensionslose) Geschwindigkeitskomponenten im ξ, η, ζ-System;
v_ϑ (dimensionslose) Geschwindigkeitskomponente in der ϑ-Richtung;
$v^{(0)}$ (dimensionsloser) Geschwindigkeitsbetrag einer Potentialströmung;
$v_x^{(0)}, v_y^{(0)}$ (dimensionslose) Geschwindigkeitskomponenten einer ebenen Potentialströmung;
v_1^*, v_2^*, v_3^* vorübergehend statt v_ξ, v_η, v_ζ benutzt;
v_x^*, v_y^*, v_z^* dimensionslose Geschwindigkeitskomponenten, definiert durch (15b);
$\frac{d v_x}{d t}, \frac{d v_y}{d t}, \frac{d v_z}{d t}$ substantielle Beschleunigungskomponenten im x, y, z-System, d. h. die zeitlichen Ableitungen der substantiellen Geschwindigkeitskomponenten (2);
(v, x), (v, y), (v, z) Winkel zwischen der Geschwindigkeits- und der x-, y- bzw. z-Richtung;
V_0 Bezugsgeschwindigkeit zur Einführung dimensionsloser Größen;
V_s Grenzwert von $[v_s]_{n=\delta}$ für $R \to \infty$;
w doppelter (dimensionsloser) Wirbel bei ebenen Strömungen;
w_x, w_y, w_z (dimensionslose) Komponenten des doppelten Wirbelvektors im x, y, z-System;
w_ξ, w_η, w_ζ Komponenten von $\{w_x, w_y, w_z\}$ im ξ, η, ζ-System;
W_1, W_2, W_3 vorübergehend statt W_x, W_y, W_z benutzt;
W_x, W_y, W_z mit w_x, w_y, w_z in Analogie zu (32) zusammenhängende Vektorkomponenten im x, y, z-System;
W_ξ, W_η, W_ζ Komponenten von $\{W_x, W_y, W_z\}$ im ξ, η, ζ-System;
W_1^*, W_2^*, W_3^* vorübergehend statt W_ξ, W_η, W_ζ benutzt;
x, y, z rechtwinklige kartesische Koordinaten, ab (18) jedoch in der Bedeutung von x^*, y^*, z^* benutzt;
x_0 ein spezieller Wert von x;
x_1, x_2, x_3 vorübergehend statt x, y, z benutzt;
x^*, y^*, z^* dimensionslose rechtwinklige kartesische Koordinaten, definiert durch (15a);
$x_\varkappa^*$ (mit $\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) vorübergehend benutzte spezielle Werte von x;
$x(t), y(t), z(t)$ auf das x, y, z-System bezogene Teilchenkoordinaten zur Zeit t bei der substantiellen Betrachtungsweise;
$x^{(0)}(s), y^{(0)}(s)$ in der Parameterdarstellung (38) von c_0 auftretende Funktionen (vgl. Bild 2);
$x^{(n)}(s), y^{(n)}(s)$ in der Parameterdarstellung von c_n auftretende Funktionen (vgl. Bild 2);
y vgl. x, y, z usw.;
y_1 ein spezieller Wert von y;
y^* vorübergehend benutzter spezieller Wert von y;
z vgl. x, y, z usw.;

α untere Schranke von $\frac{\delta - n_1}{\delta}$ für $R > R_0$;
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in Fußnote 6 benutzte Hilfsgrößen;
β untere Schranke von $\frac{n_0 - n_1}{\delta}$ für $R > R_0$;
δ Grenzschichtdicke (vgl. Bild 10);
$\delta_{\varkappa\lambda}$ das durch (25a) definierte Kroneckersche Symbol;
δ^* Auflösung von $y = \delta(x, t)$ nach x (vgl. Bild 16);
Δ der durch (12a) bzw. (101a) definierte Laplacesche Differentialoperator;
$\Delta\Delta$ der durch (101b) — für eine Funktion von x und y — definierte Differentialoperator;
ε beliebig kleine positive Größe;
Größenordnung (im Sinne von Prandtl-Blasius) der Grenzschichtdicke;
im Zusammenhang mit dem Kurvenstück c_1 stehende, der Bedingung (63c) genügende positive Funktion von R;
ε_0 eine in (70b) auftretende, der Bedingung $\varepsilon_0 < \delta - n_0$ unterworfene positive Größe;
ζ vgl. ξ, η, ζ usw.;
η vgl. ξ, η, ζ usw.; überdies gelegentlich in verschiedenen speziellen Bedeutungen als Orthogonalkoordinate benutzt;
η_0, η_1 spezielle Werte von $\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y$;
η^* ein spezieller, der Bedingung $0 < \eta^* < \eta_2$ genügender Wert von $\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y$;
ϑ Azimut einer Halbebene durch die x-Achse (vgl. Bild 6);
Θ eine der Einschränkung $0 < \Theta < 1$ unterworfene Zahl;
$\varkappa$ Index bzw. in (117) auftretender Exponent;
λ Index bzw. in (117a) auftretender Exponent;
μ Reibungskoeffizient der Flüssigkeit;
ν kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit;
ξ in Teil D als spezielle Orthogonalkoordinate benutzt;
ξ, η, ζ beliebige (im allgemeinen dimensionslose) Orthogonalkoordinaten;
ξ_1, ξ_2, ξ_3 vorübergehend statt ξ, η, ζ benutzt;
ξ^*, η^*, ζ^* in Fußnote 4 benutzte Orthogonalkoordinaten;
ϱ Index;
$\varrho(s)$ durch (46) definierter (nicht notwendig positiver) Krümmungsradius eines Kurvenstücks c_0;
ϱ_0 Dichte der Flüssigkeit;
σ Index;
in Bild 17 die Differenz zweier Werte von s;
im dritten Abschnitt von Teil D die Bogenlänge der orthogonalen Trajektorien der Stromlinien einer ebenen stationären Strömung;
(σ, x), (σ, y) Winkel zwischen der σ- und der x- bzw. y-Richtung;
φ eine in (105) eingeführte Funktion von $\eta = \sqrt{b \cdot R} \cdot y$;
χ die bei der Wärmeleitungsanalogie auftretende, durch (174) definierte Funktion;
ψ Stromfunktion beim ebenen Problem;
ψ_0 Stromfunktion einer ebenen Potentialströmung;
ψ_1 (mit $\sqrt{R}$ multiplizierte) Stromfunktion der Grenzschichtströmung nach v. Kármán [vgl. (104)];
ψ_2 vgl. den Pohlhausenschen Ansatz (117);
ψ^* ein in (170) benutzter spezieller Wert von ψ;
ψ_1^* ein in (177a) benutzter spezieller Wert von ψ.

Schrifttum.

[1] L. Bairstow, Skin friction. Journ. Roy. Aeron. Soc. Bd. 29 (1925), S. 3—23.

[2] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1907. Abgedruckt in: Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1—37.

[3] E. Boltze, Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Diss. Göttingen 1908.

[4] V. M. Falkner and S. W. Skan, Some approximate solutions of the boundary layer equations. Rep. and Mem. Nr. 1314; 1930. Abgedruckt in: Phil. Mag. (7) Bd. 12 (1931), S. 865—896.

[5] H. Faxén und C. W. Oseen, Die Grenzschichttheorie. XXI. Kap., § 5 in Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, zweiter (physikalischer) Teil, 1. Auflage, S. 838—842, Braunschweig 1927.

[6] K. Friedrichs, Bemerkung über die ideale Strömung um einen Körper bei verschwindender Zähigkeit. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf, Th. v. Kármán, S. 51, Berlin 1930.

[7] R. Fuchs, Prandtlsche Grenzschicht. I. Teil, V. Kap., § 6 in R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik, S. 171 bis 184, Berlin 1922.

[8] R. Fuchs, Widerstand und Zähigkeit. IX. Kap. in R. Fuchs, L. Hopf und Fr. Seewald, Aerodynamik, Bd. II, S. 272—302, insbesondere S. 274—291, Berlin 1935.

[9] S. Goldstein, The mathematical theory of motion in a boundary layer. IV. Kap. in S. Goldstein, Modern



developments in fluid dynamics, Bd. I, S. 116—190, Oxford 1938.

[10] J. J. Green, The viscous layer associated with a circular cylinder. Rep. and Mem. Nr. 1313; 1930. Abgedruckt in: Phil. Mag. (7) Bd. 12 (1931), S. 1—41.

[11] D. R. Hartree, On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 33 (1937), S. 223—239.

[12] K. Hiemenz, Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Diss. Göttingen 1911. Abgedruckt in: Dinglers Polytechn. Journal Bd. 326 (1911), S. 321 bis 324, 344—348, 357—362, 372—376, 391—393, 407 bis 410.

[13] L. Hopf, Zähe Flüssigkeiten. Kap. 2 in H. Geiger und K. Scheel, Handbuch der Physik, Bd. VII, S. 91 bis 172, insbesondere S. 121—125, Berlin 1927.

[14] L. Howarth, On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. Rep. and Mem. Nr. 1632; 1934.

[15] H. Jeffreys, On the circulation theory of aeroplane lift. Phil. Mag. (6) Bd. 50 (1925), S. 815—819.

[16] H. Jeffreys, The equations of viscous motion and the circulation theorem. Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 24 (1928), S. 477—479.

[17] H. Jeffreys, The wake in fluid flow past a solid. Proc. Roy. Soc. London (A) Bd. 128 (1930), S. 376—393.

[18] Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM Bd. 1 (1921), S. 233—252.

[19] Th. v. Kármán and Cl. B. Millikan, On the theory of laminar boundary layers involving separation. NACA-Rep. Nr. 504 (1934).

[20] A. Klose, Theorie der Luftkräfte bei verschwindender Reibung. Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Klasse Nr. 9 (1941).

[21] T. Levi-Civita, Allgemeine Folgerungen aus der Prandtlschen Grenzschichttheorie. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf, Th. v. Kármán, S. 30—50. Berlin 1930.

[22] H. J. Luckert, Über die Integration der Differentialgleichung einer Gleitschicht in zäher Flüssigkeit. Diss. Berlin 1933. Abgedruckt in: Schriften d. math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. Un. Berlin Bd. 1 (1933), S. 245—274.

[23] M. H. Lyon, The drag of streamline bodies. The relative importance of skin friction and pressure in relation to full-scale design. Aircraft Engineering Bd. 6 (1934), S. 233—239.

[24] Cl. B. Millikan, The boundary layer and skin friction for a figure of revolution. Trans. Amer. Soc. Mechanical Engineers, Appl. Mech. Sect. Bd. 54 (1932), S. 29—43.

[25] R. v. Mises, Bemerkungen zur Hydrodynamik. ZAMM Bd. 7 (1927), S. 425—431.

[26] R. v. Mises, Bemerkungen zur Hydrodynamik. Erwiderung. ZAMM Bd. 8 (1928), S. 251—252.

[27] R. v. Mises, Gleitschichten in zähen Flüssigkeiten. Zusatz IV in H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Auflage, S. 842—851. Leipzig und Berlin 1931.

[28] R. v. Mises und G. Schulz, Zähe Flüssigkeiten. XII. Kap. in Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, zweiter (physikalischer) Teil, 2. Auflage, S. 475—525, insbesondere S. 515—525. Braunschweig 1935.

[29] A. Miyadzu, On the laminar »Grenzschicht« along a spherical boundary in a uniform flow of water. Technolog. Rep. Tôhoku Imp. Univ. Sendai, Japan Bd. 9 (1930), S. 215—230.

[30] W. Müller, Theorie des Widerstandes für große Reynoldssche Zahlen (nach Prandtl). VIII. Kap. in W. Müller, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, S. 168—200. Leipzig 1932.

[31] Fr. Noether, Integrationsprobleme der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen. Beitrag zu F. Auerbach und W. Hort. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. V, S. 719—796, insbesondere S. 780—786. Leipzig 1931.

[32] K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM Bd. 1 (1921), S. 252—268.

[33] L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg 1904, S. 484 bis 491. Leipzig 1905. Abgedruckt in: L. Prandtl und A. Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, S. 1—8. Göttingen 1927.

[34] L. Prandtl, Bemerkungen zur Hydrodynamik. ZAMM Bd. 8 (1928), S. 249—251.

[35] L. Prandtl, Diskussionsbemerkung zum Vortrag von K. Friedrichs. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf, Th. v. Kármán, S. 51—53. Berlin 1930.

[36] L. Prandtl, The mechanics of viscous fluids. Div. G. in W. F. Durand, Aerodynamik Theory, Vol. III, S. 35—208, insbesondere S. 80—112. Berlin 1935.

[37] T. Sakurai, On the two-dimensional boundary layer equation for motion of viscous fluid near moving obstacle. Proc. Physico-Math. Soc. Japan (3) Bd. 21 (1939), S. 707—712.

[38] H. Schmidt und K. Schröder, Die Prandtlsche Grenzschichtgleichung als asymptotische Näherung der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen bei unbegrenzt wachsender Reynoldsscher Kennzahl[41]).

[39] G. B. Schubauer, Air flow in a separating laminar boundary layer. NACA-Rep. Nr. 527 (1935).

[40] R. H. Smith, Laminar boundary layer based on a minimum theorem. Journ. Aeron. Sc. Bd. 5 (1938), S. 266—272.

[41] A. Stodola, Zur Theorie des Wärmeübergangs von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände. Schweiz. Bauztg. Bd. 88 (1926), S. 243—244.

[42] O. Tietjens, Grenzschichten. V. Kap. in O. Tietjens, Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl, Bd. II, S. 73—100. Berlin 1931.

[43] W. Tollmien, Grenzschichttheorie. Beitrag in W. Wien und F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, 1. Teil, S. 241—287. Leipzig 1931.

[41]) Der Preußischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt durch Herrn Hamel und zur Veröffentlichung angenommen in der Sitzung am 20. 11. 1941. Erscheint in Deutsche Mathematik Bd. 6 (1942), S. 307—322.

Über die Mindestabfanghöhe eines Flugzeuges.

Von Hermann Behrbohm.

Bericht der Messerschmitt A. G., Augsburg.

Gewöhnlich wird die Mindestabfanghöhe eines Flugzeuges unter der Annahme ermittelt, daß bei konstanter Bahngeschwindigkeit die Abfangbahn als Kreisbogen angenommen wird. Die allgemeine Behandlung des Problems führt auf eine geschlossen nicht integrierbare Riccatische Differentialgleichung. Verzichtet man nur auf die quadratische Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w vom Auftriebsbeiwert c_a, so gelangt man zu einer mathematisch zwar durchführbaren, für die Praxis aber zu komplizierten Formel. Dagegen führt die Näherungsannahme, daß Schraubenschub und Luftwiderstand während des ganzen Bewegungsverlaufs eine konstante (speziell eine verschwindende) Differenz bilden, zu einer einfachen Formel für die Mindestabfanghöhe. Eine andere einfache Formel ergibt sich, wenn die Bahngeschwindigkeit durchweg konstant angesetzt wird.

Bei Betrachtungen über den gezielten Bombenwurf aus dem geraden Gleit- bzw. Sturzflug und der in diesem Zusammenhang auftretenden Beanspruchung eines Flugzeuges wird man auf die Frage nach der Mindestabfanghöhe bei gegebenem Lastvielfachen geführt. Dabei wird die Abfangbahn gewöhnlich zu einem Kreisbogen idealisiert, dessen Radius sich dann in einfacher Weise aus der Fluggeschwindigkeit und dem Lastvielfachen ergibt. Es zeigt sich aber, daß besonders bei kleinen Lastvielfachen diese Art der Betrachtung recht ungenau und nicht ungefährlich ist, da sie zu kleine Abfangradien und damit zu geringe Mindestabfanghöhen liefert. Im folgenden soll deshalb diese Frage etwas sorgfältiger behandelt werden.

Offenbar wird der geringste Höhenverlust beim Abfangen dann eintreten, wenn in jedem Augenblick der in einer vertikalen Ebene ausgeführt gedachten Bewegung das Flugzeug sein größtes Lastvielfaches aufweist. Als »größtes« Lastvielfaches werde dabei das der Flugzeugfestigkeit zugrunde gelegte sichere Lastvielfache n_{sicher} angesetzt und unter Fortlassung des Index »sicher« kurz mit n bezeichnet. n ist dann in allen folgenden Betrachtungen während des ganzen Abfangverlaufs als Konstante anzusehen.

Sei G (kg) das Gewicht des Flugzeuges, R (m) der momentane Krümmungsradius der Bahn (positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite der Bahn liegt, gegen die die Luftkraft gerichtet ist), γ der Neigungswinkel der Bahn gegen die Horizontale (positiv bei Steigen), $v \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ die Fluggeschwindigkeit. Senkrecht zur Bahn wirken die Luftkraft als konstanter Auftrieb $A = n\,G$ und entgegengesetzt die Massenkraft $M = G \cos\gamma + \frac{G}{g}\frac{v^2}{R}$, deren erster Bestandteil von der Gewichtskomponente in der Richtung der Bahnnormalen, deren zweiter Bestandteil von der Zentrifugalbeschleunigung herrührt, Bild 1.

Als Gleichgewichtsbedingung der bahnsenkrechten Kräfte ergibt sich demnach die Gleichung

$$n\,G = G\cos\gamma + \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

Sie kann nach R aufgelöst werden und führt zu

$$R = \frac{v^2}{g}\,\frac{1}{n - \cos\gamma} \qquad (2)$$

Bei der eingangs erwähnten vereinfachten Betrachtung wird nun in dieser Formel $v = \text{const}$ während des ganzen Bewegungsverlaufs gesetzt und die Abfangbahn als Kreisbogen angenommen, so daß sich auch $R = \text{konst}$ für die ganze Bahn ergibt. Für das Abfangen aus einem geraden stationären Gleitflug unter dem Bahnwinkel γ erhalten wir dann unter der Annahme eines unendlich raschen Übergangs von $n_{\text{Ausgang}} = \cos\gamma$ auf das gewünschte n den aus Bild 2 zu entnehmenden Ausdruck

$$h = R\,(1 - \cos\gamma) = \frac{v^2}{g}\,\frac{1-\cos\gamma}{n - \cos\gamma} \qquad (3)$$

für die Mindestabfanghöhe h des Flugzeugs [1][1]).

[1]) Die Zahlenangaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

Bild 1. Die allgemeine ebene Abfangbahn.

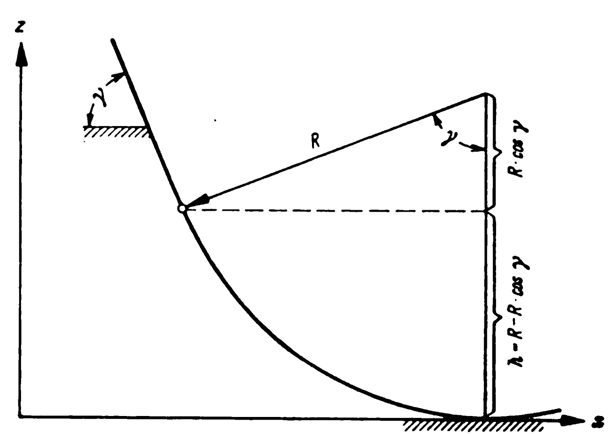


Bild 2. Die zum Kreisbogen idealisierte Abfangbahn.

Mit Gleichung (2) ist der Krümmungsradius R in jedem Punkt der Bahn als Funktion des Tangentenwinkels γ und der Fluggeschwindigkeit v festgelegt. Wird die Bogenlänge s eingeführt (von irgendeinem Punkt der Bahn als Nullpunkt aus, positiv mit wachsender Zeit), so kann R auch als

$$R = \frac{d\gamma}{ds} \qquad (4)$$

geschrieben werden. Führen wir ferner noch in der (vertikalen) Ebene der Flugbewegung ein x, z-System ein, und zwar als Rechtssystem mit der x-Achse parallel der Horizontalen, mit der z-Achse senkrecht dazu, positiv nach oben, so können die Koordinaten x, z eines Punktes der Flugbahn aus den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos\gamma \\ \frac{dz}{ds} &= \sin\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

durch Integration gewonnen werden. Aus (2), (4) und (5) folgt dann

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{g}\int v^2 \frac{\cos\gamma}{n-\cos\gamma}\, d\gamma + C_1 \\ z &= \frac{1}{g}\int v^2 \frac{\sin\gamma}{n-\cos\gamma}\, d\gamma + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Bis auf Parallelverschiebungen ist daher die Bahn bestimmt, falls noch v als Funktion von γ angegeben wird.

Indem wir in erster Näherung zunächst $v = \text{const} = v_0$ annehmen, ergibt sich durch Ausführung der vorerst unbestimmten Integrationen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{v_0^2}{g}\left(-\gamma + \frac{2n}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\right) + C_1 \\ z &= \frac{v_0^2}{g}\log(n-\cos\gamma) + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

Für die Frage nach der Mindestabfanghöhe ist die x-Koordinate bedeutungslos, wir wollen sie daher auch nicht weiter betrachten. Wird C_2 so gewählt, daß für $\gamma = 0$ gerade auch $z = 0$ ist, die Flugbahn also den Erdboden berührt, so ist

$$C_2 = -\frac{v_0^2}{g}\log(n-1)$$

und daher

$$h = \frac{v_0^2}{g}\log\frac{n-\cos\gamma_0}{n-1} \qquad (8)$$

die Mindestabfanghöhe h für gegebenes Lastvielfaches $n > 1$ und gegebenen stationären Ausgangsgleitwinkel $\gamma = \gamma_0$. Dabei ist der Bogen des Übergangs vom Ausgangslastvielfachen $n_{\text{Ausgang}} = \cos\gamma_0$ auf das vorgegebene n allerdings ebenso wie oben in der vereinfachten Formel (3) vernachlässigt. Wie die Flugmechanik lehrt, kann dies aber mit einigermaßen gutem Gewissen geschehen, da durch entsprechend harte Höhenruderbetätigung das gewünschte Endlastvielfache in sehr kurzer Zeit (0,1 bis 0,2 s) hergestellt werden kann. Wenn man will, kann man aber noch einen Sicherheitszuschlag Δh zu der gemäß (8) ermittelten Abfanghöhe h machen, etwa von der Größe

$$\Delta h = 0{,}2\, v_0 \sin\gamma_0.$$

Bei den folgenden Überlegungen soll jedoch stets von diesem Zuschlag Δh abgesehen werden.

Es folgt eine zahlenmäßige Gegenüberstellung der aus der vereinfachten Formel (3) und der aus der Formel (8) für $h = h(n, \gamma)$ erhaltenen Werte in Zahlentafelform und zwar aus schreibtechnischen Gründen für den speziellen Wert $v_0 = 10$ m/s der Fluggeschwindigkeit.

Zahlentafel 1. Die Werte $h = h(n, \gamma)$ nach (3) für $v_0 = 10$ m/s.

γ \ n	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7.0	8,0	9,0	10,0
20°	0,580	0,298	0,201	0,151	0,122	0,101	0,087	0,076	0,068
30°	1,205	0,640	0,436	0,330	0,266	0,223	0,191	0,168	0,150
40°	1,933	1,068	0,738	0,563	0,456	0,383	0,330	0,290	0,258
50°	2,683	1,545	1,085	0,836	0,680	0,573	0,495	0,436	0,389
60°	3,398	2,039	1,456	1,133	0,927	0,784	0,680	0,600	0,537
70°	4,046	2,523	1,834	1,440	1,186	1,007	0,876	0,775	0,695
80°	4,613	2,981	2,202	1,745	1,446	1,234	1,076	0,954	0,857
90°	5,097	3,398	2,548	2,039	1,699	1,456	1,274	1,133	1,019

Zahlentafel 2. Die Werte $h = h(n, \gamma)$ nach (8) für $v_0 = 10$ m/s.

γ \ n	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
20°	0,597	0,304	0,203	0,154	0,123	0,102	0,087	0,076	0,068
30°	1,282	0,661	0,442	0,336	0,270	0,225	0,193	0,170	0,151
40°	2,144	1,128	0,766	0,577	0,466	0,390	0,335	0,295	0,262
50°	3,115	1,675	1,147	0,872	0,703	0,590	0,507	0,446	0,399
60°	4,133	2,275	1,572	1,201	0,972	0,816	0,703	0,618	0,552
70°	5,154	2,899	2,021	1,552	1,260	1,060	0,916	0,806	0,719
80°	6,141	3,526	2,481	1,680	1,560	1,317	1,138	1,003	0,895
90°	7,066	4,133	2,932	2,275	1,859	1,572	1,363	1,201	1,074

Bei der Herleitung der Formel (8) war die Bahngeschwindigkeit $v = \text{konst}$ gesetzt worden. Will man diese Annahme nicht treffen, so hat man so vorzugehen: Neben der Gleichgewichtsbedingung der bahnsenkrechten Kräfte, die wir bisher allein der Beschreibung der Flugbahn zugrunde gelegt und die wir in anderer Form schon in Formel (2) niedergeschrieben haben, hat man auch noch die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in tangentialer Richtung zur Bahn anzusetzen. Die dritte Gleichgewichtsbedingung, die den Momentenhaushalt um die Querachse regelt, soll nach wie vor unberücksichtigt bleiben; sie soll mit anderen Worten durch geeignete Höhenruderbetätigung als erfüllt angesehen werden. Dann ergeben sich folgende zwei Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = S - G\sin\gamma - \frac{1}{2}\varrho c_w F \cdot v^2 \text{ (tangential)} \qquad (9)$$

$$\frac{G}{g} v \frac{d\gamma}{dt} = nG - G\cos\gamma \text{ (normal)}, \qquad (10)$$

wo mit S die Komponente des Schraubenschubs in Bahnrichtung bezeichnet ist. Durch Division dieser beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\dfrac{dv}{dt}}{v\dfrac{d\gamma}{dt}} = \frac{\dfrac{S}{G} - \sin\gamma - \dfrac{1}{2}\varrho c_w \dfrac{F}{G}\cdot v^2}{n-\cos\gamma} \qquad (11)$$

Nun ist wegen $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}$ mit $v^2 = u$

$$\frac{\dfrac{dv}{dt}}{v\dfrac{d\gamma}{dt}} = \frac{1}{v}\frac{dv}{d\gamma} = \frac{1}{2v^2}\frac{d(v^2)}{d\gamma} = \frac{1}{2u}\frac{du}{d\gamma} \qquad (12)$$

und also

$$\frac{du}{d\gamma} = \frac{\dfrac{S}{G} - \sin\gamma}{n-\cos\gamma}\cdot 2u - \frac{\varrho c_w F}{G(n-\cos\gamma)}\cdot u^2 \qquad (13)$$

Treffen wir für S den Näherungsansatz

$$S = S_0 - k v^2 = S_0 - k u$$

mit konstantem S_0 und k, für c_w den Näherungsansatz

$$c_w = c_0 + c_1 c_a + c_2 c_a^2$$

mit konstanten Werten c_0, c_1, c_2, und beachten wir, daß aus $A = nG$ bei Annahme konstanter Luftdichte ϱ

$$c_a u = \frac{2nG}{\varrho F} = \text{konst}$$

folgt, so schreibt sich (13) in der Gestalt

$$\frac{du}{d\gamma} = f_0(\gamma) + f_1(\gamma)\cdot u + f_2(\gamma)\cdot u^2 \qquad (14)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} f_0(\gamma) &= -\frac{4\,c_2\,n^2\,G}{\varrho\,F\,(n-\cos\gamma)} \\ f_1(\gamma) &= \frac{2\,(S_0 - G\sin\gamma - c_1\,n\,G)}{G\,(n-\cos\gamma)} \\ f_2(\gamma) &= -\frac{2\,k + c_0\,\varrho\,F}{G\,(n-\cos\gamma)} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (15)$$

Damit ist für $u = v^2$ eine Riccatische Differentialgleichung gewonnen, die nicht geschlossen integriert werden kann. Legt man also Wert auf die quadratische Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w von c_a, so kann man $u = u(\gamma)$ nur durch numerische oder graphische Näherungslösungen bestimmen und muß dann auch h gemäß (6) numerisch oder graphisch angenähert ermitteln. Der physikalisch am meisten befriedigende, weil sehr allgemeine Ansatz für S und c_w führt daher auf mathematische Schwierigkeiten.

Verzichtet man nun aber auf die quadratische Abhängigkeit des c_w von c_a, d. h. setzt man $c_2 = 0$, so wird auch $f_0(\gamma) = 0$ und für $u = u(\gamma)$ ergibt sich die Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{d\,u}{d\,\gamma} = f_1(\gamma)\,u + f_2(\gamma)\,u^2 \quad \dots \dots \quad (16)$$

mit der für $\gamma = \gamma_0$ den Anfangswert $u = u_0$ besitzenden Lösung

$$u = \frac{e^{\int_{\gamma_0}^{\gamma} f_1(t)\,d\,t}}{\frac{1}{u_0} - \int_{\gamma_0}^{\gamma} f_2(s)\, e^{\int_{\gamma_0}^{s} f_1(t)\,d\,t}\, d\,s}.$$

Die Ausführung der hierin geforderten Quadraturen führt nach Einsetzen dieses Wertes von u in die zweite Gleichung (6) zu analytisch derartig komplizierten Formeln, daß auch mit dieser Lösung praktisch nichts anzufangen ist.

Auch die im Rahmen dieses Ansatzes weiter zu treffende Spezialisierung auf $S = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, bei der also ohne Schraubenschub und mit konstantem c_w gerechnet würde, führt noch zu keiner für die praktische Rechnung genügenden Einfachheit der Formeln. Dagegen führt die Näherungsannahme, daß Schraubenschub und Luftwiderstand W eine konstante Differenz bilden, auch zu mathematisch nicht sehr komplizierten Formeln, die im folgenden noch entwickelt werden sollen. Siehe hierzu auch die Untersuchungen von W. Müller in [2].

Es sei also $S - W = a\,G$ mit konstantem a. Dann geht (9) in

$$\frac{1}{g}\,\frac{d\,v}{d\,t} = a - \sin\gamma$$

und also (11) wegen (12) in

$$\frac{1}{2\,u}\,\frac{d\,u}{d\,\gamma} = \frac{a - \sin\gamma}{n - \cos\gamma} \quad \dots \dots \quad (17)$$

über. Schreiben wir

$$\frac{d\,u}{u} = \frac{2\,a}{n - \cos\gamma}\,d\,\gamma - 2\,d\,(\log\,(n - \cos\gamma)),$$

so liefert die Integration von γ_0 bis γ unter Beachtung der Anfangsbedingung

$$u(\gamma_0) = u_0$$

die Beziehung

$$\log\frac{u}{u_0} = 2\,a\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{d\,t}{n - \cos t} - 2\log\frac{n - \cos\gamma}{n - \cos\gamma_0},$$

und also nach Übergang zur Exponentialfunktion den Ausdruck

$$\frac{u}{u_0}\left(\frac{n - \cos\gamma}{n - \cos\gamma_0}\right)^2 = e^{2\,a\int_{\gamma_0}^{\gamma}\frac{d\,t}{n - \cos t}}.$$

Wegen

$$\int\frac{d\,t}{n - \cos t} = \frac{2}{\sqrt{n^2 - 1}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right) + C$$

wird dann also

$$u = u_0\,(n - \cos\gamma_0)^2\, e^{-\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)} \times \frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}\right)}}{(n - \cos\gamma)^2} \quad \dots \quad (18)$$

Man setze nun (18) in die zweite Gleichung (6) ein und beachte die Forderung $z = 0$ für $\gamma = 0$. Dann erhält man mit der Abkürzung

$$b = \frac{u_0}{g}\,(n - \cos\gamma_0)^2 \cdot e^{-\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)} \quad (19)$$

für die Mindestabfanghöhe h den Ausdruck

$$h = b\int_0^{\gamma_0} e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right)}\,\frac{\sin s}{(n - \cos s)^3}\,d\,s \quad (20)$$

Das hierin auftretende Integral werde J genannt. Zu seiner Ermittlung setze man

$$\sigma = \mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right).$$

Dann wird

$$J = \frac{2\,n}{(n^2-1)^2}\,J_1 + \frac{1}{(n^2-1)^2}\,J_2,$$

wo

$$J_1 = \int_0^{\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)} e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sigma}\cdot\sin 2\,\sigma\cdot d\,\sigma$$

und

$$J_2 = \int_0^{\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)} e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sigma}\cdot\sin 4\,\sigma\cdot d\,\sigma$$

gesetzt ist. Nun ist (etwa durch partielle Integration)

$$J_1 = \left[\frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sigma}}{\frac{16\,a^2}{n^2-1} + 4}\left(\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sin 2\,\sigma - 2\cos 2\,\sigma\right)\right]_0^{\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)}$$

und

$$J_2 = \left[\frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sigma}}{\frac{16\,a^2}{n^2-1} + 16}\left(\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\,\sin 4\,\sigma - 4\cos 4\,\sigma\right)\right]_0^{\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma_0}{2}\right)}.$$

Beachtet man noch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right) &= \sqrt{n^2-1}\cdot\frac{\sin s}{n - \cos s} \\ \cos 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right) &= \frac{n\cos s - 1}{n - \cos s} \end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sin 4\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right) &= 2\sqrt{n^2-1}\,\frac{\sin s\cdot(n\cos s - 1)}{(n - \cos s)^2} \\ \cos 4\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{s}{2}\right) &= \frac{n^2\cos 2\,s - 2\,n\cos s + \sin^2 s + 1}{(n - \cos s)^3} \end{aligned}\right\},$$

so wird

$$J_1 = \frac{n^2-1}{2\,(n^2-1+4\,a^2)}\left\{\frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2}\right)}}{n-\cos\gamma_0}(2\,a\sin\gamma_0 - n\cos\gamma_0+1)+1\right\}$$

$$J_2 = \frac{n^2-1}{4\,(n^2-1+a^2)}\left\{\frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2}\right)}}{(n-\cos\gamma_0)^2}(a\,n\sin 2\,\gamma_0 - 2\,a\sin\gamma_0 - n^2\cos 2\,\gamma_0 + 2\,n\cos\gamma_0 - \sin^2\gamma_0 - 1)+1\right\}.$$

Wird demgemäß

$$J_1 = \frac{n^2-1}{2\,(n^2-1+4\,a^2)}\,K_1,\quad J_2 = \frac{n^2-1}{4\,(n^2-1+a^2)}\,K_2$$

mit

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2}\right)}}{n-\cos\gamma_0}(2\,a\sin\gamma_0 - n\cos\gamma_0+1)+1\\ K_2 &= \frac{e^{\frac{4\,a}{\sqrt{n^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2}\right)}}{(n-\cos\gamma_0)^2}(a\,n\sin 2\,\gamma_0 - 2\,a\sin\gamma_0 - n^2\cos 2\,\gamma_0 + 2\,n\cos\gamma_0 - \sin^2\gamma_0 - 1)+1\end{aligned}\right\}\quad \ldots (21)$$

gesetzt, so erhält man schließlich gemäß (20) für die Mindestabfanghöhe h eines Flugzeugs aus einem Gleit- oder Sturzflug unter dem Bahnneigungswinkel γ_0 und mit der Geschwindigkeit v_0 bei Annahme konstanter Differenz von Widerstand und Schraubenschub ohne Berücksichtigung des Übergangsbogens für das Lastvielfache von $n_{\text{Ausgang}} = \cos\gamma_0$ auf das gewünschte n den Ausdruck

$$h = \frac{b}{n^2-1}\left[\frac{n}{n^2-1+4\,a^2}\cdot K_1 + \frac{1}{4\,(n^2-1+a^2)}\cdot K_2\right], \quad (22)$$

wobei b, K_1 und K_2 die entsprechend durch (20) und (21) definierten Größen sind und wo a die Größe $\frac{S-W}{G}$ bedeutet.

Besonders einfach gestalten sich die obigen Formeln für den speziellen Fall $a = 0$. Dann wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{u_0}{g}\,(n-\cos\gamma_0)^2\\ K_1 &= (n+1)\,\frac{1-\cos\gamma_0}{n-\cos\gamma_0}\\ K_2 &= (n^2-1)\,\frac{2\sin^2\gamma_0}{(n-\cos\gamma_0)^2}\end{aligned}\right\}$$

und somit nach einigen Umformungen

$$h = \frac{v_0^2}{2\,g}\left[\left(\frac{n-\cos\gamma_0}{n-1}\right)^2 - 1\right] \quad \ldots\ldots (23)$$

Man kann diesen speziellen Fall (23) leicht auch direkt erhalten. Aus (17) wird nämlich für $a = 0$

$$\frac{1}{2\,u}\,\frac{d\,u}{d\,\gamma} = -\frac{\sin\gamma}{n-\cos\gamma},$$

so daß

$$\frac{d\,u}{u} = -2\cdot d\log(n-\cos\gamma)$$

und also

$$u = u_0\left(\frac{n-\cos\gamma_0}{n-\cos\gamma}\right)^2$$

ist. Geht man mit diesem Wert von u in die zweite Gleichung (6) ein, so ergibt sich bei $z = 0$ für $\gamma = 0$

$$h = \frac{u_0\,(n-\cos\gamma_0)^2}{g}\int_0^{\gamma_0}\frac{\sin\gamma\,d\,\gamma}{(n-\cos\gamma)^3}.$$

Wegen

$$\frac{\sin\gamma\,d\,\gamma}{(n-\cos\gamma)^3} = -\frac{1}{2}\,d\left(\frac{1}{n-\cos\gamma}\right)^2$$

ist dann also

$$h = -\frac{u_0\,(n-\cos\gamma_0)^2}{2\,g}\left[\left(\frac{1}{n-\cos\gamma_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{n-1}\right)^2\right]$$

und demnach wie in (23)

$$h = \frac{v_0^2}{2\,g}\left[\left(\frac{n-\cos\gamma_0}{n-1}\right)^2 - 1\right].$$

Die gemäß dieser Formel errechneten Werte von $h = h\,(n, \gamma)$ mögen zum Vergleich mit den in (3) und (8) gegebenen Werten im folgenden noch gleichfalls für den speziellen Wert $v_0 = 10$ m/s in einer Zahlentafel zusammengestellt werden, Zahlentafel 3.

Zahlentafel 3. Die Werte $h = h\,(n, \gamma)$ nach (23) für $v_0 = 10$ m/s.

γ \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20°	0,633	0,312	0,207	0,155	0,124	0,103	0,088	0,077	0,069
30°	1,458	0,706	0,462	0,347	0,277	0,230	0,197	0,173	0,153
40°	2,681	1,263	0,826	0,614	0,488	0,405	0,346	0,303	0,269
50°	4,293	1,984	1,287	0,951	0,754	0,626	0,533	0,466	0,413
60°	6,373	2,868	1,842	1,354	1,071	0,885	0,754	0,657	0,583
70°	8,917	3,907	2,481	1,816	1,430	1,179	1,003	0,874	0,772
80°	11,909	5,084	3,196	2,324	1,825	1,503	1,275	1,109	0,979
90°	15,296	6,373	3,965	2,868	2,243	1,842	1,562	1,354	1,196

Schrifttum.

[1] H. Wenke, Der Sturzbombenwurf. Luftwissen Bd. 8 (1941), Nr. 4, S. 115 bis 117.

[2] W. Müller, Zur Berechnung der Bahnkurven bei der Längsbewegung eines Flugzeugs. Ingenieur-Archiv Bd. 9 (1938), S. 258 bis 279.

Kraftstoffverbrauchsmessung nach Gewicht in einem Stichprobergefäß.

Von E. Mühlner.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Der Kraftstoffverbrauch wird auf Motorenprüfständen im allgemeinen volumetrisch gemessen, aber stets dem Gewicht nach angegeben. Es muß also die Kraftstoffwichte regelmäßig gesondert bestimmt werden. Mißt man dagegen die Kraftstoffmengen mit Hilfe von Waagen, so erfordert das verhältnismäßig komplizierte Anlagen, vor allem bei automatischem Betrieb. Demgegenüber gestattet ein in der Arbeit beschriebenes neuartiges Stichprobergefäß, mit dem bisherigen einfachen Verfahren der Volumenmessung unmittelbar Gewichtsmengen zu bestimmen.

Gliederung.

1. Fehlerquellen bei der Stichprobermessung.

Der Kraftstoffverbrauch wird auf Motorenprüfständen im allgemeinen mit sog. Stichprobergefäßen gemessen; das sind geeichte, meist gläserne Behälter von bekanntem Rauminhalt, aus denen eine Probe des Kraftstoffes zum Motor hin ausfließt. Die Zeit, die der Kraftstoff zum Durchlaufen des Raumes zwischen zwei an Verengungen des Gefäßes angebrachten Marken benötigt, wird mit einer Stoppuhr festgestellt, Bild 1.

Infolge der Einfachheit der Anordnung finden diese Stichprobergefäße viel Verwendung, obwohl ihnen eine Reihe von Fehlern anhaften. Zunächst bleibt beim Auslaufen eine gewisse Kraftstoffmenge an den Wänden hängen. Der hierdurch entstehende Fehler wird auf bis zu 1% geschätzt[1]), und zwar naturgemäß als Verkleinerung der gemessenen Menge. Der Fehler kann jedoch zum größten Teile dadurch vermieden werden, daß das Volumen des Gefäßes mit dem gleichen Kraftstoff unter Verwendung genauer Büretten festgestellt wird. Da Kraftstoff Glas gut benetzt und nicht wie z. B. Wasser größere Tropfen auf dem Glas bildet, kann man bei einiger Sorgfalt und Wiederholung der Eichung den Inhalt des »nassen« Gefäßes auf etwa ± 0,10% sicher bestimmen. Durch eine solche Eichung läßt sich der durch Hängenbleiben von Kraftstoff entstehende Fehler der Messung am Prüfstand bei Gefäßen von mindestens 100 cm³ auf etwa ± 0,3% ermäßigen.

Weitere Fehler entstehen durch die Betätigung der Stoppuhr mit der Hand. Man kann annehmen, daß der persönliche Fehler bis zu 0,15 s beträgt. Er ist stark von der Sicherheit abhängig, mit der die Versuchsperson den Durchgang des Kraftstoffspiegels durch die Marken erkennen kann. Bei zu langsamer Bewegung des Kraftstoffspiegels ist der Augenblick des eigentlichen Durchgangs nicht genau genug zu erfassen. Sorgt man dagegen durch Kleinhalten des Gefäßquerschnittes an der oberen Marke dafür, daß die Geschwindigkeit des Kraftstoffspiegels hoch ist, so ist der Meßfehler selbst dann gering, wenn man die Stoppuhr erst betätigt, wenn sich der Kraftstoffspiegel schon ein merkliches Stück unterhalb der Marke befindet. Das Volumen des Gefäßteiles um die obere Marke ist nämlich dann gering, der Fehler also volumenmäßig im Verhältnis zum ganzen Gefäßinhalt sehr klein. Außerdem ist auch die Bestimmung der Zeit bei raschem Durchlaufen der Marke etwas genauer als bei langsamem, was aus psychotechnischen Untersuchungen allgemein bekannt ist.

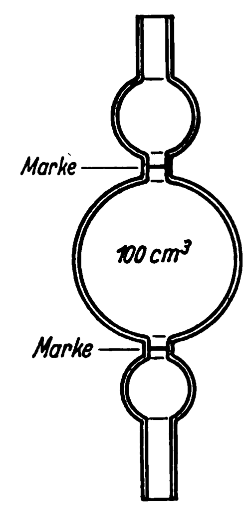
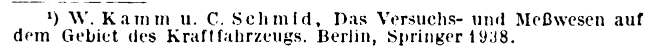


Bild 1. Übliches Stichprobergefäß. Das Volumen von 100 cm³ ist geeicht zwischen der oberen und unteren Marke.

Sofern der lichte Durchmesser der Meßstelle hinreichend klein ist, überwiegt der persönliche Fehler des Messenden bei der Betätigung der Stoppuhr. Da dieser Fehler zweimal auftritt, kann er im ungünstigen Falle bis auf ± 0,3 s oder (bei einer durchschnittlichen Meßzeit von 60 s) rd. ± 0,5% anwachsen. Insgesamt ist also die Messung mit einem Stichprobergefäß bei Beobachtung aller Vorsichtsmaßregeln auf etwa ± 1%, sonst auf höchstens ± 2% genau.

Eine Beseitigung des persönlichen Fehlers ist durch automatisches Betätigen der Stoppuhr möglich. Hierfür wurden elektrische Geräte entwickelt, bei denen Photozellen oder im Kraftstoff befindliche Kontakte durch den Kraftstoffspiegel selbst oder durch einfache Schwimmer zum Ansprechen gebracht werden und über ein Relais die Uhr in Gang bzw. still setzen. Die Genauigkeit solcher Messungen ist etwa 0,5 bis 1,5%.

Nun wird aber der Kraftstoffverbrauch regelmäßig nach Gewicht, also z. B. in g/h angegeben. Bei rein volumetrischer Bestimmung ist also stets noch die Kraftstoffwichte zu bestimmen. Dies geschieht mit einem Aräometer in einem besonderen Gefäß, etwa einem gläsernen Standzylinder. Diese Bestimmung mit einem Aräometer ist etwa auf 0,5 bis 1,0% genau. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß die Temperatur des Kraftstoffes richtig erfaßt wurde, denn die Änderung der Kraftstoffwichte mit der Temperatur ist ziemlich erheblich[2]), sie ist linear, aber der Temperaturkoeffizient ist für jeden Kraftstoff ein anderer. Für mittlere Fahr- und Flugkraftstoffe kann man etwa mit einer Änderung der Kraftstoffwichte um 0,00077 kg/dcm³ je °C rechnen. Irrt man sich also in der Flüssigkeitstemperatur



[1]) W. Kamm u. C. Schmid, Das Versuchs- und Meßwesen auf dem Gebiet des Kraftfahrzeugs. Berlin, Springer 1938.

[2]) Vgl. Fußnote 1.

um 5°C, so ergibt das einen Fehler von rd. 0,004 kg/dcm³ auf etwa 0,725 kg/dcm³, also 0,55%.

Es hat sich gezeigt, daß in der Nähe des Motors durch Strahlung und Wärmezufuhr durch heiße Luft (Kühlluft!), nahe vorbeiführende heiße Rohrleitungen usw. Temperaturen bis zu 30°C und mehr im Stichprobergefäß herrschen können. Verwendet man die für 20°C gültige Kraftstoffwichte, so können allein hierdurch Fehler von der Größenordnung 1% entstehen. Dabei ist die Temperatur im Stichprobergefäß wieder davon abhängig, wie lange der Kraftstoff, der für eine Messung auslaufen soll, vorher im Gefäß gestanden hat. Es ist danach bei volumetrischer Messung des Kraftstoffverbrauches nötig, die Temperaturabhängigkeit der Kraftstoffwichte zu kennen und stets die Temperatur des Kraftstoffes im Stichprobergefäß zu bestimmen, am besten, indem ein mit einem Normalschliff versehenes Thermometer mit dem Stichprobergefäß zu einer Einheit vereinigt wird.

Der Fehler, mit dem eine Kraftstoffverbrauchsmessung mit einem Stichprobergefäß behaftet sein kann, wächst durch die Unsicherheit, die über die Kraftstoffwichte besteht, von 1 bis 2% bis auf etwa 2 bis 3% und mehr, und der Fehler von automatischen Messungen, die rein volumetrisch arbeiten, von etwa 0,5 auf 1,5%. Die Zunahme des Fehlers fällt also bei diesen viel stärker ins Gewicht.

2. Bestimmung des Kraftstoffverbrauches nach Gewicht.

Es ist naheliegend, von der volumetrischen Methode abzugehen und unmittelbar das Kraftstoffgewicht zu bestimmen. Hierzu verwendet man[3,4]) hinreichend empfindliche Waagen. Ihren Hauptvorteil erreicht die Wägung bei vollautomatischer Durchführung. Elektrische Kontakte lassen sich an Waagen leicht anbringen, so daß die Meßgenauigkeit solcher Anordnungen ± 0,1 bis 0,4% erreichen kann. Diese hohe Genauigkeit wird allerdings nur von selbsttätigen Anlagen erreicht, bei denen auch gerade die Waage den besonderen Anforderungen an Empfindlichkeit und Dämpfung genügt.

Anlagen mit Betätigung der Stoppuhr von Hand sind nur durch den Fortfall der Wichteermittlung genauer als das volumetrische Verfahren. Man kann ihre Genauigkeit auf ± 0,7 bis 1,0% schätzen, vorausgesetzt, daß der Augenblick des Beginnes sowie des Endes der Messung genau genug erfaßt wird, was bei Zeigerwaagen nicht immer der Fall ist.

Im Vergleich zur Stichprobermessung erfordert die Wägung, vor allem die automatische, aber verhältnismäßig großen Aufwand.

3. Beschreibung eines neuen Stichprobergefäßes zur Bestimmung des Kraftstoffgewichtes.

Das neue, im Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig, entwickelte Stichprobergefäß erlaubt die Bestimmung des Kraftstoffgewichtes durch einfaches Beobachten zweier Marken wie bei den bisherigen Stichproben, ohne daß eine Wichtebestimmung nötig ist. In diesem Stichprobergefäß schwimmt ein Aräometer, das, unabhängig von der Wichte, stets eine Flüssigkeitsmenge von gleichem, bekannten Gewicht bezeichnet.

Der Grundgedanke ist folgender: Füllt man in ein Gefäß nach Art eines Stichprobers Kraftstoffmengen von jedesmal gleichem Gewicht, beispielsweise 100 g, so steht der Flüssigkeitsspiegel je nach der Wichte verschieden hoch. Auf dem Teil, in dem sich der Spiegel bewegt, ließe sich eine Teilung für die Wichte anbringen und man könnte nun bei bekannter Wichte den zugehörigen Teilstrich als obere Marke nehmen und die Zeit zum Auslaufen bis zur unteren Marke bestimmen. Um nun die Wichte nicht erst ermitteln zu müssen, wird die obere Marke durch ein im Gefäß schwimmendes Aräometer gegeben, das ja je nach der

[3]) S. Fußnote 1.
[4]) Buschmann, Taschenbuch für den Auto-Ingenieur, S. 405, 1. Aufl., Franck'sche Verlagshandlung. Stuttgart 1938.

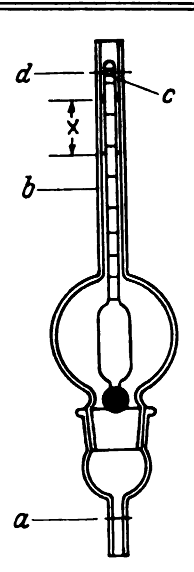


Bild 2. Stichprobergefäß nach Mühlner zur Bestimmung des Kraftstoffgewichtes.
a untere Marke; *b* zylindrischer Gefäßteil; *c* Marke auf dem Schwimmer; *d* obere Marke (auf dem Gefäß)

Flüssigkeitswichte mehr oder weniger tief eintaucht. Wenn die Flüssigkeit bei kleinerer Wichte ebenso viel höher im Gefäß steht, wie das Aräometer tiefer taucht, behält also das Aräometer seine Lage im Gefäß bei. Umgekehrt ist stets dann eine Flüssigkeitsmenge von vorgeschriebenem Gewicht im Gefäß enthalten, wenn das Aräometer frei in dieser Normalstellung schwimmt, die durch die Deckung zweier Marken, einer auf dem Aräometer und einer zweiten auf dem Gefäß, festgelegt wird.

Bild 2 zeigt ein solches Stichprobergefäß. Das Aräometer ist ein gewöhnliches, käufliches Instrument, zu dem passend das Gefäß hergestellt wird.

Die Standhöhe der Flüssigkeit im Gefäß muß sich bei Änderung der Wichte um den gleichen Betrag verändern wie die Tauchtiefe des Aräometers. Nennen wir:

G_1 = Gewicht der zwischen Gefäßinnenwand und Schwimmer eingeschlossenen Flüssigkeit,
V_1 = Volumen des Flüssigkeitsgewichtes,
G_1, V_1 sind gerechnet bis zum jeweiligen Flüssigkeitsspiegel von der unteren Marke *a* des Gefäßes (Bild 2) aus,
G_2 = Gewicht des Schwimmers,
V_2 = eingetauchtes Volumen des Schwimmers,
γ, γ' = Flüssigkeitswichten,
f_1 = freie Querschnittsfläche des oberen Gefäßteiles *b* am Flüssigkeitsspiegel zwischen Gefäßinnenwandung und Schwimmer,
f_2 = Querschnittsfläche der Schwimmerspindel

und nehmen die Schwimmerspindel und den Teil *b* des Gefäßes als zylindrisch an, so gilt:

$$\frac{G_1}{V_1} = \gamma \text{ und } \frac{G_2}{V_2} = \gamma.$$

Steigt die Kraftstoffwichte von γ auf γ', so sinkt der Flüssigkeitsspiegel um die Strecke x, wenn das Kraftstoffgewicht G_1 das gleiche bleiben soll. Dabei muß das Aräometer um denselben Betrag x austauchen, wenn es seine Lage frei schwimmend beibehalten soll, d. h. wenn die Marken *c* (auf dem Schwimmer) und *d* (auf dem Gefäß) sich nach wie vor decken sollen.

Es ergibt sich also:

$$\frac{G_1}{f_1}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right) = x = \frac{G_2}{f_2}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right)$$

oder

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{f_1}{f_2},$$

d. h. die freie Querschnittsfläche des oberen Gefäßteiles muß sich zur Querschnittsfläche der Schwimmerspindel

verhalten wie das Gefäßvolumen zum Schwimmervolumen oder wie das im Gefäß enthaltene Kraftstoffgewicht zum Schwimmergewicht. Damit ist eine einfache Bedingung gefunden, nach der für ein gegebenes Aräometer ein Gefäß entworfen werden kann, das unabhängig von der Wichte stets eine Flüssigkeitsmenge von gleichem vorgeschriebenen Gewicht, etwa 100 oder 250 g liefert.

Die Marke *c* wird auf dem Aräometer angebracht, wobei es gleichgültig ist, an welcher Stelle. Sie kann sich auch im unteren Teil des Aräometers in der Nähe der unteren Marke *a* befinden. Die Marke *d* muß so angebracht sein, daß bei Deckung der Marken *c* und *d* der Schwimmer etwas Platz zum Auf- und Abschwimmen hat. Das Gefäß ist mit einem Normalschliff teilbar ausgeführt. Durch kleine Glaszapfen im oberen Gefäßteil wird der Schwimmer geführt und verhindert, sich mit der Spindel an die Gefäßwand anzulegen, wodurch infolge der Oberflächenkräfte des Kraftstoffes Reibung entstehen könnte.

Die Messung geschieht so: Das Gefäß wird in üblicher Weise von oben oder vor allem bei geschlossenen Systemen von unten gefüllt. Dabei steigt der Schwimmer und legt sich oben gegen das Gefäß. Bei der Einleitung der Messung, d. h. wenn der Kraftstoff aus dem Meßgefäß zu fließen beginnt, fängt der Schwimmer an, frei zu schwimmen. Er sinkt dann nach unten, und in dem Augenblick, da er mit der Marke *c* durch die Marke *d* geht, wird die Stoppuhr gedrückt. Dann sinkt er noch ein Stück weiter und setzt sich schließlich unten auf das Gefäß auf. Diese Schwimmerbewegungen sind auf die Volumenverhältnisse ohne Einfluß. Das Gefäß läuft weiter aus, und in dem Augenblick, da der Flüssigkeitsspiegel durch die Marke *a* geht, wird wie bei anderen Stichprobergefäßen die Uhr abermals gedrückt: die Messung ist beendet, eine Kraftstoffmenge von vorgeschriebenem Gewicht ist ausgelaufen. Das Verfahren ist also genau so einfach wie das des üblichen Stichprobergefäßes, erspart aber ohne anderweitige Nachteile die gesonderte Wichtebestimmung.

Die Ablesung der Kraftstoffwichte ist nicht notwendig. Da aber wohl stets ein käufliches Aräometer verwendet wird, so ergibt sie sich durch einen Blick auf dessen Skala ohne Mühe. Die Eichung des Gefäßes (die durch geringe Verschiebung der Marke *d* möglich ist) geschieht am besten so, daß eine Kraftstoffmenge von vorgeschriebenem Gewicht in das Gefäß gefüllt wird und die Marke *d* da angebracht wird, wo sich die Marke des Schwimmers oder ein ausgezeichneter Punkt, beispielsweise das obere Ende befindet, wenn der Schwimmer frei schwimmt. Die Genauigkeit dieser Eichung ist etwa $\pm$ 0,15%, wenn man das Gefäß vor der Eichung mit Kraftstoff durchspült, um die Wandungen zu benetzen. Da nämlich bei diesem Gefäß die inneren Oberflächen etwa doppelt so groß sind wie bei einem gewöhnlichen, muß besonders auf Vermeiden des durch Hängenbleiben von Kraftstoff an den Wänden entstehenden Fehlers geachtet werden. Messungen haben ergeben, daß die mit einem solchen »naß« geeichten Gefäß von 250 g Inhalt bestimmten Kraftstoffgewichtmengen regelmäßig auf weniger als 0,5% genau waren, in den meisten Fällen sogar auf weniger als 0,2%. Am Prüfstand, wo die Zeitmessung gelegentlich etwas weniger sorgfältig geschieht, kann man mit einer mittleren Genauigkeit von 1% rechnen, d. h. die Genauigkeit ist, verglichen mit einem gewöhnlichen, ebenfalls »naß« geeichten Stichprobergefäß, etwa um den Betrag besser, der bisher durch die Unsicherheit über die Kraftstoffwichte hinzukam.

4. Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß bei Verwendung von gewöhnlichen Stichprobergefäßen ein nicht zu vernachlässigender Fehler durch Unsicherheit über die Kraftstoffwichte entsteht. Da Gewichtsmessungen des Kraftstoffverbrauches mit Waagen verhältnismäßig viel Aufwand brauchen, wird ein einfaches Stichprobergefäß beschrieben, in dem ein aräometerähnlicher Schwimmer unabhängig von der Wichte stets ein gleiches Kraftstoffgewicht angibt.

Einfluß überhitzter Härtung auf einige Eigenschaften von vergütetem Stahl.

Von Heinrich Cornelius, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Untersuchung über den Einfluß überhitzter Härtung auf die Feinstruktur, die Temperaturlage der Anlaßvorgänge, das Gefüge, das Korrosionsverhalten, die Säurelöslichkeit, die Härte, den Elastizitätsmodul, die Streckgrenze, Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit, die Neigung zur Anlaßsprödigkeit und die Biegewechselfestigkeit glatter und gekerbter Proben aus einem Chrom-Molybdän- und einem Chrom-Mangan-Vanadin-Vergütungsstahl nach dem Anlassen auf Temperaturen bis 650°.

Gliederung.

1. Einleitung.

Der Einfluß einer überhitzten oder überzeiteten Härtung auf die Gebrauchseigenschaften scheint für solche Stähle (und für Schnelldrehstähle) recht gut bekannt zu sein, die vorwiegend im gehärteten Zustand verwendet werden. Dagegen findet man im Schrifttum kaum durch Versuche belegte Angaben darüber, ob und in welchem Außmaß die Wirkung einer überhitzten Härtung durch das Anlassen der Vergütungsstähle verändert wird, sofern man von Randentkohlung und Härterissen absieht. Die Möglichkeiten, die Überhitzungsempfindlichkeit des Stahles durch geeignete Legierung einzuschränken, sind ausführlich und mit Erfolg untersucht worden[1]. Außerdem ist in neuzeitlichen Warmbehandlungsanlagen eine sorgfältige Temperaturüberwachung zu einer Selbstverständlichkeit geworden. Da zudem die meisten Vergütungsstähle nur wenig überhitzungsempfindlich sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Überhitzung beim Härten gering, wenn auch, wie die Erfahrung zeigt, nicht ausgeschlossen. Die vorliegende Untersuchung wurde im Hinblick darauf begonnen, daß bei der Beurteilung von Schäden an vergüteten Bauteilen aus Stahl nicht selten die Frage von Bedeutung ist, ob eine im Gefüge erkennbare Überhitzung (oder Überzeitung) beim Härten in ursächlichem Zusammenhang mit dem Versagen des Bauteiles steht. Eine Entscheidung in dieser Frage wird meist nicht möglich sein, da kaum versuchsmäßige Unterlagen vorliegen.

2. Versuchswerkstoffe, Versuchsdurchführung.

Die Versuche wurden mit einem Chrom-Molybdän-Stahl (A) und einem Mangan-Chrom-Vanadin-Stahl (B) folgender Zusammensetzung ausgeführt:

Stahl	% C	% Si	% Mn	% P	% S	% Cu	% Cr	% Mo	% V
A	0,23	0,25	0,46	0,017	0,008	0,07	1,05	0,19	—
B	0,28	0,29	1,11	0,015	0,005	0,15	0,49	—	0,23

Die Stähle lagen vor in Stangen mit 30 (Stahl A) und 20 mm Durchmesser (Stahl B). Es wurden Härtetemperaturen von 870, 950, 1050 und 1150° gewählt. Überhitzungen auf die beiden höchsten Temperaturen werden praktisch nicht unbeabsichtigt vorkommen. Sie wurden aber in die Versuche einbezogen, einmal um schwache Einflüsse der Überhitzung deutlicher hervortreten zu lassen, zum andern mal deswegen, weil beide Versuchsstähle wegen ihres Gehaltes an Chrom und Molybdän bzw. Vanadin verhältnismäßig weitgehend überhitzungsunempfindlich sind. — Die Anlaßtemperaturen lagen bei den Versuchen vorwiegend bei 300 bis 650°. Dem Anlassen folgte eine rasche Abkühlung, außer bei den Versuchen über die Anlaßsprödigkeit.

3. Versuchsergebnisse.

Röntgenographische Feinstrukturuntersuchungen wurden an gehärteten und nicht angelassenen Proben aus beiden Versuchsstählen durchgeführt. Die Härtung der Proben mit 2,5 mm Durchmesser erfolgte von 870 bis 1150° in Eiswasser. Unter starker Kühlung wurden die Proben auf 1 mm Durchmesser abgeschliffen und auf 0,5 mm Durchmesser anodisch abgeätzt. Die Untersuchungen[2] machen Unterschiede in der Feinstruktur des Martensits nach Abschrecken der Versuchsstähle von verschieden hohen Temperaturen oberhalb Ac_3 wenig wahrscheinlich.

Aus normalgeglühten und anschließend bei 650° eine Stunde angelassenen sowie von 870, 950, 1050 und 1150° in Eiswasser abgeschreckten und nicht angelassenen Stäbchen mit 6 mm Durchmesser wurden Proben mit 4 mm Durchmesser für Dilatometerversuche[3]) hergestellt. Bei diesen wurde die bei der Erhitzung erreichte Endtemperatur von 900° für alle Proben eingehalten. Die Temperaturänderungsgeschwindigkeit betrug 1,5°/min. Aus dem Vergleich der für die normalgeglühten Probestäbe erhaltenen Dilatometerkurven, mit den für die verschieden gehärteten Probestäbe festgestellten, ließ sich die Temperaturlage der durch die Anlaßvorgänge in den gehärteten Proben hervorgerufenen Längenänderungen eindeutig ermitteln. Wie aus Zahlentafel 1 hervorgeht, waren die Temperaturen des Restaustenitzerfalls und des Endes der Anlaßvorgänge — wie es sich auf den Dilatometerkurven ausprägt — für beide Stähle unabhängig von der Härtetemperatur. — Bei den Dilatometerversuchen wurden auch die Ac_1- und Ac_3-Umwandlungen sowie deren Hysteresen für beide Versuchsstähle bestimmt. Es ergibt sich erwartungsgemäß, Zahlentafel 1, daß sowohl die Umwandlungstemperaturen wie auch die Größe der Hysteresen von dem in weiten Grenzen verschiedenen Ausgangszustand (Korngröße, Karbidteilchengröße) der Stähle unabhängig sind. Kleine Unterschiede sind durch Meßfehler erklärbar.

Die durch überhitzte Härtung bedingten Gefügeerscheinungen sind für Stähle von der Art der Versuchswerkstoffe ausreichend bekannt. Hier brauchen daher nur wenige Gefügebilder wiedergegeben zu werden. — Der Stahl *A* hatte nach dem Abschrecken von 870° ein Härtungsgefüge von mittlerer Feinheit. Härten von 950° (120° über Ac_3) führte schon zu einem Gefüge mit starken Überhitzungserscheinungen, deren Intensität mit auf 1050 und 1150° (320° über Ac_3) erhöhter Härtetemperatur schwächer zunahm, als bei dem Übergang von 870 auf 950°. Bei einer Anlaßtemperatur von 500° traten die Korngrenzen des bei den Härtetemperaturen vorhanden gewesenen Austenits im

[1] E. Houdremont, Einführung in die Sonderstahlkunde. Berlin 1935.

[2] Für die Durchführung danke ich Herrn Dr. O. Lohrmann, DVL.

[3] Differential-Dilatometer Bauart E. Leitz, Wetzlar, mit Meßanordnung nach F. Bollenrath.

Zahlentafel 1. Ergebnisse der Dilatometerversuche an den verschieden vorbehandelten Versuchsstählen (Temperaturänderungsgeschwindigkeit: 1,5°C/min).

Stahl	Ausgangszustand	Größte Längenzunahme infolge Zerfall des Restaustenits bei	Ende der dilatometrisch noch erfaßbaren Anlaßvorgänge bei*)	Ac_1	Ac_3	Ar_3	Ar_1	Hysteresis in °C zwischen Ende bei der Erhitzung und Beginn bei der Abkühlung für	
		°C	°C	°C	°C	°C	°C	A_1	A_3
A	normalisiert, 650°/1 h	—	—	757—782	782—827	768—702	702—688	80	59
	870°/Eiswasser	286	403	757—784	784—830	773—707	707—690	77	57
	950°/Eiswasser	280	392	755—780	780—827	773—703	703—687	77	54
	1050°/Eiswasser . . .	286	400	760—788	788—832	778—707	707—694	81	54
	1150°/Eiswasser . . .	276	394	762—790	790—832	780—713	713—700	77	52
B	normalisiert, 650°/1 h	—	—	746—773	773—852	—	—	94	—
	870°/Eiswasser	293	422	746—779	779—862	767—678	678—666	101	95
	950°/Eiswasser	293	420	748—776	776—858	767—677	677—667	99	91
	1050°/Eiswasser . . .	287	425	743—773	773—857	760—670	676—663	97	97
	1150°/Eiswasser . . .	300	410	752—777	777—862	—	—	—	—

*) Die Ausscheidung des Vanadinkarbides aus dem Ferrit von Stahl *B* beim Anlassen ist auf den Dilatometerkurven nur andeutungsweise erkennbar und hier nicht berücksichtigt.

Schliffbild mit einer Deutlichkeit hervor, die beinahe zu einer genauen Korngrößenbestimmung ausreichte. Um den Einfluß einer Vergütung mit überhitzter Härtung auf das Gefüge von Stahl *A* wiederzugeben, sind daher bei 500° angelassene Proben am besten geeignet, Bild 1 u. 2. — Infolge seines Vanadingehaltes hat der Stahl *B* nach dem Härten von Temperaturen kurz oberhalb Ac_3 ein sehr feines Gefüge. Nach Abschrecken von 950° wird bereits deutlich eine Gefügevergröberung erkennbar, jedoch entspricht die Feinheit des Gefüges noch der von Stahl *A* nach dem Härten von nur 870°. Der Stahl *B* erreicht also die gleiche Gefügevergröberung wie Stahl *A* zunächst erst nach stärkerer Überhitzung. Bei Abschrecktemperaturen über 950° nimmt die Gefügevergröberung von Stahl *B* jedoch rascher zu als die des Stahles *A*, so daß ersterer nach Abschrecken von 1150° ein etwas gröberes Gefüge als Stahl *A* aufweist. Auch bei Stahl *B* treten die ursprünglichen Austenitkorngrenzen durch Anlassen auf 500° im Schliffbild deutlich hervor, außer wenn die Korngröße sehr klein ist, Bild 3 u. 4.

Versuche über den Einfluß eines verschieden stark überhitzten Ausgangsgefüges auf das nach Erhitzung bis über Ac_3 (900°) und langsamer Abkühlung (1,5°/min) auf Raumtemperatur erhaltene Gefüge ergaben, daß eine solche Umkristallisationsglühung für den Chrom-Molybdän-Stahl *A*

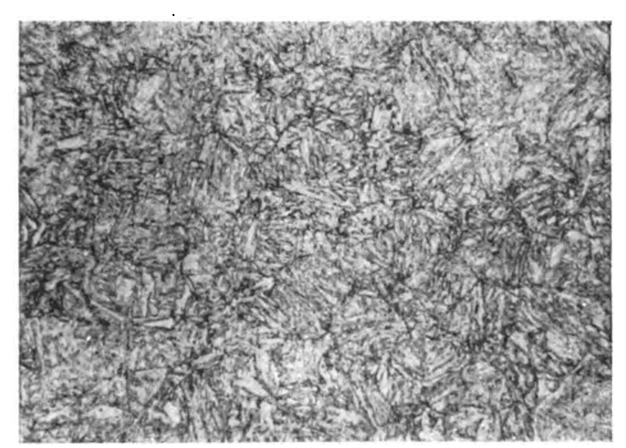


Bild 1. Härtetemperatur 870°.

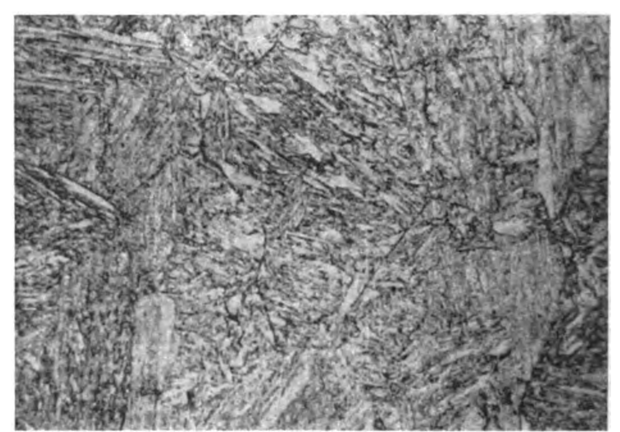


Bild 2. Härtetemperatur 1150°.

Bild 1 und 2. Gefüge des von 870 und 1150° in Eiswasser abgeschreckten und bei 500° eine Stunde angelassenen Stahles *A*. Vergr. 500fach.

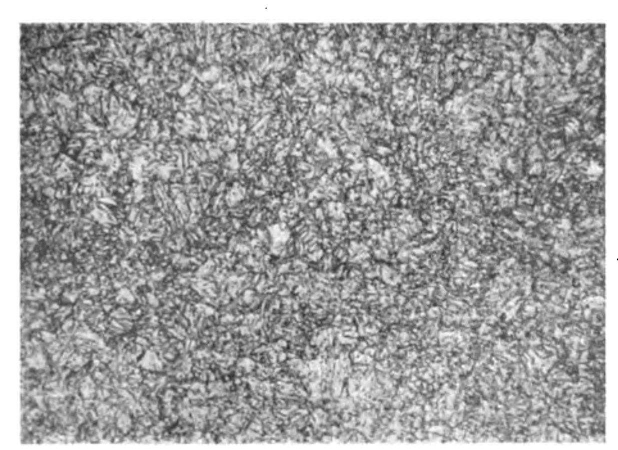


Bild 3. Härtetemperatur 870°.

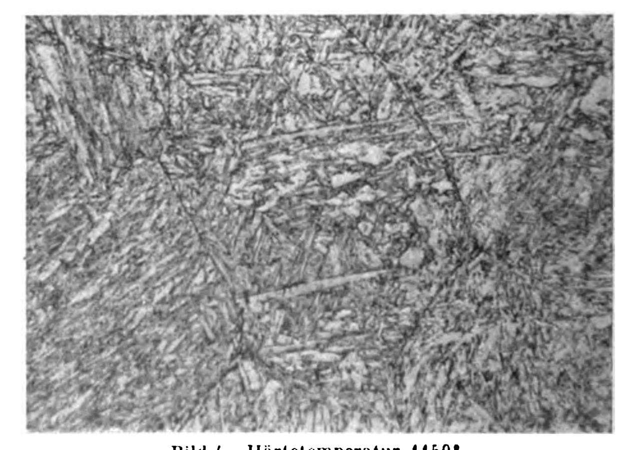
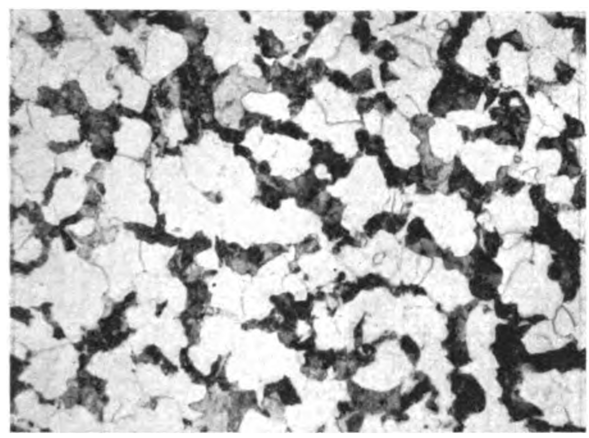


Bild 4. Härtetemperatur 1150°.

Bild 3 und 4. Gefüge des von 870 und 1150° in Eiswasser abgeschreckten und bei 500° eine Stunde angelassenen Stahles *B*. Vergr. 500fach.



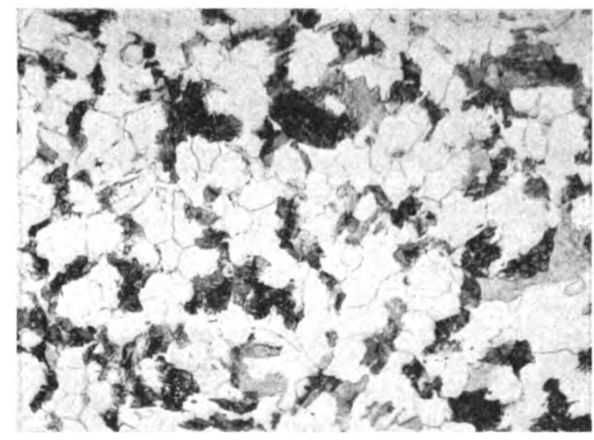




Bild 5. Vor der Umkristallisation normalgeglüht. Bild 6. Vor der Umkristallisation von 1150° in Eiswasser abgeschreckt.

Bild 5 und 6. Bei Umkristallisation des verschieden vorbehandelten Stahles *A* erhaltenes. Gefüge Vergr. 200fach.





Bild 7. Vor der Umkristallisation normalgeglüht. Bild 8. Vor der Umkristallisation von 1150° in Eiswasser abgeschreckt.

Bild 7 und 8. Bei Umkristallisation des verschieden vorbehandelten Stahles *B* erhaltenes Gefüge. Vergr. 200fach.

ein vom Ausgangsgefüge praktisch unabhängiges Gefüge ergibt, Bild 5 u. 6. Lediglich der durch die Umkristallisation erhaltene Perlit hat unscharfe Begrenzungen, wenn das Ausgangsgefüge stark überhitzt war. Das durch Umkristallisation entstandene Gefüge des Stahles *B* dagegen ist deutlich von dem Gefügezustand vor der Umkristallisation abhängig, Bild 7 u. 8. Die umkristallisierende Glühung ergibt, wenn man vom normalgeglühten oder üblich gehärteten Zustand ausgeht, ein ferritisch-perlitisches Gefüge mit rundlichen Körnern, ausgehend vom überhitzt gehärteten Zustand dagegen einen vorwiegend nadelig ausgebildeten Ferrit und auch zahlreiche Perlitinseln mit gestreckter Form. Die vor der umkristallisierenden Glühung vorgenommene Überhitzung beim Härten hat also bei Stahl *B* einen gleichgerichteten Einfluß auf das Umkristallisationsgefüge, wie eine Überhitzung während der Umkristallisation ohne voraufgegangene überhitzte Härtung. In beiden Fällen kann eine Anordnung des Ferrits nach kristallographischen Gesetzen entstehen (Widmannstätten Gefüge), Bild 8.

Die Ursache für den Einfluß des Ausgangsgefüges von Stahl *B* auf den Umkristallisationsvorgang und für das Fehlen eines derartigen, nennenswerten Einflusses bei Stahl *A* dürfte mit der unterschiedlichen Zusammensetzung und ihrem Einfluß auf die Keimbildungsvorgänge der Versuchsstähle, besonders mit dem Vanadingehalt von Stahl *B*, zusammenhängen. Nach Bild 7 und 8 könnte man zur Klärung des Verhaltens von Stahl *B* an eine Beeinflussung der Unterkühlbarkeit der Ar_3- und Ar_1-Umwandlung durch das verschiedene Ausgangsgefüge denken. Jedoch findet sich hierfür in dem Ergebnis der Dilatometerversuche (Zahlentafel 1) keine Bestätigung.

Die Korrosions- und Säurelöslichkeitsversuche wurden in Leitungswasser, in 3proz. Kochsalzlösung und in 1,0-n-Schwefelsäure durchgeführt. Aus den auf

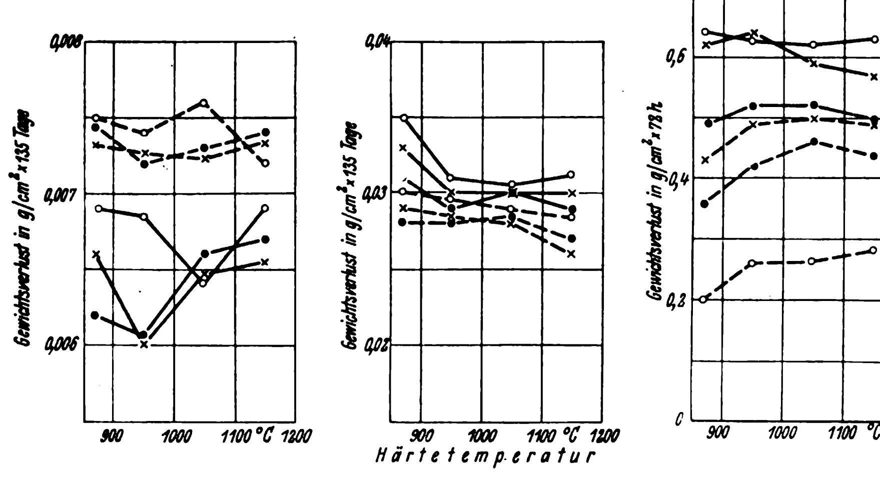


Bild 9. Leitungswasser, 135 Tage. Bild 10. Kochsalzlösung, 135 Tage. Bild 11. Schwefelsäure, 72 h.

Bild 9 bis 11. Ergebnisse der Korrosions- und Säurelöslichkeitsversuche mit den verschieden gehärteten und angelassenen Versuchsstählen.

—— Stahl *A*. ---- Stahl *B*. ● 300° × 450° ○ 650° Anlaßtemp.

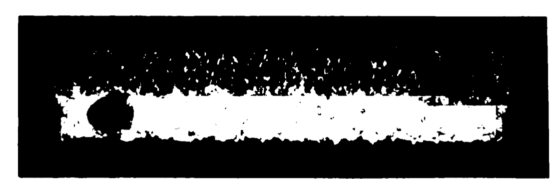


Bild 12. Verstärkter und ungleichmäßiger Säureangriff an den senkrecht zum Faserverlauf (Primärzeile) liegenden Flächen einer vergüteten Probe aus Stahl *A*. Vergr. 2fach.

8 × 36 mm² Querschnitt vorgeschmiedeten Stahlstangen in Querrichtung entnommene Proben mit 6 × 12 × 34 mm³ wurden von 870, 950, 1050 und 1150° in Eiswasser abgeschreckt, eine Stunde bei 300, 450 und 650° angelassen und feingeschliffen auf 4 × 10 × 32 mm³. Die Proben wurden an Glashäkchen in die Versuchslösungen ganz eingetaucht. Die Versuche im Leitungswasser (Erneuerung wöchentlich) und Kochsalzlösung (Erneuerung dreitägig) erstreckten sich über 135 Tage, die in Schwefelsäure (Erneuerung täglich) über 3 Tage. Bild 9 bis 11 enthalten die Versuchsergebnisse. In Leitungswasser ist kein Einfluß der Härtetemperatur auf die Korrosion der vergüteten Versuchsstähle festzustellen. Mit von 300 bis 450 auf 650° steigender Anlaßtemperatur scheint bei beiden Stählen eine leichte Zunahme der Rostneigung in Leitungswasser verbunden zu sein. Der Mangan-Chrom-Vanadin-Stahl *B* rostete etwas stärker als der Chrom-Molybdän-Stahl *A*. Die Rostung beider Stähle war an den senkrecht zur Faserrichtung (Primärzeilen) liegenden Flächen der Proben (4 × 32 mm²) erheblich ausgeprägter als an den parallel zur Faserrichtung liegenden Flächen. Dagegen trat in der Kochsalzlösung ein gleichmäßiger Angriff der Flächen jeder Probe ein. Die Versuchsstähle zeigten nach dem verschiedenen Anlassen eine Tendenz zur Abnahme der Korrosion mit steigender Härtetemperatur. Mit steigender Anlaßtemperatur nimmt der Gewichtsverlust beider Stähle im gesamten untersuchten Härtetemperaturbereich durchweg etwas zu.

In Schwefelsäure war, viel ausgeprägter als in Leitungswasser, ein bevorzugter Angriff der senkrecht zur Faserrichtung liegenden Probenflächen festzustellen, Bild 12. Die Härtetemperatur erwies sich als ohne Einfluß auf die Schwefelsäurelöslichkeit des vergüteten Stahles *A*. Die Schwefelsäurelöslichkeit von Stahl *B* nahm dagegen mit steigender Härtetemperatur zu. Der Einfluß der Anlaßtemperatur überwiegt bei beiden Stählen den der Härtetemperatur. Die Säurelöslichkeit beider Stähle nimmt mit der von 300 auf 450° erhöhten Anlaßtemperatur deutlich zu. Erreicht die Anlaßtemperatur 650°, so erhöht sich hiermit die Schwefelsäurelöslichkeit von Stahl *A* noch etwas, während die von Stahl *B* stark absinkt. Stahl *B* besitzt also in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur für alle Härtetemperaturen zwischen 870 und 1150° ein Maximum der Schwefelsäurelöslichkeit bei einer Anlaßtemperatur von 450°. Es ist möglich, daß ein entsprechender Höchstwert des Stahles *A* bei Anlaßtemperaturen unter 300° liegt und daher bei den vorliegenden Versuchen nicht gefunden wurde. Von üblicher Temperatur gehärtete Stähle mit etwa 0,4% C, 0,3% Cu, 0,6% Cr und 0,6% Ni, die mit dem Versuchsstahl *A* in etwa vergleichbar sind, hatten nach W. Eilender, W. Geller und W. Ausel[1]) einen Höchstwert der Säurelöslichkeit (0,45-n-H_2SO_4) bei einer Anlaßtemperatur von 250°.

Für die Ermittlung der Abhängigkeit der Härte von der Anlaßtemperatur wurden Proben mit 8 mm Dicke und 15 mm Durchmesser von 870, 950, 1050 und 1150° in Eiswasser abgeschreckt und auf Temperaturen zwischen 100 und 680° je eine Stunde angelassen, Bild 13 und 14. Bei Stahl *A* ist im gesamten Bereich der Anlaßtemperaturen kein Einfluß der Abschrecktemperatur auf die Härte vorhanden. Dies gilt für Stahl *B* nur bis zu einer Temperatur von 500°, von der ab mit steigender Abschrecktemperatur

[1]) Korrosion und Metallschutz Bd. 17 (1941), Nr. 9, S. 314/19.

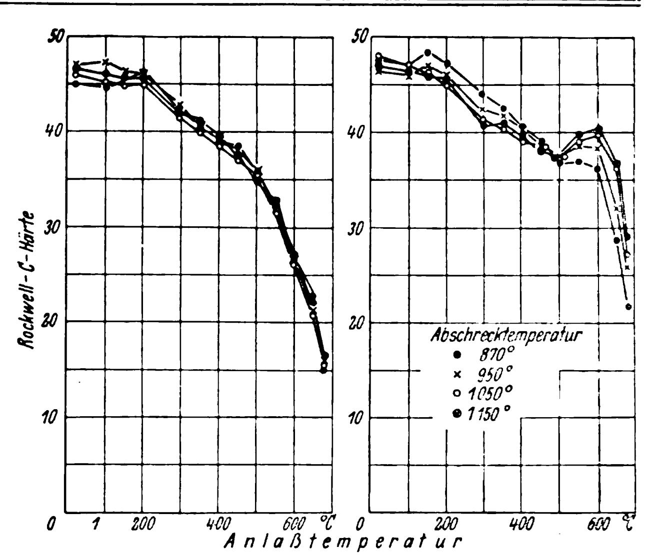


Bild 13. Stahl *A*. Bild 14. Stahl *B*.

Bild 13 und 14. Abhängigkeit der Härte der Versuchsstähle von der Abschreck- und Anlaßtemperatur.

ein zunehmender, auf die Ausscheidung von Vanadinkarbid aus dem Ferrit zurückzuführender Wiederanstieg der Härte einsetzt, die einen Höchstwert bei 600° Anlaßtemperatur erreicht. Infolge der Ausscheidung und geringen Koagulationsfähigkeit des Vanadinkarbids hat der Stahl *B* von 500° ab eine wesentlich höhere Anlaßbeständigkeit, besonders im überhitzt gehärteten Zustand, als der Stahl *A*.

In Bild 15 und 16 ist der Einfluß der Härtung von verschiedenen Temperaturen auf die nach dem einstündigen Anlassen bei 300, 450 und 630° im Zerreißversuch erhaltenen statischen Festigkeitswerte und die Kerbschlagzähigkeit dargestellt. Die Prüfstäbe (Proportionalrundstäbe mit $d = 10$ mm und $l_0 = 10\,d$ sowie DVM-Kerb-

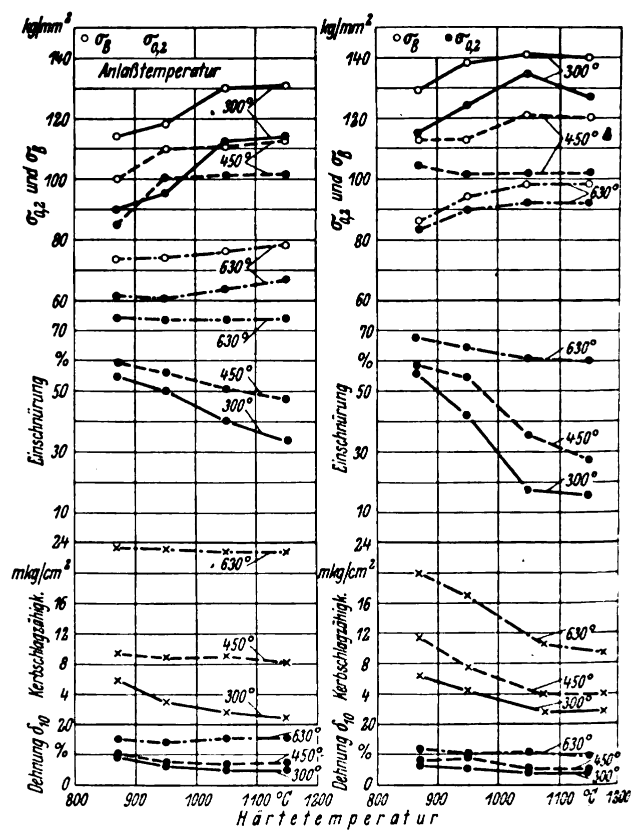


Bild 15. Stahl *A*. Bild 16. Stahl *B*.

Bild 15 und 16. Statische Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit der Versuchsstähle in Abhängigkeit von der Härte- und Anlaßtemperatur.



schlagproben 10 × 10 × 55 mm³ mit Rundkerb von 3 mm Tiefe und 1 mm Abrundungsradius) wurden aus dem Kern der vergüteten Stangen entnommen, deren Durchmesser 30 mm bei Stahl *A* und 20 mm bei Stahl *B* betrug. Im Gegensatz zur Härte (Bild 13) zeigt die Zugfestigkeit von Stahl *A* bei den verschiedenen Anlaßtemperaturen einen Anstieg mit zunehmender Höhe der Härtetemperatur. Die Ursache für das abweichende Verhalten von Härte und Zugfestigkeit liegt darin, daß die kleinen, für die Härtemessung verwendeten Proben schon bei der niedrigsten Härtetemperatur gleichmäßig durchhärteten, während die Durchhärtung der für die Zugversuche benutzten Stangen mit ihren größeren Abmessungen mit steigender Härtetemperatur in bekannter Weise[5] zunahm. Gleiches gilt auch für Stahl *B*, bei dem sich jedoch bei der höchsten Anlaßtemperatur (630°) der Einfluß der mit der Abschrecktemperatur zunehmenden Durchhärtung der in gleicher Richtung zunehmenden Aushärtungswirkung durch Ausscheidung von Vanadinkarbid überlagert.

Bei Stahl *A* (Bild 15) nimmt der Einfluß der überhitzten Härtung mit steigender Anlaßtemperatur ab. Die Zugfestigkeit und $\sigma_{0,2}$-Grenze steigen mit der Abschrecktemperatur, die Einschnürung, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit sinken ab. Bei 630° Anlaßtemperatur sind die Eigenschaftsänderungen in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur nur noch klein. Trotz steigender Zugfestigkeit und Streckgrenze haben Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit nach dem Anlassen bei 630° für alle Härtetemperaturen praktisch gleiche Werte, d. h., daß der Stahl mit zunehmender Überhitzung bei gleicher Festigkeit eine ein wenig höhere Zähigkeit besitzt als nach Vergütung mit üblicher Härtetemperatur. Eine als Schädigung aufzufassende Beeinflussung der statischen Festigkeitswerte des Stahles *A* tritt durch überhitzte Härtung beim Vergüten nicht ein. Die Ergebnisse in Bild 15 führen vielmehr zu dem Schluß, daß sich mit Stahl *A* durch geeignetes Anlassen nach stark überhitzter Härtung noch die gleichen statischen Festigkeitswerte und Kerbschlagzähigkeiten erzielen lassen wie nach üblicher Härtung. Die überhitzte Härtung erfordert zu diesem Zweck höhere Anlaßtemperaturen. — Ein im Temperaturbereich von 810 bis 1100° gehärteter und bei gleicher Temperatur (570°) angelassener Chrom-Molybdän-Stahl (0,27% C, 0,83% Cr, 0,42% Mo) wies in den verschiedenen Behandlungszuständen nur kleine Unterschiede der Elastizitätsgrenze (97 bis 98 kg/mm²), der Zugfestigkeit (115 bis 110 kg/mm²) und der Dehnung (16,8 bis 18,5%) auf[5].

Die Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit des Stahles *B* (Bild 16) ändern sich mit steigender Abschrecktemperatur für die Anlaßtemperaturen 300 und 450° ähnlich und aus gleichem Grunde wie die entsprechenden Eigenschaften des Stahles *A*. Im Gegensatz zu Stahl *A* sind die Eigenschaftsänderungen des Stahles *B* in Abhängigkeit von der Härtetemperatur noch bei der Anlaßtemperatur von 630° sehr ausgeprägt. Dies beruht weniger auf zunehmender Durchvergütung als auf der bis zur höchsten gewählten Abschrecktemperatur (1150°) noch ansteigenden Löslichkeit des Vanadinkarbides im Austenit, die zu verstärkter Ausscheidungshärtung des Stahles *B* durch Vanadinkarbid beim Anlassen oberhalb 500° führt (Bild 14). Infolgedessen steigen Streckgrenze und Zugfestigkeit von Stahl *B* auch bei 630° Anlaßtemperatur noch erheblich mit der Höhe der Abschrecktemperatur an, während Einschnürung, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit sich im entgegengesetzten Sinne ändern. Durch passende Wahl der Anlaßbedingungen lassen sich auch mit dem stark überhitzt gehärteten Stahl *B* etwa gleiche Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeitswerte erzielen wie nach üblicher Härtung. Für beide Versuchsstähle läßt sich also feststellen, daß die überhitzte Härtung die Festigkeit und Zähigkeit im vergüteten Zustand zwar beeinflussen, kann aber nicht eigentlich im Sinne einer Schädigung.


[5]) P. Oberhoffer, Das technische Eisen. Dritte Auflage von W. Eilender und H. Esser. Berlin (1936), S. 256.

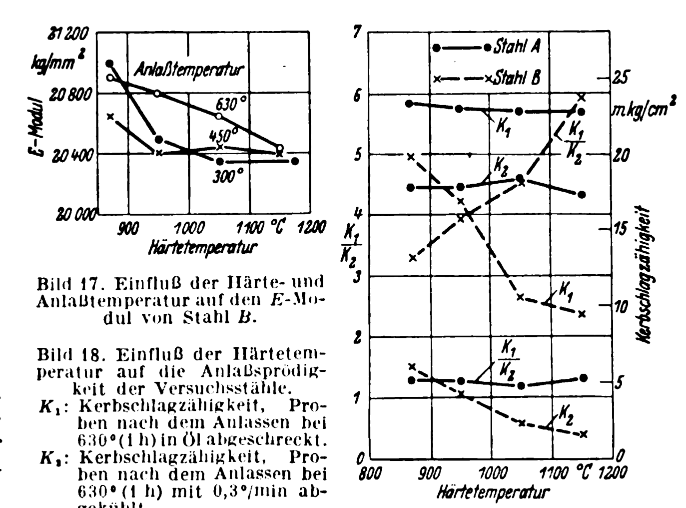


Bild 17. Einfluß der Härte- und Anlaßtemperatur auf den *E*-Modul von Stahl *B*.

Bild 18. Einfluß der Härtetemperatur auf die Anlaßsprödigkeit der Versuchsstähle.
K_1: Kerbschlagzähigkeit, Proben nach dem Anlassen bei 630° (1 h) in Öl abgeschreckt.
K_2: Kerbschlagzähigkeit, Proben nach dem Anlassen bei 630° (1 h) mit 0,3°/min abgekühlt.

Vergleicht man in Bild 15 und 16 die Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit der beiden Versuchsstähle miteinander, so ist zu berücksichtigen, daß der Stahl *B* auf Grund des kleineren Stangendurchmessers beim Härten und zum Teil auch der Zusammensetzung (Vanadingehalt) nach gleicher Vergütungsbehandlung stets eine höhere Zugfestigkeit als Stahl *A* besitzt. —

Die für 0,02% bleibende Dehnung ermittelte Elastizitätsgrenze ändert sich mit der Härte- und Anlaßtemperatur für beide Stähle in gleichem Sinne wie die $\sigma_{0,2}$-Grenze. — Der Elastizitätsmodul von Stahl *A* erwies sich als unabhängig von der Höhe der Abschreck- und Anlaßtemperatur. Allerdings waren die Streuungen erheblich (20300 bis 21000 kg/mm²), so daß die gegebenenfalls zu erwartenden, nur kleinen Änderungen unbeobachtet geblieben sein können. Bei Stahl *B* waren die Streuungen des E-Moduls für einen bestimmten Warmbehandlungszustand nur klein (± 100 kg/mm²). Aus den in Bild 17 wiedergegebenen Versuchsergebnissen kann man daher mit einiger Wahrscheinlichkeit auf eine kleine Abnahme des E-Moduls des vergüteten Stahles *B* mit steigender Überhitzung beim Härten schließen.

Die für die Anlaßtemperatur von 630° nach Härtung von Temperaturen zwischen 870 und 1150° geprüfte Neigung zur **Anlaßsprödigkeit** ist bei Stahl *A* klein und unabhängig von der Härtetemperatur, bei Stahl *B* groß und im Sinne einer Zunahme erheblich abhängig von der Härtetemperatur, Bild 18. Dieser Einfluß der Härtetemperatur auf Stahl *B* ist deshalb schwer zu erklären, weil die Ursache der Anlaßsprödigkeit noch nicht eindeutig geklärt ist[6]). Man kann bezüglich des verschiedenen Verhaltens der Stähle *A* und *B* hinsichtlich der Abhängigkeit der Anlaßsprödigkeit von der Härtetemperatur nur auf die Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung, vor allem auf den Molybdängehalt sowie auf einen möglicherweise bei Stahl *B* vorhandenen Korngrößeneinfluß hinweisen.

Dauerversuche wurden auf DVL-Planbiegemaschinen mit einer Lastspielfrequenz von 1000/min und einer Grenzlastwechselzahl von 10 × 10⁶ durchgeführt. Die Proben wurden aus dem Kern von Flachstangen mit 14 × 45 mm² Querschnitt hergestellt, die im Falle von Stahl *B* nur von 870 und 1150° in Wasser gehärtet und bei 300 bzw. 650° angelassen worden waren. Die glatten, feingeschliffenen Proben hatten in der Meßstrecke einen Querschnitt von 3,5 × 25 mm². Die gekerbten Proben gleicher Form und Bearbeitung hatten einen einseitigen, 1 mm tiefen 45°-Kerb mit 0,5 mm Abrundungsradius im Kerbgrund. In Bild 19 sind die Ergebnisse der Dauerversuche über der aus der Härte ermittelten Zugfestigkeit der verschieden vergüteten Versuchsstähle aufgetragen. Der nur schwache Anstieg der Biegewechselfestigkeit der glatten Proben mit der Zunahme der Zugfestigkeit von 60 bis 80 auf 130 bis 150 kg/mm² ist auf die in der hohen Festigkeitsstufe ausgeprägtere Kerb-

[6]) E. Maurer, O. H. Wilms und H. Kiessler, Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942) S. 81/89 u. 115/21.

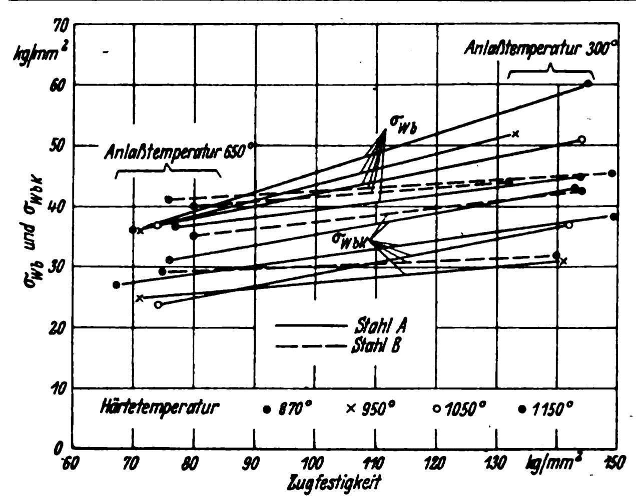


Bild 19. Ergebnisse der Dauerversuche in Abhängigkeit von der (aus der Härte ermittelten) Zugfestigkeit der verschieden vergüteten Versuchsstähle.

wirkung der feinen Schleifriefen zurückzuführen. Abgesehen von den glatten Proben aus Stahl *A* in der hohen Festigkeitsstufe (Anlaßtemperatur 300°) ist aus den umfangreichen Dauerversuchen kein schädigender Einfluß einer stark überhitzten Härtung auf die Biegewechselfestigkeit glatter und gekerbter Proben aus den vergüteten Versuchsstählen abzuleiten. Bild 20 und 21 enthalten eine ausführlichere Wiedergabe der allerdings stark streuenden Ergebnisse der Dauerversuche in Abhängigkeit von der Härtetemperatur.

4. Zusammenfassung.

Ein Chrom-Molybdän- und ein Mangan-Chrom-Vanadin-Vergütungsstahl wurden nach Härten von Temperaturen zwischen 870 und 1150° und Anlassen bei verschiedenen

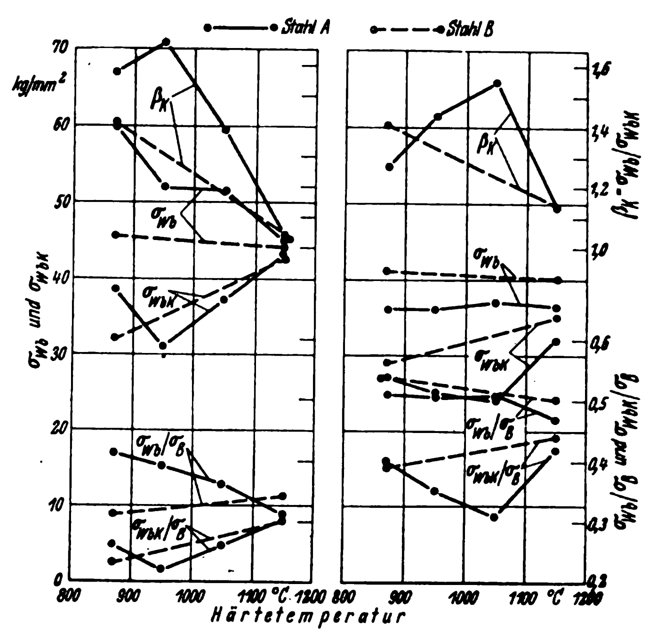


Bild 20. Anlaßtemperatur 300°. Bild 21. Anlaßtemperatur 650°.
Bild 20 und 21. Ergebnisse der Dauerversuche in Abhängigkeit von der Härtetemperatur und Anlaßtemperatur.

Temperaturen auf eine Anzahl von vorwiegend technisch wichtigen Eigenschaften untersucht. Das Ergebnis der Versuche läßt sich dahingehend festlegen, daß Überschreitungen der Härtetemperaturen um praktisch noch in Betracht zu ziehende Beträge (z.B. 50 bis 100°) den Gebrauchswert der auf ihren gebräuchlichen Festigkeitsbereich von 65 bis 120 kg/mm² vergüteten Versuchsstähle nicht beeinträchtigen,

Für die Durchführung eines großen Teils der Versuche danke ich Herrn Ing. W. Schmidt.

Die mechanischen Eigenschaften durchsichtiger Kunststoffe bei + 20°.

Von W. Küch.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Zug-, Druck- und Biegefestigkeit von Plexiglas, Astralon, Reilit und Polystyrol bei normaler Temperatur. Beurteilung des elastischen und plastischen Formänderungsvermögens. Verhalten der Werkstoffe bei statischer Dauerbelastung (Standfestigkeit und Kriechverhalten). Schlagbiegeversuche. Einfluß von Kerben auf die statischen und dynamischen Eigenschaften. Bruchformen. Zusammenhang zwischen Feinbau und mechanischen Eigenschaften. Verbesserung der Eigenschaften von Plexiglas durch Warmrecken. Untersuchung von getempertem Plexiglas.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Arbeit gibt einen Überblick über das mechanische und elastische Verhalten von durchsichtigen Kunststoffen aus Methakrylsäureester (Plexiglas M 33, M 132, M 222 und M 248), Polyvinylchlorid (Astralon), Azetylzellulose (Reilit) und Polyvinylbenzol (Polystyrol) bei normaler Temperatur bei kurz- und langzeitig dauernder Belastung. Die Beurteilung der Sprödigkeit erfolgte durch Schlagbiegeversuche. In beiden Fällen wird der Einfluß von Kerben auf die Festigkeit der Gläser untersucht. Die Wirkung des Temperns und der Warmverformung auf die Eigenschaften von Plexiglas wird beobachtet. Die Versuchsplatten hatten eine Dicke von 2 bis 10 mm bei Plexiglas und 2 bis 5 mm bei den übrigen Gläsern.

II. Festigkeitsversuche bei Kurzzeitbelastung.

Die Zugfestigkeit wurde an Flachstäben, die in verschiedenen Richtungen aus den Platten entnommen waren, in einer 250 kg-Schopper-Maschine mit elektrischem Antrieb ermittelt. (Querschnitt der Proben: 8 mm × Plattendicke mm; Probenlänge: 170 mm; Einspannköpfe: 42 mm × 12 mm). Die Geschwindigkeit der ziehenden Klemme wurde zu Beginn des Versuches so eingestellt, daß die halbe Bruchlast in etwa 30 s aufgebracht wurde. Mit dieser Einstellung wurde dann der Versuch zu Ende geführt. Bei den Versuchen wurden Zerreißschaubilder aufgenommen. Feinmeßversuche in einer 2 t-Wazau-Maschine (Handantrieb) mit Zeiger-Dehnungsmessern (Meßgenauigkeit: $^1/_{1000}$ mm) dienten zur Bestimmung des E-Moduls und zur genaueren Ermittlung der Dehnung bis zu etwa halber Bruchspannung (Belastungsgeschwindigkeit: 155 kg/cm²/min). Da die Kunststoffe bereits bei niedrigen Spannungen plastische Formänderungen zeigen und außerdem bei Langzeitbelastung Kriecherscheinungen auftreten, kann ein sicherer Wert für den E-Modul nicht angegeben werden. Die angeführten Zahlen beziehen sich auf eine Höchstlast etwa gleich einem Zehntel der Bruchlast. Die bleibende Formänderung lag hierbei stets unter 0,04%. Die Versuchsbedingungen sind zwar willkürlich jedoch so gewählt, daß sie bei Vergleichsversuchen immer eingehalten werden können. Bei der Berechnung der Werte wurde der elastische Anteil der Formänderung zugrunde gelegt. Vielfach bezeichnet man in der Literatur den Modul der gesamten Verformung bis zu mittleren Lasten als Elastizitätsmodul. Dies widerspricht dem physikalischen Sinn des Begriffes »Elastizitätsmodul«. Bei vielen metallischen Werkstoffen ist der Anteil der plastischen an den gesamten Verformungen bei niedrigen Beanspruchungen im Gegensatz zu den meisten Kunststoffen vernachlässigbar gering, so daß sich der Deformationsmodul vom E-Modul auch nur in einem zu vernachlässigendem Maße unterscheidet.

Plexiglas M 33, M 132, M 222 und Polystyrol verhalten sich spröde (Bild 1). Die Bruchdehnung beträgt nur 1 bis 5%. Die Bruchform ist ein reiner Trennungsbruch ohne größere Querschnittsveränderung. Astralon ist demgegenüber sehr zäh und zeigt einen ausgeprägten Fließbereich. Beim Einsetzen der bildsamen Verformung schnürt der Stab örtlich ein bei gleichzeitigem Lastabfall. Sobald der Stab über die ganze Länge auf den gleichen Querschnitt gereckt ist, steigt die Last wieder an (Verfestigung). Der endgültige Bruch erfolgt dann ohne eine weitere Einschnürung. Das beschriebene Verhalten ist aber nur in einer bestimmten Richtung vorhanden. Greift die Last unter 45° oder 90° zu dieser Hauptrichtung an, so ist das Formänderungsvermögen bereits erschöpft, bevor der Stab voll ausgereckt ist. Quer zur Hauptrichtung ist die Einschnürung rein örtlich. Auch Reilit zeigt eine Fließgrenze. Allerdings ist sie bei der gewählten Belastungsgeschwindigkeit nicht sehr deutlich ausgeprägt. Eine örtliche Einschnürung fehlt. Die Querschnittsverringerung beim Fließen erstreckt sich von Anfang an über die ganze freie Stablänge und eine Verfestigung

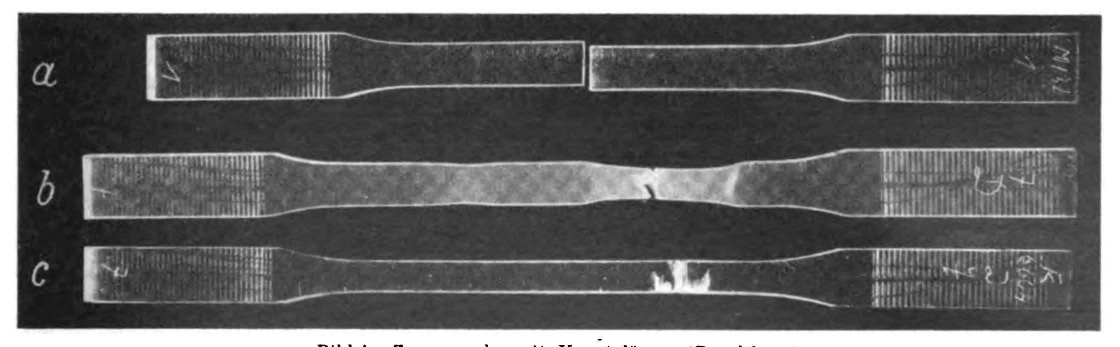


Bild 1. Zugversuche mit Kunstgläsern (Bruchform).
a Plexiglas M 132, b Astralon 45°, c Reilit.

Zahlentafel 1. Zugfestigkeit und E-Modul von Kunstgläsern bei + 20°.
Probenform: nach Bild 1. Probenzahl: 5. Prüfeinrichtung: 250 kg-Schopper-Maschine.
Klemmengeschwindigkeit: 30 mm/min.

Werkstoff	Dicke mm	Richtung	Zugfestigkeit σ_{zB} kg/cm^2 Grenzen	Mittel	E-Modul kg/cm^2 Grenzen	Mittel
Plexiglas M 33		—	712 bis 739	726	—	—
	3,0	0°	658 » 710	684	30 700 bis 30 700	30 700
		45°	652 » 700	675	30 500 » 30 600	30 600
		90°	666 » 707	693	29 900 » 30 700	30 300
	5,0	—	718 » 734	725	30 200 » 30 700	30 500
	8,0	—	675 » 727	706	30 600 » 31 200	30 900
	10,0	—	694 » 725	713	30 000 » 30 100	30 100
Plexiglas M 132	3,0	—	647 » 706	677	—	—
		—	675 » 707	688	30 500 bis 30 500	30 500
	5,0	—	676 » 704	694	30 600 » 31 200	30 900
	8,0	—	650 » 711	685	30 200 » 30 500	30 400
	10,0	—	666 » 718	706	30 600 » 31 000	30 800
Plexiglas M 222	3,0	—	810 » 828	819	—	—
		—	732 » 778	761	31 100 bis 32 200	31 700
	5,0	—	743 » 776	760	31 300 » 32 200	31 800
	8,0	—	723 » 761	744	31 900 » 32 000	32 000
	10,0	—	785 » 830	809	31 900 » 32 300	32 100
Plexiglas M 248	3,0	0°	860 » 900	874	47 200 » 47 700	47 450
		45°	—	899	—	—
		90°	—	882	—	—
Astralon	3,0	0°	680 bis 683	682[1])	32 800 bis 33 900	33 400
		45°	654 » 657	655	30 900 » 30 900	30 900
		90°	666 » 666	666	31 200 » 32 100	31 700
Reilit	5,0	0°	564 » 580	—	26 600 » 27 600	27 100
		45°	583 » 592	587[1])	26 700 » 27 200	26 950
		90°	587 » 618	—	26 800 » 26 900	26 850
		—	589 » 620	602[2])	28 700 » 29 800	29 250
		—	653 » 722	689[2])	32 900 » 32 900	32 900
Polystyrol	3,5	0°	452 » 468	462	33 800 » 34 100	34 000
		45°	468 » 469	468	33 100 » 33 700	33 400
		90°	464 » 469	466	33 600 » 34 200	33 900

[1]) Streckgrenze. [2]) Zugfestigkeit.

findet bereits während des Fließvorganges statt. Reilit hat in den verschiedenen Richtungen gleiches Formänderungsvermögen. Die Festigkeit und der E-Modul von Plexiglas M 248 sind erhöht und seine Sprödigkeit verringert. Der Werkstoff hat die 2- bis 3fache Dehnung der anderen Plexiglassorten und zeigt ähnlich wie Astralon Fließen und Einschnürung. Bei den Werkstoffen mit geringer Dehnung (Plexiglas M 33, M 132, M 222 und Polystyrol) kann eine stark verfilzte Struktur der Linearkolloide [1]) [2]) angenommen werden. Die plastischen Kunststoffe (Astralon, Reilit und Plexiglas M 248) besitzen dagegen eine regelmäßigere Anordnung der Fadenmoleküle, die die Bildung von Gleitflächen ermöglicht. Die Anisotropie von Astralon läßt außerdem, wie dies häufig bei Filmen und Fäden aus Kunststoffen beobachtet wird, auf eine gerichtete Orientierung der Molekülketten schließen. Wird der Kunststoff in dieser bevorzugten Richtung über die Fließgrenze hinaus mechanisch beansprucht, so werden weitere Ketten in die Reckrichtung gestreckt. Die Folge hiervon ist ein Anstieg der Festigkeit bei gleichzeitiger Einschnürung.

In Zahlentafel 1 und 2 sind die Werte von Bruchspannung bzw. Fließgrenze, Bruchdehnung, Brucheinschnürung und E-Modul für die verschiedenen Kunststoffe zusammengestellt. Die Festigkeit der Gläser (Streckgrenze bei Astralon) ist in den verschiedenen Richtungen gleich groß und von der Plattendicke unabhängig. Sie beträgt günstigstenfalls nur ein Drittel der Werte bei Zellstoffbahnen-Preßstoff auf Phenolharzbasis. Die Streuungen sind gering.

[1]) R. Houwink, Chemie und Technologie der Kunststoffe. Akademische Verlagsgesellschaft G. m. b. H., Leipzig. 1939.
[2]) R. Houwink, Elastizität, Plastizität und Struktur der Materie. Verlag von Theodor Steinkopf, Dresden und Leipzig. 1938.

Zur Beurteilung des plastischen Verhaltens der Kunststoffe ist in Bild 2 der Formänderungsmodul für die gesamte Dehnung $M = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon_{ges}}$ in Abhängigkeit von der Spannung aufgetragen. Er wurde aus Spannungs-Dehnungs-Kurven (Belastungsgeschwindigkeit: 155 kg/cm^2/min) ermittelt. Das graphische Verfahren gleicht Streuungen aus, die bei rechnerischer Ermittlung des Moduls aus den Ablesungen durch die Unterbrechung der Belastung für die Ablesung entstehen. Bei Plexiglas M 33, Astralon und Reilit ist eine lineare Beziehung zwischen Spannung und Dehnung entweder überhaupt nicht oder nur in einem verhältnismäßig kleinen Spannungsbereich vorhanden. Bei Plexiglas M 248 und Polystyrol dagegen ist der Modul etwa bis zu einer Spannung gleich 25 bzw. 35% der Bruchspannung ein konstanter Wert. Meist erfolgt der Übergang von der elastischen zur plastischen Formänderung allmählich, so daß eine Proportionalitätsgrenze nur angenähert angegeben werden kann. In Zahlentafel 3 sind daher auch die Spannungen eingetragen, bei denen der Abfall des Formänderungsmoduls 10% des Ausgangswertes beträgt. Reilit zeigt die stärksten plastischen Formänderungen.

Plexiglas bricht spröde. Der Bruch geht, wie dies bei Silikatgläsern auch beobachtet wird, von einer Kerbe oder Fehlstelle an der Oberfläche der Proben aus (Bild 3). Von dieser Fehlstelle setzt sich der Bruch nach innen fort. Bis zu einer bestimmten, meist kreisförmig ausgebildeten Grenze ist das Bruchgefüge makroskopisch gesehen fein, darüber hinaus faserig (Spiegelbildung). Auf Grund dieser Übereinstimmung kann angenommen werden, daß auch die weiteren am Silikatglas gewonnenen Erkenntnisse für die Prü-

Zahlentafel 2. Zugversuche mit Kunstgläsern bei + 20°.
Prüfeinrichtung: 250 kg-Schopper-Maschine. Klemmengeschwindigkeit: 30 mm/min.

Werkstoff	Richtung	Streckgrenze kg/cm²	Bruchspannung bez. auf den ursprünglichen Querschnitt kg/cm²	Wahre Bruchspannung kg/cm²	Bruchdehnung %	Einschnürung beim Bruch %
Astralon	0°	670	774	1080	47	28
	45°	—	666	—	20	48
	90°	—	648	—	8	40
Reilit 660 II	0°	580	624	765	13	8
	45°	592	602	722	13	7
	90°	618	668	656	18	12
Reilit 476	—	507	620	—	16	30
Reilit 578		574	692	—	16	12
Plexiglas M 132	0°	—	728	—	5	keine
	45°	—	689	—	4	»
	90°	—	663	—	4	»
Plexiglas M 248	0°	—	877	—	11	42
	45°	—	882	—	10	45
	90°	—	899	—	10	41
Polystyrol	0°	—	392	—	1	keine
	45°	—	445	—	1	»
	90°	—	461	—	1	»

Zahlentafel 3. Die elastischen Eigenschaften durchsichtiger Kunststoffe bei + 20°.
(Zugversuche mit gleichmäßig ansteigender Belastung.)
Belastungsgeschwindigkeit: 155 kg/cm²/min.

Werkstoff	Zugfestigkeit σ_{zB} kg/cm²	Proportionalitätsgrenze σ_{zP} kg/cm² ≈	$\frac{\sigma_{zP}}{\sigma_{zB}} \cdot 100$ %	Spannung bei einem Abfall des Formänderungsmoduls von 10% $\sigma_{z\,10\%}$ kg/cm²	$\frac{\sigma_{z\,10\%}}{\sigma_{zB}} \cdot 100$ %
Plexiglas M 33	725	110	15,2	220	30,4
Plexiglas M 248	885	220	24,8	317	35,8
Astralon	668[1])	—	—	205	30,7
Reilit	587[1])	85	14,5	160	27,2
Polystyrol	454	160	35,0	220	48,5

[1]) Streckgrenze.

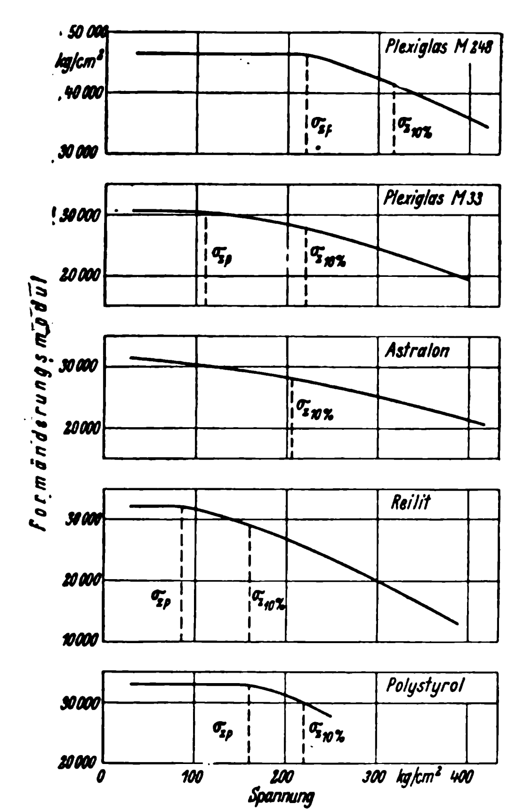


Bild 2. Formänderungsmodul in Abhängigkeit von der Spannung (Zugversuche). Belastungsgeschwindigkeit: 155 kg/cm²/min.

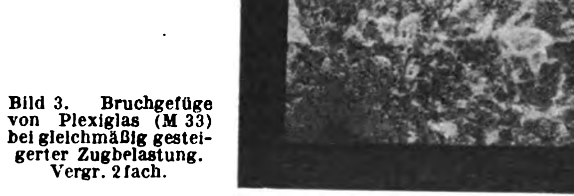


Bild 3. Bruchgefüge von Plexiglas (M 33) bei gleichmäßig gesteigerter Zugbelastung. Vergr. 2fach.

fung von Plexiglas zutreffen. Besonders wichtig sind hierbei der Zusammenhang der Festigkeit mit der Spiegelgröße, die starke Abhängigkeit der Festigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit und der Einfluß der Querschnittsform auf das Streugebiet der Festigkeitswerte. Nach den Versuchen von Smekal liefern kantige Stäbe stark streuende Werte, da bei ihnen der Spiegel sehr verschiedene Lagen annehmen kann. Rundstäbe sind daher, wenn man von der längeren Herstellungszeit absieht, günstiger. Bild 4 läßt erkennen, daß aber auch bereits bei Stäben, die sich der quadratischen

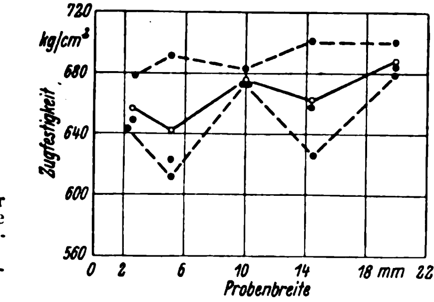


Bild 4. Einfluß der Probenform auf die Zugfestigkeit von Plexiglas M 33. Probendicke = Plattendicke = 10 mm.

Zahlentafel 4. Einfluß von Kerben auf die Zugfestigkeit von Kunstgläsern bei + 20°C.
Probenform: nach Bild 1. Probenzahl: 5. Belastungsgeschwindigkeit: 300 kg/cm²/min.

Werkstoff	Dicke mm	Zugfestigkeit σ_{zB} kg/cm²	Kerbform	Zugfestigkeit σ_{zBK} gekerbt kg/cm² Grenzen	Mittel	$\frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{zBK}}$
Plexiglas M 33	3,0	684	Spitzkerb 90° 1 mm	300 bis 365	340	2,01
			Rundkerb $r = 1$ mm	427 » 519	492	1,39
		684	⊔-Kerb 1 mm	298 » 315	310	2,20
			Bohrung 2 mm ∅	534 » 560	545	1,25
Astralon	3,0	659	Spitzkerb 90° 1 mm	617 » 693	656	0,95
			Rundkerb $r = 1$ mm	701 » 733	716	0,93
		668	⊔-Kerb 1 mm	706 » 713	709	0,94
			Bohrung 2 mm ∅	643 » 664	656	1,02
Reilit	5,0	578	Spitzkerb 90° 1 mm	544 » 546	545	1,06
			Rundkerb $r = 1$ mm	706 » 723	715	0,82
		587	⊔-Kerb 1 mm	624 » 650	637	0,92
			Bohrung 2 mm ∅	655 » 687	669	0,88
Plexiglas M 33	3,0	726	Spitzkerb 90° 1 mm	242 » 267	255	2,84
Plexiglas M 132	3,0	677	Spitzkerb 90° 1 mm	231 » 231	231	2,93
Plexiglas M 222	3,0	819	Spitzkerb 90° 1 mm	247 » 257	252	3,25
Plexiglas M 248	3,0	885	Spitzkerb 90° 1 mm	668 » 756	720	1,23
Plexiglas M 33 getempert	3,0	660	Spitzkerb 90° 1 mm	326 » 348	343	1,92
		735	Spitzkerb 90° 1 mm	198 » 210	205	3,59
Polystyrol	3,5	462	Spitzkerb 90° 1 mm	371 » 375	372	1,24

Form nähern, die Streuungen gering sind. Wichtig sind bei der Prüfung eine gleichmäßige Oberflächenbeschaffenheit der Proben und eine momentenfreie Einspannung. Der Verformungsbruch von Astralon, Reilit und Plexiglas M 248 ist zerklüftet und zeigt, hervorgerufen durch die Gleitvorgänge, Schubflächen.

Über den Einfluß von Kerben (Spitz-, Rund-, ⊔-Kerb und Bohrung) auf die Zugfestigkeit der durchsichtigen Kunststoffe bei gleichmäßig gesteigerter, statischer Belastung gibt Zahlentafel 4 Aufschluß. Die spröden Werkstoffe (Plexiglas M 33, M 132 und M 222) haben hohe, die zähen Kunststoffe (Astralon, Reilit und Plexiglas M 248) keine oder geringe Kerbempfindlichkeit. Bei den zähen Werkstoffen wird infolge ihres plastischen Formänderungsvermögens die örtliche Spannungsspitze im Kerbgrund abgebaut und die gleitbehindernde Wirkung der an gekerbten Stäben auftretenden Querspannungen herabgesetzt[3]). Getempertes und normales Plexiglas haben gleich hohe Kerbempfindlichkeit. Das Polystyrol ist trotz seiner geringen Dehnung wahrscheinlich infolge eines Spannungsausgleichs durch intermolekulare Vorgänge wenig kerbempfindlich. Astralon zeigt auch hinsichtlich der Kerbwirkung anisotrope Eigenschaften (Zahlentafel 5).

Das Verhalten von Plexiglas bei Druckbeanspruchung wurde an Würfeln mit 10 mm Kantenlänge und an prismatischen Proben von 50 mm × 10 mm × 10 mm beobachtet. Die prismatischen Proben dienten zur Bestimmung des E-Moduls über eine Meßlänge von 25 mm für eine Höchstspannung gleich ein Zehntel der Druckfestigkeit (bleibende Formänderung < 0,01%) mit Zeiger-Feinmeßgeräten (Meßgenauigkeit $^1/_{1000}$ mm). An den Würfeln wurden die Formänderungen für den gesamten Spannungsbereich mit Meßuhren ermittelt. Bei Druckbeanspruchung zeigt Plexiglas ein ausgesprochen plastisches Verhalten. Die Proben lassen sich ohne äußerlich wahrnehmbare Brucherscheinungen zusammendrücken. Bei einer Spannung, deren Höhe durch die Belastungsgeschwindigkeit bestimmt ist, tritt ein ausgeprägtes Fließen (bis 12%) ein. Später steigt die Last dann wieder an. Für die Beurteilung des Druckverhaltens wurde die Spannung ermittelt, die bei einer Versuchszeit von 1 min eine Zusammendrückung von 10% (1 mm) hervorruft. Die so bestimmte Druckfestigkeit (Zahlentafel 6) beträgt ungefähr das Doppelte der Zugfestigkeit, da sich bei Druck auch die Gebiete der sekundären Bindungen an der Lastaufnahme beteiligen und auf diese Weise eine gleichmäßigere Spannungsverteilung als bei Zugbeanspruchung stattfinden kann. Der Deformationsmodul liegt bei Druck etwas höher als bei Zug.

Die Biegefestigkeit wurde entsprechend DIN 53452 bei Plexiglas am Normstab und bei den übrigen Gläsern am Normkleinstab ermittelt. Die Biegefestigkeit entspricht etwa der Druckfestigkeit (Zahlentafel 7). Die Biegefestigkeit ist von der Probenform abhängig. Der Einfluß der Auflagerlänge bei Proben mit dem Querschnitt des Normstabes geht aus Bild 5 hervor. Höchstwerte für die Biegefestigkeit ergeben sich bei einer Auflagerlänge von 160 mm. Hinsichtlich der Kerbwirkung ergab sich bei den Biegeversuchen das gleiche Bild wie bei den Zugversuchen. Das Bruchgefüge bei statischer Biegebeanspruchung ist bei Plexiglas M 33, M 132 und M 222 an den ungekerbten Proben faserig und an den gekerbten Proben durchsichtig fein (Bild 6).

[3]) A. Thum und K. Federn, Spannungszustand und Bruchausbildung. Dissertation. Verlag von J. Springer, Berlin 1939.

Zahlentafel 5. Einfluß von Kerben auf die Zugfestigkeit von Astralon in den verschiedenen Richtungen.
Probenform: nach Bild 1. Probenzahl: 3.
Kerbform: Spitzkerb 90° 1 mm.
Prüfmaschine: 250 kg-Schopper.
Klemmengeschwindigkeit: 30 mm/min.
Versuchstemperatur: 20°.

Kraftangriff	Zugfestigkeit σ_{zB} ungekerbt kg/cm² Grenzen	Mittel	Zugfestigkeit σ_{zBK} gekerbt kg/cm² Grenzen	Mittel	$\frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{zBK}}$
längs	818 bis 838	828	763 bis 782	773	1,07
diagonal	654 » 661	658	733 » 744	737	0,85
quer	638 » 654	647	357 » 375	365	1,77

Zahlentafel 6. Druckfestigkeit von Plexiglas bei + 20°.
Versuchsdurchführung: s. Textteil.

Werkstoff	Druckfestigkeit kg/cm² Höchstwert	Tiefstwert	Mittel	E-Modul kg/cm² Höchstwert	Tiefstwert	Mittel
Plexiglas M 33	1230	1210	1220	31 500	31 200	31 400
Plexiglas M 132	1170	1120	1150	—	—	—
Plexiglas M 222	1420	1410	1410	—	—	—



Zahlentafel 7. Biegefestigkeit von Kunstgläsern bei + 20°
(gekerbt und ungekerbt).
Versuchsdurchführung entsprechend DIN 53452. Kerbform: 90° — Spitzkerb, Tiefe = ⅓ der Probenhöhe.

Werkstoff	Probenform	σ_{bB} kg/cm²	E-Modul kg/cm²	Durchbiegung beim Bruch mm	σ_{bBK} kg/cm²	$\frac{\sigma_{bB}}{\sigma_{bBK}}$
Plexiglas M 33	Normstab	1125 (1100 bis 1160)	30 200 (29 400 bis 31 000)	—	—	—
» » »	»	1128 (1025 » 1230)	—	9,2	247 (242 bis 249)	4,57
» » »	»	1337 (1260 » 1440)	—	—	—	—
Plexiglas M 132	»	1190 (1070 » 1280)	30 000	—	—	—
» » »	»	1103 (983 » 1182)	—	—	429 (385 bis 498)	2,58
» » »	»	1203 (1060 » 1350)	—	—	—	—
Plexiglas M 222	»	1410 (1320 » 1460)	31 200 (30 700 bis 31 600)	—	—	—
» » »	»	1224 (1218 » 1229)	—	11,0	279 (277 bis 281)	4,40
» » »	»	1397 (1360 » 1420)	—	—	—	—
Plexiglas M 248	Normkleinstab	1630 (1610 » 1650)	[1]) —	—	1230 (1200 bis 1280)	1,32
Astralon	»	1231 (1201 » 1249)	—	—	1334 (1149 bis 1435)	0,92
Reilit	»	1008 (996 » 1020)	—	—	921 (910 bis 927)	1,09

[1]) Spannung für eine Durchbiegung von 6 mm (Proben nicht gebrochen).

Zahlentafel 8. Zeitstandfestigkeit durchsichtiger Kunststoffe (ungekerbt).
Probenform: nach Bild 1.

Werkstoff	Zugfestigkeit σ_{zB} kg/cm²	Standfestigkeit 1 min σ_{zd} 1 min kg/cm²	Standfestigkeit 30 Tage σ_{zd} 30 Tage kg/cm²	$\frac{\sigma_{zd}\ 30\ \text{Tage}}{\sigma_{zB}} \cdot 100$ %	$\frac{\sigma_{zd}\ 30\ \text{Tage}}{\sigma_{zd}\ 1\ \text{min}} \cdot 100$ %
Plexiglas . . . . M 33	720	620	404	56	65
» . . . . M 132	714	627	387	54	62
» . . . . M 222	760	700	445	59	64
Astralon	660[1])	640	365	55	57
Reilit	578[1])	555	427	74	77
Polystyrol	465	450	270	58	60

[1]) Streckgrenze.

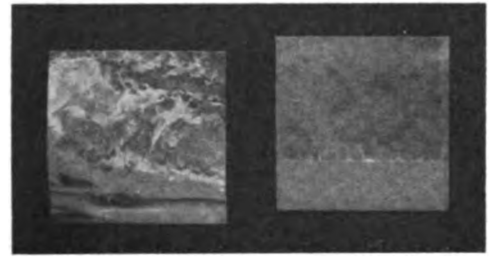


Bild 6. Bruchgefüge von Plexiglas M 33 bei gleichmäßig gesteigerter Biegebelastung (gekerbte und ungekerbte Proben). Vergr. 2,3fach.

III. Festigkeit bei statischer Dauerbelastung und Kriechverhalten.

Die Festigkeitsprüfungen bei gleichmäßig ansteigender Belastung können im allgemeinen nur als Vergleichsversuche dienen. Im praktischen Betrieb ist, beispielsweise bei der Verglasung der Überdruckkammern für Höhenflugzeuge, eine statische Dauerbelastung vorherrschend, für deren Überprüfung die bei den Kunststoffen bereits bei normaler Temperatur vorhandene Zeitabhängigkeit der Festigkeit

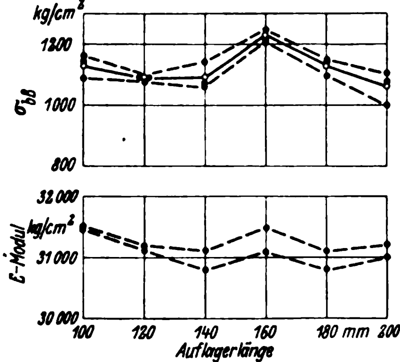


Bild 5. Einfluß der Auflagerlänge auf die Biegefestigkeit von Plexiglas M 132.
Versuchsdurchführung nach DIN 53452. Probenquerschnitt 15 mm × 10 mm.

und Dehnung berücksichtigt werden muß. Zur Beurteilung der Festigkeit der Kunstgläser bei Langzeitbeanspruchung und zur Bestimmung des Kriechverhaltens wurden Dauerstandversuche in der von der DVL für Kunststoffe entwickelten Versuchseinrichtung durchgeführt[4]). Die Versuche erstreckten sich auf die Ermittlung der Standzeiten bei verschiedenen Spannungen an gekerbten und ungekerbten Stäben bis zu einer Versuchsdauer von 30 Tagen und auf die Aufstellung von Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine Belastungsdauer bis zu 200 bzw. 1000 Stunden und anschließende Entlastung während der Dauer von 200 Stunden. Der isotrope Gefügeaufbau bei den meisten der untersuchten reinen Kunststoffe ließ besonders lehrreiche Aufschlüsse über das Kriechverhalten der hochpolymeren organischen Verbindungen erwarten. In den bisherigen Arbeiten wurden vorwiegend makroskopische Gemische (Preßstoffe mit Verstärkungen) behandelt, bei denen der Füllstoff das Verhalten des Kunststoffes maßgeblich beeinflußt.

Die Bruchspannungen der Kunststoffe fallen nahezu gradlinig mit zunehmender Belastungsdauer ab, wenn für die Zeit ein logarithmischer Maßstab gewählt wird (Bild 7). Für eine Versuchsdauer von 30 Tagen beträgt die Standfestigkeit 57 bis 77% der Werte bezogen auf eine Versuchsdauer von 1 min bzw. 54 bis 74% der Zugfestigkeit, Zahlentafel 8. Der Zeiteinfluß auf die Festigkeit ist am größten bei Astralon und am geringsten bei Reilit. Plexiglas M 33, M 132 und M 222 verhalten sich gleichartig.

Auch der statische Dauerbruch von Plexiglas zeigt die bei den Kurzzeitversuchen beobachteten Merkmale (Bruchausgang von einer Fehlstelle und Spiegelbildung). Doch unterscheidet sich das Bruchgefüge bei langen Standzeiten (größer als 750 Minuten, Spannung kleiner als 470 kg/cm²) von dem des Kurzzeitversuches oder kurzer Standzeiten durch größere Feinheit, Bild 8. Smekal vermutet, daß bei Glas die Dauerstandfestigkeit durch eine 100proz. Spiegelbildung gekennzeichnet ist. Unterhalb der angegebenen Spannungsgrenze traten über die ganze Stablänge feine Risse auf, die die Durchsicht des Glases herabsetzten. Die

[4]) H. Perkuhn, Kriechverhalten geschichteter Kunstharzpreßstoffe. Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), Lfg. 1, S. 32/37.

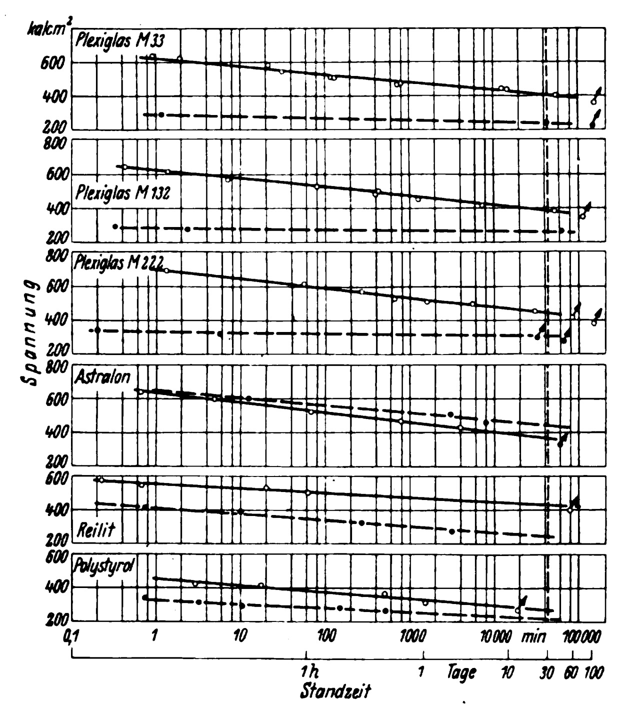


Bild 7. Standfestigkeit durchsichtiger Kunststoffe bei + 20°.
○———○ ungekerbt (Probenform nach Bild 1),
●– – –● gekerbt (90°-Spitzkerb, 1 mm).

Astralonproben trugen nach Überschreiten der Fließgrenze infolge der Verfestigung die statische Dauerlast ohne Bruch weiter, wenn die Beanspruchung in der Hauptrichtung erfolgte. Die Standzeiten beziehen sich daher auf die Fließgrenze. Reilit zeigte bei Spannungen unter 450 kg/cm² über die ganze Stablänge verteilt in bestimmten Abständen von den Kanten bis zur Probemitte quer zur Zugrichtung verlaufende Risse. Im übrigen blieb die Durchsicht einwandfrei.

Durch Kerbung wird bei Plexiglas M 33, M 132 und M 222 der Abfall der Festigkeit mit zunehmender Belastungsdauer geringer (Bild 7, Zahlentafel 9 und 10). Die bei Langzeitbelastung auftretenden Nachwirkungserscheinungen ermöglichen auch bei dem spröden Plexiglas einen Abbau der Spannungsspitzen im Kerbgrund, so daß sich die Bruchspannungen immer mehr den an Vollstäben möglichen Werten nähern. Bei Astralon liegt die Bruchspannung der gekerbten Stäbe bei Langzeitbelastung sogar über den Werten der ungekerbten Stäbe. Die Beobachtung hängt mit dem Abfall der Fließgrenze bei zunehmender Belastungsdauer

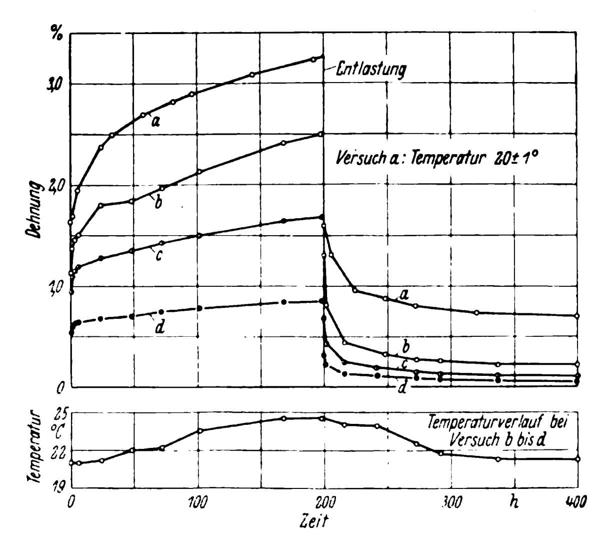


Bild 9. Zeit-Dehnungs-Kurven von Plexiglas M 33. Zugfestigkeit σ_{zB} = 720 kg/cm².
a 360 kg/cm², *b* 301 kg/cm², *c* 250 kg/cm², *d* 153 kg/cm².

Zahlentafel 9. Zeitstandfestigkeit durchsichtiger Kunststoffe (gekerbt).
Probenform: nach Bild 1. Kerbform: Spitzkerb 90° 1mm.

Werkstoff	Zugfestigkeit σ_{zBK} kg/cm²	Standfestigkeit 1 min σ_{zdK} 1 min kg/cm²	Standfestigkeit 30 Tage σ_{zdK} 30 Tage kg/cm²	$\frac{\sigma_{zdK}\ 30\ \text{Tage}}{\sigma_{zdK}\ 1\ \text{min}} \cdot 109$ %
Plexiglas M 33	250	290	233	80
» M 132	231	282	260	92
» M 222	252	334	309	93
Astralon . . .	656	647	440	68
Reilit	545	410	239	58
Polystyrol . .	372	324	219	68

Zahlentafel 10. Einfluß der Belastungsdauer auf die Kerbempflindlichkeit der Kunstgläser (Zugversuche).
Probenform: nach Bild 1. Kerbform: Spitzkerb 90° 1 mm.

Beanspruchungsart	σ_{zB} bzw. σ_{zd} : σ_{zBK} bzw. σ_{zdK} Kurzeitversuch	Standversuch 1 min	Standversuch 30 Tage
Plexiglas M . 33	2,84	2,14	1,73
» M . 132	2,93	2,22	1,49
» M . 222	3,25	2,10	1,44
Astralon	0,95	0,99	0,83
Reilit	1,06	1,35	1,79
Polystyrol . . .	—	1,39	1,23

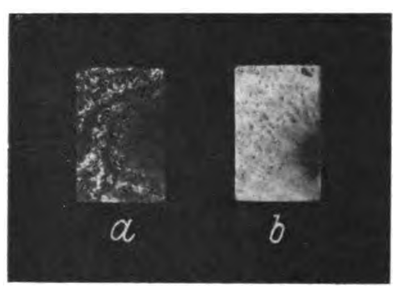


Bild 8. Bruchgefüge von Plexiglas (M 33) bei statischer Dauerbelastung. Vergr. 2fach.
a) Standzeit: 1 min,
b) Standzeit: 750 min.

und der Verfestigung des Kunststoffes durch die im Kerbgrund auftretenden plastischen Formänderungen zusammen. Bei Reilit ist die Kerbwirkung von der Belastungsdauer unabhängig.

Das Bruchgefüge des gekerbten Plexiglases ist sowohl bei Kurzzeit- als auch bei statischer Dauerbelastung sehr fein und durchsichtig.

Die Zeit-Dehnungs-Kurven von Plexiglas M 33 bei einer Belastung von 200 Stunden und anschließender Entlastung sind in Bild 9 für Spannungen bis zur halben Bruchlast aufgezeichnet. Infolge einiger sehr heißer Sommertage konnte

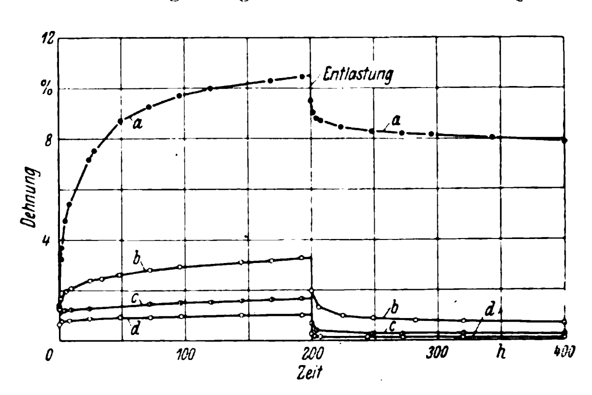


Bild 10. Zeit-Dehnungs-Kurven der Kunstgläser für eine Spannung etwa gleich der halben Bruchspannung.
Temperatur: 20 ± 1°.
a Reilit 310 kg/cm² *c* Astralon¹ 330 kg/cm²
b Plexiglas M 33 360 kg/cm² *d* Polystyrol 225 kg/cm²

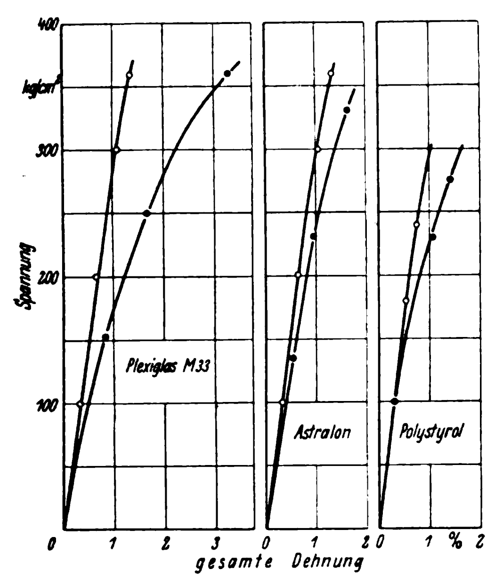


Bild 11. Spannungs-Dehnungs-Kurven von Kunstgläsern bei kurz- und langzeitiger Belastung.
Temperatur 20 ± 1°.
○ gleichmäßig ansteigende Last (155 kg/cm²/min),
● statische Dauerbelastung (200 h).

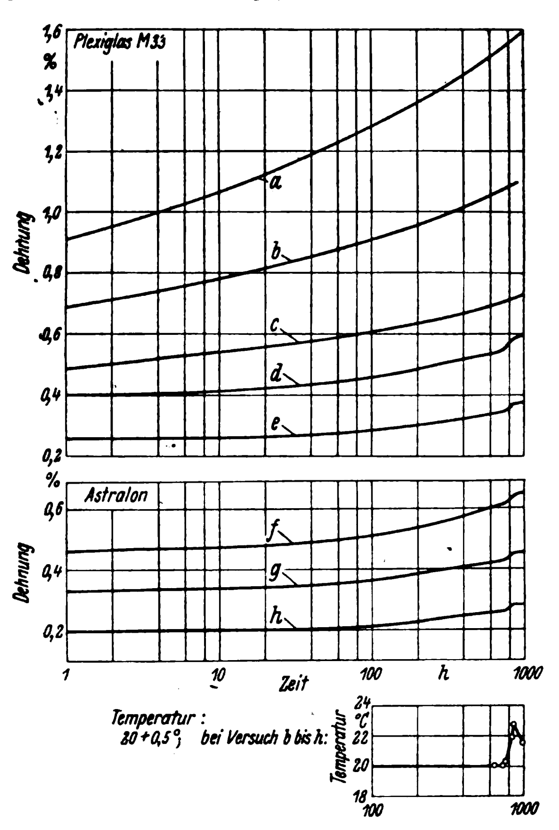


Bild 12. Zeit-Dehnungs-Kurven von durchsichtigen Kunststoffen.
a 245 kg/cm² = 34% σ_{zB} e 73 kg/cm² = 10% σ_{zB}
b 194 kg/cm² = 27% σ_{zB} f 134 kg/cm² = 20% σ_{zB}
c 144 kg/cm² = 20% σ_{zB} g 100 kg/cm² = 15% σ_{zB}
d 107 kg/cm² = 15% σ_{zB} h 67 kg/cm² = 10% σ_{zB}

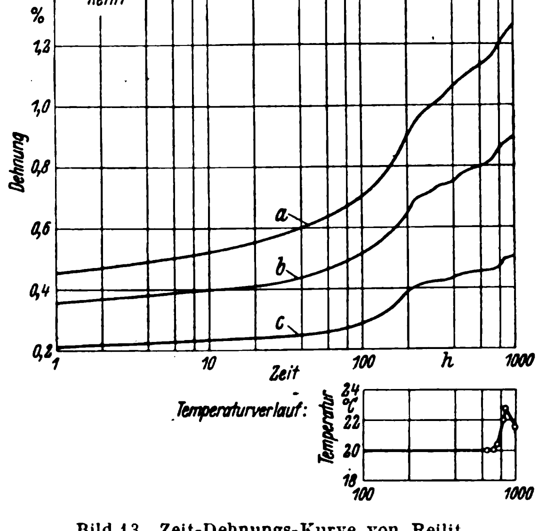


Bild 13. Zeit-Dehnungs-Kurve von Reilit.
a 117 kg/cm² = 20% σ_{zB} c 58 kg/cm² = 10% σ_{zB}
b 91 kg/cm² = 15% σ_{zB}

nicht vermieden werden, daß die Temperatur während dieser Versuche um etwa 3° anstieg. Der Temperaturverlauf ist daher in die Kurvenbilder mit eingezeichnet. Zu Beginn und am Ende der Versuche lag die Temperatur aber gleich hoch. Eine Gegenüberstellung der verschiedenen Gläser zeigt Bild 10. Die Nachwirkungserscheinungen sind am größten bei Reilit und am geringsten bei Polystyrol Geringe Kriechneigung läßt darauf schließen, daß die primären Bindungen überwiegen. Wird die Dehnung in der 200. Belastungsstunde im Vergleich zu den Werten des Kurzzeitversuches in Abhängigkeit von der Spannung aufgetragen, Bild 11, so ist zu erkennen, daß, wenn von den Messungen an Polystyrol abgesehen wird, bei den sämtlichen Kunststoffen Nachwirkungserscheinungen bereits bei niedrigster Belastung auftreten.

Das Ergebnis der Langzeitversuche zeigen Bild 12 und 13. Die Messungen ergaben bereits bei geringen Temperaturschwankungen merkbare Streuungen der Einzelwerte. Außerdem konnten Unstetigkeiten infolge der durch das Recken bedingten Gefügeumbildungen beobachtet werden. So folgt zum Beispiel bei Reilit, insbesondere bei niedrigen Spannungen, auf ein Gebiet mit hoher Dehngeschwindigkeit ein solches mit verhältnismäßig geringen Formänderungen. Eine Abschätzung der Dauerstandfestigkeit aus dem Verlauf der Zeit-Dehnungs-Kurven, wie sie Gellert vorschlägt und bei der Untersuchung der geschichteten Phenolharz-Preßstoffe angewandt wurde, ist daher bei den wärmebildsamen Kunststoffen nicht möglich. In Anlehnung an die früheren Versuche soll deshalb als Dauerstandfestigkeit die Spannung gelten, bei der die Dehngeschwindigkeit in der 100. Belastungsstunde $5 \cdot 10^{-4}$ %/h beträgt. In einer neuen Versuchsreihe, bei der die Temperatur gleichmäßig 21 + 1° betrug, wurde dann die Dauerstandfestigkeit auf diese Weise bei Plexiglas M 33 und Astralon zu 25% und bei Polystyrol zu 37% der Zugfestigkeit festgestellt, Zahlentafel 11. Die Spannung, bei der die bleibende Dehnung nach 200 stündiger Belastung und anschließender 200stündiger Entlastung

Zahlentafel 11. Dauerstandversuche mit durchsichtigen Kunststoffen (zulässige Spannungen).
1. Spannungen für eine bleibende Dehnung von 0,2% nach 200 stündiger Be- und Entlastung,
2. Spanungen für eine Dehngeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ %/h in der 100. Belastungsstunde.

Werkstoff	σ_{zB} kg/cm²	σ_{zst} 0,2% kg/cm²	$\frac{\sigma_{zst}\ 0{,}2\%}{\sigma_{zB}} \cdot 100$ %	σ_{zst} 5×10^{-4} kg/cm²	$\frac{\sigma_{zst}\ 5 \times 10^{-4}}{\sigma_{zB}} \cdot 100$ %
Plexiglas M 33	700	293	42	175	25
Astralon	668	330	49	167	25
Reilit	587	164	28	—	—
Polystyrol	465	275	59	170	37

Zahlentafel 12. Spezifische Schlagbiegearbeit und Kerbschlagzähigkeit von Kunstgläsern bei + 20°. Prüfvorrichtung: 40 cmkg-Pendelschlagwerk; freier Durchgang: 70 und 40 mm. Probenzahl: je 5 Stück.

Werkstoff	Zustand	Probenform		Spez. Schlagbiegearbeit cmkg/cm² Grenzen	Mittel	$\frac{a_n}{a_{nK}}$
Plexiglas M 33	Anlieferung	120 × 15 × 10 mm	ohne Kerb mit Kerb[1])	21,0 bis 21,6 1,4 bis 1,4	21,4 1,4	15,3
	getempert[2])		ohne Kerb mit Kerb	21,9 bis 23,3 1,4 bis 1,4	22,7 1,4	16,2
Plexiglas M 132	Anlieferung		ohne Kerb mit Kerb	18,8 bis 21,2 1,3 bis 1,4	20,2 1,3	15,5
Plexiglas M 222	Anlieferung		ohne Kerb mit Kerb	18,9 bis 20,4 1,4 bis 1,5	19,8 1,4	14,1
Plexiglas M 33	Anlieferung	70 × 5 × 5 mm	ohne Kerb mit Kerb	11,7 bis 13,6 1,1 bis 2,2	12,8 1,5	8,5
Plexiglas M 248	Anlieferung		ohne Kerb mit Kerb	28,2 bis 28,9 1,5 bis 2,2	28,6 1,8	15,9
Astralon	Anlieferung		ohne Kerb mit Kerb	68,6 bis 70,6 1,2 bis 1,6	69,6 1,5	46,4
Reilit	Anlieferung		ohne Kerb mit Kerb	49,6 bis 80,8 14,8 bis 16,8	63,3 15,8	4,0
Polystyrol	Anlieferung	70 × 5 × 4 mm	ohne Kerb mit Kerb	6,6 bis 6,8 1,8 bis 2,3	6,7 2,0	3,4

¹) Kerbform: 90°-Spitzkerb, Tiefe = $\frac{1}{3}$ der Probenhöhe.
²) 24 Stunden bei 120° gelagert.

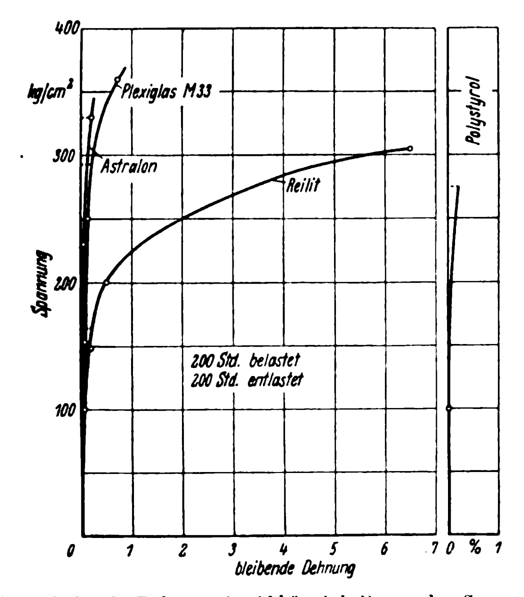


Bild 14. Bleibende Dehnung in Abhängigkeit von der Spannung bei statischer Dauerbelastung.
Temperatur: 20 ± 1°.
$\sigma_{0,2}$% Plexiglas M 33 293 kg/cm²
Astralon 330 »
Reilit 164 »

0,2% beträgt, Bild 14, liegt oberhalb der Dauerstandfestigkeit und beträgt bei Plexiglas M 33 und Astralon 42 bis 49%, bei Reilit 28% und bei Polystyrol 59% der Zugfestigkeit, Zahlentafel 11.

IV. Verhalten bei Schlagbeanspruchung.

Die Untersuchungen erstreckten sich auf Schlag- und Kerbschlagbiegeversuche und wurden bei einer Plattendicke von 10 mm entsprechend VDE 0302/VII 40 § 5 am Normstab, im übrigen an Proben von 70 mm × 5 mm × 5 bzw. 4 mm mit einem freien Durchgang von 70 bzw. 40 mm in einem 40 cmkg - Pendelschlagwerk durchgeführt. Als Kerbform wurde ein 90°-Spitzkerb mit einer Tiefe gleich ein Drittel der Probenhöhe gewählt.

Die Schlagbiegearbeit von Plexiglas (M 33, M 132 und M 222) beträgt etwa nur ein Viertel der Werte bei geschichteten Preßstoffen aus Phenolharz, Zahlentafel 12. Plexiglas M 248, Astralon und Reilit haben entsprechend ihrer größeren Dehnung höhere Schlagbiegearbeit. Das Polystyrol ist sehr spröde. Bei den Versuchen mit dem Kleinstab liegt die Schlagbiegearbeit niedriger als bei dem Normversuch.

Die geringe Kerbempfindlichkeit von Astralon und Plexiglas M 248 bei gleichmäßig ansteigender Last (vgl. Zahlentafel 4) tritt bei Schlagbeanspruchung nicht in Erscheinung. Der Vorgang erklärt sich aus der verschieden starken Bindung der Moleküle und der hierdurch bedingten ungleichmäßigen Spannungsaufnahme sowie aus der Zeitabhängigkeit der Verformungsvorgänge. Bei allmählicher Beanspruchung kann ein Spannungsausgleich stattfinden, indem die zuerst überlasteten Zonen allmählich fortfließen. Bei Schlagbeanspruchung reicht dagegen die Zeit für Gleitvorgänge nicht aus. Die Schlagenergie wird nur von einzelnen Stellen aufgenommen und die hierdurch bedingten hohen örtlichen Spannungen führen den Bruch herbei. Der Vorgang des Abbaus von Spannungen durch Nachwirkungserscheinungen wird als Relaxation bezeichnet. Reilit hat infolge seiner starken Fließneigung hohe Kerbzähigkeit. Durch eine Temperbehandlung trat eine Änderung der Schlag- und Kerbschlagzähigkeit bei Plexiglas nicht ein. Wegen der Zeitabhängigkeit des Arbeitsaufnahmevermögens lassen Schlagversuche keine sicheren Schlüsse über das Beschußverhalten der Kunstgläser zu.

Das Bruchgefüge von Plexiglas M 33 bei Schlagbeanspruchung unterscheidet sich von dem des statischen Biegeversuches nur durch eine gröbere Struktur der ungekerbten Proben, Bild 15.

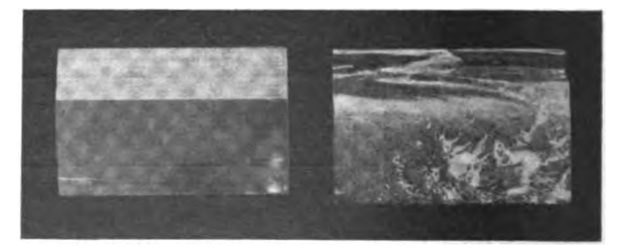


Bild 15. Bruchgefüge von Plexiglas M 33 bei Schlagbiegung (gekerbt und ungekerbt). Vergr. 2fach.

Zahlentafel 13. Einfluß von Warmrecken auf die statische Festigkeit von Plexiglas.
Werkstoff: M 33 und M 132. Abmessungen der Probenplatten: 100 mm × 170 mm × 3 mm.
Verformungstemperatur: 105° bis 145°. Verformungsspannung bei 145°: 7 kg/cm².
Prüfstab: profilierter Stab; Länge: 80 mm; Querschnitt: 8 mm × 3 mm.

Versuch	Zustand des Glases	Verformungs-temperatur °C	Reckgrad %	Zugfestigkeit σ_{zB} kg/cm²	Bruch-dehnung %	Bruch-einschnürung %	Zugfestigkeit gekerbt σ_{zBK} kg/cm²	$\frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{zBK}}$
		längs zur Reckrichtung						
1	Anlieferung	—	—	692	6	≈0	225	3,10
2	warmgereckt	110	64	790	36	57	810	0,98
		quer zur Reckrichtung						
3	Anlieferung	—	—	692 671 bis 703	6	≈0	225 213 bis 234	3,10
4	warmgereckt	145	52	639 621 bis 656	5	≈0	205 187 bis 219	3,10
		längs zur Reckrichtung						
5	warmgereckt	105	70	—	—	—	702	—
6	warmgereckt	145	65	—	—	—	680 551 bis 783	—
7	warmgereckt und 8 h bei 70° gelagert	105	75	—	—	—	746	—

Versuch 2, 5, 6 und 7: Normalstäbe gereckt und nachträglich mit Kerben versehen.
Versuch 4: Probestäbe aus gereckten Platten herausgearbeitet.

Zahlentafel 14. Einfluß von Warmrecken auf die spezifische Schlagbiegearbeit von Plexiglas.
Werkstoff: M 33 und M 132.
Prüfstab: 60 mm × 5 mm × 5 mm.
Kerbform: 90°-Spitzkerb, Tiefe = ⅓ der Probenhöhe.
Die Proben wurden aus warmgereckten Platten herausgearbeitet.
Prüfeinrichtung: 40 cmkg-Pendelschlagwerk, freier Durchgang: 40 mm.
Probenzahl: 5 Stück.

Zustand des Glases	Verformungs-temperatur °C	Reck-grad %	Spezifische Schlagbiegearbeit cmkg/cm² ungekerbt a_n	gekerbt a_{nk}	$\frac{a_n}{a_{nk}}$
Probenentnahme	längs zur Reckrichtung				
Anlieferung	—	—	12,8 (11,7 bis 13,6)	1,5 (1,1 bis 2,2)	8,5
warmgereckt	145	58	29,6 (27,5 bis 32,6)	12,5 (11,8 bis 12,9)	2,4
Probenentnahme	quer zur Reckrichtung				
Anlieferung	—	—	12,8 (11,7 bis 13,6)	1,5 (1,1 bis 2,2)	8,5
warmgereckt	145	58	1,7 (1,6 bis 1,7)	1,3 (1,2 bis 1,4)	1,3

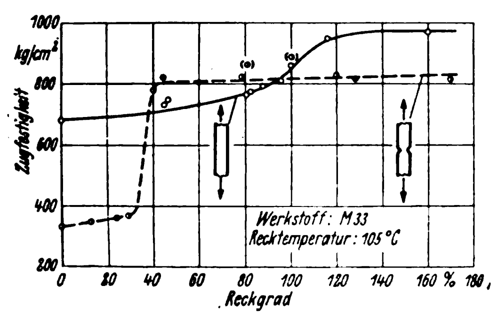


Bild 16. Einfluß von Warmrecken auf die Festigkeit und Kerbempfindlichkeit von Plexiglas. Kraftangriff in Reckrichtung.

V. Die Eigenschaften von warmgerecktem Plexiglas.

Bei neuzeitlichen Flugzeugen geht man immer mehr dazu über, die Verglasung zur Schaffung guter Sicht möglichst aus einem, der aerodynamischen Gestalt des Flugzeuges angepaßtem Formstück herzustellen. Die Ausbildung dieser Teile erfolgt durch Blasen und Biegen ebener Platten, die durch Erwärmung bis auf etwa 150° in den wärmebildsamen Zustand überführt worden sind. Die hierbei auftretenden Verformungsgrade sind, beispielsweise bei der Ausbildung gewölbter Kuppeln, beträchtlich. Um den Einfluß einer derartigen Warmverformung auf die Eigenschaften der Kunstgläser beurteilen zu können, wurden an warmgerecktem Plexiglas M 33 und M 132 Zugfestigkeit, Dehnung, Schlagbiegearbeit und Kerbempfindlichkeit im Vergleich zu den Eigenschaften im Anlieferungszustand ermittelt. Die Reckgrade betrugen bis zu 180%. Die Ver-

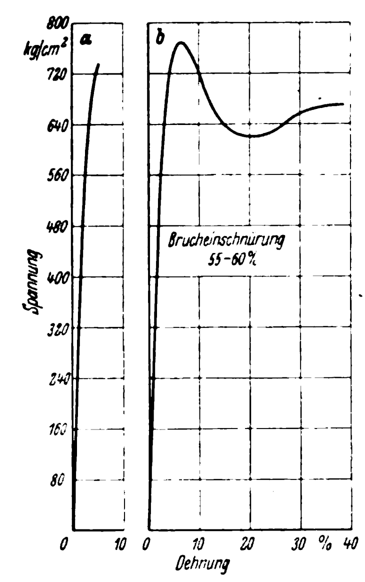


Bild 17. Zerreißschaubilder von normalem und warmgerecktem Plexiglas.
Kraftangriff in der Reckrichtung.
a unbehandelt,
b bei 110° um 64% gereckt.

formungstemperatur wurde in den Grenzen von 105° bis 145° verändert. Die Versuche wurden an einzelnen Stäben und an Platten durchgeführt, um auch die Richtungsabhängigkeit der Glaseigenschaften überprüfen zu können.

Die Untersuchungen ergaben, daß Plexiglas, das um mehr als 40% warmgereckt wird, seine Kerbempfindlichkeit, und zwar nicht nur bei statischer, sondern auch bei dynamischer Beanspruchung, in der Reckrichtung verliert, Zahlentafel 13 und 14 und Bild 16. Das Zerreißschaubild des warmgereckten Plexiglases, Bild 17, läßt erkennen, daß die Behandlung den an sich spröden Kunststoff in einen zähen Werkstoff mit ausgeprägter Fließgrenze und hoher Dehnung verwandelt. Bei der Warmverformung des Plexiglases werden die ursprünglich unregelmäßig gelagerten Molekülketten durch die Erwärmung entwirrt und gleiten infolge der Verringerung der Bindekräfte durch den Temperaturanstieg bereits bei geringer mechanischer Beanspruchung gegeneinander ab. Gleichzeitig findet hierbei teilweise eine Ausrichtung der Molekülketten in die Reckrichtung statt. Durch die Abkühlung des Kunststoffes unter Spannung werden dann die Moleküle in einer Lage festgelegt, die Gleitungen und damit einen Abbau von Spannungsspitzen z. B. an Kerbstellen ermöglicht. Die Ausrichtung der Moleküle in die Reckrichtung ist an einer Verbesserung der Festigkeit in dieser Richtung erkenntlich. Besonders auffallend ist der Anstieg der Schlagarbeit und Kerbzähigkeit um mehr als den doppelten bzw. 8fachen Betrag. Quer zur Reckrichtung bewirkt die Umlagerung der Molekülketten aber eine starke Zunahme der Sprödigkeit und die Kerbempfindlichkeit ist in dieser Richtung gleich hoch wie an dem unbehandelten Plexiglas. Immerhin sind noch so starke Bindungen vorhanden, daß bei langsam gesteigerter Last (Zugversuch), die eine Überlastung der in der Zahl verringerten primären Bindungen vermeidet, die Bruchspannungen des normalen Plexiglases erreicht werden. Die Verformungstemperatur und der Reckgrad waren in den angegebenen Grenzen ohne Einfluß auf die Versuchsergebnisse. Ebenso traten durch eine nachträgliche Wärmelagerung bei + 70° keine Veränderungen auf.

VI. Zusammenfassung.

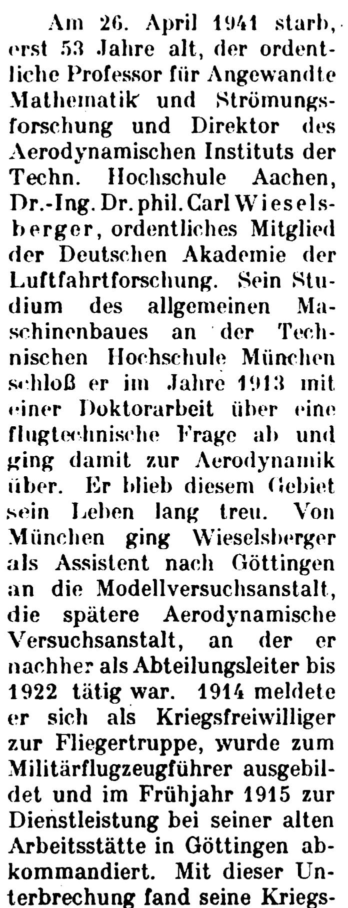
Die für die Verglasung von Flugzeugen geeigneten durchsichtigen Kunststoffe zeigen hinsichtlich ihres plastischen Verhaltens Unterschiede. Plexiglas M 33, M 132, M 222 und Polystyrol sind spröde, Plexiglas M 248, Astralon und Reilit zähe. Die Bruchform der spröden Kunststoffe läßt Eigenheiten erkennen, wie sie auch bei der Untersuchung anorganischer Gläser beobachtet wurden. Eine reine elastische Formänderung tritt meist überhaupt nicht oder nur bei niedriger Belastung in Erscheinung. Bedingt durch die Kriecherscheinungen beträgt die Festigkeit der Kunststoffe bei statischer Dauerbelastung (30 Tage) nur 54 bis 74% der Zugfestigkeit. Die Kriechneigung ist am größten bei Reilit und am geringsten bei Polystyrol. Die hohe Kerbempfindlichkeit der spröden Kunststoffe bei gleichmäßig ansteigender Belastung (Zugversuch) verringert sich mit zunehmender Belastungsdauer (Standversuche), indem die bei Langzeitbelastung auftretenden Nachwirkungserscheinungen einen Abbau der Spannungsspitzen ermöglichen. Umgekehrt wird infolge der Zeitabhängigkeit der Verformungsvorgänge die Kerbempfindlichkeit der zähen Kunststoffe (Plexiglas M 248 und Astralon) mit abnehmender Belastungsdauer (Schlagversuch) größer. Ein Einfluß des Temperns auf die Eigenschaften des Plexiglases konnte nicht beobachtet werden. Warmverformung führt bei Plexiglas zu einer Umbildung des molekularen Gefügeaufbaus, die die Eigenschaften des Kunststoffes verändert. Die gewonnenen Erkenntnisse lassen Schlüsse über den Feinbau der nicht härtenden hochmolekularen Verbindungen zu.

Luftfahrt-Forschung

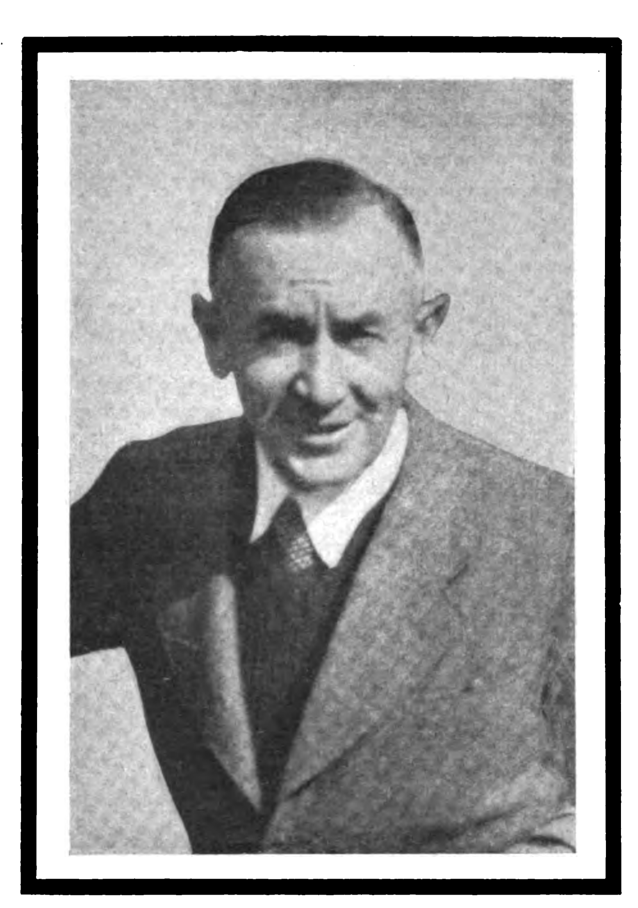
Band 19 6. Mai 1942 Lfg. 4

Diese Lieferung ist dem Gedenken von Carl Wieselsberger gewidmet. Die Arbeiten wurden von Freunden, Mitarbeitern und Schülern zur Verfügung gestellt.

Carl Wieselsberger



Am 26. April 1941 starb, erst 53 Jahre alt, der ordentliche Professor für Angewandte Mathematik und Strömungsforschung und Direktor des Aerodynamischen Instituts der Techn. Hochschule Aachen, Dr.-Ing. Dr. phil. Carl Wieselsberger, ordentliches Mitglied der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung. Sein Studium des allgemeinen Maschinenbaues an der Technischen Hochschule München schloß er im Jahre 1913 mit einer Doktorarbeit über eine flugtechnische Frage ab und ging damit zur Aerodynamik über. Er blieb diesem Gebiet sein Leben lang treu. Von München ging Wieselsberger als Assistent nach Göttingen an die Modellversuchsanstalt, die spätere Aerodynamische Versuchsanstalt, an der er nachher als Abteilungsleiter bis 1922 tätig war. 1914 meldete er sich als Kriegsfreiwilliger zur Fliegertruppe, wurde zum Militärflugzeugführer ausgebildet und im Frühjahr 1915 zur Dienstleistung bei seiner alten Arbeitsstätte in Göttingen abkommandiert. Mit dieser Unterbrechung fand seine Kriegsfliegerei ihren Abschluß. — Er muß darüber sehr enttäuscht gewesen sein. Zwanzig Jahre später machte er seinem Herzen einmal Luft, als er sich erneut dem praktischen Fliegen zuwandte. — Von 1922 bis 1930 war Wieselsberger auf Einladung der Japanischen Regierung in Tokio und verschiedenen anderen Orten tätig, um dort den Bau mehrerer Windkanäle zu leiten. Gleichzeitig führte er als a. o. Mitglied des Luftfahrtforschungsinstituts der Universität Tokio verschiedene wissenschaftliche Arbeiten durch. Bald nach seiner Rückkehr in die Heimat erhielt er einen Ruf an die Technische Hochschule Aachen als Ordinarius für das Luftfahrtgebiet und übernahm die Leitung des dortigen Aerodynamischen Instituts, die er bis zu seinem Tode innehatte.



Fast drei Jahrzehnte war Wieselsberger forschend auf aerodynamischem Gebiet tätig. In seiner Münchener Dissertation zeigen sich bereits seine meßtechnischen Neigungen und die Fähigkeit, auch mit bescheidenen Mitteln auszukommen. Er baute einen kleinen Windkanal und führte in ihm Untersuchungen über die statische Längsstabilität von Drachenflugzeugen aus. Seine anschließende Aufnahme in den Göttinger Kreis um Ludwig Prandtl muß als besonders glücklicher Start gewertet werden. Damals stand das Widerstandsproblem im Brennpunkt des Interesses; Eiffel hatte gefunden, daß der Widerstandsbeiwert von Kugeln bei einer bestimmten Geschwindigkeit plötzlich stark abfällt. Auf Anregung von Prandtl führte Wieselsberger Messungen und Strömungsbeobachtungen an angeblasenen Kugeln durch, die es ermöglichten, die Vorgänge in diesem »kritischen Bereich« aufzuklären. Mit dem Luftwiderstand befaßte er sich auch weiterhin nach verschiedenen Richtungen. Versuchstechnisch waren hier erhebliche Schwierigkeiten zu überwinden, wozu Wieselsberger besonders berufen schien. Seiner meßtechnischen Begabung und stillen Begeisterung für die Arbeit verdanken wir eine Reihe wertvoller Beiträge zu diesem für die Luftfahrt so wichtigen Gebiet, in denen er die Einflüsse von Form, Oberflächengestaltung und Modellaufhängung auf den Widerstand untersuchte. In der Fragestellung seiner Arbeiten spiegelt sich seine stetige, auf natürliches Wachsen eingestellte Art. Vom Widerstand aus wandte er sich experimentell und theoretisch den Luftkräften im allgemeinen zu, den Verhältnissen am Tragflügel und der Querruderwirkung. So behandelte er theoretisch den Flügel bei gekrümmter Flugbahn, überprüfte und bestätigte die Ergebnisse durch Rundlaufversuche, die sich durch das elegante Meßverfahren auszeichneten. Neben klarer Erkenntnis der jeweiligen Lage bewies er eine kluge Voraussicht für die kommenden Erfordernisse. In einer Arbeit über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers umriß er grundsätzlich ein wichtiges

ballistisches Problem. Zur Frage des mehrmotorigen Flugzeuges lieferte er 1929 einen Beitrag, in dem er die Änderung der Luftkräfte des Flügels durch eingebaute Motorgondeln bestimmte, um anschließend allgemeiner auf gegenseitige Beeinflussung einzugehen.

Die Wieselsbergerschen Schriften lassen ein sehr erfolgreiches Arbeitsgebiet kaum erkennen: Windkanäle und ihre meßtechnische Ausrüstung. Obgleich er sich stark mit dem Bau und der Entwicklung von Windkanälen beschäftigt hat, waren sie für ihn nie Selbstzweck, sondern nur Mittel für die Forschung. Die große Entwicklungsspanne seiner Arbeiten wird auch auf diesem Gebiet offenbar. Er begann seine Forschertätigkeit unterkritisch an einem kleinen Kanal mit kleiner Geschwindigkeit — baute, plante und verbesserte Windkanäle mittlerer Größe und Kennzahl, um am Ende wieder bei kleinen Kanälen angekommen zu sein. Diesmal aber mit Schallgeschwindigkeit und mehr. Bildlich gesprochen war er an der Entwicklung während einer vollen Schraubenwindung gestaltend beteiligt. Anfang und Ende sind gekennzeichnet durch zwei wichtige Erkenntnisse, die wir ihm maßgeblich mitverdanken, den kritischen Bereich für den gewöhnlichen Windkanal und die Kondensationsstöße für den Überschallkanal.

Zur Forschung kam im letzten Jahrzehnt seines Lebens noch die akademische Lehre. Wie sehr er hierzu die innere Berufung besaß, zeigte sich schon bald. Seine anschauliche und schlichte Denkweise machte es ihm leicht, in einer für den Hörer verständlichen Sprache zu reden. Er selbst aber nahm das Ganze keineswegs leicht. Im Vorlesungsbetrieb überließ Wieselsberger nichts dem Zufall oder der Intuition des Augenblicks. Jede Einzelheit war durchgearbeitet und der Aufnahmefähigkeit des Hörers angepaßt. Wesentliche Stellen wurden durch Beispiele beleuchtet, die er in gedrängter Form in der Vorlesung vollständig durchführte. Gern bediente er sich der belebenden Unterstützung durch einleuchtende Experimente. An Vorführgeräte stellte er hohe Anforderungen und scheute keine Mühe, um hierfür eine Form zu finden, die bei einfachem, durchsichtigem Aufbau nur die gewünschten Effekte zeigte. Der Erfolg dieser Bemühungen blieb nicht aus. Die Studierenden schätzten seine Vorlesungen, und ein beachtlicher Anteil seiner Schüler zeigte in den Übungsarbeiten, daß die Vorlesung ihnen die Voraussetzung für selbständige Weiterarbeit vermittelt hatte. Mit welchem Ernst und Einsatz Wieselsberger an Vorlesungen heranging, wurde besonders deutlich, als er für drei Semester, von 1933 bis 1934, nach kurzer Anlaufzeit vertretungsweise die Pflichtvorlesung »Mechanik« übernahm. Sein erfolgreiches Wirken wurde damals in schöner Weise von einer Anzahl Hörer anerkannt, die bis dahin in der Mechanik eine Art Geheimlehre gesehen hatten. Sie stellten am Schluß erleichtert fest, daß man das eigentlich alles verstehen könne, und bewiesen es auch in der Prüfung.

Dem Menschen Wieselsberger in diesem Rahmen gerecht zu werden, ist schwierig. Seine stille, feine Art läßt sich in Schwarz-weiß nicht wiedergeben. Es fehlte ihr nicht an Plastik, sondern an Kanten. Wesentliche Züge waren Liebenswürdigkeit, Güte und Selbstzucht, so harmonisch verteilt und gewachsen, daß auch die engere Umgebung länger oder lange gebrauchte, um die großen inneren Werte hinter dem gezügelten »Gesicht« zu erkennen. Dabei zeigte sich Wieselsberger weder unzugänglich noch ungesellig. In sich geschlossen und ausgeglichen war ihm eine Scheu vor persönlichen Bezirken, vor allem auch des anderen, eigen, die ein Einmischen von seiner Seite, ein Überschreiten dieser unsichtbaren Grenze nicht leicht aufkommen ließ. So lagen ihm als Forscher besonders Aufgaben, die er ohne größeres Hilfspersonal durchführen konnte, am liebsten selbst im Arbeitskittel, ohne sich dann noch von irgendwelchen äußeren Dingen stören zu lassen. Aus dieser Einstellung erklärt sich auch eine gewisse Hemmung bei ihm vor einem stärkeren Organisieren der wissenschaftlichen Arbeitsleistung, obgleich er selbst vorbildlich geordnet und diszipliniert arbeitete. Verwandte Züge wies seine Lehrtätigkeit auf, bei der er gute Grundlagen unter kluger Beschränkung auf das Wesentliche so durchgearbeitet vortrug, daß auch der schwächere Hörer folgen konnte und die Weiterentwicklung natürlichem Reifen überlassen wurde. Wer aber weiter wollte von seinen Hörern, fand bei ihm rege Anteilnahme und eifrige Förderung. Natürliche, eigene Entwicklung der Forschungsarbeit strebte er auch bei seinen Mitarbeitern an, denen er der ältere Freund war, der zufällig über die reicheren Mittel verfügte. Alles bei ihm geschah, äußerlich betrachtet, leicht und ungezwungen, niemals nahm er eine lehrhafte Haltung an. Dabei verstand er es, mit beiläufigen Hinweisen gerade so weit zu kommen, wie andere mit eindeutigen Anordnungen. Wenn er aber nach getaner Arbeit zum spätnachmittäglichen Tee oder Kaffee mit seinen mannigfaltigen, nicht gerade engen Diskussionsthemen erschien, so war er nur noch einer der Runde, und dann zeigte er in launiger Art, daß er eigenwillige Ansichten beharrlich vertreten konnte. Wer ihn vor noch nicht langer Zeit beim Sport sah, beim Klettern, Schilaufen oder Fliegen, konnte nicht auf den Gedanken kommen, daß er schon so bald nicht mehr unter uns sein sollte. Die Beherrschtheit, die ihn in gesunden Tagen auszeichnete, zeigte er in erhöhtem Maße bei seinem schweren, schmerzensreichen Leiden, dem er im April letzten Jahres erlag.

Die deutsche Luftfahrt hat einen ihrer Besten in Forschung und Lehre verloren, der während drei Jahrzehnten wertvolle Beiträge zu ihrer Entwicklung lieferte und schon in der Fragestellung seiner Arbeiten bewies, daß er wußte, wo und wie man ihr am besten dienen konnte. Wenn er über die engere Luftfahrttechnik hinaus nicht in dem Maße bekannt geworden ist, wie es seiner Bedeutung entsprochen hätte, so liegt auch hier die Wurzel in seinem nicht auf äußere Wirkung eingestellten Wesen. Breitere Berichterstattung ließ ihn öfters scherzhaft den Wunsch äußern, die von Christian Morgenstern erdachte Korfsche Brille zu besitzen, — »Brillen, deren Energien uns den Text zusammenziehn«. — Und der Chronist ist überzeugt, daß er den gleichen Wunsch diesen Zeilen gegenüber haben würde, zumal sie ihm selbst gewidmet sind.

Durch sein Werk hat sich Wieselsberger ein bleibendes Denkmal gesetzt. Alle, die ihn näher kennenlernen durften, sei es als Schüler oder Mitarbeiter, werden ihn nicht vergessen. Fachlich und menschlich konnten sie so viel von ihm lernen. Seine Wirkung auf den anderen ging auf die Dauer dem eigenen Wesen gemäß auch nach innen. Uns allen hat er gezeigt, daß gute Eigenart, auch wenn sie, oberflächlich betrachtet, nicht voll zeitgemäß zu sein scheint, nur zum Besten des Ganzen ist. Im Goetheschen Sinne erreichte er das höchste Glück der Erdenkinder; denn Wieselsberger war eine Persönlichkeit als Wissenschaftler und als Mensch.

B. Dirksen.

Veröffentlichungen von Carl Wieselsberger.

1. Über die statische Längsstabilität der Drachen-Flugzeuge. Forschungsarbeiten des Vereins Deutscher Ingenieure (1912), Heft 137.
2. Der Flug bei geringstem Brennstoffverbrauch. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1913), S. 16.
3. Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe eines Zeppelin-Luftschiffes. Widerstandsmessungen an dem Modell. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1913), S. 267.
4. Untersuchung zweier Tragflächenmodelle. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1913), S. 269.
5. Der Luftwiderstand von Kugeln. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1914), S. 140.
6. Beitrag zur Erklärung des Winkelfluges einiger Zugvögel. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1914), S. 225.
7. Der Widerstand eines Freiballonmodelles. Z. Flugtechn. Bd. 3 (1914), S. 161.
8. Ähnlichkeitsuntersuchungen an Ballonmodellen und Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit. Z. Flugtechn. Bd. 4 (1915), S. 125.



9. Untersuchungen mit kreisrunden Platten und ebenen Tragflächen. Widerstandsmessungen im freien Luftstrahl und im Kanal. Z. Flugtechn. Bd. 4 (1915), S. 127.
10. Der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Widerstand, untersucht an Streben. Z. Flugtechn. Bd. 11 (1920), S. 54.
11. Ein Manometer zur Aufzeichnung von Fluggeschwindigkeiten. Z. Flugtechn. Bd. 12 (1921), S. 4.
12. Untersuchungen über Handley Page Flügel. Z. Flugtechn. Bd. 12 (1921), S. 161.
13. Über den Flügelwiderstand in der Nähe des Bodens. Z. Flugtechn. Bd. 12 (1921), S. 145.
14. Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikal. Z. Bd. 22 (1921), S. 321.
15. Weitere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikal. Z. Bd. 23 (1922), S. 219.
16. Einfluß der Modellaufhängung auf die Messungsergebnisse. Z. Flugtechn. Bd. 13 (1922), S. 188.
17. Zur Theorie des Tragflügels bei gekrümmter Flugbahn. Z. angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922), S. 325.
18. Untersuchung eines Rumpfkühlers. Techn. Berichte III, S. 107.
19. Luftwiderstandsmessungen an wirklichen Flugzeugteilen. Techn. Berichte III, S. 275.
20. Dreideckeruntersuchungen. Techn. Berichte III, S. 302.
21. Aerodynamik. Kapitel V in »Modebecks Taschenbuch für Flugtechniker und Luftschiffer«. Gemeinsam mit A. Betz (1923).
22. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. und II. Lieferung. Gemeinsam mit L. Prandtl und
23. A. Betz.
24. Die wichtigsten Ergebnisse der Tragflügeltheorie und ihre Prüfung durch den Versuch. Vorträge aus den Gebieten der Hydro- und Aerodynamik. Innsbruck 1922.
25. Über einen hydrodynamischen Versuch von Joukowsky. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 4 (1924), S. 184.
26. Linien gleicher Strömungsgeschwindigkeit. Rep. aeron. Res. Inst., Tokio (1926), Nr. 17.
27. Über den Luftwiderstand bei gleichzeitiger Rotation des Versuchskörpers. Physikal. Z. Bd. 28 (1927), S. 84.
28. Theoretische Untersuchungen über die Querruderwirkung beim Tragflügel. Rep. aeron. Res. Inst., Tokio (1927), Nr. 30.
29. Bestimmung der durch die Querruder eines Tragflügels erzeugten Luftkräfte und Momente. Gemeinsam mit T. Asano.
30. Über den Einfluß von eingebauten Motorgondeln auf die Luftkräfte eines Tragflügels. Paper No. 203 read before the Internat. Engineering Congreß in Tokio 1929.
31. Die Wirkung einer Luftschraube auf eine Wand. Aachener Abhandlungen, Heft 10, 1931.
32. Zur theoretischen Behandlung der gegenseitigen Beeinflussung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932), S. 533.
33. Zur elektrischen Festigkeit am Rande eines Plattenkondensators. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932), S. 59.
34. Beitrag zur gegenseitigen Beeinflussung von Flügel und Schraube. Aachener Abhandlungen, Heft 13, 1933.
35. Die aerodynamische Waage des Aachener Windkanals. Aachener Abhandlungen, Heft 14, 1934.
36. Die Strömung in räumlich gekrümmten Rohren. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 109.
37. Elektr. Anzeige von Kräften durch Änderung einer Induktivität. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung Bd. I, S. 592.
38. On the distribution of lift acron the span near and beyond the stall. J. aer. Sci. Bd. 4 (1937), S. 363.
39. Die Überschallanlage des Aerodyn. Institutes der Techn. Hochschule Aachen. Luftwissen Bd. 4 (1937), S. 301.

Über den Einfluß der Windkanalbegrenzung auf den Widerstand insbesondere im Bereiche der kompressiblen Strömung.

Von C. Wieselsberger †.

Bei der Untersuchung eines Körpers im Luftstrom ergeben sich infolge der Verdrängung des Körpers Geschwindigkeitsänderungen am Orte des Modells. Im geschlossenen Windkanal ergibt sich eine Geschwindigkeitserhöhung, während im freien Strahl eine Geschwindigkeitsverminderung in Erscheinung tritt. Diese Geschwindigkeitsänderungen nehmen besonders bei Annäherung der Strömungsgeschwindigkeit an die Schallgeschwindigkeit recht beträchtliche Werte an und können die Meßergebnisse unter Umständen erheblich fälschen. Für den Fall, daß der Versuchskörper ein Rotationskörper ist, kann theoretisch durch Verwendung eines halboffenen Kanales von rechteckigem Querschnitt (d. i. ein Kanal, der aus zwei festen Wänden und zwei freien Oberflächen besteht), vom bestimmten Seitenverhältnis die Geschwindigkeitsänderung am Orte des Modelles annähernd zum Verschwinden gebracht werden. Außerdem werden die Ergebnisse ähnlicher Untersuchungen für einen symmetrischen Versuchskörper in ebener Strömung bei Abwesenheit von Auftrieb mitgeteilt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bei Windkanalversuchen mit hohen Geschwindigkeiten, bei denen die Kompressibilität der Luft bereits eine Rolle spielt, hat sich gezeigt, daß hier der Einfluß der Windkanalgrenzen sich in weit höherem Maße bemerkbar macht als bei Geschwindigkeiten, die klein sind gegenüber der Schallgeschwindigkeit, und es ist sehr schwierig, aus Windkanalmessungen die Luftkräfte zu gewinnen, die einem unbegrenzten Luftstrom entsprechen. Die hier auftretenden besonderen Verhältnisse lassen sich am einfachsten klarmachen in dem Falle, daß durch einen geschlossenen Kanal ein Profil hindurchgesteckt ist, wobei der Einfachheit halber ein symmetrisches Profil bei Anstellwinkel Null angenommen werden soll. Infolge der Profildicke tritt eine Querschnittsverminderung des Kanales und somit eine Zunahme der Geschwindigkeit ein. Bedeutet V die Geschwindigkeit und f den Kanalquerschnitt vor dem Profil und V_1 und f_1 die entsprechenden Größen im engsten Querschnitt, Bild 1, so gilt für kleine Machsche Zahlen unter der Annahme, daß sich die Geschwindigkeitserhöhung gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt, die Kontinuitätsgleichung

$$f V = f_1 V_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

durch die die Geschwindigkeit V_1 im engsten Querschnitt bestimmt ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Dichte der Luft vor dem Profil die gleiche ist wie diejenige im engsten Querschnitt. Diese Voraussetzung ist für hohe Geschwindigkeiten nicht mehr zulässig und an Stelle von Gl. (1) ist zu setzen

$$f V \varrho = f_1 V_1 \varrho_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo ϱ und ϱ_1 die Luftdichten vor dem Profil bzw. im engsten Kanalquerschnitt bedeuten. Da ϱ_1 mit wachsender Ge-

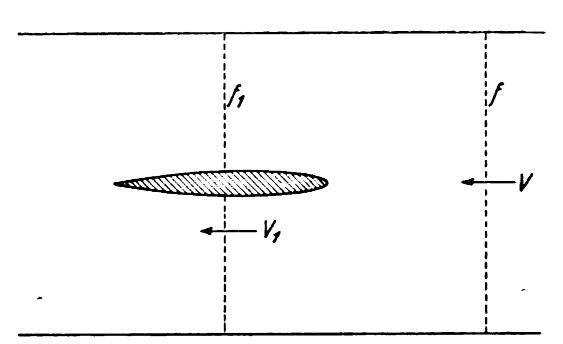


Bild 1. Zur Geschwindigkeitserhöhung infolge Verdrängung des Versuchskörpers.

schwindigkeit mehr und mehr abnimmt, so muß V_1 außer der durch die Querschnittsabnahme bedingten Geschwindigkeitszunahme noch weiter anwachsen, damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Im Grenzfalle wird im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht, die dann hinter dem Profil in Überschallgeschwindigkeit übergeht. Der Kanal mit dem durchgesteckten Profil verhält sich dann wie eine Laval-Düse. Quantitativ sind diese Verhältnisse von A. Ferri[1]) untersucht worden und in Bild 2 wiedergegeben. Hier ist die Machsche Zahl M_2 im engsten Querschnitt als Funktion der Machschen Zahl M_1 in der ungestörten Strömung für verschiedene Verhältnisse von Profildicke zu Kanalhöhe dargestellt. Man sieht, daß bereits bei einer Profildicke von 0,0082 der Kanalhöhe und bei einer Zuströmgeschwindigkeit entsprechend $M_1 = 0{,}89$ im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Die Geschwindigkeitszunahme beträgt somit 11%. während sie bei nichtkompressibler Strömung entsprechend der Querschnittsverminderung nur 0,82% betragen würde. Die Ergebnisse von Bild 2 wurden unter Zugrundelegung adiabatischer Zustandsänderung gewonnen, der Einfluß der Grenzschichten, die die Erscheinungen noch weiter in ungünstigem Sinne beeinflussen, ist dabei nicht berücksichtigt.

II. Rotationskörper im geschlossenen Kanal und im freien Strahl.

Diese Untersuchungen zeigen, daß man sich bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit selbst bei verhältnismäßig kleinen Profildicken sehr weit von den Strömungsverhältnissen der unendlich ausgedehnten Strömung entfernt. Hand in Hand damit geht auch eine Fälschung der Luftkräfte, und man ist nun gezwungen, die Frage zu untersuchen, ob es möglich ist, aus den gemessenen, infolge der begrenzten Kanalabmessungen mit einem Fehler behafteten Luftkräfte die wahren Luftkräfte abzuleiten. Diese Frage kann nicht allgemein beantwortet werden, da die Form des untersuchten Körpers eine Rolle spielt. Es scheint, daß der

[1]) Untersuchungen und Versuche im Überschallwindkanal zu Guidonia. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung. Ergänzungsbd. S. 112.



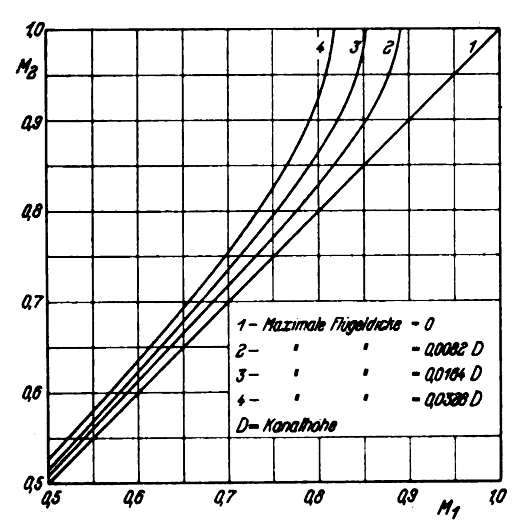


Bild 2. Geschwindigkeitserhöhung durch ein symmetrisches Profil von verschiedener Dicke (nach Ferri).

Fall eines Rotationskörpers in einem Luftstrom von rechteckigem Querschnitt in befriedigender Weise einer theoretischen Behandlung zugänglich ist. Wir wollen daher die auftretenden Erscheinungen näher untersuchen, und zwar einmal für den Fall, daß sich der Rotationskörper in einem geschlossenen Kanal von quadratischem Querschnitt und dann in einem freien Strahl von gleichem Querschnitt befindet. Dabei werden die Verhältnisse zunächst unter Zugrundelegung eines inkompressiblen Mediums näher verfolgt. Der Einfluß der Kompressibilität auf die unter dieser Annahme gewonnenen Ergebnisse wird nachher noch näher auseinandergesetzt.

Für die Zwecke unserer Untersuchung ist es erforderlich, einen Rotationskörper zu verwenden, dessen Geschwindigkeitsfeld bekannt ist, und wir nehmen der Einfachheit halber ein Rankinesches Oval, das durch Überlagerung einer Quellsenkenströmung mit einer Parallelströmung entsteht. Wir setzen nun diesen Rotationskörper in einen geschlossenen Kanal von quadratischem Querschnitt und untersuchen den Einfluß der Wände auf den Versuchskörper. Es ist bekannt, daß der Einfluß einer einfachen Wand durch das Spiegelbild des Körpers an dieser Wand dargestellt werden kann, es ergeben sich dann an der Wand nur tangential gerichtete Störungsgeschwindigkeiten. Um diese Bedingung tangentialer Störungsgeschwindigkeiten an allen vier Wänden zu erfüllen, muß die Spiegelung in der in Bild 3 angedeuteten Weise unendlich oft wiederholt werden. Der Einfluß der Wände[2]) wird dann dargestellt durch das Geschwindigkeitsfeld der unendlich vielen, gespiegelten Quellsenkenströmungen. Man sieht, daß diese Quellsenkenströmungen am Orte des Versuchskörpers eine zusätzliche Geschwindigkeit in Richtung der Grundströmung V erzeugen. Wir kommen daher zu dem schon auf Grund der Kontinuität erhaltenen Ergebnis, daß durch die Anwesenheit der Wände die Geschwindigkeit am Orte des Versuchskörpers erhöht wird.

Wir wenden nun diese gleiche Betrachtungsweise auf den gleichen Rotationskörper in einem Freistrahl von quadratischem Querschnitt an. Die Bedingung konstanten Druckes (und konstanter Geschwindigkeit) an der Oberfläche des Strahles wird in diesem Falle dadurch erreicht, daß eine Quelle als Senke und eine Senke als Quelle an der Strahloberfläche gespiegelt wird. Es ergibt sich dann die in Bild 4 dargestellte Anordnung der Spiegelbilder, wobei gleichsinnige Spiegelung durch das +-Zeichen und ungleichsinnige Spiegelung durch das —Zeichen angedeutet ist.

Man erkennt hier, daß die gespiegelten Quellsenkenströmungen am Orte des Versuchskörpers Störungsgeschwin-

[2]) In den Bildern sind feste Wände durch ausgezogene, freie Oberflächen durch gestrichelte Linien dargestellt.

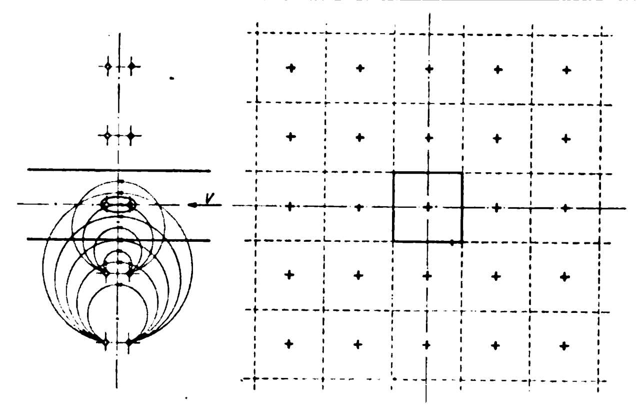


Bild 3. Spiegelungen am quadratischen Kanal mit festen Wänden.

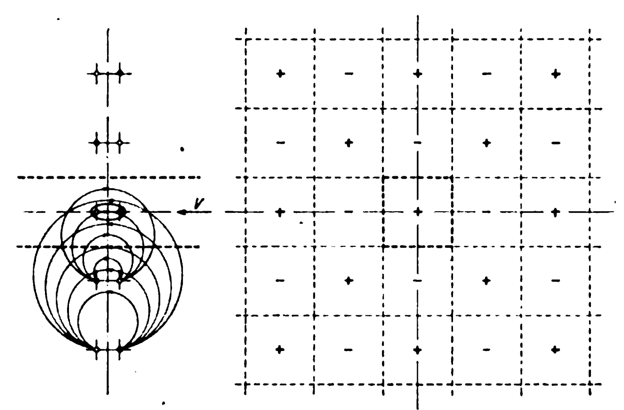


Bild 4. Spiegelungen am quadratischen Kanal mit freien Strahlgrenzen.

digkeiten erzeugen, die abwechselnd die Grundströmung verkleinern und vergrößern. Da jedoch der Einfluß der ersten Spiegelung wegen der geringeren Entfernung von der Strahlmitte überwiegt, so ergibt sich als Gesamtwirkung aller Spiegelbilder eine Verkleinerung der Strömungsgeschwindigkeit. Der absolute Betrag der Verkleinerung wird aber wegen des wechselnden Vorzeichens der Störungsgeschwindigkeiten kleiner sein als im Falle des geschlossenen Kanals, bei dem die Störungsgeschwindigkeiten alle das gleiche Vorzeichen haben.

Die Größe der Störungsgeschwindigkeiten hängt von der Stärke und Anordnung des Quellsenkensystems ab und ist somit für jede Körperform verschieden. Sie läßt sich rechnerisch ermitteln, wenn das Quellsenkensystem bekannt ist. Man erkennt aber auch unschwer, daß die Störungsgeschwindigkeiten längs der Achse des Kanals nicht konstant sind, und daß sich somit der Versuchskörper in einer Strömung befindet, welche ihre Geschwindigkeit längs der Achse verändert. Wenn aber die Abmessung des Körpers im Vergleich zur Breite des Luftstromes gering ist, so dürfte diese Änderung der Geschwindigkeit in axialer Richtung nicht sehr ins Gewicht fallen. C. N. H. Lock, H. Glauert[3]) u. a. haben für verschiedene Körper die Störungsgeschwindigkeiten am Orte des Versuchskörpers ermittelt, so daß es möglich ist, durch Bezug auf die neue Anblasegeschwindigkeit angenähert diejenigen Widerstandswerte anzugeben, die einem unendlich ausgedehnten Luftstrom entsprechen. Bei der genaueren Prüfung der theoretischen Ergebnisse zeigt sich indessen, daß diese mit Versuchsergebnissen nicht immer in guter Übereinstimmung sind, insbesondere bei stumpfen Körpern, weil hier der Totwasserraum bis zu einem gewissen Grade wie ein fester Körper wirkt und daher die gespielten Quellsenkensysteme dem Versuchskörper einschließlich Totwassergebiet entsprechen müssen. Abgesehen von den Schwierigkeiten, genaue Korrekturwerte auf diesem Wege zu gewinnen, bleibt natürlich die anfangs

[3]) H. Glauert, Wind Tunnel Interference on Wings, Bodies and Airscrews. R. and M. Nr. 1566 (1933). Hier findet sich auch eine große Zahl weiterer Schrifttumsangaben.



erwähnte Erscheinung bestehen, daß in einem geschlossenen Kanal bei hohen Machschen Zahlen im engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht wird und damit die Strömungsform stark von derjenigen abweicht, die der unbegrenzten Strömung entspricht. Bei Verwendung eines Freistrahles fällt zwar wegen der eintretenden Geschwindigkeitserniedrigung diese letztere Erscheinung weg, doch die Schwierigkeit der Ermittlung der wirklichen Anblasegeschwindigkeit bleibt bestehen.

III. Rotationskörper im halboffenen Windkanal.

Wenn wir auf die vorher festgestellte Tatsache zurückkommen, daß unser Versuchskörper im geschlossenen Kanal eine Geschwindigkeitserhöhung, im freien Strahl hingegen eine Geschwindigkeitsverminderung zur Folge hat, so scheint es durch geeignete Kombination eines geschlossenen Kanals mit einem Freistrahl möglich zu sein, eine Änderung der Anblasegeschwindigkeit am Orte des Modelles zu vermeiden. Diese Kombination könnte man sich in der Weise verwirklicht denken, daß der Luftstrom nur von zwei Seiten durch Wände begrenzt ist, während die beiden anderen Seiten frei sind, so daß die Geschwindigkeitserhöhung infolge der beiden festen Wände gerade ausgeglichen wird durch die Geschwindigkeitsverminderung, die durch die beiden freien Oberflächen verursacht ist. Bei einem halboffenen Luftstrom von Quadratquerschnitt ist dies, wie eine angenäherte Rechnung ergibt, nicht der Fall. Es soll deshalb untersucht werden, ob sich bei einem anderen Seitenverhältnis des Luftstromquerschnittes ein vollkommener Ausgleich der Störungsgeschwindigkeiten erreichen läßt.

Wir werden der Einfachheit halber diese Untersuchung durchführen für den Fall, daß der Versuchskörper eine Kugel ist. Das Geschwindigkeitsfeld einer Kugel wird bekanntlich durch eine Doppelquelle dargestellt. Bezeichnet r die Entfernung des Aufpunktes von der Doppelquelle, d den Durchmesser der Kugel und V die Geschwindigkeit der Grundströmung, die in Richtung der positiven X-Achse erfolgen soll, so lautet das Potential der Doppelquellenströmung:

$$\Phi = \frac{V x d^3}{16 r^3} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

Die Störungsgeschwindigkeit u' in x-Richtung auf einer Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung durch die Doppelquelle ist somit

$$u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{V d^3}{16 r^3} = \frac{\text{konst.}}{r^3} \quad \text{. . . . . .} \quad (4)$$

d. h. die Störungsgeschwindigkeit nimmt mit der 3. Potenz der Entfernung ab.

Wir haben jetzt die Aufgabe, für einen Luftstrom von rechteckigem Querschnitt, der an zwei gegenüberliegenden Seiten von Wänden begrenzt ist, während die beiden anderen Seiten frei sind, die Störungsgeschwindigkeit infolge der Luftstrombewegung auf der Achse des Kanals zu ermitteln. Zu diesem Zwecke haben wir die Doppelquelle an den festen Wänden und an den freien Grenzflächen des Luftstromes in unendlicher Folge zu spiegeln. Die Anordnung der Spiegelbilder in einer Ebene senkrecht zur Kanalachse ist aus Bild 5 ersichtlich. An den festen Wänden erfolgt, wie schon bemerkt wurde, die Spiegelung so, daß Quelle und Senke des Dipols je einander gegenüberliegen, an den freien Grenzen hingegen derart, daß einer Quelle immer eine Senke gegenüberliegt und umgekehrt. Bezeichnet b die Breite und a die Höhe des Kanals, so beträgt die Summe aller Störungsgeschwindigkeiten auf der Achse des Kanals auf Grund von Gl. (4)

$$u = \frac{V d^3}{16} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[(n a)^2 + (m b)^2]}^3} \quad \text{. .} \quad (5)$$

n und m sind dabei ganze Zahlen, wobei $m = n = 0$ auszuschließen ist.

Fragt man nun nach dem Seitenverhältnis b/a des Kanals, für welches $u = 0$ wird, so kann man in der Weise vorgehen, daß man u für verschiedene Werte von b bei festgehaltenem Kanalquerschnitt ermittelt und die so erhaltenen Werte von u als Funktion von b/a aufträgt. Zur Vereinfachung wurde der konstante Faktor $\frac{V d^3}{16}$ in Gl. (5) gleich 1 gesetzt. a und b wurden solche Werte erteilt, daß die Querschnittsfläche des Kanals $a \cdot b$ stets gleich 1 war. Die auf diese Weise berechneten Störungsgeschwindigkeiten[*] u für vier verschiedene Seitenverhältnisse sind in Bild 6 aufgetragen, wobei die Doppelsumme in Gl. (5) mit σ bezeichnet ist. Man findet daraus durch Interpolation, daß die Störungsgeschwindigkeit beim Seitenverhältnis $b/a = 1{,}17$ Null wird.

Damit ist das gesuchte Seitenverhältnis des Kanalquerschnittes ermittelt. Das Ergebnis gilt streng genommen nur für denjenigen Punkt auf der Achse, auf dem die Doppelquelle liegt und bei Abwesenheit von Auftrieb. Angenähert wird aber auch stromaufwärts und stromabwärts innerhalb eines gewissen Bereiches die Störungsgeschwindigkeit als sehr klein angesehen werden dürfen. Dies würde bedeuten, daß unser Ergebnis auch für längliche Körper, die sich aus komplizierteren Quellsenkensystemen aufbauen, angenähert noch richtig ist. Man kann ferner vermuten, daß auch bei Anwesenheit von Auftrieb, der ja bei einem annähernd axial angeblasenen Rotationskörper immer verhältnismäßig klein ist, das Ergebnis noch angenähert richtig bleibt.

Die bisherigen Ergebnisse wurden unter Zugrundelegung einer inkompressiblen Strömung gewonnen. Es muß daher untersucht werden, welchen Einfluß die Kompressibilität ausübt. Aus den vorhergehenden Untersuchungen ist ersichtlich, daß das Seitenverhältnis des korrekturfreien Kanals nur von dem Gesetz abhängt, nach welchem die Störungsgeschwindigkeit in einem betrachteten Punkte von der Entfernung von dem störenden Körper abhängt. Bei inkompressibler Strömung nimmt die Störungsgeschwindigkeit (vgl. Gl. (4)) mit der 3. Potenz der Entfernung ab. Nur wenn dieses Gesetz sich ändert, dann ändert sich auch das

[*] Zur numerischen Berechnung von u wurden innerhalb eines Quadranten rd. 80 Spiegelbilder, insgesamt also rd. 320 Spiegelbilder berücksichtigt. Herr Professor R. Sauer in Aachen hat mir in dankenswerter Weise eine Fehlerabschätzung zur Verfügung gestellt, die es erlaubte, zu der jeweils gewählten Zahl der Spiegelbilder den zugehörigen Fehler abzuschätzen.

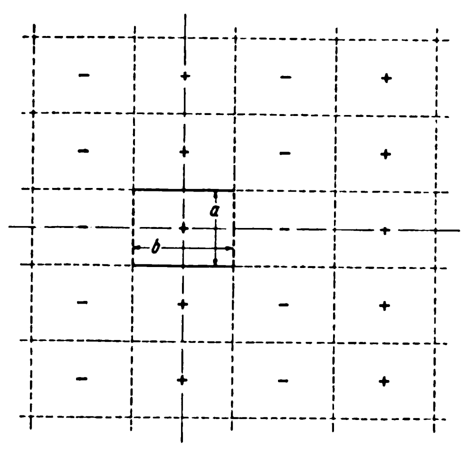


Bild 5. Anordnung der Spiegelbilder beim halboffenen Kanal.

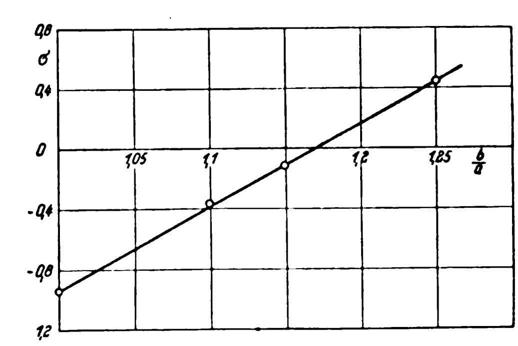


Bild 6. Ermittlung des Seitenverhältnisses des Kanals durch Interpolation.

gewonnene Ergebnis, während die Größe der Konstanten keinen Einfluß auf das Ergebnis hat. Wir haben daher zu untersuchen, in welcher Weise sich das Gesetz, das die Störungsgeschwindigkeit mit der Entfernung verknüpft, ändert, wenn man von der inkompressiblen Strömung zur kompressiblen Strömung übergeht. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Ergebnisse der sog. linearisierten Theorie[5]), die für schlanke Körper — praktisch spielen diese die Hauptrolle — gültig ist.

Bezeichnen wir für den Fall einer rotationssymmetrischen Strömung in der inkompressiblen Strömung die Koordinaten mit ξ, η (wobei ξ in axialer und η in radialer Richtung zu verstehen ist) und das Potential mit Φ und die entsprechenden Größen der kompressiblen Strömung mit x, y und φ, so können auf Grund der Ergebnisse der linearisierten Theorie die beiden Strömungen durch folgende Transformationen ineinander übergeführt werden:

$$\xi = x, \quad \eta = y\sqrt{1 - M^2}, \quad \Phi = \lambda\varphi \quad \dots \quad (6)$$

wobei die Konstante λ zunächst beliebig ist, später aber passend festgesetzt wird. ξ, η und x, y bezeichnen wir als entsprechende Punkte, während unter ξ', η' und x, y Punkte mit gleichen Koordinaten in der inkompressiblen und kompressiblen Strömung zu verstehen sind. Die Komponenten der Störungsgeschwindigkeiten in diesen Punkten sind aus Bild 7 ersichtlich. Aus (6) folgen die Störungsgeschwindigkeiten für entsprechende Punkte:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda u_k$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\eta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - M^2}} v_k.$$

Der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten in Punkten mit gleichen Koordinaten kann unter Berücksichtigung von (7) in folgender Weise geschrieben werden:

$$u' = \lambda u_k \left(\frac{u'}{u}\right), \quad v' = \frac{\lambda v_k}{\sqrt{1 - M^2}} \left(\frac{v'}{v}\right).$$

$\frac{u'}{u}$ und $\frac{v'}{v}$ sind die Geschwindigkeitsverhältnisse in der inkompressiblen Strömung in zwei Punkten mit gleicher Abszisse. Diese Geschwindigkeitsverhältnisse lassen sich auf Grund einer Arbeit von Göthert[6]) angeben. In dieser Arbeit werden die Strömungsverhältnisse um einen zugespitzten, schlanken Rotationskörper untersucht, der durch Überlagerung einer Quellsenkenbelegung mit einer Parallelströmung entsteht. Aus den Gl. (5) und (6) der genannten Arbeit findet man, daß für den Fall $y \to 0$, d. h. für Punkte in der Nähe des Profiles, $u =$ konst. und $v = \frac{\text{konst.}}{\eta}$ wird, oder anders geschrieben:

$$\frac{u'}{u} = 1, \quad \frac{v'}{v} = \frac{\eta}{\eta'} \quad \dots \quad (9)$$

Soll nun die Kontur des Rotationskörpers in inkompressibler und kompressibler Strömung dieselbe sein, so muß in erster Näherung sein:

$$v' = v_k{}^{7)} \quad \dots \quad (10)$$

Damit geht Gl. (8) über in

$$\lambda = \sqrt{1 - M^2} \left(\frac{v}{v'}\right)$$

oder wegen (9)

$$\lambda = \sqrt{1 - M^2}\, \frac{\eta}{\eta'}.$$

Ersetzt man noch auf Grund von Gl. (6) η durch y und berücksichtigt, daß $y = \eta'$ ist, so erhält man

$$\lambda = 1 \quad \dots \quad (11)$$

d. h. die Potentiale in inkompressibler und in kompressibler Strömung sind bei gleicher Kontur in entsprechenden Punkten einander gleich.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, wie sich die Potentiale in gleichen Punkten zueinander verhalten. Aus der schon erwähnten Gl. (5) von Göthert folgt, daß für Punkte in großem Querabstand vom Körper

$$\left(\frac{u'}{u}\right) = \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^3 \quad \dots \quad (12)$$

ist. Wenn nun wie in unserem Falle das Potential einer räumlichen inkompressiblen Strömung von der Form ist

$$\Phi = \frac{\text{konst.}}{r^3} \quad \dots \quad (13)$$

und wenn Φ', Φ_η und Φ_y die Potentialwerte in den Punkten η', η und y bezeichnen, so gilt die Beziehung

$$\frac{\Phi'}{\Phi_\eta} = \left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^3 \quad \dots \quad (14)$$

Wegen (11) ist aber $\Phi_\eta = \Phi_y$, man kann daher für (14) schreiben:

$$\Phi_y = \Phi' \left(\frac{y}{\eta}\right)^3$$

oder wegen (6)

$$\Phi_y = \Phi' \frac{1}{(1 - M^2)^{3/2}}.$$

Das Potential in gleichen Punkten unterscheidet sich daher stets nur um einen konstanten Faktor. Somit nimmt auch bei kompressibler Strömung die Störungsgeschwindigkeit mit der 3. Potenz der seitlichen Entfernung ab, das gewonnene Ergebnis behält daher seine Gültigkeit.

Die Begrenzungen eines Luftstromes ergeben bei Anwesenheit eines Versuchskörpers stets eine gewisse Verzerrung der ursprünglich gleichförmigen Geschwindigkeitsverteilung, die noch näher untersucht werden soll. Diese Störungsgeschwindigkeiten rühren ebenfalls von den gespiegelten Dipolen her und haben ihren größten Wert an der festen Wand (Punkt 1) bzw. an der Grenze des freien Strahles (Punkt 2), vgl. Bild 8. Die quantitative Berechnung für diese beiden Punkte ergab für das Verhältnis u/V folgende Werte:

für Punkt 1:

$$u/V = \frac{1}{16}\left(\frac{d}{a}\right)^3 \cdot 6{,}428$$

und für Punkt 2:

$$u/V = -\frac{1}{16}\left(\frac{d}{a}\right)^3 \cdot 4{,}995.$$

Legt man also beispielsweise eine Kugel vom Durchmesser $d = 0{,}1\,a$ zugrunde, so ergibt sich am Punkte 1 eine Ge-

[5]) Vgl. L. Prandtl, Abriß der Strömungslehre.

[6]) B. Göthert, Einige Bemerkungen zur Prandtlschen Regel in bezug auf ebene und räumliche Strömung (ohne Auftrieb). Erscheint demnächst.

[7]) Vgl. L. Prandtl, Abriß der Strömungslehre. S. 208.

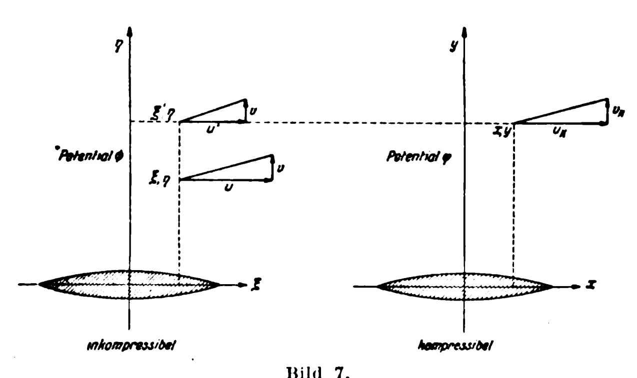


Bild 7.

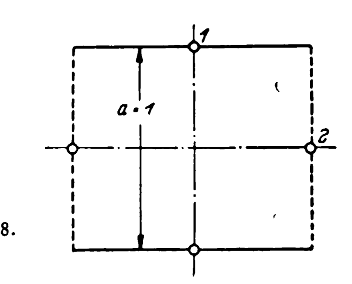


Bild 8.

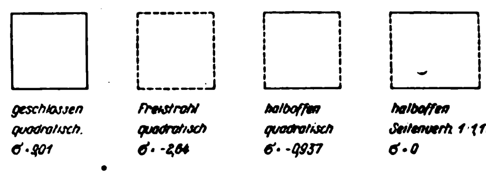


Bild 9.

schwindigkeitserhöhung von rd. 0,04% der Grundgeschwindigkeit und am Punkte 2 eine Abnahme von rd. 0,03%, also ziemlich geringe Änderungen, solange der Durchmesser des Versuchskörpers klein gehalten wird gegenüber der Kanalhöhe.

Mit Annäherung an die Schallgeschwindigkeit und bei kompressibler Strömung wird dieser Unterschied sich entsprechend vergrößern. Es wird dann im Punkte 1 an der Wand zuerst die Schallgeschwindigkeit auftreten, während in Kanalmitte die Geschwindigkeit noch ungestört ist.

Des Vergleiches wegen wurde die Störungsgeschwindigkeit u für die Kugel in Kanalmitte bei inkompressibler Strömung auch für den vollständig geschlossenen Kanal und für den Freistrahl von quadratischem Querschnitt, sowie für den halboffenen Kanal von quadratischem Querschnitt berechnet. Bei quadratischem Querschnitt kann wegen $a = b$ Gl. (5) in der Form geschrieben werden:

$$u = \frac{V}{16}\left(\frac{d}{a}\right)^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{[n^2+m^2]^3}}$$

oder wenn man die Doppelnummer mit σ bezeichnet.

$$u/V = \frac{1}{16}\left(\frac{d}{a}\right)^3 \cdot \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Dann erhält man für die Größe σ für die verschiedenen Kanäle die aus Bild 9 ersichtlichen Werte.

Man sieht, daß die Störungsgeschwindigkeit beim geschlossenen, quadratischen Kanal am größten ist. Beim quadratischen Freistrahl ist die Störungsgeschwindigkeit negativ und ist dem absoluten Betrage nach kleiner als beim geschlossenen Kanal. Wesentlich kleiner ist sie beim halboffenen Kanal von quadratischem Querschnitt, und beim halboffenen Kanal vom Seitenverhältnis 1:1,17 wird sie schließlich Null.

IV. Auftriebsfreie ebene Körper im halboffenen Kanal.

Ähnliche Untersuchungen lassen sich auch für den Fall der ebenen Strömung durchführen. Allerdings muß man auch hier die Voraussetzung machen, daß ein Auftrieb nicht vorhanden ist, wodurch der praktische Wert dieser Untersuchung stark herabgesetzt ist, denn für das wichtige Gebiet der Profiluntersuchungen sind dann unsere Ergebnisse nicht anwendbar. Beschränkt man sich auf reine Widerstandsmessungen in ebener Strömung, so ist es auch hier durch Verwendung eines halboffenen Kanals möglich, eine Änderung der Anblasegeschwindigkeit am Orte des Modelles zu vermeiden. Der halboffene Kanal könnte in der Weise ausgeführt sein, daß er nur auf einer Seite von einer festen Wand begrenzt ist, während die gegenüberliegende Seite durch eine freie Oberfläche gebildet wird. Die nähere Untersuchung zeigt, daß ein vollkommener Ausgleich der Störungsgeschwindigkeiten nicht möglich ist, wenn sich das Modell in Kanalmitte befindet, sondern nur dann, wenn es aus der Mitte heraus nach der festen Wand hin etwas verschoben ist. Das System der Spiegelbilder für diesen Fall ist in Bild 10 dargestellt. Mit Benützung der Bezeichnungen dieser Abbildung wird dann die resultierende Störungsgeschwindigkeit u am Orte des Versuchskörpers, der sich in der Entfernung a_1 von der festen Wand befindet

$$u = \frac{V}{16} d^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left(\frac{2}{(n\,a)^2} + \frac{1}{[(n-1)\,a + a_2]^2} - \frac{1}{[(n-1)\,a + a_1]^2} \right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

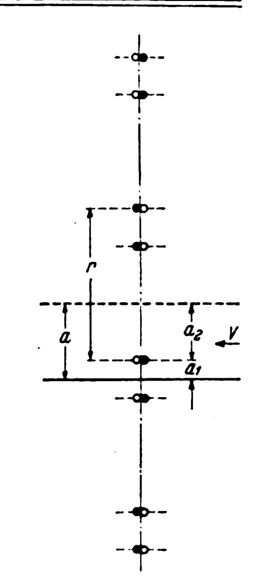


Bild 10. Anordnung der Spiegelbilder bei ebener Strömung.

Berechnet man nun u für verschiedene Abstände a_1 des Versuchskörpers von der festen Wand, so findet man durch Interpolation, daß für $a_1 = 0{,}448\,a$ die Störungsgeschwindigkeit u verschwindet. Die Anblasegeschwindigkeit wird somit an dieser Stelle durch die Begrenzung des Luftstromes nicht verändert. Dies gilt, wie schon bemerkt, bei Anwesenheit von Auftrieb nicht mehr, denn durch die Zirkulation wird beim halboffenen Kanal am Orte des Modelles eine Zusatzgeschwindigkeit induziert, die je nach dem Drehsinn der Zirkulation positiv oder negativ sein kann. Diese Zusatzgeschwindigkeit ist bei einem Kanal, der beiderseits von festen Wänden begrenzt ist, nicht vorhanden. Dafür macht sich hier aber die Geschwindigkeitserhöhung infolge der Verdrängung in unangenehmer Weise bemerkbar.

Für Messungen im Bereiche hoher Machscher Zahlen ist ein Kanal erforderlich, bei dem am Orte des Modells sowohl die von der endlichen Dicke des Modells (Verdrängung) herrührenden Störungsgeschwindigkeiten, als auch die durch die Zirkulation verursachten zusätzlichen Geschwindigkeiten verschwinden. Man behilft sich gegenwärtig mitunter in der Weise, daß man das gleiche Modell sowohl im geschlossenen Kanal als auch im Freistrahl mißt. Die wirklichen Werte liegen dann zwischen den Werten des geschlossenen Kanals und des Freistrahles. Eine solche Versuchsmethode ist jedoch wegen des erforderlichen Zeitaufwands auf die Dauer nicht tragbar. Da die Messungen im Bereiche hoher Geschwindigkeiten gegenwärtig im Mittelpunkt des Interesses stehen, so muß mit allen Mitteln versucht werden, eine Kanalform zu finden, die von den angegebenen Mängeln frei ist, und die eine einwandfreie Messung sicherstellt.

V. Zusammenfassung.

Bei der Messung des Widerstandes eines Rotationskörpers ergeben sich sowohl im geschlossenen als auch im Freistrahl infolge der Verdrängung des Versuchskörpers Änderungen der Anblasegeschwindigkeit, die besonders im Bereiche der kompressiblen Strömung die Messungen ungünstig beeinflussen. Durch Verwendung eines halboffenen Kanals von rechteckigem Querschnitt mit dem Seitenverhältnis 1:1,17 ist es möglich, diese Änderungen der Anblasegeschwindigkeit zum Verschwinden zu bringen. Auch im Falle der ebenen Strömung kann durch einen halboffenen Kanal eine Änderung der Anblasegeschwindigkeit vermieden werden, wenn der Versuchskörper um einen bestimmten Wert aus der Kanalmitte heraus nach der festen Wand zu verschoben ist. In beiden Fällen ist jedoch Voraussetzung, daß ein Auftrieb nicht vorhanden ist.

Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit in der Nähe einer Wand bei unstetiger Änderung der Krümmung.

Von A. Betz.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. in der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften.

Im Anschluß an eine Arbeit von Herrn v. Koppenfels wird die Strömung in der Umgebung eines Krümmungssprunges genauer untersucht, so daß sich damit die Einwirkung des Krümmungssprunges auf die Grenzschicht besser beurteilen läßt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Herr v. Koppenfels[1]) hat durch Untersuchung der Strömung um ein Kreisbogendreieck mit einem Eckwinkel von 2∟ die interessante Feststellung gemacht, daß an einer solchen Ecke, wo also nur die Krümmung, nicht aber die Richtung, sich unstetig ändert, die Geschwindigkeitskurve eine vertikale Wendetangente besitzt. Da dieses Verhalten des Geschwindigkeitsverlaufes auf eine starke Unregelmäßigkeit schließen läßt, die erheblichen Einfluß auf die Vorgänge in der Reibungsschicht haben kann, ist die von Herrn v. Koppenfels gewonnene Erkenntnis ziemlich wichtig. Es soll deshalb im folgenden auch das Verhalten der Strömung im Innern der Flüssigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand untersucht werden, das eine bessere Beurteilung der physikalischen Wirkung des Krümmungssprunges erlaubt. Dazu wird eine etwas andere Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung in der Umgebung eines Krümmungssprunges gegeben werden, welche die Bedeutung der Zusammenhänge klarer erkennen läßt.

II. Allgemeine Aussagen.

Gegeben sei eine in der x-y-Ebene gekrümmte Wand, deren Krümmungsradius an einer bestimmten Stelle von R_1 unstetig in R_2 übergeht, während die Richtung der Tangente sich stetig ändert, so daß also kein Knick vorhanden ist. Wir wählen die Übergangsstelle als Nullpunkt unseres Koordinatensystems und legen die x-Achse in die Richtung der Tangente an die Wand in dieser Stelle. Die Form der Wand ist dann in der Umgebung der Übergangsstelle gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2 R_1} + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \text{ für } x < 0 \\ y &= \frac{x^2}{2 R_2} + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots \text{ für } x > 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (1)$$

Wir betrachten die Strömung in der oberen Halbebene, also in dem Gebiet oberhalb der x-Achse. Soweit die Begrenzungswand in diese obere Halbebene hineinragt, denken wir uns die Strömung bis zur x-Achse analytisch fortgesetzt. Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung in einem Punkte $z = x + i y$ in x- und y-Richtung und $\tau = \operatorname{arctg} v/u$ der Winkel, den die Strömungsrichtung mit der x-Achse bildet, so ist der Vektor der Geschwindigkeit

$$w = u + i v = |w| e^{i \tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Im Nullpunkt sei die Geschwindigkeit w_0. Da ihre Richtung hier mit der x-Richtung zusammenfällt, also $\tau_0 = 0$ ist, so ist $w_0 = |w_0|$. Wir können daher bilden

$$\ln \frac{w}{w_0} = \ln \left| \frac{w}{w_0} \right| + i \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Von dieser komplexen Funktion können wir den Realteil $\ln \left| \frac{w}{w_0} \right|$ in jedem beliebigen Punkte x_1, y_1 der oberen Halbebene berechnen, wenn uns der Imaginärteil τ längs der ganzen x-Achse und die in der oberen Halbebene befindlichen Quellen, Senken und ähnlichen singulären Stellen gegeben sind. Es ist

$$\ln \left| \frac{w}{w_0} (x_1, y_1) \right| = F_s + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau (x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y_1^2} \, d x \quad . \quad (4)$$

Dabei stellt F_s den Beitrag der singulären Stellen und das Integral den Beitrag der Belegung der x-Achse mit den τ-Werten dar. Fassen wir nämlich den Realteil $\ln \left| \frac{w}{w_0} \right|$ als die x-Komponente und den Imaginärteil τ als die y-Komponente der Geschwindigkeit einer Potentialströmung auf, so können wir die letztere auf der x-Achse durch eine Quellbelegung mit der Dichte 2τ darstellen. Das Feld dieser Quellbelegung läßt sich leicht berechnen. Das Integral in Gl. (4) ist die x-Komponente dieses Feldes im Punkte x_1, y_1.

Grenzen wir in der Umgebung des Nullpunktes ein Gebiet von $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ ab, das so klein ist, daß in ihm für die Kurve der Wand $\frac{dy}{dx} \ll 1$ und damit auch $y \ll x$ ist, so weicht die Wandkurve in diesem Gebiet nur wenig von der x-Achse ab. Die Strömungsrichtung auf der x-Achse stimmt daher mit der Wandrichtung überein. Wählen wir außerdem λ so klein, daß außer der bereits obenerwähnten Forderung $\tau \ll 1$, $y \ll x$ auch noch die Glieder $a^3 x^3 + \ldots$, $b^3 x^3 + \ldots$ der Gl. (1) gegenüber der Differenz der Krümmungsglieder $\frac{x^2}{2 R_1} - \frac{x^2}{2 R_2}$ zu vernachlässigen sind, daß also innerhalb des Gebietes $|x| < \lambda$

$$y = \frac{x^2}{2 R_1} \text{ für } x < 0, \qquad y = \frac{x^2}{2 R_2} \text{ für } x > 0 \quad . \; . \quad (5)$$

ist, so wird längs der x-Achse

$$\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{R_1} \text{ für } -\lambda < x < 0, \quad \tau = \frac{x}{R_2} \text{ für } 0 < x < \lambda \quad (6)$$

Setzen wir diese Werte in das Integral von Gl. (4) ein, so erhalten wir für den Beitrag des Stückes von $-\lambda$ bis $+\lambda$ zu diesem Integral

[1]) Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 189.

$$\Delta \ln \left|\frac{w}{w_0}\right| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{\tau (x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y_1^2} dx = \frac{1}{R_1 \pi}\int\limits_{-\lambda}^{0} \frac{x (x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y_1^2} dx$$

$$+ \frac{1}{R_2 \pi}\int\limits_{0}^{\lambda} \frac{x (x - x_1)}{(x - x_1)^2 + y_1^2} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{x_1}{\pi}\left[\frac{1}{R_2} \ln \sqrt{\frac{(\lambda - x_1)^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{R_1} \ln \sqrt{\frac{(\lambda + x_1)^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}}\right]$$

$$- \frac{y_1}{\pi}\left[\frac{1}{R_2} \operatorname{arctg} \frac{\lambda - x_1}{y_1} + \frac{1}{R_1} \operatorname{arctg} \frac{\lambda + x_1}{y_1}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{y_1}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Für Punkte in der nächsten Nähe des Nullpunktes, für die $x_1 \ll \lambda$ und $y_1 \ll \lambda$ ist, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\Delta \ln \left|\frac{w}{w_0}\right| = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left[\lambda + x_1 \ln \frac{\lambda}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right]$$

$$- \frac{y_1}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} \quad \ldots \ldots (8)$$

Der Gesamtwert der Funktion $\ln \left|\frac{w}{w_0}\right|$ läßt sich demnach in der Form

$$\ln \left|\frac{w}{w_0}\right| = F_s (x_1, y_1) + G (x_1, y_1, \lambda)$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\left(x_1 \ln \frac{\lambda}{x_1^2 + y^2}\right) - \frac{y_1}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} \quad \ldots (9)$$

schreiben, wobei in der Funktion F_s die Einflüsse der singulären Stellen und in der Funktion G der Beitrag der außerhalb der Strecke $-\lambda < x < \lambda$ liegenden Quellbelegung zum Integral der Gl. (4) sowie das Glied $\frac{\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$ zusammengefaßt sind. Hierbei ist sowohl die reguläre Funktion G wie der rechtsstehende Ausdruck von dem willkürlichen Wert λ abhängig. Aus der Definition dieser beiden Größen als Integrale des gleichen Integranden (Gl. (4)) über Gebiete, die bei $x = \pm \lambda$ aneinandergrenzen, geht aber hervor, daß bei einer Änderung von λ die eine der beiden Funktionen um gleich viel abnimmt wie die andere zunimmt, so daß die Summe unverändert bleibt. Wir können in dem rechtsstehenden Ausdruck für λ auch beliebig große Werte einsetzen, die den über λ gemachten Einschränkungen nicht mehr entsprechen. Wenn wir z. B. λ durch L ersetzen, so ändern wir dadurch den Ausdruck um eine reguläre Funktion, nämlich um $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) x_1 \ln \frac{L}{\lambda}$, und wenn wir G um die gleiche Funktion im entgegengesetzten Sinne ändern, so bleibt sie regulär und die Summe, also $\ln \left|\frac{w}{w_0}\right|$ bleibt unverändert. Nur haben jetzt die beiden Funktionen nicht mehr die pysikalische Bedeutung, durch die sie ursprünglich definiert waren. Setzen wir insbesondere R_1 für λ ein und beachten, daß für $\left|\frac{w}{w_0}\right| - 1 \ll 1$

$$\ln \left|\frac{w}{w_0}\right| \approx \frac{w}{w_0} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

ist, so erhalten wir für $y_1 \to 0$ das von v. Koppenfels gefundene Resultat[1])

$$\left|\frac{w}{w_0}\right| = 1 + P (x_1) + \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{x_1}{R_1} \ln \frac{x_1}{R_1} \quad \ldots (11)$$

Dabei ist $P (x_1)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Funktion, welche den Einfluß des weiteren Verlaufes

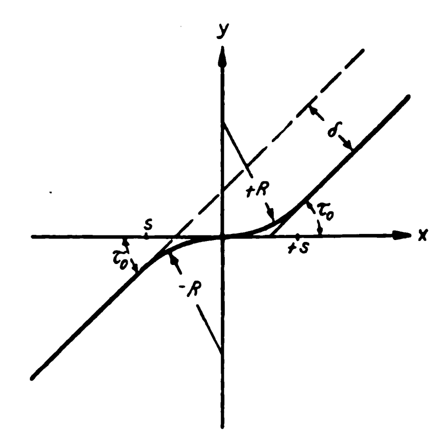


Bild 1. Verlauf der Wand.

der Begrenzungswand darstellt. Der letzte Ausdruck rechts gibt den Einfluß des Krümmungssprunges wieder. Er hat, wie schon v. Koppenfels betonte, bei $x_1 = 0$ eine lotrechte Wendetangente, also eine hydrodynamisch recht unerfreuliche Singularität.

Dieses singuläre Verhalten trifft aber nur für die Geschwindigkeit an der Wand selbst zu. Da sich in Wirklichkeit an der Wand eine Grenzschicht von endlicher Dicke befindet, so tritt diese Singularität auch gar nicht auf. Eine genaue Berechnung des Krümmungseinflusses bei Berücksichtigung der Grenzschicht ist sehr viel schwieriger. Wir können uns aber wenigstens ein Bild von dem Einfluß des Krümmungssprunges auf die Grenzschicht machen, wenn wir uns klar machen, wie die Geschwindigkeit in einem kleinen etwa der Grenzschichtdicke entsprechenden Abstand y_1 von der Wand verläuft. Die Unterlagen dazu sind uns durch die Gl. (7) gegeben.

III. Ein Beispiel.

Da in endlichem Abstand von der Wand die Kurve des Geschwindigkeitsverlaufes nicht mehr eine senkrechte Wendetangente besitzt, sondern mit endlichem Tangentenwinkel verläuft, so geht in diesem Winkel der Verlauf der stetigen Funktion $F_s + G$ (Gl. (9)) wesentlich ein. Um die Verhältnisse klar zu übersehen, können wir diese Funktion nicht mehr unbestimmt lassen, sondern müssen sie genauer festlegen. Dazu wollen wir unsere Überlegungen auf ein einfaches bestimmtes Beispiel anwenden. Die Wand habe folgenden Verlauf (Bild 1): Im Nullpunkte schließen zwei Kreisbogen mit dem Krümmungsradius $\pm R$ so aneinander, daß die gemeinsame Tangente in der x-Richtung liegt. Diese Kreisbogen erstrecken sich bis zu den Punkten $x = \pm s$. Von hier aus folgen gerade Begrenzungen bis ins Unendliche, die unter dem Winkel

$$\tau_0 = s/R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

gegen die x-Achse geneigt sind, also bei $\pm s$ ohne Knick an die Kreisbogen anschließen. Wir haben demnach im wesentlichen eine gerade Wand, die in der Umgebung des Nullpunktes eine Versetzung um die Strecke

$$\delta = 2 R (1 - \cos \tau_0) \approx s^2/R \quad \ldots \ldots (13)$$

aufweist, wobei der Übergang durch die beiden Kreisbogen erfolgt. Den Winkel τ_0 wollen wir als sehr klein voraussetzen. Die Flüssigkeit ströme im Unendlichen parallel zu den geraden Wandstrecken mit der Geschwindigkeit w_∞. Aus Symmetriegründen ist die Geschwindigkeit bei $x = 0$

$$w_0 = w_\infty \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Die Tangentenrichtung der Wand ist dann

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 && \text{für} \quad x < -s \\ \tau &= -\tau_0 \frac{x}{s} && \text{»} \quad -s < x < 0 \\ \tau &= \tau_0 \frac{x}{s} && \text{»} \quad 0 < x < s \\ \tau &= \tau_0 && \text{»} \quad s < x. \end{aligned}$$

[1]) In der bei v. Koppenfels in der Zusammenfassung stehenden Gleichung fehlt im mittleren Glied rechts offenbar ein Faktor $\frac{a}{\varrho_1}$ wie sich durch Vergleich mit Gl. (56) ergibt.



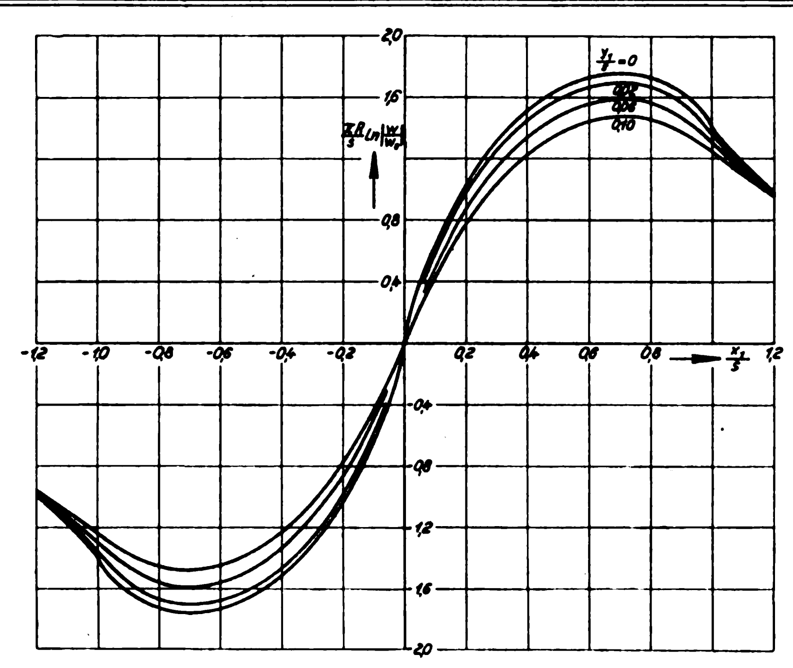


Bild 2. Verlauf der Geschwindigkeit.

Demgemäß erhalten wir für die Geschwindigkeit w in einem Punkt $x_1\,y_1$

$$\ln\left|\frac{w}{w_0}\right| = \frac{s}{R\pi}\int\limits_{-\infty}^{-s}\frac{(x-x_1)}{(x-x_1)^2+y_1^2}\,dx - \frac{1}{R\pi}\int\limits_{-s}^{0}\frac{x\,(x-x_1)}{(x-x_1)^2+y_1^2}\,dx$$

$$+\frac{1}{R\pi}\int\limits_{0}^{s}\frac{x\,(x-x_1)}{(x-x_1)^2+y_1^2}\,dx + \frac{s}{R\pi}\int\limits_{s}^{\infty}\frac{(x-x_1)}{(x-x_1)^2+y_1^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{R\pi}\left[x_1\ln\frac{\sqrt{(s+x_1)^2+y_1^2}\,\sqrt{(s-x_1)^2+y_1^2}}{x_1^2+y_1^2}\right.$$

$$-s\ln\sqrt{\frac{(s-x_1)^2+y_1^2}{(s+x_1)^2+y_1^2}}$$

$$\left.+\,y_1\left(\operatorname{arctg}\frac{s+x_1}{y_1}-\operatorname{arctg}\frac{s-x_1}{y_1}-2\operatorname{arctg}\frac{x_1}{y_1}\right)\right].$$

In Bild 2 ist der Verlauf der Funktion $\frac{R\pi}{s}\ln\left|\frac{w}{w_0}\right| \approx \frac{R\pi}{s}\left(\left|\frac{w}{w_0}\right|-1\right)$ längs der Wand für verschiedene Abstände y_1 von der Wand dargestellt, wobei noch an Stelle der Längen x_1 und y_1 die dimensionslosen Verhältnisse x_1/s und y_1/s eingeführt sind. Man ersieht daraus, daß schon für den Verlauf an der Wand selbst ($y_1/s = 0$) die senkrechte Wendetangente gegenüber dem Gesamtverlauf sich kaum bemerkbar macht. Schon in sehr kleinem Abstand von der Wand ($y_1/s = 0{,}01$) ist praktisch von dieser Unregelmäßigkeit nichts mehr zu erkennen. Man darf daher erwarten, daß die senkrechte Wendetangente sich auch physikalisch für die Vorgänge in der Grenzschicht kaum auswirken wird. Wichtiger erscheint die Gesamtschwankung der Geschwindigkeit zwischen einem Minimum links vom Nullpunkt und einem Maximum rechts davon. Die Größe dieser Schwankung nimmt auch mit dem Abstand von der Wand nur wenig ab und kommt daher in der Grenzschicht ziemlich voll zur Auswirkung. Für eine Unregelmäßigkeit im Verlauf der Wand gemäß Bild 1, wobei beispielsweise $\frac{s}{R} = \frac{\delta}{s} = 0{,}1$ sein möge, beträgt die Geschwindigkeitsschwankung zwischen dem Minimal- und Maximalwert etwas über 10% der ungestörten Geschwindigkeit, ist also durchaus merklich.

An den Stellen $x_1 = \pm s$, wo ebenfalls jeweils ein Krümmungssprung liegt, zeigen sich im wesentlichen ähnliche Auswirkungen: Der Verlauf der Kurven ist zwar anders, aber die durchschnittliche Geschwindigkeitsänderung ist von ähnlicher Größenordnung wie in der Umgebung von $x = 0$.

IV. Zusammenfassung.

Die im Geschwindigkeitsverlauf an einer Wand mit unstetiger Änderung der Krümmung auftretende senkrechte Wendetangente macht sich in einem so kleinen Gebiet bemerkbar, daß sie im allgemeinen wohl keine nennenswerten physikalischen Auswirkungen auf die Grenzschicht haben wird. Immerhin treten aber im weiteren Verlauf Geschwindigkeitsunterschiede auf, die zwar je nach dem sonstigen Verlauf der Wand verschieden sind, aber in ihrer Größenordnung und Ausdehnung Störungen der Grenzschichtvorgänge bewirken können.

Der Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre auf die Längsbewegung des Flugzeugs.

Von F. N. Scheubel, Darmstadt.

Die Längsbewegung des Flugzeugs ist bisher, von einigen Sonderfällen, wie z. B. der Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs im Sturzflug abgesehen, nur unter der Voraussetzung untersucht worden, daß die Luftdichte im Bereich der Flugbahn konstant ist. Die Ergebnisse der Rechnung sagen aus, daß die Bewegung aus zwei überlagerten Schwingungen besteht, von denen die eine große Frequenz und sehr starke, manchmal aperiodische Dämpfung, die andere kleine Frequenz und sehr schwache Dämpfung hat. Die erste der beiden Schwingungen zeigt sich vor allem im Anstellwinkel, während die Geschwindigkeits- und Flugbahnstörungen klein bleiben. Man nennt sie deshalb auch die Anstellwinkelschwingung. Die zweite Schwingung zeigt sich in Störungen der Geschwindigkeit und der Flugbahn, gegen die die Anstellwinkelstörungen zurücktreten. Deshalb nennt man sie auch die Bahnschwingung. Mit steigender Fluggeschwindigkeit nimmt die Frequenz der Anstellwinkelschwingung zu, die der Bahnschwingung ab. Das Dekrement der Anstellwinkelschwingung ist von der Geschwindigkeit nur wenig abhängig, das der Bahnschwingung nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit meist ebenfalls zu. Diese Ergebnisse werden durch Flugerfahrungen qualitativ bestätigt, doch ist die quantitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung oft sehr schlecht. Das trifft vor allem für die Dämpfung der Bahnschwingung zu. Die Gründe hierfür sind noch nicht recht bekannt. Ich will im folgenden zeigen, daß der Umstand, daß die Bewegung sich in einer Atmosphäre veränderlicher Luftdichte abspielt, großen Einfluß auf die Bahnschwingung und besonders auf deren Dämpfung haben kann.

Schon eine einfache Überlegung gibt wesentliche Erkenntnisse (Bild 1). Es sei vorausgesetzt, daß das Flugzeug sehr große statistische Stabilität hat, so daß sein Anstellwinkel und damit auch der Auftriebsbeiwert, mit dem es fliegt, während der Bewegung konstant bleiben. Vortriebskraft und Widerstand sollen sich ständig ausgleichen, so daß keine Energieverluste auftreten und die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant bleibt. Die Abweichungen vom Horizontalflug sollen so klein bleiben, daß der Bahnwinkel als kleine Größe angesehen werden kann. Die Bewegungsgleichung für eine kleine Höhenstörung h der Bahn ist dann:

$$m \cdot \frac{d^2 h}{d t^2} = A - G.$$

Der Auftrieb A, der im Gleichgewichtszustand gleich dem Gewicht G ist, wird im gestörten Zustand im Verhältnis

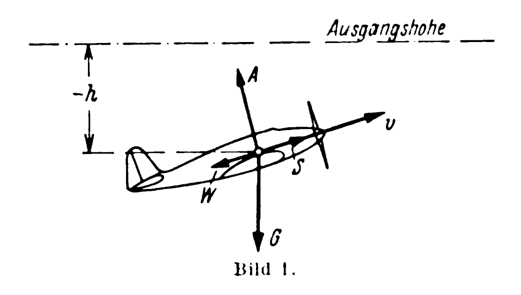


Bild 1.

der Quadrate der Geschwindigkeit v des gestörten zur Geschwindigkeit v_0 des ungestörten Zustandes und im Verhältnis der Dichte ϱ des gestörten zur Dichte ϱ_0 des ungestörten Zustandes geändert:

$$A = A_0 \cdot \frac{\varrho v^2}{\varrho_0 v_0^2} = G \cdot \frac{\varrho v^2}{\varrho_0 v_0^2}.$$

Nach dem Energiesatz ist:

$$h + \frac{v^2}{2g} = \text{konst.} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Berücksichtigt man diese Beziehungen, so wird die Bewegungsgleichung für kleine Höhenstörungen, innerhalb deren Bereich die Dichteänderung mit der Höhe dieser proportional angenommen werden kann:

$$\frac{d^2 h}{d t^2} = -\left[2 \frac{g^2}{v_0^2} - \frac{g}{\varrho_0} \frac{d\varrho}{dh}\right] \cdot h.$$

Wird die Dichteänderung der Atmosphäre mit der Höhe vernachlässigt, so ergibt sich daraus die bekannte Beziehung für die Frequenz der Bahnschwingung:

$$\omega = \frac{g}{v} \cdot \sqrt{2}.$$

Bei Berücksichtigung des Dichtegradienten wird hieraus

$$\omega = \frac{g}{v} \sqrt{2 - \frac{v^2}{g \cdot \varrho} \frac{d\varrho}{dh}}.$$

Um den Einfluß des Gliedes $\frac{v_0^2}{g \cdot \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dh}$ abzuschätzen, muß zunächst der Dichtegradient $\frac{d\varrho}{dh}$ der Atmosphäre betrachtet werden. Am einfachsten geschieht dies in folgender Weise:

Der Dichtegradient ist das Produkt aus der Änderung der Dichte mit dem Druck und der Änderung des Drucks mit der Höhe:

$$\frac{d\varrho}{dh} = \frac{d\varrho}{dp} \cdot \frac{dp}{dh}.$$

Der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte in der Atmosphäre läßt sich durch ein Polytropengesetz $\frac{p}{\varrho^n} = \text{konst.}$ darstellen. Dann ist $\frac{d\varrho}{dp} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\varrho}{p}$. Der Exponent n der Polytrope hängt von dem Temperaturgradienten der Atmosphäre $\frac{dT}{dh}$ und der Gaskonstante R der Luft ab.

$$n = \frac{1}{1 + R \frac{dT}{dh}}.$$

Für die der internationalen Normalatmosphäre zugrunde gelegte Verteilung ist bis etwa 11 000 m Höhe der Temperaturgradient $\frac{dT}{dh} = -0{,}0065°/\text{m}$ und $n = 1{,}235$. In der Stratosphäre wird konstante Temperatur, also $\frac{dT}{dh} = 0$

und damit $n = 1$ angenommen. Die Extreme des Temperaturgradienten, soweit sie flugtechnisch interessieren, sind auf der einen Seite der adiabatische, der $n = \varkappa = 1{,}41$ ergibt, auf der anderen Seite Temperaturanstiege mit der Höhe in Inversionsschichten, die zwar eine beschränkte, aber für einen Flug innerhalb ihres Bereichs ausreichende Höhe haben. Temperaturgradienten von $\frac{dT}{dh} = +\,0{,}01^\circ/\mathrm{m}$ entsprechend $n = 0{,}775$ werden auch in größeren Höhen in Abgleitinversionen oft beobachtet. Die größten Werte treten bei winterlichen Bodeninversionen auf. Hier sind schon Temperaturgradienten von $\frac{dT}{dh} = +\,0{,}050^\circ/\mathrm{m}$ entsprechend $n = 0{,}405$ in Schichten von einigen 100 m Höhe festgestellt worden.

Der Druckgradient ist nach der hydrostatischen Grundgleichung

$$\frac{dp}{dh} = -g \cdot \varrho.$$

In den Zustandsgrößen der Atmosphäre ausgedrückt wird der Dichtegradient:

$$\frac{d\varrho}{dh} = -\frac{g \cdot \varrho^2}{n \cdot p}$$

und das mit ihm auftretende Glied in der Bewegungsgleichung:

$$\frac{v^2}{g \cdot \varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dh} = \frac{v^2 \cdot \varrho}{n \cdot p} = \frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2}.$$

Hierin bedeutet a die Schallgeschwindigkeit der Luft in Flughöhe. Das Verhältnis von Fluggeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit, das hier auftritt, wird meist als Machsche Zahl bezeichnet.

Die Frequenz der Bahnschwingung für kleine Störungen läßt sich jetzt schreiben:

$$\omega = \frac{g}{v} \cdot \sqrt{2 + \frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2}}.$$

Der Summand $\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2}$ nimmt bei hohen Geschwindigkeiten beträchtliche Werte an. So wird er z. B. bei einem Flug mit $v \approx 200$ m/s Geschwindigkeit in 6500 m Höhe $\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2} \approx 0{,}4$ bei adiabatischer Schichtung der Atmosphäre und $\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2} \approx 0{,}72$ in einer Inversionsschicht mit einem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} \sim +\,0{,}010^\circ/\mathrm{m}$. Beim Flug in einer starken Bodeninversion kommen sogar unter sonst gleichen Bedingungen Werte bis zu $\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2} \approx 1{,}2$ vor. Solche Zahlen können keineswegs gegen die Zahl 2 vernachlässigt werden.

Die physikalischen Zusammenhänge sind leicht zu verstehen. Für eine kleine Störung der Geschwindigkeit um einen bestimmten Bruchteil ihres Mittelwertes ist die Höhenstörung h der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ proportional. Die Rückstellkraft, die bei einer Höhenstörung auftritt, ist proportional der Störung des Staudruckes, der das Produkt aus Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ und spezifischem Gewicht γ der Luft ist. Es kommt also bei Berücksichtigung des Dichtegradienten zu dem aus der Geschwindigkeitsstörung folgenden Anteil der Rückstellkraft noch ein zusätzlicher Anteil aus der gleichzeitig und gleichsinnig mit ihr auftretenden Dichteänderung hinzu. Durch ihn wird die Rückstellkraft und mit ihr die Frequenz erhöht. Für eine gegebene Höhenstörung ist der vom Dichtegradienten nicht beeinflußte Teil der Rückstellkraft umgekehrt proportional der Geschwindigkeitshöhe, der vom Dichtegradienten abhängige Teil von der Geschwindigkeit unabhängig. So kommt es, daß mit steigender Geschwindigkeit dieser zweite Anteil dem ersten gegenüber an Einfluß gewinnt. Die Schallgeschwindigkeit der Luft tritt als Maßstab für die Fluggeschwindigkeit auf, weil sie die einzige aus den Zustandsgrößen der Luft zu bildende Kombination ist, die die Dimension einer Geschwindigkeit hat.

Der Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre auf die Dämpfung der Bewegung ist aus diesen einfachen Überlegungen nicht abzuleiten.

Die weitere Untersuchung soll auf den Fall des Horizontalfluges beschränkt bleiben, da die Behandlung der Längsbewegung im Steigflug in einer Atmosphäre veränderlicher Dichte auf große mathematische Schwierigkeiten stößt, die eine allgemeine Lösung ausschließen.

Die Bewegungsgleichungen, in flugbahnfesten Koordinaten aufgestellt, sind:

in Richtung der Bahntangenten:

$$m\,\frac{dv}{dt} = S - W - G \cdot \sin\varphi;$$

in Richtung der Bahnnormalen:

$$m\,\frac{d^2 h}{dt^2} = A - G \cdot \cos\varphi;$$

um die Quer-(Y)-Achse:

$$m\,i_y^2\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M(\alpha; \omega_y).$$

Bei Beschränkung auf kleine Störungen werden hieraus lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Luftkräfte werden in bekannter Weise angesetzt. Dabei ist zu beachten, daß bei hohen Fluggeschwindigkeiten sowohl der Widerstandsbeiwert c_w als auch besonders der Auftriebsbeiwert c_a von der Geschwindigkeit abhängen. Der Schubbeiwert c_s ist außer von der Geschwindigkeit auch von der Luftdichte abhängig, da im allgemeinen die verfügbare Leistung des Triebwerks von der Luftdichte abhängt[1]). Der Momentenbeiwert c_M soll nicht von der Geschwindigkeit beeinflußt werden. Dadurch wird die Rechnung durchsichtiger und das Wesentliche des vorliegenden Problems tritt klarer hervor. Um die Gleichungen übersichtlicher und allgemeiner zu machen, wurden das Zeitmaß $\frac{2G}{\gamma \cdot F \cdot s} \cdot \frac{s}{v} = \mathfrak{M} \cdot \frac{s}{v}$ (mit der »Massenwirkungszahl« $\mathfrak{M}$) und das Längenmaß $\frac{2G}{\gamma \cdot F}$ eingeführt, weiter die in Teilen der mittleren Geschwindigkeit gemessene Geschwindigkeitsstörung mit $\mathfrak{v}$, die in Teilen des Längenmaßes gemessene Höhenstörung mit $\mathfrak{h}$ und die in Teilen des Zeitmaßes gemessene Zeit mit $\mathfrak{t}$ bezeichnet. So erhält man:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{t}} + c_w \left[\frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v}\right] \cdot \mathfrak{v} + \frac{\partial c_w}{\partial \alpha} \cdot \alpha + c_a \frac{d\mathfrak{h}}{d\mathfrak{t}} + c_a\,c_w \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \cdot \frac{\varkappa v^2}{n \cdot a^2}\,\mathfrak{h} = 0;$$

$$\frac{d^2\mathfrak{h}}{d\mathfrak{t}^2} + c_a^2\,\frac{\varkappa}{n}\,\frac{v^2}{a^2} \cdot \mathfrak{i} - \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \alpha - c_a \left[2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}\right] \cdot \mathfrak{v} = 0;$$

$$\frac{d^3\mathfrak{h}}{d\mathfrak{t}^3} - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \cdot \frac{s^2}{i_y^2} \cdot \frac{d^2\mathfrak{h}}{d\mathfrak{t}^2} + \frac{d^2\alpha}{d\mathfrak{t}^2} - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \times \frac{s^2}{i_y^2} \cdot \frac{d\alpha}{d\mathfrak{t}} - \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \cdot \frac{s^2}{i_y^2}\,\mathfrak{M} \cdot \alpha = 0.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf Exponentialfunktionen der Zeit, deren Zeitfaktoren Wurzeln der folgenden Frequenzdeterminante sind:

[1]) Streng genommen sind auch die anderen Beiwerte von der Höhe abhängig, da der Geschwindigkeitseinfluß auf sie von der Schallgeschwindigkeit abhängt, die sich ihrerseits mit der Höhe ändert. Doch ist diese Abhängigkeit, wie eine Abschätzung zeigt, verschwindend klein.

$$\begin{vmatrix} c_a \cdot x + \frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2} c_a c_w \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} & -\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} & x + c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\} \\ x^2 + \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \cdot c_a^2 & -\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} & -c_a \left\{ 2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right\} \\ x^2 - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \cdot \frac{s^2}{i_y^2} \cdot x^2 & x^2 - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} x - \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M} & 0 \end{vmatrix}$$

Sie ist 5. Grades gegenüber der bekannten Gleichung 4. Grades, die man ohne Berücksichtigung des Dichtegradienten der Atmosphäre erhält. Ihre Koeffizienten sind:

$$a_5 = 1;$$

$$a_4 = c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\} + \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \cdot \frac{s^2}{i_y^2};$$

$$a_3 = -\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} - \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M} + c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\} \left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} \right)$$
$$+ \left(c_a^2 - c_a \frac{\partial c_w}{\partial \alpha} \right) \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) + \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \cdot c_a^2;$$

$$a_2 = -c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\} \left[\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} + \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M} \right] - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} \left(c_a^2 - c_a \frac{\partial c_w}{\partial \alpha} \right) \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right)$$
$$+ \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \cdot c_a^2 \left[c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\} - \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} + c_w \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) \right];$$

$$a_1 = -c_a^2 \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) \cdot \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M}$$
$$- \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} c_a^2 \left\{ \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M} + \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}} \frac{s^2}{i_y^2} c_w \left[\frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} + \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) \right] \right\};$$

$$a_0 = -\frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} c_a^2 \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \frac{s^2}{i_y^2} \mathfrak{M} \cdot c_w \left[\frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} + \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) \right].$$

Die wesentlichen Glieder in den einzelnen Koeffizienten, die meist 75 bis 99% des Betrages ausmachen, sind unterstrichen.

Außer im Falle eines großen Flugzeugs niedriger Flächenbelastung und sehr geringer statischer Längsstabilität $\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}$ läßt sich diese Gleichung sehr leicht näherungsweise in eine quadratische und eine kubische Gleichung aufspalten. Die quadratische Gleichung, die auf ein großes, meist komplexes Wurzelpaar führt, entspricht der oben als Anstellwinkelschwingung bezeichneten Bewegungsform. Sie wird von dem Dichtegradienten der Atmosphäre praktisch nicht beeinflußt. Die kubische Gleichung hat als Lösung eine kleine reelle Wurzel und ein kleines komplexes Wurzelpaar, das zu der oben als Bahnschwingung bezeichneten Bewegungsform gehört. In ihr treten Glieder, die den Dichtegradienten enthalten, mit großem Einfluß auf. Deshalb soll sie allein weiter betrachtet werden.

Ihre Koeffizienten sind nach einer kleinen Umformung:

$$b_3 = 1;$$

$$b_2 = c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} \right\};$$

$$b_1 = c_a^2 \frac{\frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \cdot \mathfrak{M}}{\frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \mathfrak{M} + \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}}} \left[2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} + \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \right];$$

$$b_0 = \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} c_a^2 \frac{\frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \cdot \mathfrak{M}}{\frac{\partial c_M}{\partial \alpha} \mathfrak{M} + \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial c_M}{\partial \frac{\omega_y \cdot s}{v}}}$$
$$\times c_w \left[\frac{\partial \ln c_w}{\partial \ln v} - \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} + \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} \right) \right].$$

Das allgemeine Glied b_0 hat den Dichtegradienteneinfluß $\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2}$ als Faktor. Mit verschwindendem Dichtegradienten geht $n \to \infty$ und mit ihm $b_0 \to 0$. Bei gegebenem Dichtegradienten nimmt sein Einfluß in b_0 für ein bestimmtes Flugzeug quadratisch mit der Geschwindigkeit ab, da sich c_a umgekehrt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ändert.

Der Koeffizient des linearen Gliedes enthält den Dichtegradienteneinfluß als Summanden, der zwar wie oben schon angegeben kleiner als die anderen Summanden dieses Gliedes, aber nur bei niedrigen Fluggeschwindigkeiten klein gegen sie ist.

Der Koeffizient des quadratischen Gliedes enthält den Dichtegradienteneinfluß nicht.

Für ein statisch längsstabiles Flugzeug sind alle 4 Koeffizienten positiv. Ebenso ist dann die Hurwitzsche Stabilitätsdiskriminante positiv, so lange $-\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} > \frac{\varkappa v^2}{n a^2} \cdot \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$. Bei den üblichen Triebwerken ist auch diese Bedingung erfüllt. Das Flugzeug ist also stabil.

Für ein modernes Flugzeug mittlerer Größe und mittlerer Flächenbelastung wird beim Flug mit hohen Geschwindigkeiten die Größenordnung der Koeffizienten etwa folgende:

$$b_2 \approx +0{,}08,$$

$$b_1 \approx 0{,}01 \left(2{,}4 + \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \right),$$

$$b_0 \approx 0{,}0008 \cdot \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \quad \text{für} \quad \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 0$$

$$\approx 0{,}0016 \cdot \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2} \quad \text{für} \quad \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 1{,}33.$$

Der Dichtegradienteneinfluß wird etwa

$$\frac{\varkappa}{n}\,\frac{v^2}{a^2}\approx 0{,}4$$

sein. Es sind also b_2 und b_1 gleicher Größenordnung, während b_0 klein gegen sie ist. Als Näherungslösungen der Frequenzgleichung, die um so besser sind, je kleiner b_0 gegen b_1 ist, erhält man

$$x_1 = -\frac{b_0}{b_1} \approx \frac{\varkappa}{n}\,\frac{v^2}{a^2}\,\frac{c_w\left[\dfrac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} - \dfrac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}\left(2+\dfrac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}\right)\right]}{2+\dfrac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}+\dfrac{\varkappa}{n}\,\dfrac{v^2}{a^2}};$$

$$x_{2,3} = \mathfrak{R} + i\,\mathfrak{J};$$

$$2\,\mathfrak{R} = -\,b_2 - x_1 \approx c_w\left[\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} + \frac{\varkappa}{n}\,\frac{v^2}{a^2}\,\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}\right]\frac{2+\dfrac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}}{2+\dfrac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}+\dfrac{\varkappa}{n}\,\dfrac{v^2}{a^2}};$$

$$\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{J}^2 = b_1 - 2\,\mathfrak{R}\cdot x_1.$$

Die reelle Wurzel x_1 ist negativ, entspricht also einem abklingenden Bewegungsanteil, solange der Exponent der Druck-Dichte-Polytrope der Atmosphäre größer als Null ist, was immer der Fall ist. Ihr Betrag nimmt mit steigender Fluggeschwindigkeit zu, und zwar annähernd quadratisch. Die Luftschichtung in der Atmosphäre hat großen Ein luß. Bei adiabatischer Schichtung, die man als die eine Grenze ansehen kann, hat sie den kleinsten, in Inversionen einen bis zu 3,5 mal größeren Betrag.

Der Einfluß der Höhencharakteristik des Triebwerks, der in dem Glied $c_w\cdot\left(2+\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v}\right)\cdot\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$ enthalten ist, kann beträchtlich sein. Die Größe $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$ ist der Änderung des Schubes mit der Luftdichte, diese ihrerseits im Reise- und Schnellfluge recht gut der Änderung der Triebwerksleistung N mit der Luftdichte proportional. Daher kann man $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$ mit guter Näherung durch $\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varrho}$ ersetzen, eine Größe, die beim nichtaufgeladenen Motor und beim Ladermotor über dessen Volldruckhöhe etwa $\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varrho}\approx 1{,}3$ bis $1{,}4$ ist. Beim idealen Höhenmotor, der trägheitslos geregelt wird, würde $\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varrho} = 0$ sein. Es ist anzunehmen, daß die immer vorhandene Trägheit des Regelvorganges, über die leider wenig bekannt ist, die Bewegung des Flugzeugs beeinflussen wird.

Bei Flugzeugen mit idealem Höhenmotor, für den angenommen werden kann, daß sich der Schub nicht mit der Luftdichte ändert, $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$ also verschwindet, bleibt im allgemeinen Glied b_0 nur der erste Summand mit dem Faktor $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v}$ stehen. Bei einem Flugzeug, das mit einem Triebwerk ausgerüstet ist, dessen Schub mit abnehmender Luftdichte abnimmt, ist für den zu erwartenden Wert $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}\approx 1{,}333$ der mit diesem Faktor behaftete Summand in b_0 ungefähr ebenso groß wie der erste Summand. Das bedeutet, daß in diesem Falle die reelle Wurzel etwa doppelt so groß wird wie im Falle des idealen Höhentriebwerks.

Der doppelte Realteil $2\,\mathfrak{R}$ des komplexen Wurzelpaares, der ein Maß für die Dämpfung der Bewegung ist, ist der um die reelle Wurzel x_1 verminderte Koeffizient b_2 mit negativem Vorzeichen. Der Koeffizient b_2 ist immer positiv, denn der Schub aller bekannten Flugzeugtriebwerke nimmt mit steigender Geschwindigkeit ab; sein Einfluß ist also dämpfend. Die reelle Wurzel x_1 ist immer negativ, ihr Anteil am Realteil also positiv. Daher verkleinert sie den Betrag von $2\,\mathfrak{R}$ und wirkt damit entdämpfend. Alles was oben über die Abhängigkeit der reellen Wurzel x_1 von Fluggeschwindigkeit, Luftschichtung in der Atmosphäre und Luftdichtenabhängigkeit des Triebwerks gesagt wurde, gilt sinngemäß auch für die Dämpfung der Bahnschwingung. Zunehmender Temperaturgradient der Atmosphäre, steigende Fluggeschwindigkeit und mit der Luftdichte abnehmende Triebwerksleistung wirken also dämpfungvermindernd.

Die Frequenz der Schwingung, deren Quadrat durch $\mathfrak{R}^2+\mathfrak{J}^2$ mit guter Näherung gegeben ist, da $\mathfrak{R}^2$ immer klein gegen $\mathfrak{J}^2$ ist, zeigt recht gut die weiter oben schon abgeleitete Tendenz einer Zunahme mit dem Dichtegradienteneinfluß. Einzelheiten bieten kein besonderes Interesse.

Die so gefundenen Beziehungen für die reelle Wurzel x_1 und das kleine komplexe Wurzelpaar $x_{2,3}$ lassen sich noch in allgemeiner Form verbessern, etwa durch sinngemäße Anwendung des von Bairstow für die Frequenzgleichung 4. Grades angegebenen Verfahrens. Doch werden die Ausdrücke, die man auf diesem Wege findet, unhandlich und unübersichtlich. Deshalb soll statt dessen in einem Beispiel gezeigt werden, wie sich durch Berücksichtigung des Dichtegradienteneinflusses Dämpfung und Frequenz der Bahnschwingung ändern.

Der Rechnung zugrunde gelegt ist ein Flugzeug mit folgenden Merkmalen und folgenden Flugzuständen:

Flächenbelastung $\frac{G}{F} = 200$ kg/m²,
Spannweite $2\,s = 20$ m,
Trägheitsradius um die Quer-(Y-)Achse $i_y = \sqrt{10}\cdot s$,
Lage des Schwerpunkts 3% der Flügeltiefe vor der Indifferenzachse des Längsmoments,

I. Flug in Bodennähe mit $v = 150$ m/s Geschwindigkeit,
  a) bei einem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} = -0{,}0065^\circ$/m,
  b) bei einem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} = +0{,}050^\circ$/m,
  c) ohne Dichtegradienteneinfluß,

II. Flug in $H = 6500$ m Höhe mit $v = 179$ m/s Geschwindigkeit,
  a) bei einem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} = -0{,}0065^\circ$/m,
  b) bei einem Temperaturgradienten $\frac{dT}{dh} = +0{,}010^\circ$ m,
  c) ohne Dichtegradienteneinfluß.

Beide Beispielsgruppen sind durchgerechnet

1. für ein ideales Höhentriebwerk mit $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 0$,
2. für ein nichtaufgeladenes Triebwerk mit $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 1{,}333$.

Zahlentafel 1 zeigt den doppelten Realteil $2\,\mathfrak{R}$ der Bahnschwingung, und zwar

die erste Näherungslösung der Frequenzgleichung 3. Grades, bezeichnet mit $2\,\mathfrak{R}$ (3. Gr. 1. Näh.),
eine mehrfach verbesserte Lösung der Frequenzgleichung 5. Grades, bezeichnet mir $2\,\mathfrak{R}$ (5. Gr.),

die Summe der Quadrate von Imaginärteil und Realteil der Bahnschwingung, $\mathfrak{R}^2+\mathfrak{J}^2$, die mit sehr guter Näherung gleich dem Quadrat des Imaginärteils und damit der dimensionslosen Frequenz ist, und zwar

die erste Näherungslösung der Frequenzgleichung 3. Grades, bezeichnet mit $\mathfrak{R}^2+\mathfrak{J}^2$ (3. Gr. 1. Näh.),
eine mehrfach verbesserte Lösung der Frequenzgleichung 5. Grades, bezeichnet mit $\mathfrak{R}^2+\mathfrak{J}^2$ (5. Gr.).

Aus dieser Zusammenstellung sieht man folgendes: Die Verminderung der Dämpfung der Bahnschwingung durch den Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre ist bei Fluggeschwindigkeiten wie sie heute erreicht werden, nicht zu vernachlässigen. Besonders stark wird sie beim Flug in Inversionsschichten. Der Einfluß des Triebwerks ist erheb-

Zahlentafel 1.

$H = 0$ m; $v = 150$ m/s.

	$\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 0$		$\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 1{,}333$		
$10^3 \frac{dT}{dh}$ °/m	$-6{,}5$	$+50$	$-6{,}5$	$+50$	$\frac{d\varrho}{dh} = 0$
$\frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2}$	0,221	0,670	0.221	0,670	
$-10^2 \cdot 2\,\Re$ (3. Gr. 1. Näh.) . .	7,627	6,426	6,825	4,377	8,40
$-10^2 \cdot 2\,\Re$ (5. Gr.) .	7,464	6,194	6,591	3,929	8,353
$10^2 \cdot (\Re^2 + J^2)$ (3. Gr. 1. Näh.) . .	1,869	2,161	1,820	2,112	1,713
$10^2 \cdot (\Re^2 \cdot J^2)$ (5. Gr.)	1,869	2,160	1,815	2,111	1,773

$H = 6500$ m; $v = 179$ m/s.

	$\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 0$		$\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 1{,}333$		
$10^3 \frac{dT}{dh}$ °/m	$-6{,}5$	$+10$	$-6{,}5$	$+10$	$\frac{d\varrho}{dh} = 0$
$\frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2}$	0,361	0,588	0,361	0,588	
$-10^2 \cdot 2\,\Re$ (3. Gr. 1. Näh.) . .	7,262	6,721	5,985	4,838	8,40
$-10^2 \cdot 2\,\Re$ (5. Gr.) .	6,716	6,154	5,402	4,212	7,879
$10^2 \cdot (\Re^2 + J^2)$ (3. Gr. 1. Näh.) . .	6,093	6,588	6,030	6,499	5,177
$10^2 \cdot (\Re^2 + J^2)$ (5. Gr.)	6,000	6,459	5,942	6,410	5,254

lich, wenn die Leistung mit der Höhe abnimmt. Beim Höhentriebwerk verschwindet er, solange dessen Leistung konstant bleibt. Dabei ist allerdings noch einmal darauf hinzuweisen, daß es ein ideales trägheitsfrei geregeltes Höhentriebwerk nicht gibt, und daß der Einfluß der Trägheit der Höhenregelung des Triebwerks entdämpfend wirken kann.

Wie man aus einer Differenzenbildung sehen kann, wird die Abminderung der Dämpfung in allen Fällen, in denen sie beträchtlich ist, auf etwa 10% genau durch die erste Näherung der reellen Wurzel dieser Gleichung angegeben. Diese Größe ist sehr leicht abzuschätzen. Sie ist

$$\Delta (2\,\Re) = -\frac{\varkappa}{n} \cdot \frac{v^2}{a^2}\, \frac{c_w \left\{ \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln v} - \left(2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v}\right) \frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \right\}}{2 + \frac{\partial \ln c_a}{\partial \ln v} + \frac{\varkappa}{n} \frac{v^2}{a^2}}.$$

So hat man die Möglichkeit, sich schnell Gewißheit darüber zu verschaffen, ob die Dämpfungsverminderung kritisch werden kann.

Die Erhöhung der Frequenz der Bahnschwingung ist ebenfalls spürbar. Der Einfluß der Luftschichtung in der Atmosphäre ist auch hier sehr groß. Die Höhencharakteristik des Triebwerks verändert, wie nach den oben dargestellten Zusammenhängen zu erwarten ist, die Frequenz praktisch nicht. Die Veränderung der Frequenz wird durch die erste Näherung der abgekürzten Frequenzgleichung 3. Grades gut erfaßt.

Für die Praxis sind zwei Folgerungen zu ziehen: Bei Flug mit sehr großer Geschwindigkeit, vor allem in großen Höhen ist für die Frequenz und besonders für die Dämpfung der Bahnschwingung ein so großer Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre vorhanden, daß er bei der Nachrechnung von Messungen nicht vernachlässigt werden darf.

Bei der Bestimmung von Frequenz und Dämpfung der Bahnschwingung bei schnellen Flugzeugen sind Inversionsschichten, die man bei Flugmessungen gelegentlich gerne aufsucht, zu meiden.

Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung.

Von A. Busemann, Braunschweig.

Bei Überschallgeschwindigkeit und Vernachlässigung der Reibung gibt es »maßstablose« Gasströmungen, d. h. solche, die sich bei beliebiger Vergrößerung oder Verkleinerung auf sich selbst abbilden. Als ebene Strömung ist die bekannte Prandtl-Meyersche »Strömung um die Ecke« von dieser Art. Zu diesen Strömungen im Raume, die auch als kegelförmige Strömungsfelder bezeichnet sind, gehört beispielsweise die gerade und die schräg angeblasene Kegelspitze. In der vorliegenden Arbeit werden die kegelförmigen Strömungsfelder mit Achsensymmetrie eingehend untersucht. Es läßt sich zeigen, daß als Parallelströmung beginnend überhaupt nur zwei Typen und deren Vereinigung möglich sind: 1. der bekannte axial angeblasene Kegel und 2. eine besondere Art von Verdichtungsdüsen. Sämtliche Strömungen weisen kegelförmige Verdichtungsstöße auf. Die Strömung an der Kegelspitze wird mit Rücksicht auf ihre ballistische Anwendung vollständig für sämtliche Kegelwinkel und Machsche Zahlen integriert. Geschlossene Ausdrücke ergeben sich nur für kleine Kegelwinkel. Das asymptotische Verhalten für Machsche Zahlen nahe eins wird besonders dargestellt.

Gliederung.

Einleitung.

Die axiale Überschallströmung gegen kegelförmige Spitzen habe ich 1929 in einem Vortrag behandelt, von dem nur ein kurzer Auszug[1]) in das Schrifttum eingegangen ist. Daher ist dieselbe Strömung teils abhängig, teils unabhängig von mehreren anderen Autoren[2]) behandelt. Eine Verallgemeinerung des hierbei auftretenden Strömungstypes habe ich 1935 in Rom auf der Volta-Tagung[3]) vorgetragen und als kegeliges Strömungsfeld bezeichnet. Obwohl durch die inzwischen erschienenen Arbeiten verschiedene einzelne Integrationen vorliegen, fehlte noch die größere Arbeit, für Luft alle möglichen Kegelwinkel und Machschen Zahlen der Anblasung so engmaschig zu integrieren, daß der Überblick vollständig wird. Diese Arbeit ist inzwischen von meinen Mitarbeitern W. Hantzsche und H. Wendt mit Hilfe des Rechenbüros meines Instituts durchgeführt. Sie haben dabei die Genauigkeit der zeichnerischen Lösungen durch numerische Integration nach dem Verfahren von Runge-Kutta kontrolliert und sich besonders um die genaue Lage der Endpunkte der Integrationslinien bemüht, die beim Zeichnen am leichtesten unsicher wird. Die von ihnen gewählten Machschen Zahlen entsprechen den Druckzahlen (999), 996, 992, 988 usw. 964, 956, 945, 930, 870,9 nach meiner Zählung im Handbuchartikel[4]).

Ich freue mich, diese Werte noch zum Gedächtnisheft des leider so früh verstorbenen C. Wieselsberger herausbringen zu können, der sich gerade in den letzten Jahren besonders stark mit Gasdynamik beschäftigt hat und in seinem Überschallkanal Kegelspitzen messen ließ.

Durch genaue Untersuchung aller möglichen kegeligen Strömungen mit Achsensymmetrie wird gezeigt, daß es neben den kegelförmigen Spitzen nur noch eine bestimmte Art von Verdichtungsdüsen gibt, deren Strömungen in diese Gruppe fallen. Dabei wird besonders eingehend dargelegt, warum diese beiden Strömungen bei vollkommenen Gasen nie völlig isentropisch verlaufen können. Eine Untersuchung darüber, wie weit die Strömungen an kegelförmigen Spitzen beobachtbar sind, wie Crocco[5]) dies für die Strömung an Keilschneiden gezeigt hat, fehlt dagegen noch.

II. Die Differentialgleichung des kegelförmigen Feldes.

1. Wechselseitige Beziehungen zwischen Strömungsraum und Geschwindigkeitsbild. Im Gegensatz zu meinem Vortrag 1929, in dem ich die Beziehungen anschaulich entwickelt habe, möchte ich hier die analytische Ableitung des Volta-Berichtes ausführlicher wiederholen. Im Strömungsraume x, y, z soll der Strömungszustand durch ein stationäres Geschwindigkeitsfeld mit den Komponenten u, v, w festgelegt sein, wobei vorausgesetzt wird, daß für dieses Feld ein Geschwindigkeitspotential Φ besteht. Der Einwand, daß diese Voraussetzung im kegeligen Feld bei gewöhnlichen und bei vollkommenen Gasen nur selten erfüllt werden kann, ist hier unwesentlich, weil das später allein behandelte achsensymmetrische kegelige Feld für alle Gase einer dieser seltenen Fälle ist. Für das Potential liefert die Gasdynamik unter Verwendung der Schallgeschwindigkeit a folgende Differentialgleichung

$$\Phi_{xx}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)+\Phi_{yy}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)+\Phi_{zz}\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)$$
$$-2\,\Phi_{xy}\frac{u\,v}{a^2}-2\,\Phi_{xz}\frac{u\,w}{a^2}-2\,\Phi_{yz}\frac{v\,w}{a^2}=0\quad .\;.\;.\quad (1)$$

Die unteren Indizes sind als vereinfachte Bezeichnungen für die partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten angewandt. Nach der Definition des Geschwindigkeitspotentials ergeben die ersten partiellen Ableitungen nach den Raumkoordinaten die Geschwindigkeitskomponenten $\Phi_x = u$, $\Phi_y = v$, $\Phi_z = w$. Benutzt man die Geschwindigkeitskomponenten als die Koordinaten eines dreidimensionalen Geschwindigkeitsbildes (Hodograph), so ist durch die totalen Differentiale

$$\left.\begin{aligned} d\,u &= \Phi_{xx}\,d\,x+\Phi_{xy}\,d\,y+\Phi_{xz}\,d\,z\\ d\,v &= \Phi_{yx}\,d\,x+\Phi_{yy}\,d\,y+\Phi_{yz}\,d\,z\\ d\,w &= \Phi_{zx}\,d\,x+\Phi_{zy}\,d\,y+\Phi_{zz}\,d\,z \end{aligned}\right\}\quad .\;.\;.\;.\quad (2)$$

jedem Volumenelement des Strömungsraumes mit den Kanten dx, dy, dz durch Vermittlung der zweiten Ableitungen des Potentials ein bestimmtes Volumenelement des Geschwindigkeitsbildes zugeordnet. Diese Zuordnung läßt sich umkehren, wenn die Determinante jenes linearen

[1]) A. Busemann, Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 9 (1929), S. 496.

[2]) F. Bourquard, Ondes ballistiques planes obliques et ondes coniques. Comptes Rendus Bd. 194 (1932), S. 846.

Th. v. Kármán and N. B. Moore, Resistence of slender bodies moving with supersonic velocities, with special reference to projectiles. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. (1932) S. 303.

G. J. Taylor and J. W. Maccoll, The air pressure on a cone moving at high speeds. Proc. R. Soc. A, Bd. 139 (1933), S. 278.

[3]) A. Busemann, Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Convegno di sc. fis. mat. e nat., Roma 1935, S. 345 und Lufo Bd. 12 (1935), S. 217.

[4]) A. Busemann, Gasdynamik in Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, 1. S. 426.

[5]) L. Crocco, Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell' intorno di una prora a diedro. Aerotecnica 17 (1937), S. 519.

Gleichungssystems nicht verschwindet. Die Umkehrung lautet:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \chi_{uu}\,du + \chi_{uv}\,dv + \chi_{uw}\,dw \\ dy &= \chi_{vu}\,du + \chi_{vv}\,dv + \chi_{vw}\,dw \\ dz &= \chi_{wu}\,du + \chi_{wv}\,dv + \chi_{ww}\,dw \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Sie wird in bekannter Weise durch das nach Legendre transformierte Potential $\chi\,(u, v, w)$ des Geschwindigkeitsbildes geleistet, das die Beziehung erfüllt:

$$\chi\,(u, v, w) = u\,x + v\,y + w\,z - \Phi\,(x, y, z) \quad \ldots (4)$$

und dessen erste Ableitungen nach den Geschwindigkeitskomponenten die Raumkoordinaten $\chi_u = x$, $\chi_v = y$, $\chi_w = z$ ergeben, wie man durch die Differentiation von (4) feststellt. Mit Hilfe des Legendreschen Potentiales χ lassen sich die Beziehungen als völlig wechselseitige erkennen.

2. Die Besonderheiten des kegeligen Feldes. Gerade in unserem Fall des kegeligen Feldes erfahren die wechselseitigen Beziehungen eine gewisse Entartung, wobei die Darstellung der Strömung im Geschwindigkeitsbild ihre Koordinaten besser ausnutzt als die räumliche Darstellung. Legt man nämlich den ausgezeichneten Punkt des kegeligen Feldes, die Spitze der Kegel, in den Koordinatenanfangspunkt, so ist es das Kennzeichen des kegeligen Feldes, daß alle Strömungen auf sich selbst abgebildet werden, wenn man die räumlichen Koordinaten mit dem gleichen Faktor vergrößert oder verkleinert. Alle Strahlen von der Kegelspitze aus verbinden demnach nur Punkte mit gleichem Geschwindigkeitsvektor, gleichem Druck und gleicher Dichte des Gases. Bestimmt man für eine solche Strömung das Geschwindigkeitspotential, wobei sich als besonders einfache Integrationswege die Strahlen aus dem Koordinatenanfangspunkt anbieten, so erhält man

$$\Phi = \int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = u\,x + v\,y + w\,z + \text{konst.} \quad (5)$$

Dieses Potential in (4) eingesetzt, liefert für das Legendresche Potential χ im Geschwindigkeitsbild nur eine einzige Fläche (Bild 1):

$$\chi\,(u, v, w) = \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots (4\,\text{a})$$

Hierin finden wir die Aussage, daß die Möglichkeiten der dreidimensionalen Strömung im kegeligen Feld nicht ausgeschöpft werden können, ganz besonders deutlich ausgedrückt, während sie im Strömungsraum doch nur als eine zusätzliche Verabredung erscheint. Bildet man nun das totale Differential von χ auf der Fläche χ = konst., so ergibt sich

$$d\chi = \chi_u\,du + \chi_v\,dv + \chi_w\,dw = x\,du + y\,dv + z\,dw = 0 \quad (4\,\text{b})$$

Hieraus folgt, daß der Strahl des Strömungsraumes mit den laufenden Koordinaten x, y, z senkrecht auf dem zugehörigen Flächenelement der χ-Fläche steht. Allein die Geometrie der χ-Fläche im Geschwindigkeitsbild liefert demnach alle quantitativen Aussagen sowohl über die vorkommenden Geschwindigkeiten als auch über die Orte, an denen sie auftreten. Dabei benutzen die bisher verwendeten Gleichungen keine andere Forderung, als daß im kegeligen Feld ein Geschwindigkeitspotential bestehen soll.

3. Die Beschränkung auf zwei Koordinaten. Nicht alle Flächen im Geschwindigkeitsfeld lassen sich als Abbildungen von kegeligen Gasströmungen deuten. Hierzu ist erforderlich, daß vom Strömungspotential die Gleichung

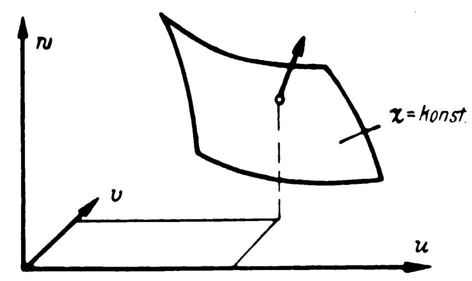


Bild 1. Geschwindigkeitsfläche des kegeligen Strömungsfeldes.

(1) erfüllt wird. Die bisher zur Übertragung dieser Gleichung angegebenen Mittel, die Gleichungen (3) und (4) werden zunächst unbestimmt, weil die vorkommenden Geschwindigkeiten eine Fläche und keinen Raum des Geschwindigkeitsbildes erfüllen. Die Abhängigkeit der zweiten Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials in (2) beim kegeligen Feld erkennt man daraus, daß sämtliche Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten du, dv, dw verschwinden müssen, wenn man den Fortschritt dx, dy, dz proportional den Ortskoordinaten x, y, z wählt, also auf einem Strahl durch den Koordinatenanfangspunkt bleibt. Diese drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} du &= \Phi_{xx}\,x + \Phi_{xy}\,y + \Phi_{xz}\,z = 0 \\ dv &= \Phi_{yx}\,x + \Phi_{yy}\,y + \Phi_{yz}\,z = 0 \\ dw &= \Phi_{zx}\,x + \Phi_{zy}\,y + \Phi_{zz}\,z = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

legen von den sechs verschiedenen zweiten Ableitungen drei fest, z. B.:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{xz} &= \Phi_{zx} = -\Phi_{xx}\frac{x}{z} - \Phi_{xy}\frac{y}{z} \\ \Phi_{yz} &= \Phi_{zy} = -\Phi_{yx}\frac{x}{z} - \Phi_{yy}\frac{y}{z} \\ \Phi_{zz} &= \Phi_{xx}\frac{x^2}{z^2} + 2\,\Phi_{xy}\frac{x\,y}{z^2} + \Phi_{yy}\frac{y^2}{z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6\,\text{a})$$

Am einfachsten liest man diese Gleichungen, wenn man berücksichtigt, daß die Strahlen aus dem Koordinatenanfangspunkt durch die beiden unabhängigen Koordinaten x und y auf der Ebene $z = 1$ dargestellt werden können. Zur Beschreibung der χ-Fläche im Geschwindigkeitsbild wird man entsprechend auch nur die beiden Koordinaten u und v als unabhängige Koordinaten behandeln und die Koordinate w als eine abhängige Funktion von u und v in der Form $w\,(u, v)$ schreiben. Die Orthogonalität von dem Ortsvektor und dem Flächenelement nach Gleichung (4b) gestattet schon aus den partiellen ersten Ableitungen von w die Richtungstangenten des zugeordneten Strahles abzulesen:

$$w_u = \frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{x}{z}\,, \quad w_v = \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{y}{z} \quad \ldots\ldots (7)$$

Für eine Ebene z = konst. des Raumes ergeben sich daraus die totalen Differentiale

$$\left.\begin{aligned} dx &= -z\,dw_u = -z\,w_{uu}\,du - z\,w_{uv}\,dv \\ dy &= -z\,dw_v = -z\,w_{vu}\,du - z\,w_{vv}\,dv \end{aligned}\right\} \quad (7\,\text{a})$$

Der unabhängige Bestandteil von Gleichung (2) heißt ebenfalls auf einer Ebene $dz = 0$:

$$\left.\begin{aligned} du &= \Phi_{xx}\,dx + \Phi_{yx}\,dy \\ dv &= \Phi_{xy}\,dx + \Phi_{yy}\,dy \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Bei nichtverschwindender Determinante von (7a)

$$\Delta = w_{uu}\,w_{vv} - w_{uv}^2 \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7\,\text{b})$$

läßt sich (8) aus (7a) gewinnen, und man erhält folgende Gleichungen zwischen den zweiten Ableitungen von Φ und w:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{xx} = -\frac{w_{vv}}{z\cdot\Delta}\,, \quad \Phi_{yy} = -\frac{w_{uu}}{z\cdot\Delta} \\ \Phi_{xy} = \frac{w_{uv}}{z\cdot\Delta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

Die drei noch fehlenden Ableitungen ergeben sich hieraus nach (6a) unter Verwendung von (7):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{xz} = -\frac{w_{vv}\,w_u - w_{uv}\,w_v}{z\cdot\Delta}\,, \quad \Phi_{yz} = \frac{w_{uv}\,w_u - w_{uu}\,w_v}{z\cdot\Delta} \\ \Phi_{zz} = -\frac{w_{vv}\,w_u^2 - 2\,w_{uv}\,w_u\,w_v + w_{uu}\,w_v^2}{z\cdot\Delta} \end{aligned}\right\} \quad (9\,\text{a})$$

Damit läßt sich unmittelbar die Differentialgleichung (1) für das Geschwindigkeitspotential der Gasströmung in die Differentialbedingung für die χ-Fläche im Geschwindigkeitsbild verwandeln und man erhält:



$$\left.\begin{aligned} & w_{uu}\left[1-\frac{v^2}{a^2}+w_v^2\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)-2\,w_v\frac{v\,w}{a^2}\right] \\ & +w_{vv}\left[1-\frac{u^2}{a^2}+w_u^2\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)-2\,w_u\frac{u\,w}{a^2}\right] \\ & +2\,w_{uv}\left[\frac{u\,v}{a^2}-w_u\,w_v\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)+w_v\frac{u\,v}{a^2}+w_u\frac{v\,w}{a^2}\right]=0 \end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Diese Gleichung für das allgemeine kegelige Feld wurde deswegen abgeleitet, weil sie im Volta-Bericht durch einige Druckfehler entstellt ist (dort Gl. (36), S. 350 bzw. Lufo Bd. 12, S. 217).

III. Die Differentialgleichung des kegeligen Feldes bei Achsensymmetrie.

1. Übergang zur Achensymmetrie. Sollen ausschließlich achsensymmetrische Strömungen behandelt werden, so sind weitere wesentliche Einschränkungen zu machen, die nur noch eine unabhängige Koordinate im Strömungsraum oder im Geschwindigkeitsbild übrig lassen. Im Strömungsraum möge die Symmetrie in bezug auf die x-Achse vorhanden sein. In diesem Falle muß auch die χ-Fläche im Geschwindigkeitsbild eine Drehfläche, und zwar um die u-Achse darstellen. Für eine derartige Fläche braucht man nur die Meridianlinie in einem Achsenschnitt zu bestimmen, der senkrecht zur Drehachse eine Geschwindigkeitskomponente ω und parallel zu ihr die unveränderte Geschwindigkeitskomponente u enthält. Die Funktion $\omega(u)$ ist die Gleichung der Meridianlinie in diesem Schnitt. Der Anschluß an die früheren Koordinaten wird für eine Drehfläche durch die Gleichung vermittelt:

$$[w\,(u,v)]^2=[\omega\,(u)]^2-v^2 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Führt man zunächst auf beiden Seiten die partiellen Differentiationen durch und geht man dann zu dem Achsenschnitt der Ebene $v=0$ über, so ergeben sich sofort folgende einfache Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} & w\,(u,0)=\omega\,(u), \qquad u=u, \qquad v=0 \\ & w_u=\omega_u=\omega', \qquad w_v=0 \\ & w_{uu}=\omega_{uu}=\omega'', \quad w_{uv}=0, \quad w_{vv}=-\frac{1}{w}=-\frac{1}{\omega} \end{aligned}\right\}\quad(11\,\text{a})$$

Danach läßt sich die Gleichung (10) jetzt in folgender Form schreiben:

$$\omega''-\frac{1}{\omega}\left\{1-\frac{u^2}{a^2}+(\omega')^2\left(1-\frac{\omega^2}{a^2}\right)-2\,\omega'\frac{u\,\omega}{a^2}\right\}=0$$

Die neue Geschwindigkeitskomponente ω und deren Ableitungen kann man für jeden Achsenschnitt benutzen. Solange man sich nur auf die achsensymmetrischen Strömungen beschränkt, wird man die ω-Achse etwa, wie eben angenommen, mit der w-Achse zusammenfallen lassen, oder man wird sie noch lieber in die v-Achse legen, um wie in der ebenen Strömung mit den Koordinaten x, y und den Geschwindigkeitskomponenten u, v zu arbeiten. Mit $v\,(u)$ lautet die obige Gleichung anders zusammengefaßt:

$$v\,v''=1+(v')^2-\frac{(u+v\,v')^2}{a^2} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Bei der Übertragung in den Achsenschnitt $x\,y$ des Strömungsraumes liefert v' dann Gleichung (7) entsprechend den Strahl vom Ursprung aus:

$$\frac{y}{x}=-\frac{1}{v'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7\,\text{c})$$

Für die zeichnerische Behandlung der Differentialgleichung (12) eignet sich besser eine andere Schreibweise, die man in ihrer vollen Bedeutung rascher bei der Gewinnung aus der allgemeinen Gleichung (10) erkennt, indem man ein neues Koordinatensystem U, V, W anwendet, das dem im Augenblick gerade betrachteten Punkt u, v, w auf der χ-Fläche besonders angepaßt ist. Die drei Freiheitsgrade der Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung kann man so ausnutzen, daß die W-Achse parallel zur Flächennormalen gerichtet wird und damit W_U und W_V für dieses Flächenelement verschwinden. In ihrer Verlängerung möge die Flächennormale direkt die U-Achse im Punkte U schneiden,

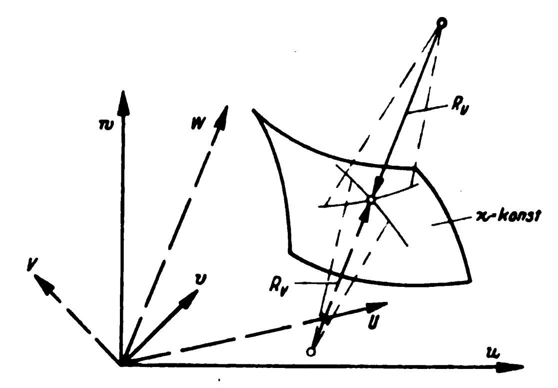


Bild 2. Krümmungen der Geschwindigkeitsfläche.

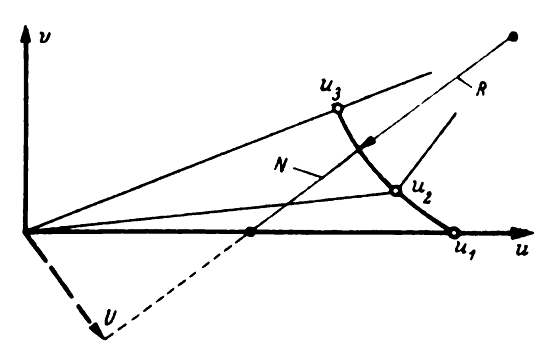


Bild 3. Die Konstruktion der Meridianlinie.

so daß der betrachtete Punkt die Koordinate $V=0$ erhält. Die allgemein gültige Gleichung (10) verrät dadurch ihre Vorschrift für die Krümmung der χ-Fläche in der einfachen Form:

$$W_{UU}+W_{VV}\left(1-\frac{U^2}{a^2}\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (10\,\text{a})$$

Wegen der besonders bequemen Lage sind W_{UU} und W_{VV} direkt die Krümmungen also die reziproken Krümmungsradien R_U und R_V in den beiden zueinander senkrechten Richtungen U und V. In jedem kegeligen Feld gilt daher:

$$R_U\left(1-\frac{U^2}{a^2}\right)+R_V=0 \ \ (\text{Bild 2}) \quad \ldots\ldots \quad (10\,\text{b})$$

Im Achsenschnitt einer achsensymmetrischen Strömung fallen bei dieser besonderen Lage nur die beiden Achsen U und W in die Schnittebene, während die V-Achse auf ihr senkrecht steht. Trotzdem kann man beide Krümmungsradien leicht in ihr erkennen. R_U ist natürlich der im Achsenschnitt sichtbare Krümmungsradius der Meridianlinie, aber auch der Krümmungsmittelpunkt für R_V liegt wie alle Punkte der Normalen in der Schnittebene. Es muß der Schnittpunkt der Normalen mit der Drehachse sein, wie man leicht erkennt, wenn man an eine Kugel denkt, welche die Drehfläche berührt und gerade in der Richtung senkrecht zum Achsenschnitt eine genügend lange Berührung mit ihr besitzt. Für die Meridianlinie der Drehfläche ist R_U einfach deren Krümmungsradius R und es ist R_V die sog. Normale N der Linie in bezug auf die Drehachse. Mit diesen Bezeichnungen heißt jetzt (10b):

$$R=-\frac{N}{1-\dfrac{U^2}{a^2}} \ \ (\text{Bild 3}) \quad \ldots \quad (12\,\text{a})$$

Ist der Nenner auf der rechten Seite positiv, so liegt die Meridianlinie zwischen der Normalen und dem Krümmungsmittelpunkt, die Drehfläche selbst erhält dadurch sattelförmige oder negative Krümmung. Überwiegt das negative Glied im Nenner, so liegen Krümmungsmittelpunkt und Normale einseitig von der Meridianlinie und man erhält eine Drehfläche mit kugelförmiger oder positiver Krümmung.

Berechnet man (12a) aus (12), so kann man diese Gestalt leicht finden, wobei sich U als folgende Abkürzung herausstellt:

$$U = \frac{u + v\,v'}{\sqrt{1 + v'^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12\,\text{b})$$

Bei stationären drehungsfreien Gasströmungen hängt die Schallgeschwindigkeit a nur vom Betrage der Strömungsgeschwindigkeit ab, sie ist also auf Kugeln um den Koordinatenanfangspunkt des Geschwindigkeitsbildes konstant. Im Achsenschnitt $w = 0$ sind dies konzentrische Kreise, die man auf folgende Weise allgemein angeben kann:

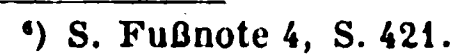
$$a^2 = f\,(u^2 + v^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Vollkommene Gase mit konstantem Adiabatenexponenten $\varkappa$ liefern die einfache Beziehung:

$$a^2 = \frac{\varkappa - 1}{2}\left\{c^2 - (u^2 + v^2)\right\} = \frac{\varkappa + 1}{2}\,a^{*2} - \frac{\varkappa - 1}{2}\,(u^2 + v^2) \quad (13\,\text{a})$$

worin c die konstante Maximalgeschwindigkeit, a^* die konstante Schallgeschwindigkeit im sog. kritischen Strömungszustand ist. Gegenüber (13) heißt das, die vollkommenen Gase zeichnen sich durch verschwindendes f'' und nicht positives f' aus. Teilweise kann man das allgemeinere Verhalten aller Gase in der Nähe ihrer Verflüssigung erkennen, wenn man die Ergebnisse auch für positive f' untersucht. Der bekannte Ausnahmefall mit $\varkappa = -1$, der auch bei unseren Betrachtungen wieder eine besondere Stellung bekommen wird, läßt sich auf diese Weise physikalisch deuten.

2. **Die singulären Stellen der Differentialgleichung.** Da die gesuchten Integrationslinien stets Meridianlinien von Drehflächen sind, genügt es, sich auf positive Werte v zu beschränken. Neben der u-Achse ist noch der Kreis mit maximaler Geschwindigkeit c oder mit $a = 0$ die natürliche Berandung des Integrationsgebietes. Das Gebiet wird zweckmäßig in den Unterschallbereich nahe dem Koordinatenanfangspunkt und in den Überschallbereich geteilt, die ihre gegenseitige Grenze auf dem Kreis mit $u^2 + v^2 = a^{*2}$ haben. Im Überschallbereich werden zweckmäßig die »Charakteristiken«[6]) der ebenen Strömung eingezeichnet, die mit unseren Bezeichnungen die Linien $U = \pm a$ darstellen (Bild 4). Denn U, der Abstand der Normalen vom Koordinatenanfangspunkt, liefert einen Wert U^2, der für einen beliebigen Punkt u, v die obere Grenze $U_m{}^2 = u^2 + v^2$ und die untere Grenze Null erreicht, wenn sich das Linienelement in diesem Punkt von radialer Richtung um 90° dreht. Da nun im Überschallbereich $U_m{}^2$ größer als a^2 ist, muß es zwei Richtungen geben,


[6]) S. Fußnote 4, S. 421.

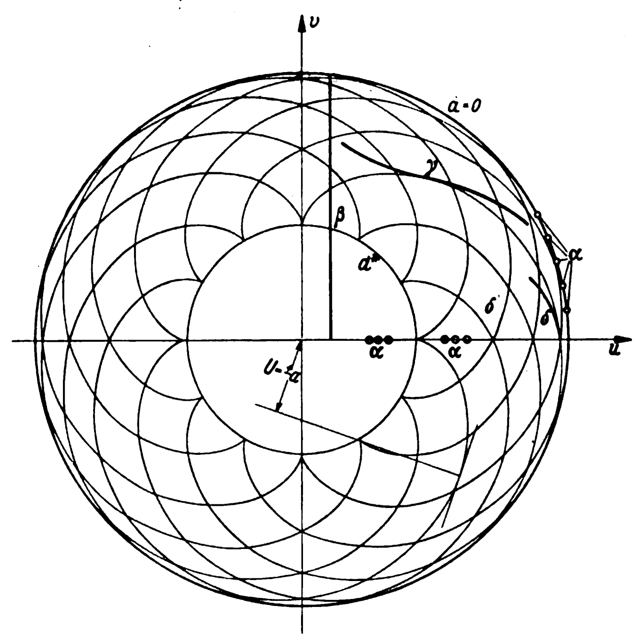


Bild 4. Singularitäten im Integrationsgebiet mit den Charakteristiken der ebenen Strömung.
α Meridianlinien mit $R = 0$,
β Meridianlinie u = konst. ($R = \infty$).
γ Wendepunkt einer Meridiankurve bei $U = \pm a$,
δ Einlauf der Meridianlinie in die u-Achse.

auf denen wegen $U = \pm a$ der Nenner in Gleichung (12) verschwindet. Die »Charakteristiken« mit $U = \pm a$ besitzen demnach zwei Scharen, die einander schneiden. Sie sind bei vollkommenen Gasen Epizykloiden, die am Kreis $a = a^*$ beginnen und den äußeren Kreis $a = 0$ berühren. Bei $\varkappa = 1$ erhält man Kreisevolventen, und es ist $a = 0$ erst im Unendlichen möglich, weil im Endlichen stets $a = a^*$ gilt. Der anormale Fall $\varkappa = -1$ besitzt den Wert $a = 0$ am inneren Rand des Geschwindigkeitsbereiches. Die Charakteristiken sind dort geradlinig und tangieren den Kreis $a = 0$.

Die singulären Stellen sind aus der Gleichung (12a) so leicht zu entnehmen, daß hier nur die Tatsachen berichtet werden sollen. Für $N = \infty$ oder $U = a$ wächst der Krümmungsradius R über alle Grenzen, so daß die Determinante (7b) verschwindet, und die Darstellung der Strömung im Strömungsraum auf Schwierigkeiten stößt. Auf der u-Achse und auf dem Kreis $a = 0$ sind dagegen unendlich kleine Krümmungsradien möglich.

Die Linien u = konst. sind Lösungen wegen $N = \infty$ und $R = \infty$, die jedoch wegen ihrer Unbrauchbarkeit im Strömungsraum weiterhin nicht mehr mit erwähnt werden sollen. Da sie im Inneren des Integrationsbereiches keine Verzweigungen besitzen, sind sie die Gewähr dafür, daß keine brauchbaren Integrationslinien über Punkte mit $du = 0$ zu mehrdeutigen Werten v bei gleichem u gelangen können. Auf dieselbe Weise ließen sich sofort die Lösungen $U = a$ abtun, wenn die Charakteristiken wie bei $\varkappa = -1$ geradlinig wären und mit $R = \infty$ die Gleichung (12a) auf der ganzen Länge erfüllen. Dann wäre man sicher, daß alle anderen Lösungen keine Punkte mit verschwindender Krümmung außer am Rande mehr besitzen können. Da aber die gewöhnlichen Charakteristiken gekrümmt verlaufen, während eine Integrationslinie bei $U = a$ sicher nicht gekrümmt sein kann, berühren die Integrationslinien die Charakteristiken stets von außen. Besitzt jede Schar der Charakteristiken für sich eine endliche überall gleichsinnige Krümmung, so ist eine derartige Berührung von außen mit jeder Schar aber höchstens einmal möglich. Die Integrationslinie selbst erhält am Berührungspunkt einen Wendepunkt, so daß die Richtung der Normalen vor und hinter dem Wendepunkt dieselben Werte durchläuft und damit denselben Strahlen im Strömungsraum zwei verschiedene Geschwindigkeiten zugeordnet würden. Das Verschwinden der Determinante (7b) zeigt also, daß nur Linienstücke ohne Wendepunkt brauchbare Strömungen darstellen.

Zu unendlich starker Krümmung führt die Gleichung (12a) nur bei Annäherung an die Grenzen des Bereiches also an die u-Achse wegen $N = 0$ und an die Größtgeschwindigkeit wegen $a = 0$. Jeder Punkt der Grenzen ist selbst als unendlich kleiner Kreis Lösung, doch ist der Grenzkreis daneben in seiner ganzen Ausdehnung eine Lösung mit $U = 0$. Die u-Achse besitzt im Unterschallteil und Überschallteil einen recht verschiedenen Einfluß auf Linien, die sich ihr zu nähern suchen. Bei Unterschallgeschwindigkeit wird die Linie noch bei endlichem Abstand von der Achse in die Richtung parallel zu ihr gekrümmt und so stets zur Umkehr gezwungen, während bei Überschallgeschwindigkeit jeder Punkt der Achse in zwei Richtungen wirklich erreicht werden kann. Man erkennt dies durch Reihenentwicklung nach Gleichung (12) mit einer Schallgeschwindigkeit nach Gleichung (13) vom Punkte u_1 der Achse aus. Man findet:

$$v = \sqrt{\frac{u_1{}^2}{a_1{}^2} - 1}\,(u - u_1) + \frac{(1 - f')\,u_1{}^3}{a_1{}^4\sqrt{\frac{u_1{}^2}{a_1{}^2} - 1}}\,(u - u_1)^2$$

$$+ \frac{u_1{}^4}{3\,a_1{}^6}\left(\frac{u_1{}^2}{a_1{}^2} - 1\right)^{-\frac{3}{2}}\Big\{\big((1 - f')\,(7 - 4\,f') - 2\,a_1{}^2 f''\big)$$

$$- \big((1 - f')\,(5 - 2\,f') - 2\,a_1{}^2 f''\big)\frac{u_1{}^2}{a_1{}^2}\Big\}$$

$$\times\,(u - u_1)^3 \ln\frac{u - u_1}{u_1} + C\,(u - u_1)^3 + \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

oder einfacher für vollkommene Gase nach Gleichung (13a):

$$v = \sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1} \cdot (u - u_1) + \frac{(\varkappa + 1)\, u_1^3}{2\, a_1^4 \sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}} (u - u_1)^2$$

$$+ \frac{(\varkappa + 1)\, u_1^4}{6\, a_1^6 \left(\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ (2\varkappa + 5) - \frac{u_1^2}{a_1^2} (\varkappa + 4) \right\} (u - u_1)^3 \ln \frac{u - u_1}{u_1} + C\,(u - u_1)^3 + \ldots \quad (14\text{a})$$

Die Möglichkeit, nahe der Achse starke Krümmungen anzuwenden, dient also bei Überschall dazu, die Integrationslinien in die Richtung und in die doppelte Krümmung der Charakteristiken zu lenken, so daß hier ausnahmsweise einmal eine Berührung derselben von innen stattfindet. Während an den regulären Punkten schon die Richtung einer Integrationslinie wählbar ist, können aus der Achse an einem Punkte mit Überschallgeschwindigkeit nur solche Linien starten, die sich erst in der Krümmungsänderung des 4. Summanden durch die wählbare Konstante C unterscheiden. Eine zusätzliche scharfe Krümmungsänderung wird allen gemeinsam noch durch das logarithmische Glied des 3. Summanden in (14) oder (14a) vorgeschrieben, das außer bei $\varkappa = -1$ nur an einer bestimmten Stelle der u-Achse verschwindet. Dies Glied bedeutet praktisch nur, daß die Evolute der Integrationslinien hier eine infinitesimale flache Stelle besitzt, die auch bei zeichnerischer Lösung keine ungewöhnlichen Schwierigkeiten bereitet.

Die Verhältnisse auf dem Grenzkreis sind ähnlich. Mit Ausnahme der beiden Punkte auf der u-Achse besitzt der Kreis, der selbst Lösung ist, bei gewöhnlichen Gasen überall Verzweigungspunkte, d. h. man kann ihn tangential unter dem Krümmungsradius $R = \frac{1 + f'}{1 - f'}\, u_{\max}$ bzw. $R = \frac{3 - \varkappa}{\varkappa + 1}\, u_{\max}$ verlassen.

3. Näherungslösungen in der Nähe der Achse. Wenn die Achse selbst auch besonders singulär ist, kann man doch für einen kleinen aber endlichen Abstand starke Vereinfachungen in der Gleichung (12) vornehmen, die zu brauchbaren Näherungslösungen führen. Man wird den dritten Summanden der rechten Seite konstant gleich dem Anfangswert setzen:

$$v\, v'' = 1 + (v')^2 - \frac{u_1^2}{a_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

Lösungen dieser Gleichung lassen sich mit einer Kreis- oder Hyperbelfunktion sowie für $u_1 = a_1$ mit der Exponentialfunktion ansetzen. Die wesentlich verschiedenen Fälle sind folgende:

$$v = A \sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}\, \sin \frac{u_1 - u}{A} \quad (15\text{a})$$

$$v = A \sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}\, \mathfrak{Sin} \frac{u_1 - u}{A} \quad (15\text{b}) \qquad \text{für Überschall}$$

$$v = B\, e^{\frac{u_1 - u}{A}} \quad \text{für Schallgeschwindigkeit} \quad (15\text{c})$$

$$v = A \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{a_1^2}}\, \mathfrak{Cof} \frac{u_1 - u}{A} \quad \text{für Unterschall} \quad (15\text{d})$$

Die beiden Integrationskonstanten sind A und u_1 bzw. B. Diese Näherungen zeigen die Grundtypen aller Lösungen auch in größerer Entfernung von der Achse. Bei Überschallgeschwindigkeit liefern die Meridianlinien Drehflächen von positiver oder negativer Krümmung, bei Unterschallgeschwindigkeit nur von negativer also sattelförmiger Krümmung. In der durch das Vorzeichen von $u_1 - u$ bereits vorgesehenen Richtung abnehmender Geschwindigkeiten betrachtet, erhält man bei der Übertragung in den Strömungsraum nach Gleichung (7c) aus der Lösung (15a) eine Verdichtungsdüse, die mit Parallelströmung beginnt und wieder mit Parallelströmung endet. Die Störung der Parallelströmung geht von der gekrümmten Düsenwand aus, sie trifft die Strahlachse in einem einzigen Punkt und läßt die Strömung im Machschen Kegel stromabwärts dieses Punktes sofort wieder ungestört abströmen. Bei der Lösung (15b) ist der Sitz der Störung in der Achse zu suchen, denn es wird von der Störung nur das Innere eines nach stromabwärts geöffneten Machschen Kegels $\left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{1}{v'}\right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2}{u_1^2 - a_1^2}}$ erfaßt. Man kann diese Strömung durch eine feste kegelförmige Wand dort begrenzen, wo die Normale der Integrationslinie gerade durch den Koordinatenanfangspunkt des Geschwindigkeitsbildes zeigt, d. h. in jedem Punkte u_3, v_3, wo der Geschwindigkeitsvektor parallel zur Begrenzung x_3, y_3 verläuft. Diese Bedingung lautet nach Gleichung (7c):

$$\frac{v_3}{u_3} = \frac{y_3}{x_3} = -\frac{1}{v_3'} = \operatorname{tg} \beta \quad \text{oder} \quad v_3 v_3' = -u_3 \quad . \; . \; (16)$$

Sie liefert sowohl die Geschwindigkeit am Kegelmantel als auch den halben Öffnungswinkel β des Kegels. Bei der Näherung nach (15b) und der entsprechenden Vernachlässigung in (16) kann man für kleine Kegelwinkel folgende Geschwindigkeiten am Kegelmantel erwarten:

$$u_3 = u_1 - \frac{v_3^2}{u_1} \ln \left\{ \frac{2}{\sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}} \cdot \frac{u_1}{v_3} \right\} \quad \text{für Überschall} \quad (16\text{a})$$

Bedenkt man, daß $\frac{v_3}{u_1}$ näherungsweise den Kegelwinkel β und $\frac{u_1 - u_3}{u_1}$ die Druckzunahme $p_3 - p_1$ von der ungestörten Strömung bis zum Kegelmantel bezogen auf den doppelten Staudruck $2q = \varrho_1 u_1^2$ darstellt, so kann man aus dieser Näherung sofort praktische Werte entnehmen. Bei Unterschallgeschwindigkeit geht die Linie nach (15d) zwar nicht von der Achse aus. Man kann aber für $u_2 = u_1$ und $v_2 \neq 0$ wieder nach (16) einen begrenzenden Kegel angeben, der folgende Werte am Mantel benutzt:

$$u_3 = u_2 - \frac{v_3^2}{u_2} \ln \left\{ \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{a_2^2}}} \cdot \frac{u_2}{v_3} \right\} \quad \text{für Unterschall} \quad (16\text{b})$$

4. Verdichtungsstöße. Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgangen sein, daß die Näherungslösungen (15a) und (15b) nicht die genauen Einlaufbedingungen (14) in die u-Achse erfüllen. Bei (15a) ist das Verlassen der Achse in Richtung abnehmender Geschwindigkeiten vielleicht nachträglich zu berichtigen, denn die dort vorgeschriebenen Einlaufbedingungen verlangen eine Krümmung von dem gleichen Sinn, wie im weiteren Verlauf der Linie. Die zweite Lösung (15b) kann dagegen nur dann mit der Achse verbunden werden, wenn man durch einen Wendepunkt hindurch zur entgegengesetzten Krümmung übergeht. Über Wendepunkte hinaus lassen sich die Integrationslinien aber nicht verwenden. Doch auch die erste Lösung (15a), die auf der u-Achse noch beginnen konnte, ist nicht imstande, die Achse, wie früher angenommen, am Ende des Sinusbogens wieder zu erreichen, ohne einen Wechsel im Krümmungssinn vorzunehmen. So sind alle beiden Lösungen Näherungen, deren praktische Bedeutung zweifelhaft wird. Bei den Näherungen (15a) bis (15d) war keine besondere Art des Gases vorgeschrieben, während die Gasart wesentlich für die in (14) berechnete Einlaufkrümmung ist. Das Gas mit $\varkappa = -1$ wäre sogar völlig mit den Näherungen einverstanden. Dieses Gas ist nun aber bekannt dafür, daß bei ihm alle Schwierigkeiten, die mit den Verdichtungsstößen zusammenhängen, schon für ebene Strömung fortfallen. Dies ist ein deutlicher Hinweis dafür, daß die gesuchten praktischen Lösungen nicht mit konstanter Entropie zu erreichen sein werden. Die Verdichtungsstöße

selbst und ihre Entropievermehrung lassen sich leicht von der ebenen Strömung auf die Fälle mit kegelig gekrümmten Stoßflächen übertragen. Denn die zur Bestimmung der Zustands- und Geschwindigkeitssprünge notwendigen Mengen-, Energie- und Impulsbilanzen werden von der Krümmung der Fläche nicht beeinflußt. Daneben muß dann nur noch der unmittelbare Anschluß an die stetigen Strömungsbereiche gesichert sein. Die Geschwindigkeitssprünge lassen sich im Geschwindigkeitsbild durch bestimmte geradlinige Strecken darstellen, an die dann die stetigen Integrationslinien beiderseits so anschließen müssen, daß auch die Richtung in den Anschlußpunkten übereinstimmt. Leider findet man im Inneren des Integrationsbereiches nur solche stetigen Fortsetzungen, die an den beiden Enden verschiedenen Krümmungssinn besitzen. Die Verdichtungsstöße stellen daher in die Länge gezogene Wendepunkte dar. Erst die besonderen Lösungen auf der u-Achse, die man als unendlich kleine Kreise ansehen und in beiden Umlaufsrichtungen benutzen kann, gestatten eine Fortsetzung der Verdichtungsstöße von jedem gewünschten Krümmungssinn. Man muß demnach die Wendepunkte durch so lange Verdichtungsstöße ersetzen, daß man an einem Ende des Stoßes gerade die u-Achse erreicht, falls man die Achse nicht überschreiten will.

Bei der Lösung (15a) bedeutet dies, daß man sie nur in der Richtung abnehmender Geschwindigkeit durchlaufen darf, also die u-Achse zunächst stetig verläßt (Bild 5). Die dabei nach vorn gerichtete Tangente muß nun an einer geeigneten Stelle den gesuchten Verdichtungsstoß liefern, der gerade auf die u-Achse zurückführt. Dies ist sicher erst dann möglich, wenn diese Tangente einen Schnittpunkt auf der positiven u-Achse hat, doch ist sie zunächst noch zu lang für einen Stoß. Da die Tangente rasch kürzer wird, dürfte die Länge des Verdichtungsstoßes bald ausreichen, ja bei den späteren Tangenten sogar über die u-Achse hinausführen. Doch nimmt die Länge des möglichen Stoßes dauernd ab, um schließlich beim Wendepunkt der stetigen

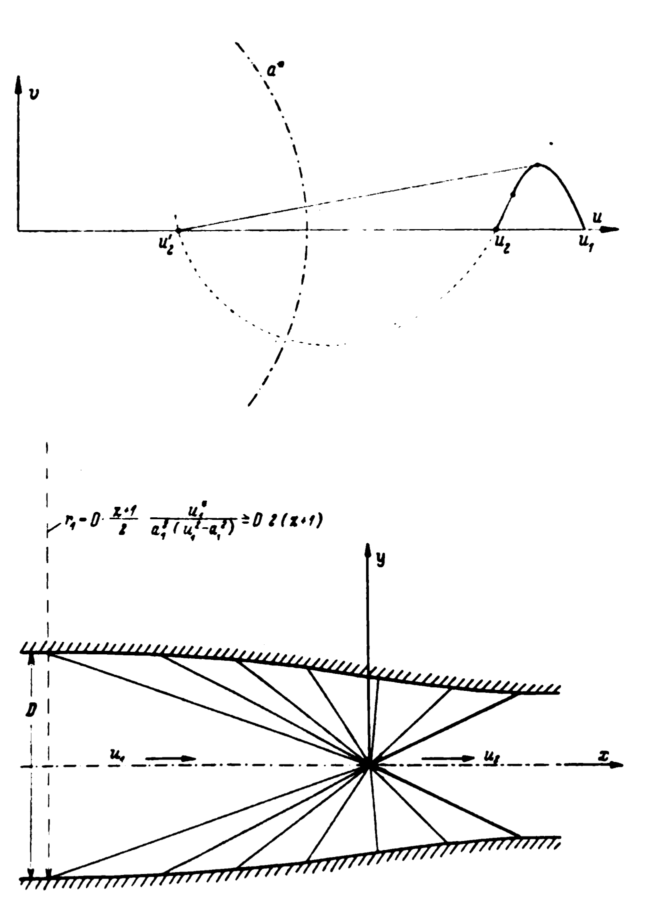


Bild 5. Verdichtungsdüse für die Machsche Zahl $Ma = \frac{u_1}{a_1} = 3$.

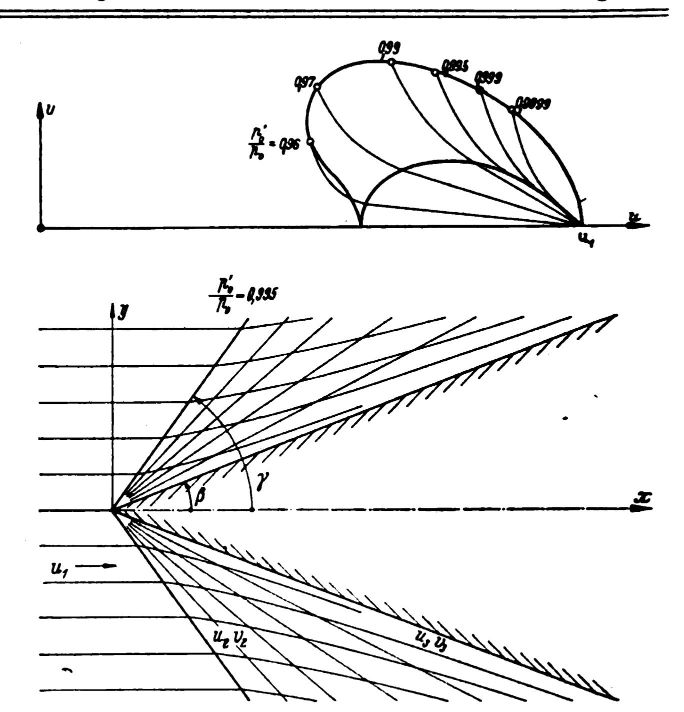


Bild 6. Stoßpolare und Polardarstellung der Geschwindigkeitsvektoren am Umfang von Kegeln (Anblasegeschwindigkeit = 1,414fache Schallgeschwindigkeit). Darunter der Achsenschnitt einer dieser Strömungen.

Integrationslinie infinitesimal zu werden. Es gibt daher nicht immer geeignete Verdichtungsstöße, um von der Integrationslinie auf die u-Achse zu springen. Gibt es aber solche, dann treten sie paarweise auf, wobei der längere mit Sicherheit auf der Unterschallstrecke der u-Achse endet, während der kürzere auch die Punkte des Überschallbereiches erreichen kann (u_2' und u_2 in Bild 5).

Die übrigen Lösungen (15b) bis (15d) sind nur dann zu gebrauchen, wenn man zunächst die u-Achse durch einen Verdichtungsstoß verläßt und an seinem Endpunkt, der bei Überschall-, Schall- und Unterschallgeschwindigkeit liegen kann, unter Beachtung der durch den Stoß festgelegten Richtung des Geschwindigkeitssprunges eine dieser Lösungen als Fortsetzung benutzt. Genau wie mit diesen Näherungslösungen für geringe Entfernungen von der u-Achse ist mit den genaueren analytischen oder zeichnerischen Lösungen zu verfahren. Bei vollkommenen Gasen kann man die von einem Punkte u_1 der Achse aus erreichbaren Endpunkte der Verdichtungsstöße analytisch angeben[7]). Diese Punkte u_2, v_2 mit $u_2 < u_1$ gehorchen der Gleichung des Cartesischen Blattes (Strophoide):

$$v_2 = (u_1 - u_2) \sqrt{\frac{u_2 - \frac{a^{*2}}{u_1}}{\frac{a^{*2}}{u_1} + \frac{2}{\varkappa + 1} u_1 - u_2}} \quad . \; . \; . \; (17)$$

Die Richtung im Anschlußpunkt ergibt sich aus der geradlinigen Verbindung von u_2, v_2 mit u_1 und liefert:

$$v_2' = -\frac{v_2}{u_1 - u_2} = \mp \sqrt{\frac{u_2 - \frac{a^{*2}}{u_1}}{\frac{a^{*2}}{u_1} + \frac{2}{\varkappa + 1} u_1 - u_2}} \quad (17a)$$

Von hier aus ist die Integration nach Gleichung (12) oder (12a) durchzuführen, bis der Punkt des Kegelmantels u_3, v_3 erreicht ist, der die Gleichung (16) erfüllt. Da die Geschwindigkeit zwischen u_1 und dem Punkte u_2, v_2 nicht isentropisch verdichtet wurde, ist bei der Berechnung des Druckes am Kegelmantel der Drosselverlust im Verdichtungsstoß zu berücksichtigen.

[7]) S. Fußnote 4, S. 436.

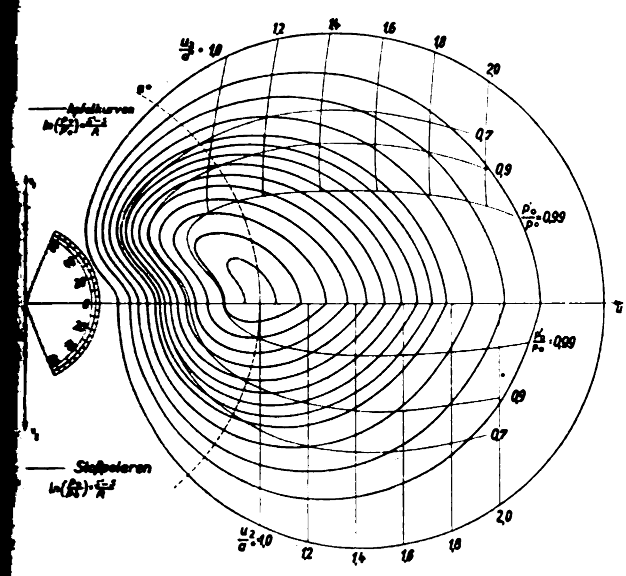


Bild 7. Apfelkurven und Stoßpolarendiagramm ($\varkappa = 1{,}405$).

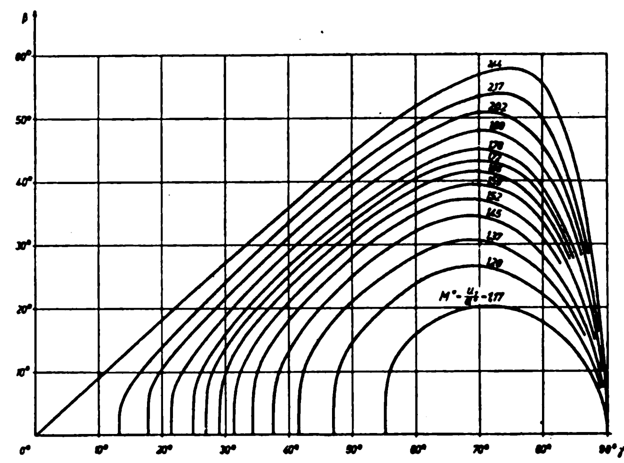


Bild 8. Der Öffnungswinkel des Kegels 2β in Abhängigkeit von dem des Verdichtungskegels 2γ für verschiedene Anblasegeschwindigkeiten $M^* = \frac{u_1}{a^*}$ ($\varkappa = 1{,}405$).

IV. Die Geschwindigkeitsverhältnisse an Kegelspitzen.

1. Die Geschwindigkeit am Kegelmantel (Bild 6). Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen sind die Integrationen bei Luft mit $\varkappa = 1{,}405$ für sämtliche Kegelwinkel und Geschwindigkeiten durchgeführt, bei denen der Verdichtungsstoß an der Kegelspitze beginnt. Die Ergebnisse sind in Bild 7 dargestellt. Die eigenartige Form der dargestellten Endpunkte u_3, v_3 aller Integrationen vom gleichen Punkt u_1 aus und die Tatsache, daß die Ebene ein Achsenschnitt ist, hat diesen Kurven den Namen »Apfelkurven« eingebracht. Genau wie die Darstellung der Gleichung (17) für die ebenen Verdichtungsstöße, die als »Stoßpolare« oder als »Blatt« bezeichnet wird, bedeutet jede einzelne Kurve eine Zuordnung der Ausgangsgeschwindigkeit u_1 (an der Blume des Apfels) zu allen aus ihr an axial angeblasenen Kegeln gewinnbaren Endgeschwindigkeiten am Mantel des Kegels. Auch hier gibt es für jeden vorhandenen Kegelwinkel zwei Punkte, von denen aber nur der Punkt mit der größeren Geschwindigkeit beobachtet werden kann, wenn dieser nicht ebenfalls bei Annäherung an den Grenzwinkel seine praktische Bedeutung einbüßt. Nahe der Achse, wo die zeichnerische Integration umständlich wird, schalten sich rechtzeitig die logarithmischen Näherungen (16a) und (16b) der Apfelkurve ein. Der Winkelbereich, bei dem die Drücke durch die Entropievermehrung in den Verdichtungsstößen nur unwesentlich gesenkt werden, ist bei den Kegelspitzen naturgemäß viel größer als bei den Stoßpolaren, die der ebenen Ablenkung an Keilen entsprechen. Will man aus der Darstellung die Drücke am Kegelmantel berechnen, so sind aus Bild 8 die Beziehungen zwischen dem Winkel des Verdichtungsstoßes γ und dem Kegelwinkel β zu entnehmen, die in Verbindung mit den Stoßpolaren deren Punkte u_2, v_2 liefern. Um die Punkte 2 auch schon in der Darstellung der Endzustände aufsuchen zu können, sind auf der unteren Hälfte die Stoßpolaren und auf der oberen Hälfte die den einzelnen Punkten zugehörigen Komponenten u_2 eingezeichnet, die sich leicht genügend genau interpolieren lassen. Direkt aus $\frac{u_2 - u_1}{u_1}$ ergibt sich die Druckerhöhung $p_2 - p_1$ im Verdichtungsstoß bezogen auf den doppelten Staudruck $2q = \varrho_1 u_1^2$. Der weitere Druckanstieg im Verhältnis zum Druck p_2 läßt sich adiabatisch aus den Werten $(u_2^2 + v_2^2)$ und $(u_3^2 + v_3^2)$ berechnen. Eine genaue Auswertung der Drücke und die Darstellung der einzelnen Integrationslinien soll einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

2. Die Verhältnisse nahe der Schallgeschwindigkeit. Die Apfelkurven gehen mit großen Bogen um das Gebiet nahe der Schallgeschwindigkeit herum, das in Bild 7 erst durch eine nicht zu der Schar gehörende gestrichelte Kurve ausgefüllt wurde. Dies liegt natürlich zum Teil daran, daß die Schnittpunkte der Charakteristiken, die zur Festlegung der Punkte u_1 benutzt wurden, nahe der Schallgeschwindigkeit wachsende Abstände besitzen. Die Stoßpolaren gleichen dies aus, indem sie dort in der Richtung v enger aneinanderrücken. Bei den Apfelkurven ist es umgekehrt, sie vergrößern ihren Abstand in Richtung v noch stärker als in Richtung u. Da das ganze Gebiet sich zum Schluß nahe der u-Achse befindet, sollte man glauben, daß sich eine geschlossene Lösung durch die Näherungen (15b) bis (15d) finden läßt, die schon bei allen anderen Äpfeln die Kurvenform an Blume und Stiel durch (16a) und (16b) lieferten. Bei genauer Abschätzung der Fehler findet man jedoch, daß die Ausgangsgleichung (15) nahe der Schallgeschwindigkeit zu grob ist. Denn durch die Anschlußbedingungen an den Stoß (17) und (17a) ergeben sich anfangs äußerst geringe Neigungen. Die starke Abnahme von u zu Beginn der Integrationslinien zwingt daher, die Änderung des dritten Summanden (12) wenigstens durch ein lineares Glied zu berücksichtigen. So findet man:

$$v v'' = 1 + (v')^2 - \left(1 + (\varkappa + 1)\frac{u - u^*}{a^*}\right) = v'^2 - (\varkappa + 1)\frac{u - u^*}{a^*} \quad \text{. . . . . (18)}$$

Bezeichnet man die auf $u^* = a^*$ bezogene Machsche Zahl mit

$$m^* = \frac{u_1}{a^*} \quad \text{. . . . . (18a)}$$

so kann man die Stoßpolare der Gleichung (17) nahe der Schallgeschwindigkeit angenähert schreiben:

$$v_2 = \{(m^* - 1)\, a^* - (u_2 - u^*)\} \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{2} \cdot \frac{(m^* - 1)\, a^* + (u_2 - u^*)}{a^*}} \quad (19)$$

Durch folgende Substitution kann man beide Gleichungen (18) und (19) für ein beliebiges (auch nichtvollkommenes) Gas auf das Gas mit konstanter Schallgeschwindigkeit A^* also mit $\varkappa = 1$ beziehen:

$$A^* = \frac{2}{\varkappa + 1} a^*, \quad M - 1 = \frac{\varkappa + 1}{2}(m^* - 1) \quad \text{. . (19a)}$$

Man erhält dann die für alle Gase verwendbaren Gleichungen

$$v v'' = v'^2 - 2\frac{u - u^*}{A^*} \quad \text{. . . . . . (18b)}$$

und

$$v_2 = ((M - 1)\, A^* - (u_2 - u^*)) \sqrt{\frac{(M - 1)\, A^* + u_2 - u^*}{A^*}} \quad \text{. . . . (19b)}$$

Die Integrationslinien lassen sich danach für alle Gase gemeinsam berechnen. Doch auch die Abhängigkeit von der Machschen Zahl ist nur scheinbar, wie folgende Änderung der Variablen $V(U)$ für $v(u)$ beweist:

$$\left.\begin{aligned} u - u^* &= (M-1)(U-U^*) \\ v &= (M-1)^{\frac{3}{2}} V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

Denn nun lauten die Gleichungen:

$$V V'' = (V')^2 - 2\frac{U-U^*}{A^*} \quad \ldots\ldots (18c)$$

und

$$V_2 = \left\{A^* - (U_2 - U^*)\right\}\sqrt{\frac{A^* + U_2 - U^*}{A^*}} \quad (19c)$$

Nur der Endpunkt der Integration wird von der Machschen Zahl und der Gasart abhängig, denn die Gleichung (16) ergibt nach den Substitutionen, wenn man beachtet, daß sie näherungsweise durch $v_3 \cdot v_3' = -a^*$ gegeben ist:

$$V_3 \cdot V_3' = -(M-1)^{-2} a^* = -\frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{A^*}{(M-1)^2} \quad (16c)$$

Wenn auch diese einmalige Aufgabe für alle Gase nahe der Schallgeschwindigkeit nicht schwerer zu lösen ist, als eine beliebige andere Apfelkurve, so gelingt es doch schon vorher, die Gleichung (16c) zur Umrechnung einer Kurve auf andere Machsche Zahlen und Gasarten zu verwenden. Denn die Gleichung (18c) kann in der Nähe und außerhalb der Apfelkurve im Gegensatz zur Nähe der Stoßpolaren (19c) ohne den zweiten Summanden der rechten Seite integriert werden und man erhält Lösungen nach (15c). Denkt man sich eine Apfelkurve für den Fall $M = M_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ in der Form $V_0 = V_0(U_0)$ gegeben, so kann man jeden anderen Fall daraus herstellen, wenn man zunächst die Meridianlinien nahe der Kurve V_0 berechnet:

$$V = V_0\, e^{-\frac{(U-U_0)(\varkappa_0+1)A^*}{V_0^2 \cdot 2 \cdot (M_0-1)^2}} \quad \ldots\ldots (18d)$$

Sie erfüllt offenbar die Differentialgleichung (18c) für große V und die Bedingung (16c) für $U = U_0$; durch (16c) werden aber gerade große Werte V vorgeschrieben, wenn M_0 in der Nähe von 1 liegt. Sucht man nun neue Endpunkte auf den Integrationslinien für den Fall $M = M_3$ und $\varkappa = \varkappa_3$, so lautet die Bedingung hierfür nach (16c):

$$-V_3 V_3' = \frac{\varkappa_0+1}{2}\,\frac{A^*}{(M_0-1)^2}\, e^{-2\frac{(U_3-U_0)(\varkappa_0+1)A^*}{V_0^2 \cdot 2 \cdot (M_0-1)^2}}$$

$$= \frac{\varkappa_3+1}{2}\,\frac{A^*}{(M_3-1)^2} \quad (16c)$$

Hierdurch wird jedem Punkt U_0, V_0 ein neuer Punkt U_3, V_3 zugeordnet, d. h. die gesamte Apfelkurve auf die neuen Verhältnisse umgerechnet. Man findet:

$$U_3 - U^* = U_0 - U^* + \frac{2(M_0-1)^2 V_0^2}{(\varkappa_0+1)A^*}\ln\left(\sqrt{\frac{\varkappa_0+1}{\varkappa_3+1}\,\frac{M_3-1}{M_0-1}}\right)$$

$$V_3 = V_0 \cdot \sqrt{\frac{\varkappa_3+1}{\varkappa_0+1}\,\frac{M_0-1}{M_3-1}} \quad \ldots\ldots (20a)$$

Berücksichtigt man nun die Substitutionen (20) und (19a), so lassen sich die Umzeichnungen der Apfelkurven auch in den ursprünglichen Abmessungen vornehmen und man erhält:

$$\frac{v_3}{a_3^*} = \frac{v_0}{a_0^*}\sqrt{\frac{m_3^*-1}{m_0^*-1}}$$

$$\frac{u_3 - u_3^*}{a_3^*} = \left\{\frac{u_0 - u_0^*}{a_0^*} + \left(\frac{v_0}{a_0^*}\right)^2 \ln\left(\sqrt{\frac{\varkappa_3+1}{\varkappa_0+1}\,\frac{m_3^*-1}{m_0^*-1}}\right)\right\}\frac{m_3^*-1}{m_0^*-1} \quad \ldots\ldots (20b)$$

Nach diesen Gleichungen für den einfacheren Fall $\varkappa_3 = \varkappa_0$ und $a_3^* = a_0^*$ sind die Punkte der gestrichelten Kurve aus den Punkten der nächst größeren bestimmt. Wenn hier auch die vorausgesetzte Nähe der Schallgeschwindigkeit noch nicht ganz ausreichend sein dürfte, so paßt die neue Kurve in der Gestalt doch schon recht gut in die Schar der einzeln berechneten Kurven. Aus (20b) erkennt man auch, daß die Höhe der Kurven sich nur mit $\sqrt{m^*-1}$ verringert. Die gewöhnliche Machsche Zahl $m = u_1/a_1$ ist auf folgende Weise mit m^* verwandt:

$$\frac{m^2-1}{m^2} = \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{m^{*2}-1}{m^{*2}} \quad \ldots\ldots (20c)$$

Dadurch gelingt es, für kleine $m-1$ leicht die größte kegelförmige Ablenkung $\beta_{\max}$ einer Spitze auf andere Gase auch bei gleicher Machscher Zahl umzurechnen:

$$\beta_{3_{\max}} \approx \frac{v_{3_{\max}}}{a^{*3}} = \frac{v_{0_{\max}}}{a_0^*}\cdot\sqrt{\frac{m_3-1}{m_0-1}\cdot\frac{\varkappa_0+1}{\varkappa_3+1}} \quad (20d)$$

Bei gegebener Machscher Zahl $m_3 = m_0$ besitzt der Grenzwinkel eine endliche, wenn auch geringe Abhängigkeit von der Gasart.

V. Zusammenfassung.

Als achsensymmetrische kegelige Überschallströmungen gibt es nur zwei Typen, eine Verdichtungsdüse und die Strömung entlang der axial angeblasenen Kegelspitzen. Beide Strömungen sind nur mit einem Verdichtungsstoß möglich, hinter dem die Strömung wegen der Kegeligkeit und der Achsensymmetrie des Geschwindigkeitsfeldes drehungsfrei bleibt. Die praktisch wichtigere Strömung an Kegelspitzen wird gegenüber den bekannten Darstellungen durch die Lösung sämtlicher Fälle für Luft mit $\varkappa = 1{,}405$ erweitert. Neu ist eine besondere Untersuchung der Verhältnisse bei Machschen Zahlen nahe eins für alle Gase. Der Grenzwinkel für Spitzen mit kegeligen Kopfwellen verringert sich dort mit der Wurzel aus dem Überschuß der Machschen Zahl über eins, er hängt nur geringfügig von der Gasart ab.

Ein Wirbelsatz für stationäre isoenergetische Gasströmungen.

Von W. Tollmien, Dresden.

Für stationäre isoenergetische Gasströmungen läßt sich ein Wirbelsatz aufstellen, der eine Verallgemeinerung einer aus der stationären Tragflügeltheorie wohlbekannten Beziehung darstellt. Aus diesem von L. Crocco zuerst betrachteten Wirbelsatz ergeben sich unmittelbar Folgerungen für spezielle Strömungen, z. B. für ebene Strömungen, und die Einführung einer neuartigen Stromfunktion läßt sich im Gegensatz zu dem Vorgehen von L. Crocco durchaus vermeiden. Schließlich wird diesem Wirbelsatz der Zirkulationssatz von V. Bjerknes für derartige inhomogene Gase gegenübergestellt.

Gliederung.

1. Problemstellung.

Wenn ein Körper sich mit gleichförmiger Überschallgeschwindigkeit durch ruhende Luft bewegt, so befindet sich an seiner Spitze oder vor ihr ein Verdichtungsstoß, den die Ballistiker als Kopfwelle bezeichnen. Beim Durchgang durch die Stoßfront ändern sich Geschwindigkeit, Druck, Dichte und Temperatur unstetig. Dabei bleibt die Energie der durchströmenden Masseneinheit konstant, die zugehörige Entropie ändert sich aber sprunghaft. Gewiß bleibt nach Überwindung der Stoßfront die Entropie jedes einzelnen Massenteilchens wiederum konstant, wenn man von der Wirkung der Reibung und Wärmeleitung absieht. Aber wegen der ungleichen Sprünge der Entropie beim Durchgang durch die Stoßfront besteht jedenfalls keine Gleichmäßigkeit der Entropieverteilung mehr. Die Massenteilchen haben eben verschiedenen Entropiegehalt, je nachdem, welche Stelle der Stoßfront sie durchschritten haben. Mit der Abweichung von der Isentropie ist das Auftreten von Wirbeln verknüpft.

Zur Untersuchung dieses Zusammenhanges, also zur Aufstellung des einschlägigen Wirbelsatzes, werde dem Geschwindigkeitsfeld die umgekehrte Fluggeschwindigkeit des Körpers überlagert, so daß eine **stationäre** Luftströmung den jetzt ruhend gedachten Körper umströmt. Da die Strömung vor dem Verdichtungsstoß vollständig gleichförmig ist, so hat die Strömung dort eine gleichmäßige Energieverteilung. Auch hinter dem Stoß bleibt die Strömung isoenergetisch, dagegen nicht mehr isentropisch. Für stationäre Strömungen kann man aber sofort noch eine Aussage über die Entropieverteilung hinter der Stoßfront machen. Da die Bahnlinien mit den Stromlinien zusammenfallen, bleibt der Entropiegehalt der Masseneinheit auf jeder Stromlinie hinter dem Verdichtungsstoß konstant.

Wenn wir uns von der Festlegung auf ein bestimmtes Beispiel befreien, so handelt es sich allgemein darum, einen Wirbelsatz für stationäre isoenergetische Gasströmungen aufzustellen, bei denen der Entropiegehalt der Masseneinheit auf jeder Stromlinie konstant ist.

2. Aufstellung des Wirbelsatzes.

Für die gekennzeichneten Gasströmungen werden die Grundgleichungen durch die Aussagen über Impuls- und Massestrom, über Energie- und Entropieverteilung geliefert. ϱ bedeute die Dichte, p den Druck, $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor, $\varkappa$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\mathfrak{v}\cdot\nabla\mathfrak{v} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird zur Ableitung des Wirbelsatzes zwar nicht gebraucht, sie werde der Vollständigkeit halber mit angegeben:

$$\operatorname{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für ein ideales Gas ist der Wärmeinhalt (Enthalpie = Druckenergie + Innere Energie) der strömenden Masseneinheit gleich $\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\varrho}$. Fügt man hierzu noch die kinetische Energie der strömenden Masseneinheit, so erhält man als Bedingung für isoenergetische Strömung:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} = C.$$

Die für die ganze Strömung gültige Konstante C kann durch $\frac{V_m^2}{2}$ ersetzt werden, wo V_m die größtmögliche Geschwindigkeit ist, welche gerade beim Ausströmen ins Vakuum $\left(\frac{p}{\varrho} = 0\right)$ erreicht werden kann. Damit schreibt sich die Bedingung für gleichmäßige Energieverteilung in der Form:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\varrho} + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} = \frac{V_m^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Entropie der Masseneinheit ist in mechanischen Einheiten:

$$s = \frac{R}{\varkappa-1}\ln\frac{p}{\varrho^\varkappa},$$

wobei R die Gaskonstante ist. Die Eigenschaft von s, auf jeder Stromlinie konstant zu sein, kann man daher so ausdrücken, daß

$$\frac{p}{\varrho^\varkappa} = f \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ist, wobei f eine Funktion ist, die auf den Stromlinien konstante Werte annimmt. In einem allgemeinen Sinn kann man die vorliegende Strömung demnach noch als adiabatisch bezeichnen, wenn sie auch nicht mehr isentropisch ist. Die Funktion f ist dabei als der Strömung eingeprägt anzusehen. Darüber soll zum Schluß noch einiges bemerkt werden.

Der angekündigte Wirbelsatz wird durch Umformung der Bewegungsgleichung (1) unter Elimination des Druckes und der Dichte gewonnen. Aus (3) und (4) folgt:

$$\varrho = f^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left[\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2)\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$p = f^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left[\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Nach (6) wird:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{1}{\varkappa-1} f^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left[\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \operatorname{grad} f$$
$$- f^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left[\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2)\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \operatorname{grad}\frac{\mathfrak{v}^2}{2}.$$

Zusammen mit (5) ergibt sich daraus:

$$-\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho} = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) f^{-1} \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{v}^2}{2} \qquad (7)$$

Da

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{v}^2}{2}$$

ist, so erhält man aus der Bewegungsgleichung (1) und aus (7) den Wirbelsatz:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \operatorname{grad} \ln f \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Statt $\ln f$ kann man in dieser Gleichung bis auf den Faktor $\frac{\varkappa - 1}{R}$ die Entropie der Masseneinheit s schreiben.

Dieser Wirbelsatz ist eine Verallgemeinerung der aus der Tragflügeltheorie bekannten Beziehung für volumbeständige Flüssigkeiten:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wonach unter gewissen Bedingungen die Wirbellinien mit den Stromlinien zusammenfallen müssen. Die Bedingungen für das Bestehen dieser Beziehung sind stationärer Charakter der Strömung und Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung mit einer einheitlichen Konstanten für die ganze Strömung. Nach unserer Ausdrucksweise handelt es sich also gerade um stationäre, isoenergetische Strömungen.

L. Crocco[1]) hat im Verlauf seiner Untersuchungen über eine Stromfunktion bei wirbelbehafteten Gasströmungen schon einen Wirbelsatz aufgestellt, der unserer Gleichung (8) entspricht [a. a. O. Gleichung (1'')]. Der von uns eingeschlagene Beweisgang weicht allerdings von dem Crocco's ab, wie es denn wegen der Bedeutung des neuen Wirbelsatzes überhaupt geboten erscheint, ihn aus dem garnicht notwendigen Zusammenhang mit der von Crocco eingeführten neuen Stromfunktion herauszulösen. Bei Schlußfolgerungen für spezielle Strömungen knüpft Crocco an die Gleichung

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}}{V_m^2 - \mathfrak{v}^2}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

[vgl. a. a. O. Gleichung (5)] an, die sofort aus (8) folgt, aber weniger als (8) aussagt. Wir werden (8) stets unmittelbar verwerten.

3. Folgerungen aus dem Wirbelsatz.

Bei der Erörterung des neuen Wirbelsatzes muß man zunächst feststellen, wie viele skalare Aussagen er enthält. Die Gleichung (8) ist freilich eine Vektorgleichung, indessen ist eine der drei darin enthaltenen skalaren Aussagen selbstverständlich. Der Vektor auf der linken Seite der Gleichung (8) steht nach der Definition des Vektorprodukts auf $\mathfrak{v}$ senkrecht. Dasselbe gilt für den Vektor auf der rechten Seite von (8), da die Funktion f auf den Stromlinien konstant sein muß. Also liegen die Vektoren auf beiden Seiten des Wirbelsatzes von selbst in einer Ebene senkrecht zu $\mathfrak{v}$. Der Wirbelsatz ist gleichwertig mit zwei skalaren Aussagen, und zwar über zwei Vektorkomponenten in einer Ebene senkrecht zu $\mathfrak{v}$.

Wendet man den Wirbelsatz beispielsweise auf ebene Strömungen an, so liefert der Wirbelsatz nur eine einzige skalare Aussage.

Diese kann man am einfachsten gewinnen, wenn man die übliche Stromfunktion ψ benutzt, also die Kontinuitätsgleichung (2) mit heranzieht. Wenn u und v die Geschwindigkeitskomponenten in einem kartesischen x-y-Koordinatensystem sind, so ist die Stromfunktion ψ definiert durch

$$\varrho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \varrho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Für den Wirbelsatz (8) kann man unter Benutzung der Stromfunktion jetzt schreiben:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f(\psi)}{d\psi} \operatorname{grad} \psi,$$

wofür man auch zwei skalare Gleichungen angeben kann:

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) v = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f}{d\psi} \varrho v,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) u = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f}{d\psi} \varrho u.$$

Diese beiden Beziehungen sind einer einzigen gleichwertig:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\varrho}{2\varkappa}(V_m^2 - \mathfrak{v}^2) \frac{d \ln f}{d\psi}$$

oder nach (5) und (6):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{p}{\varkappa - 1} \frac{d \ln f}{d\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Aus dieser Gleichung liest man sofort ab, daß die Wirbeldichte längs einer Stromlinie proportional dem Druck ist; denn $\frac{d \ln f}{d\psi}$ ist konstant auf einer Stromlinie. Dieser Satz ist nach anderer Herleitung schon von L. Crocco (a. a. O. S. 4) angegeben worden. Getrennt davon gewinnt Crocco dann eine der Gleichung (12) entsprechende Beziehung (a. a. O. Gleichung (10'). L. Crocco benutzt dabei aber eine neuartig definierte Stromfunktion, die dem vorliegenden Problem an sich gut angepaßt ist. Da die Änderung dieser Croccoschen Stromfunktion zwischen zwei Stromlinien nicht ein Maß für die durchfließende Masse ist, so erleidet diese Stromfunktion beim Durchgang durch die Stoßfront einen Sprung. Um diesen lästigen Zwischenfall zu vermeiden, haben wir bei unserer Herleitung die übliche Stromfunktion verwendet.

Aus (12) bekommt man durch bloße Rechnung die Differentialgleichung für ψ, wenn man u, v, ϱ, p nach (11), (5) und (6) durch ψ und seine Ableitungen ausdrückt.

Die Gleichung (12) wird man auch vielfach unmittelbar zur Abschätzung der Wirbeldichte benutzen können. Häufig sind nur geringe Abweichungen der Strömung von einer wirbelfreien Strömung zu erwarten, so daß man in erster Näherung die Strömung als Potentialströmung ansetzen wird. Entnimmt man dieser ersten Näherung den Druck und die Stromlinien, längs deren die wirbelerzeugende eingeprägte Funktion f transportiert wird, und setzt diese Größen in die rechte Seite von (12) ein, so gewinnt man damit eine Näherung für die Wirbeldichte.

4. Bjerknesscher Wirbelsatz.

Es erscheint nun sinnvoll, dem neuen Wirbelsatz einen Wirbelsatz nach der üblichen Art gegenüberzustellen, wie er von Helmholtz und Lord Kelvin für homogene Flüssigkeiten, von V. Bjerknes für inhomogene Flüssigkeiten aufgestellt wurde. Dabei wollen wir im Anschluß an Helmholtz die differentielle Formulierung voranstellen, aus der sich durch Integration über eine flüssige Fläche die Integralformulierung ergibt.

Einen derartigen Wirbelsatz gewinnt man in der üblichen Art durch Anwendung des rot-Operators auf die Bewegungsgleichung (1). Es ergibt sich

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \operatorname{rot} \mathfrak{v} - \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} = -\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho}\right) \quad . \; . \quad (13)$$

Nach einer bekannten Vektorumformung kann man dafür schreiben:

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \operatorname{rot} \mathfrak{v} - \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} = \operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} \frac{1}{\varrho} \quad . \; . \quad (14)$$

Dies ist die differentielle Vorstufe zum Bjerknesschen Wirbelsatz; denn durch Integration über eine flüssige Fläche erhält

[1]) L. Crocco, Una nuova funzione di correnta per lo studio del moto rotazionale dei gas. Rend. della R. Accad. dei Lincei Vol. XXIII, serie 6a, 1° sem. fasc. 2, 1936, ins Deutsche übersetzt in: Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation, Zs. f. Angew. Math. Mech. Bd. 17, S. 1, 1937. Die Zitate beziehen sich auf die deutsche Übersetzung.

man auf der linken Seite $\frac{d\Gamma}{dt}$, wo Γ die Zirkulation längs der umrandenden flüssigen Linie ist. Führt man (5) und (6) in die rechte Seite von (14) ein, so erhält man

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} = \frac{1}{2\varkappa} \operatorname{grad} (V_m{}^2 - \mathfrak{v}^2) \times \operatorname{grad} \ln f \quad (15)$$

Dieser Wirbelsatz stellt das Gegenstück zu unserem Wirbelsatz (8) dar. Wir wollen darauf verzichten, aus (15) spezielle Folgerungen zu ziehen, was wohl am besten nach dem Muster der in der dynamischen Meteorologie gängigen Verfahren geschehen würde. Während (15) eine Aussage über die Änderungsgeschwindigkeit der Wirbelstärke liefert, so gibt (8) unmittelbar eine Aussage über die Wirbeldichte. Aus diesem Grunde scheint (8) über die stationären isoenergetischen Strömungen leichter Aufschluß zu geben als der übliche Wirbelsatz (15).

5. Schlußbemerkung.

Die Funktion f war bisher als eingeprägt angenommen. Wenn wir an das eingangs erwähnte Beispiel der Strömung hinter der Kopfwelle eines Geschoßes denken, so würde das bedeuten, daß der betreffende Verdichtungsstoß genau bekannt sein muß. Im allgemeinen muß freilich die Stoßfront erst im Laufe der Berechnung der Strömung allmählich aufgebaut werden. Mit der Stoßfront läßt sich gleichzeitig der zugehörende Entropiesprung ermitteln, mit dem ja die Funktion f aufs engste zusammenhängt. Für die hinter einem jeweils berechneten Stück der Stoßfront liegenden Stromfäden ist die Funktion f sodann als eingeprägt anzusehen.

Ich möchte nicht verfehlen, abschließend zu bemerken, daß die vorstehenden Betrachtungen aus der anregenden Zusammenarbeit mit der Heeresversuchsanstalt Peenemünde hervorgegangen sind.

Überschallströmung um beliebig geformte Geschoßspitzen unter kleinem Anstellwinkel.

Von R. Sauer, Aachen.

Das Charakteristikenverfahren für achsensymmetrische Überschallströmungen wird auf nahezu achsensymmetrische Strömungen erweitert, wie sie bei Drehkörpern vorkommen, die unter kleinem Anstellwinkel angeblasen sind. Das Verfahren läßt sich auf beliebig geformte Geschoßspitzen anwenden und vereinfacht sich erheblich bei kegeligen Spitzen.

Gliederung.

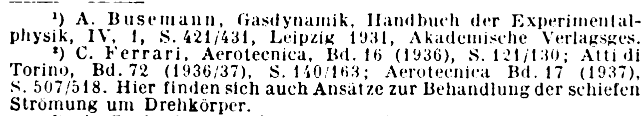
1. Einleitung.

Das Charakteristikenverfahren von Prandtl und Busemann[1]) für stationäre ebene Potentialströmungen mit Überschallgeschwindigkeit wurde in letzter Zeit von C. Ferrari[2]), G. Guderley[3]), R. Sauer[4]) und W. Tollmien auf achsensymmetrische räumliche Strömungen übertragen. Einen Schritt weitergehend untersuchen wir in der vorliegenden Arbeit räumliche Überschallströmungen, die nicht mehr achsensymmetrisch sind, jedoch nur wenig von achsensymmetrischen Strömungen abweichen.

Das Verfahren wird am Beispiel einer unter kleinem Anstellwinkel angeblasenen Geschoßspitze von beliebig vorgegebener Gestalt entwickelt. Infolge Beschränkung auf Potentialströmung werden die vom Verdichtungsstoß ausgelösten stetig verteilten Wirbel vernachlässigt.

Der Gang des Verfahrens ist folgender: Ausgegangen wird von der strengen Lösung des achsensymmetrischen Problems[4]). Für das durch die schiefe Anströmung hinzukommende Zusatzpotential ergibt sich eine lineare Potentialgleichung, wenn man die Abweichungen des Potentials gegenüber der achsensymmetrischen Strömung nur in der ersten Größenordnung berücksichtigt. Die Lösung dieser linearen Potentialgleichung, welche die Machschen Linien des achsensymmetrischen Problems als Charakteristiken hat, erfolgt nach einem zeichnerisch-rechnerischen Näherungsverfahren. Die Drehfläche des achsensymmetrischen Verdichtungsstoßes bleibt in erster Ordnung ungeändert, die Geschoßspitze dagegen muß zur Erfüllung der Randbedingungen um einen kleinen Winkel gedreht werden.

Als einfachste Anwendung behandeln wir die schiefe Strömung um den Drehkegel[5]). Das Verfahren vereinfacht sich hierbei wesentlich, da sich die Potentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen läßt.



[1]) A. Busemann, Gasdynamik, Handbuch der Experimentalphysik, IV, 1, S. 421/431, Leipzig 1931, Akademische Verlagsges.
[2]) C. Ferrari, Aerotecnica, Bd. 16 (1936), S. 121/130; Atti di Torino, Bd. 72 (1936/37), S. 140/163; Aerotecnica Bd. 17 (1937), S. 507/518. Hier finden sich auch Ansätze zur Behandlung der schiefen Strömung um Drehkörper.
[3]) G. Guderley, erscheint demnächst.
[4]) R. Sauer, erscheint demnächst.
[5]) Vgl. hierzu A. Busemann, Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 1929), S. 496/498 und Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 210/220.

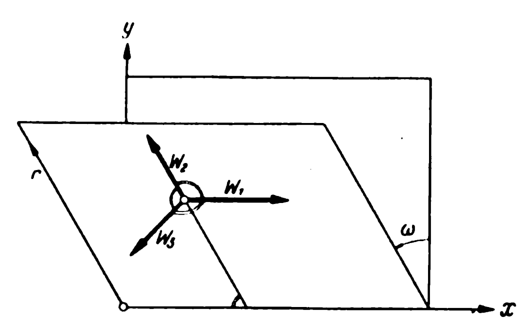


Bild 1. Zylinderkoordinaten.

2. Herleitung der Potentialgleichung der nahezu achsensymmetrischen Überschallströmung.

Wir benutzen die Zylinderkoordinaten x, r, ω, Bild 1 und gehen von einer achsensymmetrischen Überschallströmung aus, die in Richtung der positiven x-Achse erfolgt und das Geschwindigkeitspotential $\varphi\,(x, r)$ besitzt. Für das Potential der zu untersuchenden Strömung, die von der vorgegebenen achsensymmetrischen Überschallströmung nur wenig abweichen soll, setzen wir

$$\Phi\,(x, r, \omega) = \varphi\,(x, r) + \varepsilon\,(x, r) \cos \omega \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Es wird sich zeigen, daß sich durch den Ansatz (1) die geforderten Randbedingungen erfüllen lassen. Wesentlich ist, daß vermöge (1) das 3-dimensionale Problem auf die Bestimmung der Funktionen φ und ε von nur 2 Veränderlichen x, r zurückgeführt wird; die weitere Untersuchung kann man daher auf die Ebene $\omega = 0$ (x, r-Ebene) beschränken.

Da die Abweichung von der Achsensymmetrie als klein vorausgesetzt ist, bestimmen wir: Die Funktion ε und ihre Ableitungen werden nur in der ersten Größenordnung berücksichtigt.

Wir bezeichnen mit w_1, w_2, w_3 bzw. w die Komponenten bzw. den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit sowie mit c die Schallgeschwindigkeit der achsensymmetrischen Strömung, mit den nämlichen großen Buchstaben dagegen die entsprechenden Werte der benachbarten nicht achsensymmetrischen Strömung. Aus

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = \varphi_x, \quad w_2 = \varphi_r, \quad w_3 = 0 \\ W_1 = \Phi_x = \varphi_x + \varepsilon_x \cos \omega, \quad W_2 = \Phi_r = \varphi_r + \varepsilon_r \cos \omega, \\ W_3 = \dfrac{1}{r}\,\Phi_\omega = -\dfrac{\varepsilon}{r} \sin \omega \end{array}\right\} \quad (2)$$

folgt dann bei Beschränkung auf die in ε linearen Glieder

$$\left.\begin{array}{l} w^2 = \varphi_x^2 + \varphi_r^2, \\ W_2 = \varphi_x^2 + \varphi_r^2 + 2 \cos \omega\,(\varphi_x\,\varepsilon_x + \varphi_r\,\varepsilon_r), \\ c^2 = \dfrac{\varkappa - 1}{2}\,(w_m^2 - w^2), \\ \dfrac{1}{C^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{\varkappa - 1}{c^4}\,(\varphi_x\,\varepsilon_x + \varphi_r\,\varepsilon_r) \cos \omega; \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (3)$$

. bedeutet $\varkappa$ das Verhältnis c_p/c_v der spezifischen ıen und w_m die bei Expansion ins Vakuum eintretende ıalgeschwindigkeit des strömenden Gases.

Das Potential Φ (x, r, ω) genügt der strengen Potentialgleichung

$$\Phi_{xx}\left(1-\frac{\Phi_x^2}{C^2}\right)+\Phi_{rr}\left(1-\frac{\Phi_r^2}{C^2}\right)-2\Phi_{xr}\frac{\Phi_x\Phi_r}{C^2}+\frac{\Phi_r}{r}+\frac{1}{r^2}\Phi_{\omega\omega}\left(1-\frac{\Phi_\omega^2}{r^2C^2}\right)-2\Phi_{x\omega}\frac{\Phi_x\Phi_\omega}{r^2C^2}-2\Phi_{r\omega}\frac{\Phi_r\Phi_\omega}{r^2C^2}+\frac{\Phi_r\Phi_\omega^2}{r^3C^2}=0 \quad (4)$$

Nach Einsetzen von (2) und (3) in (4) liefern die von ε freien Glieder die strenge, nichtlineare Potentialgleichung

$$\varphi_{xx}\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)+\varphi_{rr}\left(1-\frac{\varphi_r^2}{c^2}\right)-2\varphi_{xr}\frac{\varphi_x\varphi_r}{c^2}+\frac{\varphi_r}{r}=0 \quad (5)$$

des achsensymmetrischen Potentials φ (x, r), während aus den übrigen, ε in der ersten Größenordnung enthaltenden Gliedern sich für das gesuchte Zusatzpotential die Differentialgleichung

$$\varepsilon_{xx}\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)+\varepsilon_{rr}\left(1-\frac{\varphi_r^2}{c^2}\right)-2\varepsilon_{xr}\frac{\varphi_x\varphi_r}{c^2}-\frac{\varepsilon}{r^2}+\varepsilon_x(\ldots)+\varepsilon_r(\ldots)=0 \quad (6)$$

ergibt.

Nach Lösung des achsensymmetrischen Problems sind die Koeffizienten von (6) bekannte Ortsfunktionen, die Potentialgleichung (6) ist also im Gegensatz zu (5) eine lineare Differentialgleichung.

Wegen der Übereinstimmung in den Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung haben die Differentialgleichungen (5) und (6) dieselben Charakteristiken. Das Machsche Netz der achsensymmetrischen Strömung (5) ist infolgedessen zugleich das Charakteristikennetz der linearisierten Potentialgleichung (6) der Zusatzströmung und soll fortan schlechthin Machsches Netz genannt werden.

Die Potentialgleichungen (5), (6) vereinfachen sich wesentlich, wenn wir sie in jedem Punkt A des Strömungsfeldes auf das schiefwinklige ξ, η-System, welches in A das Machsche Netz berührt, bzw. auf das von den Winkelhalbierenden des ξ, η-Systems erzeugte rechtwinklige x', y'-System beziehen, Bild 2; die x'-Achse verläuft in Richtung des Geschwindigkeitsvektors der achsensymmetrischen Strömung und schließt mit der ξ- und η-Achse den durch die achsensymmetrische Strömung gegebenen Machschen Winkel α ein.

Nach einiger Rechnung erhält man

$$\varphi_{\xi\eta}=\sin^2\alpha\,\frac{\varphi_r}{r} \quad (7)$$

für das achsensymmetrische Potential[4]) und

$$\varepsilon_{\xi\eta}=\sin^2\alpha\left[\frac{\varepsilon_r}{r}-\varepsilon_{x'}\left(\frac{\varkappa-1}{c^4}w^3+\frac{2w}{c^2}\right)\varphi_{x'x'}-2\varepsilon_{y'}\frac{w}{c^2}\varphi_{x'y'}-\frac{\varepsilon}{r^2}\right] \quad (8)$$

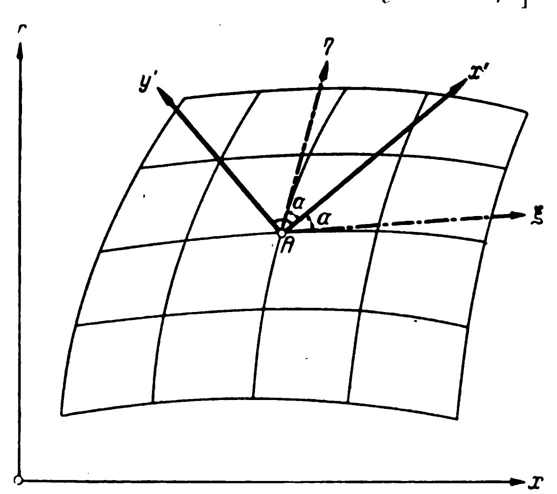


Bild 2. Koordinatentransformation.

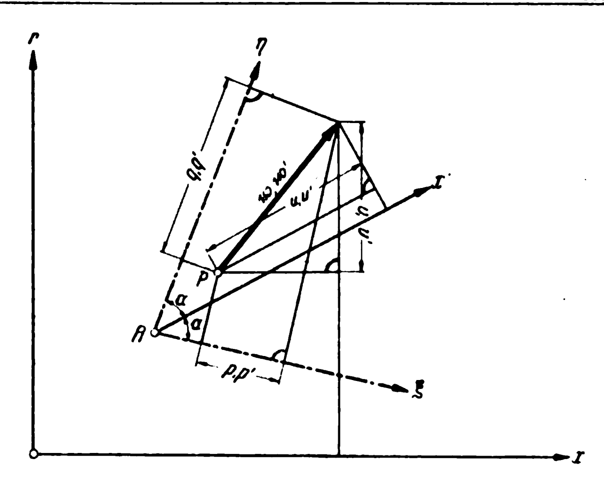


Bild 3. Projektionen der Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$.

für das Zusatzpotential. Natürlich gelten diese Beziehungen jeweils nur in dem Anfangspunkt A des ξ, η- und x', y'-Koordinatensystems.

3. Anschaulich-geometrische Deutung der Potentialgleichung.

Wir betrachten für einen Punkt P der Ebene $\omega = 0$ in der Umgebung von A den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\varphi$ der achsensymmetrischen Strömung und den bei Abweichung von der Achsensymmetrie hinzukommenden Zusatzvektor $\mathfrak{w}' = \operatorname{grad}\varepsilon$. Für die senkrechten Projektionen der Vektoren $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ auf die Achsen der drei in Ziff. 2 benutzten Koordinatensysteme mit dem Anfangspunkt A hat man, Bild 3

$$\left.\begin{array}{l} p=\varphi_\xi,\quad q=\varphi_\eta,\quad u=\varphi_{x'},\quad v=\varphi_r,\\ p'=\varepsilon_\xi,\quad q'=\varepsilon_\eta,\quad u'=\varepsilon_{x'},\quad v'=\varepsilon_r,\quad v''=\varepsilon_{y'}\end{array}\right\} \quad (9)$$

wie sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$\xi=\frac{1}{\sin 2\alpha}(x'\sin\alpha-y'\cos\alpha),$$

$$\eta=\frac{1}{\sin 2\alpha}(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)$$

bestätigen läßt. Weiterhin folgt

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{x'x'}=\dfrac{1}{2\cos\alpha}(u_\xi+u_\eta),\quad \varphi_{x'y'}=\dfrac{1}{2\sin\alpha}(-u_\xi+u_\eta),\\ \varepsilon_{\xi\eta}=p_\eta'=q_\xi'.\end{array}\right\} \quad (10)$$

Durch Einsetzen von (9) und (10) ergibt sich aus (7) für das achsensymmetrische Geschwindigkeitsfeld[4])

$$\left.\begin{array}{l} dp=\sin^2\alpha\,\dfrac{v}{r}\,d\eta,\\ dq=\sin^2\alpha\,\dfrac{v}{r}\,d\xi\end{array}\right\} \quad (11)$$

und aus (8) für die Zusatzgeschwindigkeiten

$$\left.\begin{array}{l} dp'=\sin^2\alpha\left[\dfrac{v'}{r}-\dfrac{u'}{2\cos\alpha}\left(\dfrac{\varkappa-1}{c^4}w^3+\dfrac{2w}{c^2}\right)(u_\xi+u_\eta)+\dfrac{v''}{\sin\alpha}\dfrac{w}{c^2}(u_\xi-u_\eta)-\dfrac{\varepsilon}{r^2}\right]d\eta,\\ dq'=\sin^2\alpha\left[\dfrac{v'}{r}-\dfrac{u'}{2\cos\alpha}\left(\dfrac{\varkappa-1}{c^4}w^3+\dfrac{2w}{c^2}\right)(u_\xi+u_\eta)+\dfrac{v''}{\sin\alpha}\dfrac{w}{c^2}(u_\xi-u_\eta)-\dfrac{\varepsilon}{r^2}\right]d\xi.\end{array}\right\} \quad (12)$$

Die ersten Gleichungen von (11) und (12) gelten jeweils für ein Fortschreiten um die Länge $d\eta$ auf einer Machschen Linie ξ = konst., die zweiten Gleichungen für ein Fortschreiten um die Länge $d\xi$ auf einer Machschen Linie η = konst. Die Größen r, w, u_ξ, u_η, c, α, $d\xi$, $d\eta$ in (12) sind durch das als bekannt vorausgesetzte Machsche Netz der achsensymmetrischen Strömung gegeben, die Größen ε, u', v', v'', dp', dq' sind unbekannt und müssen auf Grund der Beziehungen (12) ermittelt werden (vgl. Ziff. 6).

4. Änderung des Verdichtungsstoßes bei schiefer Anströmung.

Die Festlegung der Anfangsbedingungen für das Zusatzpotential erfolgt durch den von der Geschoßspitze hervorgerufenen Verdichtungsstoß.

Wir gehen von dem Verdichtungsstoß des als gelöst vorausgesetzten achsensymmetrischen Problems aus. Die Stoßfläche dieses Verdichtungsstoßes ist eine Drehfläche. Wir bezeichnen mit σ ihren von Punkt zu Punkt veränderlichen Neigungswinkel gegen die x-Achse (= Stoßwinkel) und mit U die Anströmgeschwindigkeit.

Für die zu untersuchende schiefe Anströmung mit dem kleinen Anstellwinkel β und dem unveränderten Geschwindigkeitsbetrag U hat man in Zylinderkoordinaten

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Phi} &= U(x + \beta y) = U(x + \beta r \cos\omega),\\ \overline{W}_1 &= U,\ \overline{W}_2 = \beta U \cos\omega,\ \overline{W}_3 = -\beta U \sin\omega,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wobei β entsprechend unserer Verabredung für ε nur in der ersten Größenordnung berücksichtigt ist.

Wir versuchen nun die Drehfläche des achsensymmetrischen Verdichtungsstoßes auch für die schiefe Anströmung als Stoßfläche beizubehalten, Bild 4. Für die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten in Richtung des Drehflächenmeridians und senkrecht dazu sowie für die zur Drehfläche normale Geschwindigkeitskomponente ergibt sich dann aus (13) vor dem Stoß

$$\left.\begin{aligned}\overline{W}_s &= \overline{W}_1 \cos\sigma + \overline{W}_2 \sin\sigma = U\cos\sigma + \beta U \sin\sigma\cos\omega,\\ \overline{W}_t &= \overline{W}_3 = -\beta U \sin\omega,\\ \overline{W}_n &= \overline{W}_1 \sin\sigma - \overline{W}_2\cos\sigma = U\sin\sigma - \beta U\cos\sigma\cos\omega\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

und aus (2) hinter dem Stoß

$$\left.\begin{aligned}\hat{W}_s &= (\varphi_x\cos\sigma + \varphi_r\cos\sigma)\\ &\quad + (\varepsilon_x\cos\sigma + \varepsilon_r\sin\sigma)\cos\omega = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\varepsilon}{ds}\cos\omega,\\ \hat{W}_t &= -\frac{\varepsilon}{r}\sin\omega,\\ \hat{W}_n &= (\varphi_x\sin\sigma - \varphi_r\cos\sigma)\\ &\quad + (\varepsilon_x\sin\sigma - \varepsilon_r\cos\sigma)\cos\omega = \frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varepsilon}{dn}\cos\omega;\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

dabei bedeutet ds ein Linienelement des Meridians der Drehfläche und dn ein zur Drehfläche senkrechtes Linienelement, Bild 4.

Die bekannten Stoßbedingungen verlangen:

a) $\overline{W}_s = \hat{W}_s$, b) $\overline{W}_t = \hat{W}_t$,

c) $\overline{W}_n\,\hat{W}_n = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\,(w_m^2 - \overline{W}_s^2 - \overline{W}_t^2)$.

Aus b) und c) folgt durch Gleichsetzen der in erster Ordnung kleinen Glieder

$$\varepsilon = \beta U r, \quad \frac{d\varepsilon}{dn} = \beta\left(\frac{d\varphi}{dn}\operatorname{cotg}\sigma - \frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1}U\cos\sigma\right). \quad (16)$$

Die aus a) sich ergebende Beziehung

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \beta U \sin\sigma$$

ist wegen

$$dr = ds\cdot\sin\sigma;\quad \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{d\varepsilon}{dr}\sin\sigma$$

eine Folge der ersten Gleichung (16), liefert also nichts Neues.

Da in den Stoßbedingungen (16) der Winkel ω nicht vorkommt, definieren sie ε und $\frac{d\varepsilon}{dn}$ als Funktionen von x, r auf der Drehfläche des achsensymmetrischen Verdichtungsstoßes. Hiermit ist gezeigt, daß diese Drehfläche tatsächlich auch für die schiefe Anströmung als Stoßfläche beibehalten werden kann.

Da β in die Anfangsbedingungen (16) linear eingeht, ist das Zusatzpotential ε und der Zusatzvektor $\mathfrak{w}' =$ grad ε zum Anstellwinkel β proportional.

5. Änderung der Randbedingungen an der Geschoßspitze bei schiefer Anströmung.

Auf Grund von (16) ist an der Stoßfläche die Funktion $\varepsilon(x, r)$ samt den ersten Ableitungen ε_x, ε_r bekannt; denn ε_x und ε_r lassen sich aus den beiden linearen Gleichungen

$$\varepsilon_x\sin\sigma - \varepsilon_r\cos\sigma = \frac{d\varepsilon}{dn} = \beta\left(\frac{d\varphi}{dn}\operatorname{cotg}\sigma - 2\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}U\cos\sigma\right),$$

$$\varepsilon_x\cos\sigma + \varepsilon_r\sin\sigma = \frac{d\varepsilon}{ds} = \beta U\sin\sigma$$

berechnen. Nach einem bekannten Existenzsatz der Charakteristikentheorie ist die Lösung $\varepsilon(x, r)$ der linearen partiellen Differentialgleichung (6) durch die auf der Stoßfläche vorgegebenen Anfangswerte ε, ε_x, ε_r eindeutig festgelegt in dem x, r-Bereich, der von den von der Stoßfront ausgehenden Machschen Linien doppelt überdeckt wird.

Da der Meridian der Geschoßspitze in diesem x, r-Bereich liegt, können an der Geschoßspitze keine zusätzlichen Randbedingungen erfüllt werden. Infolgedessen läßt sich nicht erzwingen, daß an der Oberfläche der vorgegebenen Geschoßspitze zugleich mit der Normalkomponente $\frac{d\varphi}{dn}$ des achsensymmetrischen Strömungsvektors auch die Normalkomponente $\frac{d}{dn}(\varepsilon\cos\omega)$ des Zusatzvektors der schiefen Strömung gleich Null wird. Wir müssen daher die Geschoßspitze so deformieren, daß in jedem Punkt ihrer Oberfläche die Normalkomponente $\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varepsilon}{dn}\cos\omega$ des resultierenden Vektors $\mathfrak{w} =$ grad $(\varphi + \varepsilon\cos\omega)$ verschwindet.

Diese Deformation verwirklichen wir dadurch, daß wir von jedem Punkt x/r der vorgegebenen Geschoßspitze um ein Längenelement dn senkrecht bis zum entsprechenden Punkt x^*/r^* der deformierten Geschoßspitze vorwärts gehen, Bild 5. Aus

$$\frac{d\varphi(x^*, r^*)}{dn} + \frac{d\varepsilon(x^*, r^*)}{dn}\cos\omega = 0$$

folgt dann nach Einsetzen von

$$\varphi(x^*, r^*) = \varphi(x, r) + d\varphi,\quad \varepsilon(x^*, r^*) = \varepsilon(x, r) + d\varepsilon$$

und bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

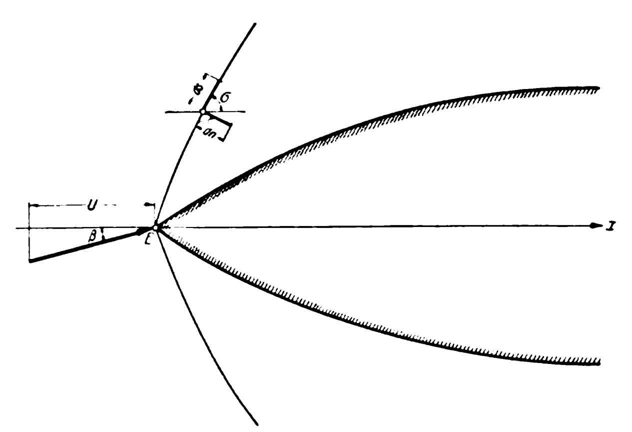


Bild 4. Verdichtungsstoß an der Geschoßspitze.

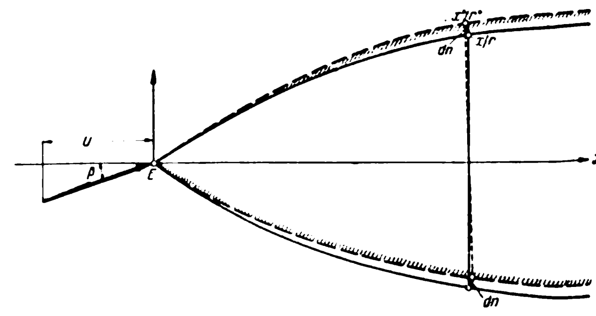


Bild 5. Deformation der Geschoßspitze.

$$\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d^2\varphi}{dn^2}\,dn + \frac{d\varepsilon}{dn}\cos\omega = 0,$$

wobei $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d^2\varphi}{dn^2}$ und $\frac{d\varepsilon}{dn}$ im Punkt x/r der vorgegebenen Geschoßspitze zu nehmen sind. Unter Berücksichtigung von

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0$$

ergibt sich schließlich die Bedingung

$$dn = -\cos\omega \cdot \frac{\frac{d\varepsilon}{dn}}{\frac{d^2\varphi}{dn^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Durch die Deformation (17) wird jeder Parallelkreis $x =$ konst. der Geschoßspitze um einen kleinen zum Anstellwinkel β proportionalen Winkel gedreht[6]). Dieser Drehwinkel ist mit den Parallelkreisen veränderlich, kann aber für eine nicht zu große Umgebung des konischen Punktes E durch eine Konstante angenähert werden; die Deformation geht hierdurch näherungsweise in eine Drehung der starr bleibenden Geschoßspitze über.

6. Praktische Durchführung des Verfahrens.

Aus den vorangegangenen Entwicklungen ergibt sich folgende Vorschrift für die praktische Durchführung des Verfahrens:

a) Das achsensymmetrische Problem wird nach dem früher angegebenen Näherungsverfahren[4]) gelöst. Hierdurch erhält man als Machsches Netz in der x, r-Ebene ein Streckenzugnetz mit den Knotenpunkten P_i und als Geschwindigkeitsbild des Machschen Netzes in der u, v-Ebene ein Streckenzugnetz mit den Knotenpunkten Q_i; jedem Punkt P_i ist als Geschwindigkeitsvektor der Radiusvektor $\overrightarrow{OQ_i} = \mathfrak{w}_i$ des entsprechenden Punktes Q_i zugeordnet.

b) In den auf der Stoßfront liegenden Anfangspunkten P_i des Machschen Netzes ist das Potential ε und der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}' = \operatorname{grad}\varepsilon$ durch die Anfangsbedingungen (16) bestimmt.

c) Ausgehend von den Anfangspunkten läßt sich schrittweise für jeden weiteren Knotenpunkt P_i mit Hilfe der beiden Gleichungen (12) $\mathfrak{w}_i' = \operatorname{grad}\varepsilon_i$ zeichnerisch-rechnerisch ermitteln. Die den Punkten P_i vermöge $\mathfrak{w}_i' = \overrightarrow{OQ_i'}$ zugeordneten Punkte erzeugen in der u, v-Ebene ein zweites Streckenzugnetz.

Die Ermittlung von $\mathfrak{w}_i'$ kann durch dasselbe Iterationsverfahren wie beim achsensymmetrischen Problem[4]) erfolgen. Einerseits vereinfacht sich das Iterationsverfahren, weil die Punkte P_i vorgegeben und lediglich die zugeordneten Punkte Q_i' gesucht sind. Andererseits tritt eine Erschwerung ein durch die auf der rechten Seite der Gleichungen (12) vorkommenden Größen u_ξ, u_η und ε: Die Werte von u_ξ und u_η ergeben sich durch zeichnerische Differentiation aus der vorgegebenen achsensymmetrischen Strömung, die Potentialwerte ε werden mittels

$$\varepsilon_k - \varepsilon_i = \frac{1}{2}(p_i' + p_k')\,d\xi_{ik} \text{ bzw. } = \frac{1}{2}(q_i' + q_k')\,d\eta_{ik}$$

auf die Unbekannten p', q' zurückgeführt.

d) Bei Berechnung der Deformation (17) der Geschoßspitze kann $\frac{d\varepsilon}{dn} = w_n'$ aus dem in c) konstruierten Q_i'-Netz unmittelbar entnommen werden, während $\frac{d^2\varphi}{dn^2} = \frac{dw_n}{dn}$ aus dem Q_i-Netz des achsensymmetrischen Problems durch zeichnerische Differentiation folgt.

In der Umgebung des konischen Punktes E läßt sich die Geschoßspitze durch einen Drehkegel annähern; die schiefe Umströmung des Drehkegels werden wir in Ziff. 7 näher erörtern. Ausgehend von der Kegelströmung kann die Deformation der Geschoßspitze im weiteren Verlauf statt durch die in d) angegebene Rechnung auch zeichnerisch bestimmt werden, indem man die Kegelmantellinie durch die Stromlinie der resultierenden Strömung $\mathfrak{w} + \mathfrak{w}'$ fortsetzt.

[6]) In ähnlicher Weise kann man umgekehrt die Geschoßspitze starr halten und die Stoßfläche deformieren, was für die praktische Anwendung günstiger ist.

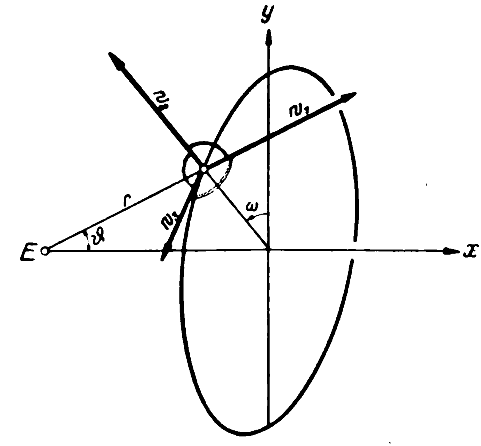


Bild 6. Polarkoordinaten.

7. Anwendung auf den schief angeblasenen Drehkegel.

Als einfachstes Anwendungsbeispiel behandeln wir die kegelförmige Geschoßspitze. Das ganze Strömungsfeld ist hier konisch, d. h. auf jedem durch den Kegelscheitel E gehenden Strahl ist die Geschwindigkeit nach Richtung und Größe konstant. Infolgedessen spezialisiert sich der Ansatz (1) des Potentials in Polarkoordinaten, Bild 6, mit

$$\varphi = r\,f(\vartheta), \quad \varepsilon = r\,\eta(\vartheta)$$

zur Gleichung

$$\Phi(r, \vartheta, \omega) = r\,(f(\vartheta) + \eta(\vartheta)\cos\omega) \quad \ldots\ldots \quad (1^*)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \varphi_r = f, \quad w_2 = \frac{1}{r}\varphi_\vartheta = f', \quad w_3 = 0, \\ W_1 &= \Phi_r = f + \eta\cos\omega, \quad W_2 = \frac{1}{r}\Phi_\vartheta = f' + \eta'\cos\omega, \\ W_3 &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\Phi_\omega = -\frac{\sin\omega}{\sin\vartheta}\eta \end{aligned}\right\} \quad (2^*)$$

sind dann entsprechend der Eigenschaft des konischen Strömungsfeldes nur von ϑ und ω abhängig. Die Striche bei f und η bedeuten Differentiation nach ϑ.

An Stelle der partiellen Differentialgleichungen (5) und (6) treten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(f'' + f)\left(1 - \frac{f'^2}{c^2}\right) + f + f'\operatorname{cotg}\vartheta = 0 \quad \ldots \quad (5^*)$$

für das achsensymmetrische Potential und

$$\eta''\left(1 - \frac{f'^2}{c^2}\right) + \eta'\left[\operatorname{cotg}\vartheta + \left(\frac{2f'}{c^2} + \frac{\varkappa - 1}{c^4}f'^3\right)\frac{f + f'\operatorname{cotg}\vartheta}{1 - \frac{f'^2}{c^2}}\right]$$
$$+ \eta\left[2 - \frac{f'^2}{c^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{\varkappa - 1}{c^4}\frac{f + f'\operatorname{cotg}\vartheta}{1 - \frac{f'^2}{c^2}} f f'^2\right] = 0 \quad (6^*)$$

für das Zusatzpotential bei schiefer Anströmung.

Die Differentialgleichung (5*) wird zweckmäßig nach dem Krümmungskreisverfahren von A. Busemann[5]) gelöst. Hierdurch ist dann für die vorgegebene axiale Anblasgeschwindigkeit U und den vorgegebenen Öffnungswinkel $2\,\vartheta_\infty$ der konischen Geschoßspitze der Öffnungswinkel $2\,\sigma$ des Drehkegels des Verdichtungsstoßes bekannt.

Durch die Anfangsbedingungen (16), die sich hier zu

$$\eta = \beta\,U\sin\sigma, \quad \eta' = \beta\left(f'\operatorname{cotg}\sigma + 2\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}U\cos\sigma\right) \quad (16^*)$$

spezialisieren, ist die Lösung der Differentialgleichung (6*) eindeutig bestimmt; die Integration kann nach einem zeichnerischen oder rechnerischen Näherungsverfahren, z. B. wieder nach einem Krümmungskreisverfahren erfolgen. Die

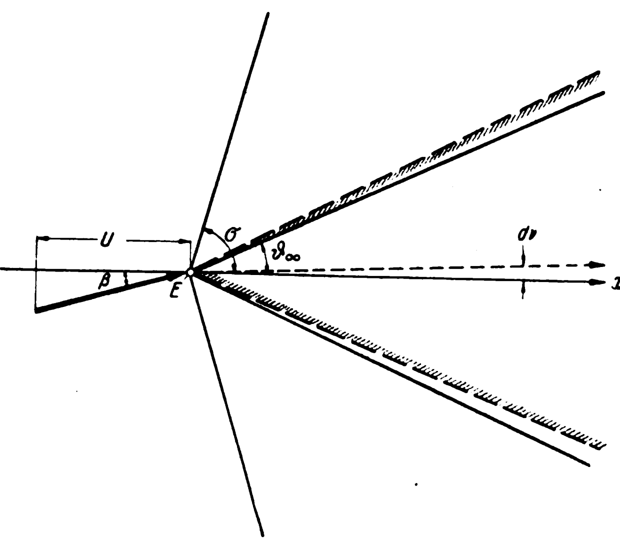


Bild 7. Schiefe Überschallströmung um eine konische Geschoßspitze.

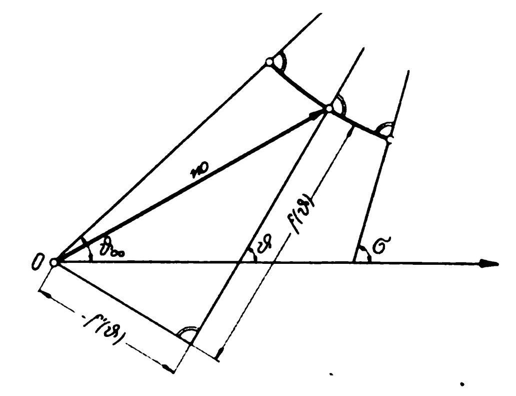


Bild 8. Geschwindigkeitsbild der achsensymmetrischen Kegelströmung nach Busemann.

in (6*) vorkommenden Funktionen $f = w_1$, $f' = w_2$ können aus dem vorliegenden achsensymmetrischen Geschwindigkeitsbild, Bild 8, abgegriffen werden, wobei im Gegensatz zum allgemeinen Fall keine zeichnerischen Differentiationen erforderlich sind.

Die Deformation (17) geht unter Berücksichtigung von (5*) über in eine reine Drehung der starr bleibenden konischen Geschoßspitze, Bild 7, um den Winkel

$$d\nu = -[\eta'/f'']_{\vartheta=\vartheta_\infty}$$
$$= \left[\frac{\eta'(1 - f'^2/c^2)}{2f + f'(\operatorname{cotg}\vartheta - f'^2/c^2)}\right]_{\vartheta=\vartheta_\infty} = \left[\frac{\eta'}{2f}\right]_{\vartheta=\vartheta_\infty}, \quad (17^*)$$

der sich ebenfalls ohne Differentiation aus dem achsensymmetrischen Geschwindigkeitsbild ergibt.

Als Beispiel wurde die Strömung mit der Machschen Zahl $\frac{U}{c} = 2{,}378$ der Anblasgeschwindigkeit und dem Stoßwinkel $\sigma = 39{,}5^0$ durchgerechnet. Als halben Öffnungswinkel der konischen Geschoßspitze erhält man $\vartheta_\infty = 23{,}5^0$ und als Verdrehungswinkel $\frac{1}{\beta}\,d\nu = -0{,}48$, d. h. der Anstellwinkel wird um rund 50% vergrößert.

Grundsätzlich ist zu bemerken, daß die axiale Kegelströmung hinter dem Verdichtungsstoß Potentialströmung bleibt, während bei der schiefen Anströmung infolge der Veränderlichkeit des Stoßwinkels σ und der Entropie mit dem Winkel ω Wirbelbildungen auftreten. Diese Abweichung von der strengen Potentialströmung wurde hier vernachlässigt.

8. Zusammenfassung.

Ausgehend von der strengen Lösung des achsensymmetrischen Problems wurde für nahezu achsensymmetrische Überschallströmungen ein linearisiertes Verfahren entwickelt und auf schief angeblasene Geschoßspitzen angewandt. Hierbei bleibt die Drehfläche des achsensymmetrischen Verdichtungsstoßes als Stoßfläche erhalten, während die Geschoßspitze eine kleine Deformation erleidet[6]). Diese Verformung spezialisiert sich bei konischen Geschoßspitzen zu einer reinen Drehung und kann auch bei nichtkonischen Geschoßspitzen durch eine Drehung angenähert werden.

Über die Entwicklung des Spiels in Bolzenverbindungen unter Dauerbeanspruchung.

Von B. Dirksen.

Bericht aus dem Institut für Festigkeit der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Das sich im Betrieb einstellende Spiel in Bolzenverbindungen interessiert mit Rücksicht auf Wartung und Austauschmöglichkeit im Serienbau. Durch Messung des zeitlichen Verlaufs der Bolzenkraft wurde versucht, den Ausweitungsvorgang näher zu erfassen. Einige der hieraus gezogenen Folgerungen wurden mit der Entwicklung der Ausweitungsgröße während des Dauerversuchs verglichen.

Gliederung.

I. Einleitung.

Bolzenverbindungen finden im Flugzeugbau häufige Anwendung als lösbarer Anschluß für größere Bauteile, z. B. zwischen Flügel und Rumpf oder als bewegliche Verbindung, um bestimmte Freiheitsgrade zu verwirklichen, wie z. B. beim Fahr- und Steuerwerk. Gewichts- und Platzrücksichten machen es notwendig, mit den Beanspruchungen bis an die Höchstgrenze heranzugehen. Fertigungsmäßig ist es bei der Häufigkeit der Anwendung erwünscht, die Formgebung möglichst einfach zu halten, so daß geteilte Ausbildungen des Augenstabes, wie sie an Schubstangen von Kraftmaschinen üblich sind, in der Flugzeugzelle nicht verwendet werden. Im Betrieb schlagen die Verbindungen mehr oder weniger stark aus. Auge und Bolzen werden »unrund«. Die Verbindung klappert, und es entsteht im ungünstigen Falle eine wesentliche Herabsetzung der Flugsicherheit. Die Anschlüsse müssen daher laufend überwacht und, sobald eine bestimmte Spielgröße erreicht ist, ausgewechselt werden. Die Feststellung der Ausweitung erfolgt im allgemeinen nach Gefühl, weil ihre Messung bei der zum Teil schlechten Zugänglichkeit der Teile von außen zu einer erheblichen Steigerung der Wartungszeit führen würde. Der Zeitpunkt der Auswechselung ist daher nicht einheitlich. Weiterhin ergibt sich durch den Serienbau ein zunehmendes Interesse an einer engeren Spielbegrenzung mit Rücksicht auf die Austauschmöglichkeit. Es ist also erwünscht, die Spielgröße einer bestimmten Bolzenverbindung in Abhängigkeit von Spannung und Lastzahl angeben zu können, wie es in Bild 1 für einen willkürlich angenommenen Spielverlauf dargestellt ist.

Die volle Auswirkung ergibt sich allerdings erst, wenn die Flugstatistik soweit gediehen ist, daß ihr die je Stunde zu erwartenden Lastgrößen und Lastwechsel entnommen werden können. Die zulässige Beanspruchung einer Verbindung läßt sich dann, hinreichend klare Gesetzmäßigkeit der verschiedenen Beziehungen zueinander vorausgesetzt, so wählen, daß nach Ablauf einer bestimmten Betriebszeit das Grenzspiel höchstens erreicht wird. Auf diese Weise erübrigt sich die zwischenzeitliche nähere Wartung, und die Verbindung wird ausgewechselt, sobald sie die statistische Altersgrenze erreicht hat. Die betrieblich erträglichen

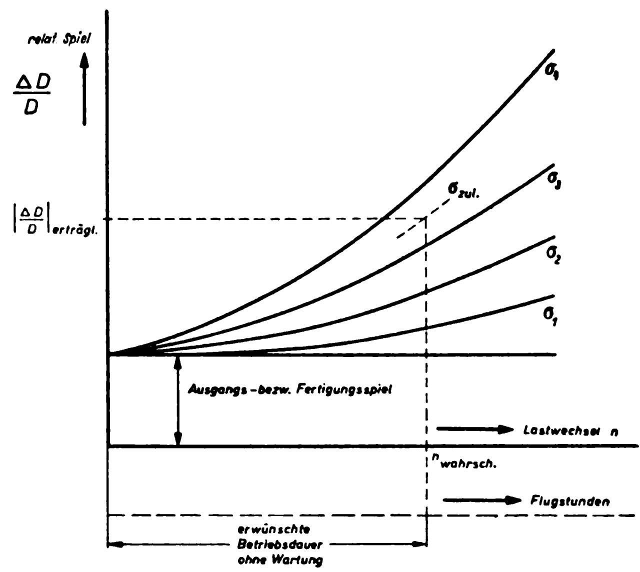


Bild 1. Spielentwicklung (willkürlich angenommen) einer Bolzenverbindung in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.

Grenzspiele werden je nach Art der Verbindung verschieden groß sein. Im allgemeinen sind die Werte aber so klein, daß die Querschnittsabmessungen während der Spielentwicklung als unverändert angesprochen werden können.

II. Umfang systematischer Versuche.

Systematische Dauerversuche an mehrteiligen Proben führen naturgemäß leicht zu großen zeitraubenden Meßreihen. Ein erträglicher Versuchsumfang ist nur bei schärfster Beschränkung auf die wesentlichsten Abwandlungen zu erreichen. Bei einfachster Ausbildung des Prüflings besteht eine Bolzenverbindung aus einem Augenstab und dem zugehörigen Bolzen. Von Einfluß auf das Verhalten der Verbindung dürften mindestens sein:

1. Die geometrischen Verhältnisse,
   a) Form des Augenstabes,
   b) Bolzenquerschnitt (voll, hohl),
   c) Abmessungen und Passung,
   d) Oberflächengestaltung (Bearbeitung),
2. die Werkstoffe,
   a) für den Augenstab,
   b) für den Bolzen,
3. die Beanspruchungsart,
   a) Schwellbereich,
   b) Zug-Druck-Bereich.

Rechnet man im Mittel mit nur zwei Abwandlungen dieser acht möglichen Einflüsse und im Durchschnitt mit sieben Punkten je Wöhlerkurve, so ergeben sich bereits 1500 bis 2000 Probestäbe, an denen während des Dauerversuchs mehrfach die Ausweitung gemessen werden muß.

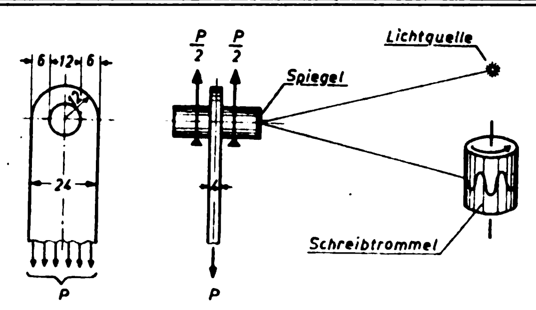


Bild 2. Versuchseinrichtung zur Aufzeichnung des Bolzenkraft-Zeitverlaufs.

Diese Abschätzung zeigt deutlich, wie wichtig eine sinnvolle Einschränkung der Versuchsveränderlichen ist, die sich einfach durchführen läßt, wenn es gelingt, den eigentlichen Ausweitungsvorgang näher zu erfassen. Über einige Versuche in dieser Richtung, an denen mein Mitarbeiter, Herr Dipl.-Ing. W. Trapp, beteiligt ist, wird nachstehend kurz berichtet.

III. Ergebnisse einiger Tastversuche.

a) Zeitlicher Verlauf der Bolzenkraft.

Die Bolzenkraft läßt sich mit der in Bild 2 dargestellten Anordnung einfach während des Dauerversuchs bestimmen. Hierbei ist der Bolzen im Pulser so gelagert, daß er als einfacher Balken von konstanter Spannweite wirkt und durch den Augenstab in der Mitte der Spannweite belastet wird. Da die Bolzenkraft gleich der Summe der jeweilig übertragenen Lochleibungsdrücke ist, werden auf diesem Wege die Beanspruchungen in den Leibungen unmittelbar am Entstehungsort ohne dämpfende oder glättende Wirkung von Zwischengliedern erfaßt. Aufgezeichnet wird die Größe der Bolzenendtangente, die innerhalb des elastischen Bereichs proportional der Bolzenkraft ist. Eine Verzerrung des Schwingungsbildes tritt bei der sehr hohen Eigenschwingungszahl des Bolzens nicht ein.

Für die Versuche wurden Verbindungen entsprechend Bild 2 verwendet. Werkstoff des Bolzens: Stahl Flieg 1610.1, Oberfläche geschliffen. Werkstoff des Augenstabes: Stahl Flieg 1452.4 ($\sigma_B \sim 63$ kg/mm²), Augenleibung und übrige Oberfläche geschliffen.

Die statische Festigkeit der untersuchten Bolzenverbindungen geht aus Bild 3 hervor, in der die Nennspannung (Bolzenkraft/Wangenquerschnitt) über der Ausweitung aufgetragen ist.

Der zeitliche Verlauf der Bolzenkraft für verschiedene Belastungen auf einem 6-t-Schenck-Pulser ist aus Bild 4 zu ersehen.

Bei Verwendung eines ungeteilten Stabes, z. B. Flachstab 4 × 24 mm entsprechend dem Augenstab, ergibt sich eine einfach sinusförmige Lastcharakteristik, die mittels eines Ber-Dehnungsmessers mehrfach festgestellt wurde. Im Gegensatz dazu zeigt sich beim Augenstab im Zugschwellgebiet ein zusammengesetzter sinusförmiger Verlauf, Bild 4a. Hierbei ist es wesentlich, daß ein Nulldurchgang nicht stattfindet. Tritt dieser ein, so ergibt sich eine Charakteristik nach 4b. Der Bolzen hebt in diesem Falle von der Augenleibung (Zugseite) ab und kommt der Lastfrequenz entsprechend stoßartig wieder zur Anlage. Dementsprechend zeigt der Schrieb 4b gegenüber 4a eine überlagerte Schwingung. Im Falle 4c liegt ebenfalls Nulldurchgang vor, jedoch berührt der Bolzen bei jedem Lastwechsel die druckseitige Leibung. Die in 4b bereits merkliche Störschwingung ist hier wesentlich verstärkt. Um diese Nulldurchgänge sicher zu vermeiden, muß eine höhere Vorlast eingestellt werden. Die Schriebe 4a bis 4c wurden bei der gleichen Lasteinstellung des Pulsers erhalten. Sie zeigen den Übergang von der Zugschwell- zur Wechsellast. Während erstere einen glatten sinusförmigen Verlauf hat, macht sich der Einfluß der letzteren durch Unstetigkeiten in der Kraft-Zeitkurve bemerkbar. Besonders ausgeprägt zeigt dies Bild 4d für Zug-Druck (Wechsellast). Die Störungen sind noch weiter

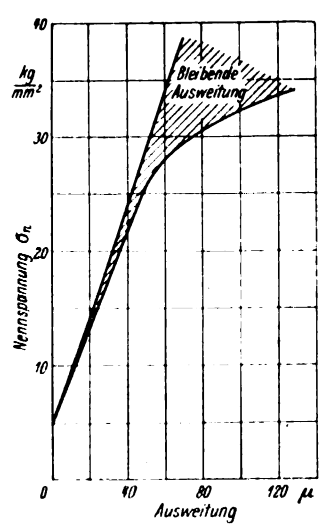


Bild 3. Ausweitung der Augenstabverbindung unter statischer Last.

angewachsen. Man beachte die starken Unstetigkeiten im Kraft-Zeitverlauf. Der anschließende Schrieb 4e gibt das Druckschwellgebiet ohne Abheben wieder. Der Kurvenzug stimmt mit dem für Zugschwell ohne Abheben (4a) überein. Es liegt daher nahe, den Wechselbereich (4d) als Entartung des Schwellbereiches (4a bzw. 4e) anzusprechen und eine rohe Analyse durch Überlagerung der Kurven für Schwell- und Wechsellast vorzunehmen. Das Ergebnis zeigt Bild 5.

Die Ausgangskurve *1* — einfacher Sinus — entsteht, wie bereits bemerkt, beim ungeteilten Stab im Schwell- und Wechselbereich (*I*). Durch Überlagerung mit einem Sinus der dreifachen Periode (*2*) von passend gewählter

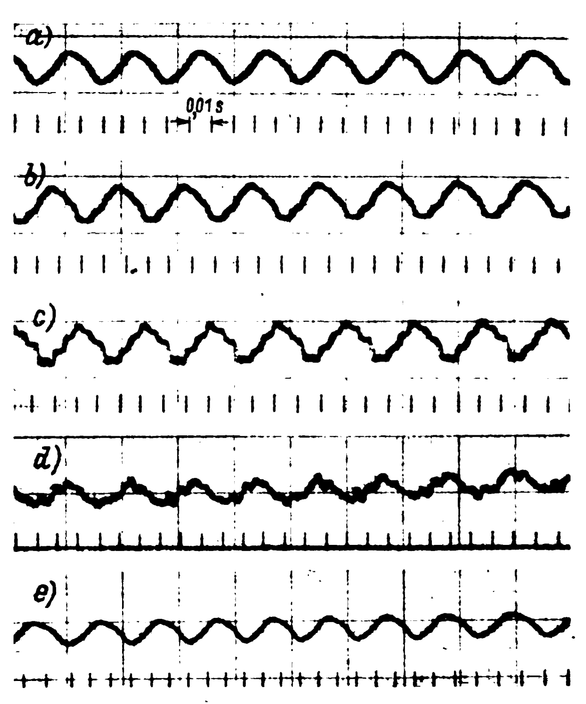


Bild 4. Bolzenkraft-Zeitschriebe.

a) Ursprungszug ohne Abheben.
$\sigma_a = +12{,}9$ kg/mm²,
$\sigma_u = +0{,}14$ kg/mm².

b) Ursprungszug mit Abheben.
$\sigma_a = +12{,}9$ kg/mm²,
$\sigma_u = +0{,}14$ kg/mm².

c) Ursprungszug mit Abheben.
$\sigma_a = +12{,}9$ kg/mm²,
$\sigma_u = +0{,}14$ kg/mm².

d) Wechsellast.
$\sigma_a = +4{,}9$ kg/mm².

e) Ursprungsdruck ohne Abheben.
$\sigma_a = -11{,}3$ kg/mm²,
$\sigma_u = -0{,}1$ kg/mm².



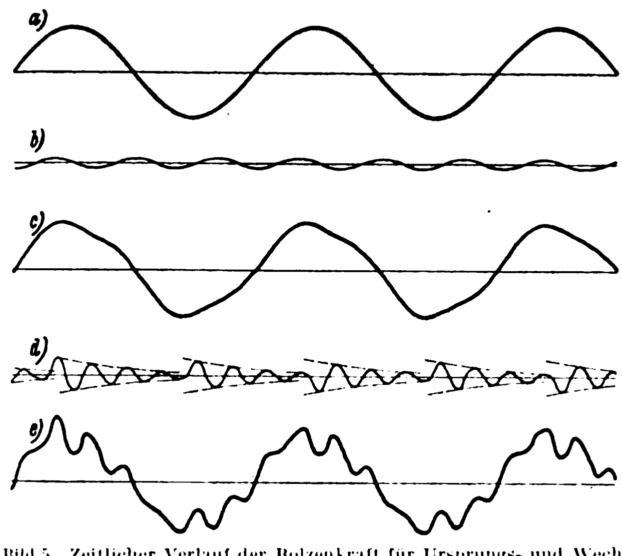


Bild 5. Zeitlicher Verlauf der Bolzenkraft für Ursprungs- und Wechsellast.

Schwingung 1
(I) Normaler Probestab für Schwell- und Wechselbereich.

Schwingung 2
Schwingung 1 + 2
(II) Augenstabverbindung Schwellbereich.

Schwingung 3
Schwingung 1 + 2 + 3
(III) Augenstabverbindung Wechselbereich.

Amplitude ergibt sich (*1* + *2*) der für den Schwellbereich bei Augenstäben typische Verlauf (*II*). — Der überlagerte Sinus (*2*) scheint mit einer Biegeschwingung des Augenstabes zusammenzuhängen. — Die Differenz zwischen dem Schwell- (*II*) und dem Wechselverlauf (*III*) besteht in einer gedämpften Schwingung (*3*), die annähernd in Phase mit dem zeitlichen Anlagebeginn des Bolzens angefacht wird, so daß die Größtweiten dieser Schwingung als Auftreffen des Bolzens auf die entsprechende Leibungsseite zu deuten sind. Die Überlagerung (*1* + *2* + *3*) zeigt Kurve (*III*), die hinreichend genau mit Schrieb 4d übereinstimmt. Es tritt demnach bei Wechsellast in Bolzenverbindungen der betrachteten Art durch das Auftreffen des Bolzens auf den Leibungen eine periodisch angefachte Schwingung auf, die zu einer merklichen Erhöhung der Lastamplituden führt und im vorliegenden Falle von der siebenfachen Frequenz der Lastwechsel ist. Nimmt man an, daß die Ausweitung bei Dauerbeanspruchung wesentlich vom Kraft-Zeitverlauf in den Leibungen abhängt, so ist nach vorstehendem eine weitgehende Verwandtschaft für die beiden Schwellbereiche und die stärkste Ausweitung bei Wechsellast zu erwarten.

b) Ausweitung in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl.

Zur Überprüfung dieser Annahme wurden bei einigen Stäben während des Dauerversuchs die Ausweitungsgrößen bestimmt. Dies erfolgte durch Messung des Bolzenwegs in Kraftrichtung zwischen den beiden Anlagen an der Augenleibung. Es wurden zwei verschiedene Geräte benutzt, die übereinstimmende Ergebnisse zeigten. In Bild 6 bis 8 ist der Ausweitungsverlauf in Abhängigkeit von der Lastwechselzahl dargestellt, und zwar für Oberspannungen von 25 bzw. 30 kg/mm² bei Ursprungszug, Zug-Druck und Ursprungsdruck. Aus dem statischen Versuch Bild 3 ist zu entnehmen, daß die Fließgrenze des Augenstabes (Wangenquerschnitt) in dem Bereich zwischen 25 und 30 kg/mm² liegt. Da die Bolzenkraftschriebe, Bild 4, bei wesentlich kleineren Spannungen aufgenommen wurden, ist ein einwandfreier Vergleich vorerst nicht möglich.

Ursprungszug: Für $\sigma_0 = 25$ kg/mm² ergibt sich eine Ausweitung von $< 5\,\mu$, die sich im wesentlichen während der ersten 2000 bis 3000 Lastwechsel einstellt. Für $\sigma_0 = 30$ kg/mm² zeigt sich ein sehr schwacher Anstieg ober-

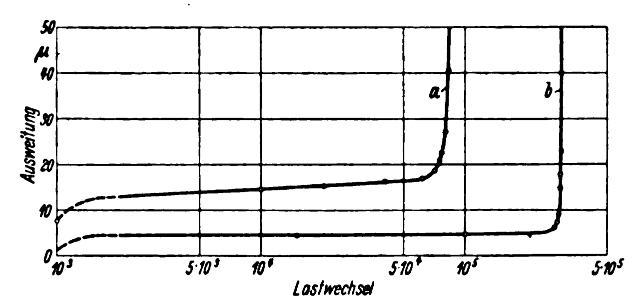


Bild 6. Ursprungszug.
a) $\sigma_o = +30$ kg/mm² Ausgangsspiel 36 μ
b) $\sigma_o = +25$ kg/mm² Ausgangsspiel 29 μ.

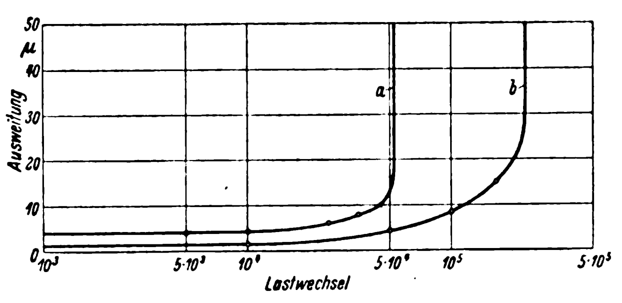


Bild 7. Wechsellast.
a) $\sigma_o = +30$ kg/mm² Ausgangsspiel 43 μ
b) $\sigma_o = +25$ kg/mm² Ausgangsspiel 36 μ.

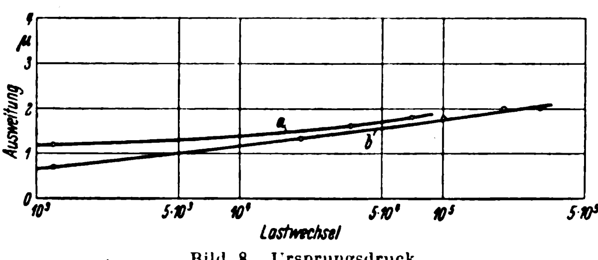


Bild 8. Ursprungsdruck.
a) $\sigma_o = -30$ kg/mm² Ausgangsspiel 26 μ
b) $\sigma_o = -25$ kg/mm² Ausgangsspiel 30 μ

halb von 5000 Lastwechseln. Auch hier tritt die wesentliche Ausweitung im Anfang auf.

Wechsellast: Auch hier tritt bei den beiden Spannungen bereits anfänglich eine wesentliche Ausweitung auf, jedoch zeigt sich oberhalb von 10000 Lastwechseln noch ein stetiger Anstieg. Die Ausweitungsgröße bleibt jedoch in einem wesentlichen Teil des untersuchten Lastwechselbereichs unterhalb der Werte für Zug-Schwell. Abgesehen davon, daß die bisher vorliegenden vereinzelten Versuche zu einer abschließenden Stellungnahme nicht ausreichen, dürfte in diesem Falle die Definition der Kraft bzw. Beanspruchung eine wesentliche Rolle spielen. Vom Standpunkt der Dauerfestigkeitsuntersuchung liegt es nahe, in üblicher Weise die in der Verbindung auftretenden inneren Spannungsgrenzwerte als Bezugsgrößen zu benutzen. Für einen Vergleich der Spielentwicklung bei den verschiedenen Lastbereichen müßte man jedoch von der pulsierenden äußeren Kraft ausgehen und diese in den einzelnen Fällen gleich groß halten. Bei dem hier benutzten Schenck-Pulser müßte man für den Vergleich den Versuch bei Wechsellast mit der gleichen Unwuchtdrehzahl wie bei Schwellast durchführen. Es würde sich dann im Wechselgebiet eine wesentlich höhere Grenzspannung, s. Bild 5, 3 und 4, einstellen. Auch für die praktische Anwendung der Versuche empfiehlt sich dieses Beziehen auf die äußere Last, weil sie allein dem Konstrukteur bei der Bemessung bekannt ist.

Ursprungsdruck: Der Ausweitungsverlauf bleibt unterhalb der Werte für Ursprungszug. Es ergibt sich hier ein nur sehr schwacher Anstieg, verglichen mit Ursprungszug, der im Hinblick auf die Nähe der Fließgrenze im letzteren Falle durchaus verständlich ist. Bei Ursprungsdruck ent-

steht die Ausweitung wesentlich in den Leibungen durch Verformung des Oberflächengefüges, während bei Ursprungszug zusätzlich und hauptsächlich ein Fließen in den Wangenquerschnitten auftritt.

IV. Zusammenfassung.

An einer kleinen Anzahl von Bolzenverbindungen wurde der zeitliche Verlauf der Bolzenkraft (Gesamtlochleibung) während des Dauerversuchs laufend aufgezeichnet. Für Zug- und Druck-Schwell ergab sich ein übereinstimmender Verlauf, während bei Wechsellast eine bei jedem Lastwechsel angefachte gedämpfte zusätzliche Schwingung festgestellt wurde. Vergleichsweise dazu durchgeführte Ausweitungsmessungen beim Dauerversuch lassen eine grundsätzliche Verwandtschaft der Spielentwicklung mit dem zeitlichen Bolzenkraftverlauf erkennen. Die bisher vorliegende Versuchsreihe reicht für eine abschließende Stellungnahme noch nicht aus.

Über den Strömungswiderstand einer beheizten ebenen Platte.

Von W. Linke.

Mitteilung aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.

Es werden einige Messungen über die Änderung des Widerstandes und des Grenzschichtaufbaues einer ebenen, von Luft angeströmten Platte durch deren Beheizung mitgeteilt.

Gliederung.

I. Einführung.

Die Anregung zu den im Folgenden mitgeteilten Messungen hatte vor einer Reihe von Jahren die Frage ergeben, ob bei Verwendung einer sog. Oberflächenkühlung am Flugzeug, d. h. also durch Beheizen etwa eines Teiles der Flügeloberfläche, mit einer Änderung des Widerstandes gerechnet werden muß. Ähnliche Fragen über die Beeinflussung des Widerstandes durch einen gleichzeitig erfolgenden Wärmeübergang waren bereits im Zusammenhang mit der Kühlung in Blockkühlern entstanden. In diesem Falle staut sich die Luft vor dem Kühler, die Wärme wird ihr unter Überdruck zugeführt und sie gibt diese nach Entspannung durch Mischung wieder an die Außenluft ab. Dieser Vorgang entspricht einem Kreisprozeß, dessen Nutzbarkeit mit dem hierfür maßgeblichen thermischen Wirkungsgrad $\eta = 1 - T_0/T_{St}$ (T_0 = abs. Außentemperatur, T_{St} abs. Stautemperatur) als Vortrieb, d. h. als eine Widerstandsverminderung des Kühlers voll zur Geltung kommt. Ein Strahlwirkungsgrad, der etwa zusätzlich für die mit erhöhter Luftgeschwindigkeit infolge ihrer Ausdehnung austretenden Luftmassen noch anzusetzen wäre, kann praktisch gleich eins gesetzt werden.

Darüber hinaus läßt sich bei der Blockkühlung im einzelnen auch die Beeinflussung des Luftströmungswiderstandes in den Kühlerröhrchen, der nicht mit dem Widerstand des vorher betrachteten freiangeströmten Kühlers zu verwechseln ist, leicht übersehen. Dieser Widerstand nimmt durch Lufterwärmung zu, und zwar kann dies einerseits auf die Beschleunigung, welche die praktisch immer turbulent strömende Luft bei ihrer Ausdehnung in den Kühlerröhrchen erfährt, andererseits auf die erhöhte Reibung infolge Vergrößerung ihrer Geschwindigkeit zurückgeführt werden.

Bei der Oberflächenkühlung sind die Verhältnisse insofern unübersichtlicher, weil einmal die Oberflächendrucke je nach Lage der beheizten Fläche am Flugzeug verschieden sein können und zum anderen, weil sich die Änderungen des Grenzschichtaufbaues durch Erwärmung, die in erster Linie durch Ausdehnung der Luft und weniger durch die Zunahme ihrer Zähigkeit bedingt sein dürften, nicht so leicht wie im Rohr, wo keine Ausweichmöglichkeit für die Grenzschicht besteht, übersehen lassen.

Um die Aufgabe zunächst zu vereinfachen, wurde mit Untersuchungen an einer ebenen Platte, an deren Oberfläche der Druck der ungestörten Strömung herrscht, begonnen. Die im folgenden mitgeteilten, bereits im Jahre 1936 durchgeführten Messungen sind leider nicht über ein gewisses Anfangsstadium hinausgekommen. Ebenso muß vorläufig auf eine theoretische Ergänzung und Ordnung der Meßergebnisse verzichtet werden. Wir veröffentlichen sie, weil wir glauben, daß sie der Praxis einen gewissen Überblick über die Größe des Erwärmungseinflusses geben und darüber hinaus zu weiterer, besonders theoretischer Bearbeitung der Frage nach dem Einfluß von Über- oder Untertemperaturen der Wand auf ihre Grenzschicht anregen können.

Gemessen wurde erstens der Widerstand einer ebenen Platte bei Reynoldsschen Zahlen zwischen $2{,}6 \cdot 10^5$ und $12{,}7 \cdot 10^5$ (bezogen auf die Plattenlänge in Strömungsrichtung) und bei verschiedenen Heizflächenbelastungen, zweitens die zugehörigen Wärmeübergangszahlen und drittens für eine Reynoldssche Zahl und eine Heizflächenbelastung die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht bei drei verschiedenen Anlauflängen.

II. Versuchsdurchführung.

Die rechteckige Versuchsplatte bestand aus zwei äußerlich glatten Messingblechen, die mit Abstandstücken an den Rändern und auch in der Mitte zusammengeschraubt waren und zwischen denen ein eingegossenes Heizgitter lag. Die An- und Abströmkanten wurden leicht zugespitzt, die beiden anderen Ränder gut abgerundet. Diese Platte wurde entsprechend Bild 1 an der Waage des großen Aachener Windkanals senkrecht aufgehängt. Der Heizstrom führte über zwei fest im Luftstrom verspannte Quecksilbernäpfe zu den an der Platte herausragenden Enden des Heizgitters. Erwartungsgemäß waren die zu messenden Kräfte außerordentlich klein — beispielweise lagen die Widerstandsänderungen infolge Beheizung nicht über 5 g —, so daß auf die Wägung besondere Sorgfalt gelegt werden mußte,

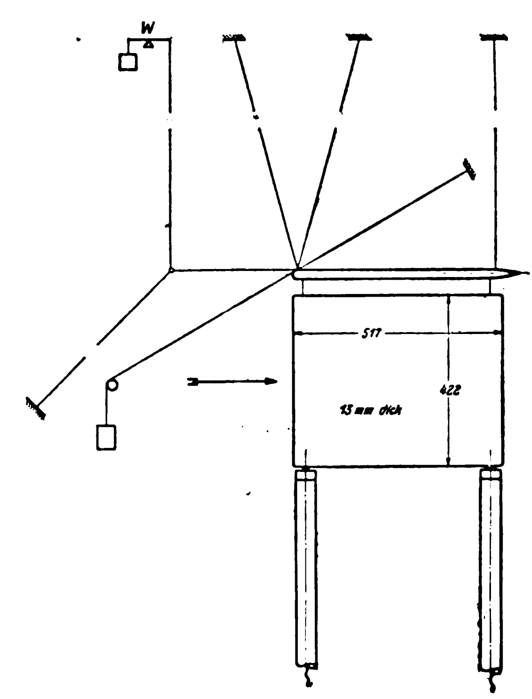


Bild 1. Plattenaufhängung im großen Windkanal.

zumal die Windkanalwaage nicht auf derartige Messungen zugeschnitten war. Um die Streuungen möglichst klein zu halten, wurden besonders sorgfältige Nullpunktbestimmungen durchgeführt. Zur genauen Erfassung des Drahtwiderstandes wurde zunächst ein horizontal liegender Stab an der Waage verspannt und an diesem erst die Platte an zwei kurzen dünnen Drähten aufgehängt. Die Messung des Erwärmungseinflusses geschah immer so, daß zunächst der Widerstand im unbeheizten Zustande und daran anschließend seine Änderung nach Einschalten des Heizstromes ermittelt wurde.

Nach Abschluß dieser Messungen kam noch eine andere Anordnung zur Verwendung, die vor allem für die Bestimmung der Widerstandsänderung durch Beheizung, dagegen nicht so sehr zur Messung des Absolutbetrages des Widerstandes geeignet erschien. Hierbei war die gleiche Heizplatte entsprechend Bild 2 im kleinen Windkanal an zwei langen V-Drähten pendelnd aufgehängt und die Widerstandsänderung ergab sich aus der mittels Rolle und Faden geeichten Plattenausschlagänderung nach Einschalten des Heizstromes. Der Ausschlag wurde mittels Fadenkreuz-Fernrohr an einer Skala, die an der Platte angebracht war, abgelesen. Wegen des hohen Plattengewichtes blieben die Ausschläge zunächst klein, sie konnten aber durch Koppelung mit einem auf einem Gestänge mit Schneiden-Lagerung ruhenden Gewicht G wesentlich vergrößert werden[1]). Das Zusatzgewicht befand sich in der Nullage in nahezu labilem Gleichgewicht, das durch einen Plattenausschlag gestört wurde und diesen zu vergrößern suchte. Bei der größten Empfindlichkeit betrug beispielweise der Ausschlag 3,5 mm für 1 g Widerstandsänderung.

Die Messung der Wärmeübergangszahlen geschah gesondert. Hierzu dienten neun, auf der einen Seite der Plattenoberfläche in gleichmäßiger Verteilung aufgelötete Thermoelemente von 0,1 mm Drahtdurchmesser. Auf der anderen Plattenseite waren zur Kontrolle zwei weitere Elemente befestigt. Die Heizleistung Q, die mit weiteren Thermoelementen gemessene Temperatur t_e des Luftstromes und die mittlere Plattentemperatur ϑ_m ergaben die mittlere Wärmeübergangszahl $\alpha = Q/F \ (\vartheta_m - t_e)$ (F = Plattenoberfläche).

Die Plattentemperatur ϑ_m wurde nicht über $\sim 130^0$ C gesteigert, so daß Strahlungseinflüsse gering blieben. Trotzdem wurden diese in den Wärmeübergangszahlen rechnerisch berücksichtigt. Ebenso war bei diesen verhältnismäßig niedrigen Temperaturen nicht damit zu rechnen, daß sich die Platte durch die Beheizung verformte oder wesentlich ausdehnte. Durch einige Dehnungsmessungen mit Meßuhren konnte dies bestätigt werden.

[1]) Diese Anordnung verdanke ich Prof. Wieselsberger.

Bei den Grenzschichtmessungen wurde die Heizplatte im kleinen Windkanal fest eingebaut. Zur Messung der Geschwindigkeitsverteilung diente ein Hakenröhrchen von 0,5 mm Außendurchmesser und der Temperaturverteilung ein in einer leicht federnden Gabel aufgespanntes Thermoelement (Drahtdurchmesser 0,05 mm). Diese Aufspannung war erforderlich, um Drahtdehnungen in der heißen Grenzschicht aufzunehmen. Beide Geräte wurden mittels eines Drehbanksupports senkrecht zur Plattenoberfläche bewegt. Ihre Berührung mit der Heizoberfläche wurde durch die hierdurch hervorgerufene Schließung eines elektrischen Stromkreises angezeigt.

III. Meßergebnisse.

Bild 3 zeigt die im großen Windkanal gemessenen, auf die Plattenoberfläche bezogenen Widerstandsbeiwerte als Funktion der Reynoldsschen Zahl. Die Werte weichen nur wenig von den ebenfalls eingetragenen Wieselsbergerschen Messungen an einer sechsmal zellonierten, stoffbespannten Fläche ab[2]). Bild 4 gibt die ebenfalls im großen Windkanal gemessene Änderung der Widerstandsbeiwerte als Funktion der Temperaturdifferenz Θ zwischen der mittleren Plattentemperatur und der Luftstromtemperatur wieder. Danach steigt der Widerstand der Platte mit der Beheizung an, und zwar wird die Zunahme mit abnehmender Reynoldsscher

[2]) Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen. I. S. 120.

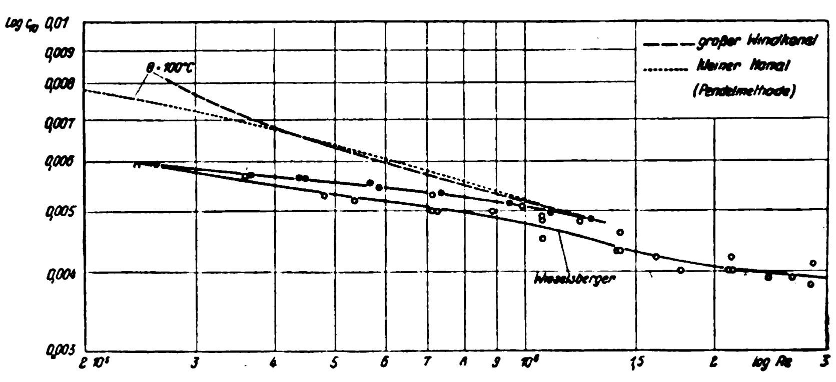


Bild 3. Widerstandsbeiwerte für unbeheizte Platte und für 100° C Übertemperatur.

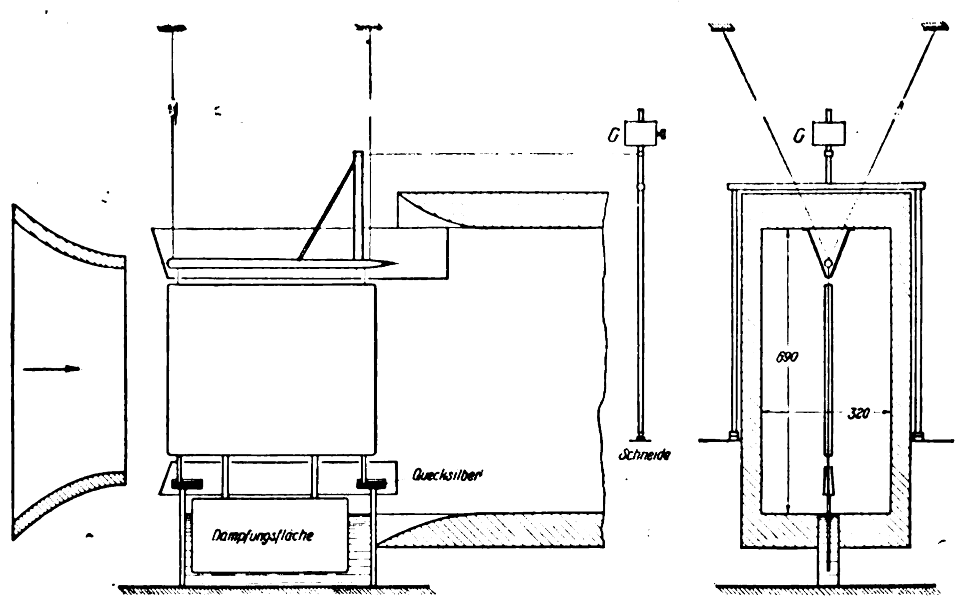


Bild 2. Plattenaufhängung im kleinen Windkanal.

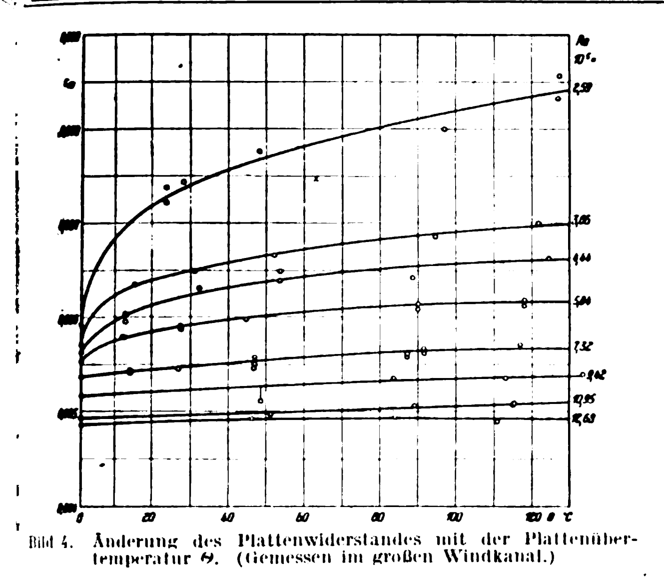
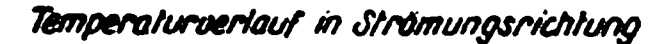


Bild 4. Änderung des Plattenwiderstandes mit der Plattenübertemperatur Θ. (Gemessen im großen Windkanal.)



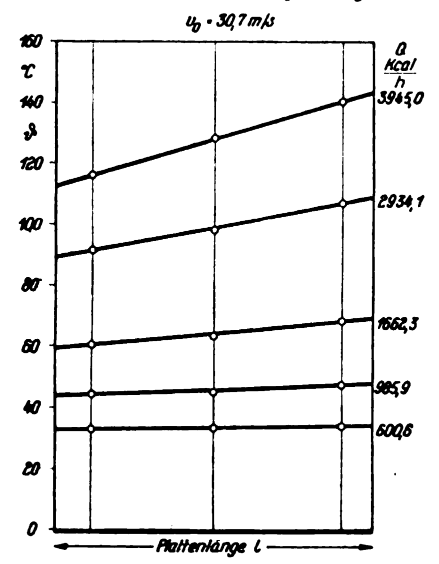


Bild 6. Temperatur der Plattenoberfläche bei verschiedenen Anlauflängen.

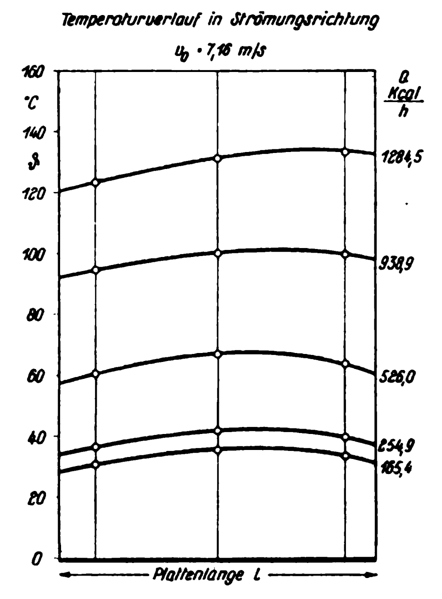


Bild 5. Temperatur der Plattenoberfläche bei verschiedenen Anlauflängen.

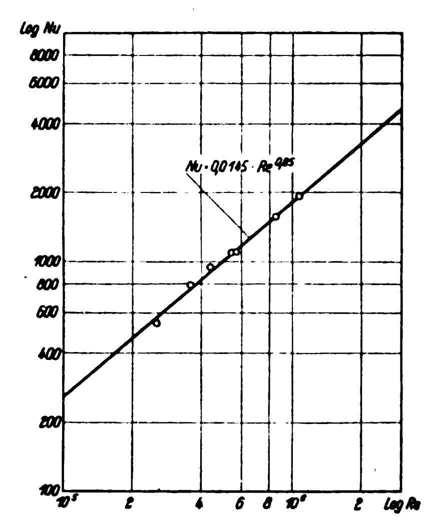


Bild 7. Dimensionslose Darstellung der gemessenen mittleren Wärmeübergangszahlen.

Zahl größer. Beispielsweise beträgt die bei einer Plattenübertemperatur von 100° C und der kleinsten gemessenen Re-Zahl ($2,59 \cdot 10^5$) 38% des Widerstandes der unbeheizten Platte, bei $Re = 12,68 \cdot 10^5$ nur noch 2,6%. In Bild 3 ist der Verlauf der nach beiden Verfahren gewonnenen Änderung der Widerstandsbeiwerte für $\Theta = 100°$ C gestrichelt bzw. punktiert eingetragen. Für Re-Zahlen, die in der Praxis auftreten, kann danach der Beheizungseinfluß als verschwindend klein angesehen werden.

Die Temperaturverteilung an der Plattenoberfläche geht für zwei Luftgeschwindigkeiten aus Bild 5 und 6 hervor, und zwar ist die mittlere Temperatur an drei senkrecht untereinander also bei gleicher Anlaufstrecke liegenden Meßstellen an der Plattenoberfläche abhängig von der Anlaufstrecke dargestellt. Danach ist bei hohen Geschwindigkeiten und hohen Heizflächenbelastungen die Plattentemperatur nicht konstant; sie steigt etwas mit der Plattenlänge an. Trotzdem wurden die Wärmeübergangszahlen aus den Mittelwerten aller Temperaturen errechnet. Entsprechend der dimensionslosen Darstellung $Nu = \frac{\alpha\, l}{\lambda} = f\ (Re)$ in Bild 7 befolgen sie die Beziehung

$$Nu = 0,0145 \cdot Re^{0,85}.$$

Die Ergebnisse der Grenzschichtmessungen sind in Bild 8 bis 11 dargestellt. Die Temperatur- und Gesamtdruckverteilungen wurden bei einer Geschwindigkeit $v_0 = 10,5$ m/s, einer Reynoldsschen Zahl $Re = 3,45 \cdot 10^5$, einer Heizleistung von 1850 kcal/h und einer mittleren Plattentemperatur von $\vartheta_m = 158°$ C bei drei verschiedenen Anlauflängen l_a gemessen. Die Reynoldssche Zahl liegt so, daß nach den Widerstandsmessungen ein merklicher Einfluß der Beheizung auf die Grenzschicht zu erwarten ist. Bild 8 enthält zunächst die Temperatur und Staudruckmeßpunkte für unbeheizte und beheizte Platte bei einer Anlauflänge. Die aus solchen Messungen unter Berücksichtigung der Dichteveränderlichkeit gewonnenen Geschwindigkeitsverteilungen (Bild 9 bis 11) zeigen, daß die Erwärmung in nächster Wandnähe wenigstens für die beiden großen Anlauflängen zu einem etwas steileren Geschwindigkeitsanstieg im übrigen aber zu einer wesentlichen Verbreiterung der Grenzschicht führt. Die Geschwindigkeitsverteilung bei beheizter Platte und die Temperaturverteilung verlaufen weitgehend ähnlich. Durch logarithmisches Auftragen der Geschwindigkeitsverteilungen ergibt sich nur für die größte Anlauflänge bei beheizter Platte eine Darstellung in Potenzform (Exponent 1 : 6,5). In allen anderen Fällen, sowohl für die unbeheizte wie für die beheizte Platte läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung nicht durch ein Potenzgesetz beschreiben. Es liegt nahe, anzunehmen, daß man es hier mit Übergangsformen von laminarer zu turbulenter Grenzschicht zu tun hat, und daß der Erwärmungseinfluß vor allem darin besteht, daß die laminare Grenzschicht

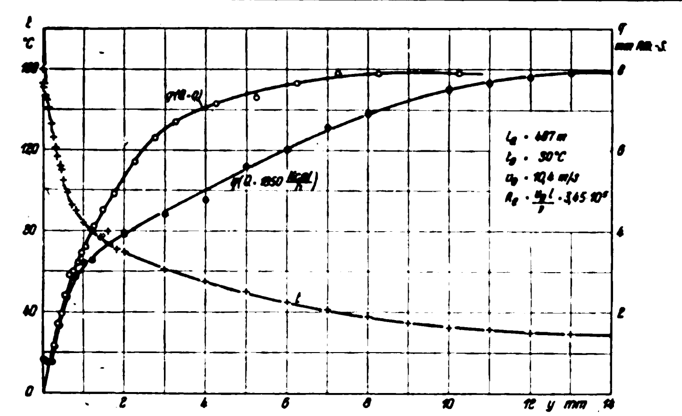


Bild 8. Meßpunkte für die Verteilung von Temperatur. Staudruck und Geschwindigkeit in der Plattengrenzschicht bei 487 mm Anlauflänge und einer Luftgeschwindigkeit von 10,4 m/s.

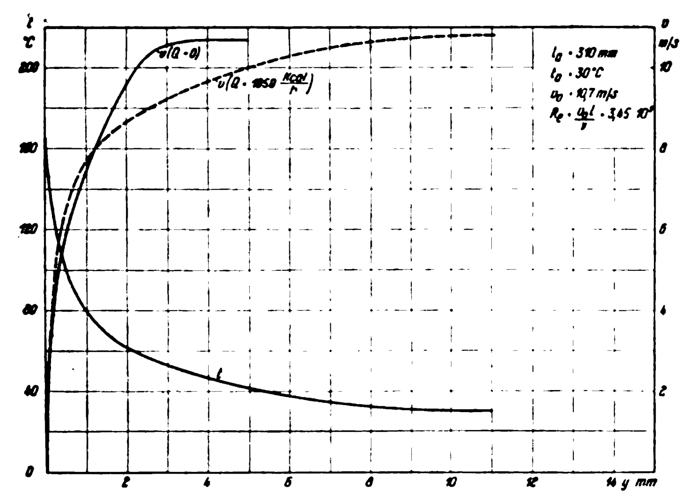


Bild 10. Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung in der Plattengrenzschicht bei mittlerer Anlauflänge.

labil und ihr Übergang in die turbulente Strömungsform beschleunigt wird. Damit wäre auch zu erklären, daß bei großen Reynoldsschen Zahlen, wo nahezu längs der ganzen Plattenlänge turbulente Grenzschichtströmung herrscht, praktisch keine Änderungen der Widerstandsbeiwerte durch Beheizen auftreten. Dasselbe ist auch bei kleinen Reynoldsschen Zahlen mit ausschließlich laminarer Grenzschicht zu erwarten. Man findet dies in den Ergebnissen, die im kleinen Windkanal nach der Pendelmethode gewonnen wurden, angedeutet (Bild 3).

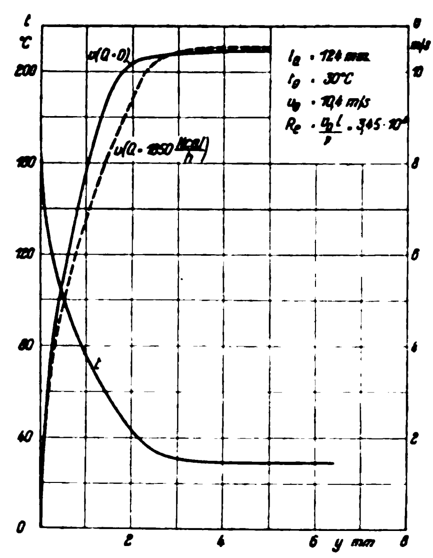


Bild 9. Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung in der Plattengrenzschicht bei kleiner Anlauflänge.

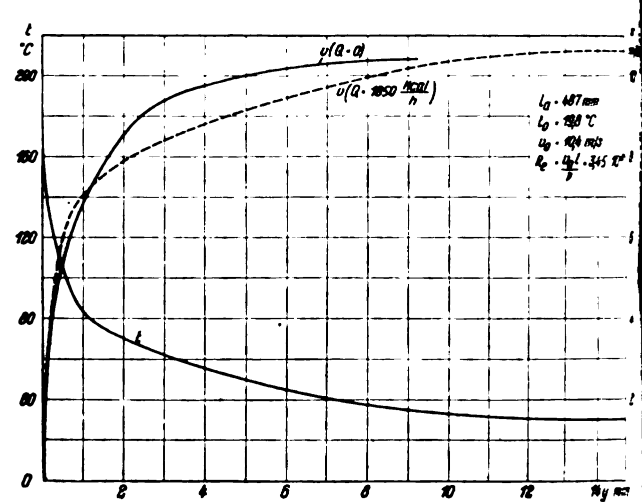


Bild 11. Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung in der Plattengrenzschicht bei großer Anlauflänge.

Als für die Praxis wichtiges Ergebnis ist zu folgern, daß eine Oberflächenkühlung oder auch eine als Vereisungsschutz dienende Flügelbeheizung lediglich bei Laminarprofilen zu einer merklichen Widerstandserhöhung führen kann.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 30. Mai 1942 | Lfg. 5

Drehzahlabhängigkeit des Ladedrucks bei Ladermotoren mit Kreiselverdichtern*).

Von Arnold Kortüm, Linz.

Es wird der Zusammenhang zwischen Ladedruck und Drehzahl durch Rechnung festgestellt für Ladermotoren, die als Lader einen vom Motor mit festem Übersetzungsverhältnis angetriebenen Kreiselverdichter besitzen. Dabei werden Regelvorgänge bei gleichbleibender Drosselöffnung und veränderlicher Motorbelastung betrachtet, wie sie z. B. bei Flugmotoren eintreten können, wenn die Einstellung der Verstelluftschraube geändert wird. — Die Rechnung ist durchgeführt für Lader verschiedenen Kennliniencharakters, ferner für saug- und druckseitige Drosselanordnung.

Gliederung.

Bei Ladermotoren, die als Lader einen vom Motor mit unveränderlichem Übersetzungsverhältnis angetriebenen Kreiselverdichter besitzen, tritt bei Drehzahländerung, wenn dabei das druckregelnde Drosselorgan festgehalten wird, auch eine Änderung des Ladedrucks ein. Diese Ladedruckänderung wird hervorgerufen einerseits dadurch, daß der Kreiselverdichter bei anderer Drehzahl einen anderen Verdichtungsenddruck erzeugt, andererseits auch dadurch, daß mit der geänderten Drehzahl sich andere Strömungsgeschwindigkeiten in den Ladeluftwegen einstellen und daher der Druckverlust in den Leitungen und vor allem an der Drosselstelle sich ändert.

Ein derartiger Regelvorgang kommt vor bei Flugmotoren, wenn im Fluge die Luftschraubenblätter auf andere Steigung verstellt werden. Es ändert sich dann die Motordrehzahl und, wenn das Drosselorgan in seiner alten Lage festgehalten wird (also keine selbsttätige Steuerung auf gleichbleibenden Ladedruck erfährt), auch der Ladedruck.

Im folgenden soll dieser Zusammenhang zwischen Drehzahl und Ladedruck bei Motoren mit Kreiselladern und fester Laderübersetzung auf rechnerischem Wege untersucht werden. Die Berechnung wird durchgeführt, sowohl für Motoren mit saugseitig angeordneter Drosselstelle, als auch für solche mit druckseitiger Drosselung. Anschließend wird noch untersucht, welche Änderung das Motordrehmoment beim Regelvorgang erfährt.

Der Ladedruck errechnet sich aus der Drucksteigerung im Lader und den Druckverlusten in den Ladeluftwegen, die sich aus den Strömungsverlusten in den Leitungen und Einlaßventilen und dem Druckabfall an der Drosselstelle zusammensetzen. Von den Druckverlusten sind die Leitungsverluste sehr klein und werden vernachlässigt. Ebenso wird die Druckminderung an den Einlaßventilen nicht in Rechnung gestellt, so daß das Rechnungsergebnis dem im praktischen Motorbetrieb gemessenen Ladedruck vor den Ventilen entspricht. Voraussetzung zur Durchführung der Berechnung ist also lediglich die Kenntnis der Zustandsänderung der Luft im Lader und der Zustandsänderung an der Drosselstelle, die in den beiden folgenden Abschnitten untersucht werden.

*) M 2—15 vgl. Gruppeneinteilung der Luftfahrt-Literaturschau.

1. Zustandsänderung der Luft im Lader.

Bezeichnungen:

P	=	Druck in kg/m²,
V	=	in der Zeiteinheit durchströmendes Volumen in m³/s,
T	=	Temperatur in °,
Index 1	=	vor dem Lader,
» 2	=	hinter dem Lader,
H_{ad}	=	adiabatische Förderhöhe in m,
η_{ad}	=	adiabatischer Wirkungsgrad des Laders,
η_i	=	innerer Wirkungsgrad des Laders,
η_m	=	mechanischer Wirkungsgrad des Laders,
$R = 29{,}27$	=	Gaskonstante für Luft,
$\varkappa = 1{,}4$	=	Verhältnis der spezifischen Wärmen für Luft.

Die Zustandsänderung der Luft im Lader ist bestimmt durch das Kennlinienfeld, in welchem die Förderhöhe des Laders in Abhängigkeit vom angesaugten Luftvolumen aufgetragen ist, und zwar für Betriebszustände gleicher Laderdrehzahl und solche gleichen adiabatischen Wirkungsgrades.

Der Rechnung zugrunde gelegt wurden zwei von von der Nüll veröffentlichte Laderkennfelder[1]), die bei ähnlichen Förderhöhen verschieden steil abfallende Kennlinien aufweisen.

In Bild 1 sind die beiden Kennfelder aufgezeichnet, daneben mehrere Umrechnungstafeln, an denen das Verhältnis der Drücke, Durchströmvolumen und Temperaturen vor und hinter dem Lader abgelesen werden kann.

Der Aufbau der Rechentafeln entspricht im wesentlichen Darstellungen von von der Nüll[1]) [2]). Zu ihrer Aufstellung wurden nachstehende Beziehungen benutzt:

Das Druckverhältnis berechnet sich in Abhängigkeit von $\frac{H_{ad}}{T_1}$ aus der Gleichung:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left[1 + \frac{\varkappa - 1}{R\varkappa}\left(\frac{H_{ad}}{T_1}\right)\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \text{ [2]) [3])} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Das Temperaturverhältnis in Abhängigkeit vom Druckverhältnis wird berechnet aus:

$$\eta_i = \frac{\eta_{ad}}{\eta_m} = \frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1} \text{ [4])},$$

[1]) Von der Nüll, ATZ Bd. 41 (1938), S. 285.
[2]) Von der Nüll, Die Kreiselradarbeitsmaschine. Berlin u. Leipzig 1937. S. 79.
[3]) Hütte II, 26. Auflage, S. 671.
[4]) Hütte II, 26. Auflage, S. 672.

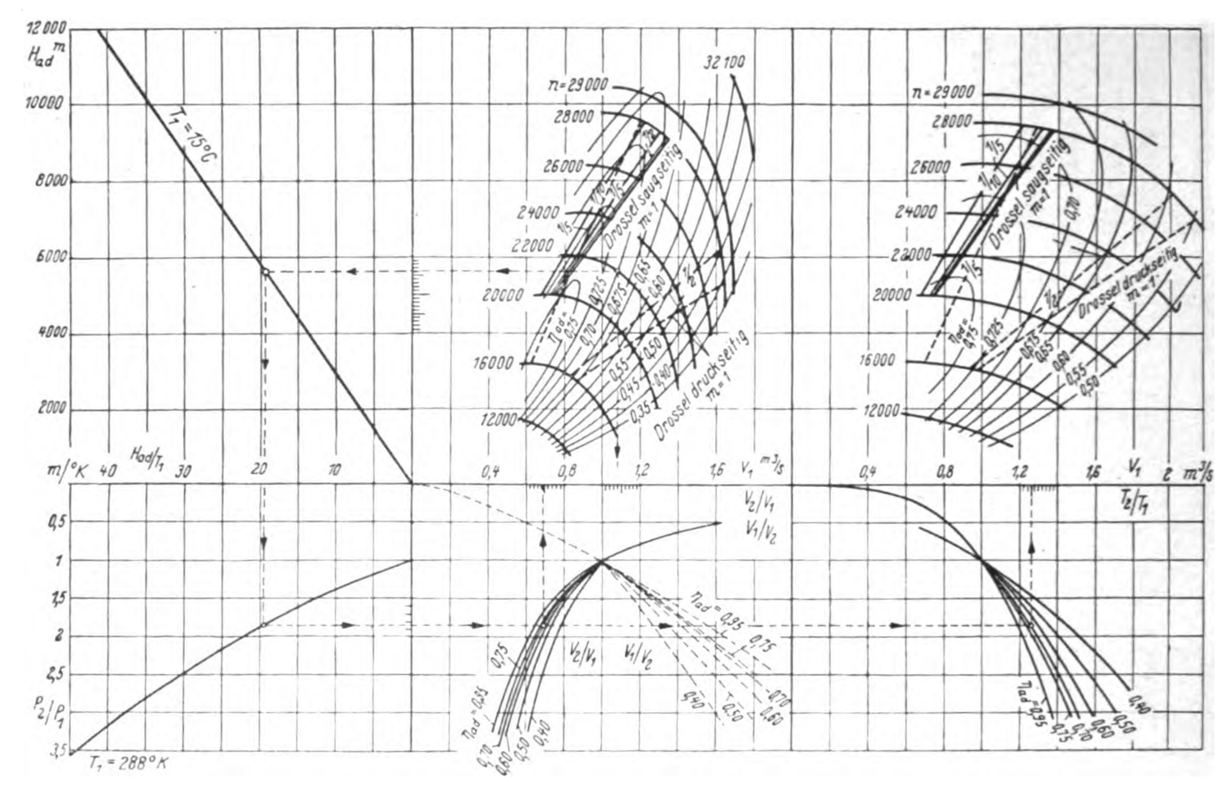


Bild 1. Zustandsänderung der Luft im Lader (Kennfelder nach von der Nüll).

worin

$$T_2' = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

die Verdichtungstemperatur bei adiabatischer Verdichtung, mit

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\eta_m}{\eta_{ad}} \cdot \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Bei der Ausrechnung wurde $\eta_m = 0{,}95$ angenommen.

Das Rauminhaltsverhältnis der durchströmenden Luft ergibt sich aus:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

2. Zustandsänderung der Luft an der Drosselstelle.

Zusätzliche Bezeichnungen:

v = spezifisches Volumen in m³/kg,
w = Geschwindigkeit in m/s,
F = Querschnitt in m²,
Index 3 = vor der Drosselstelle,
» 4 = hinter der Drosselstelle,
» 0 = im Drosselspalt,
» s = im engsten Strahlquerschnitt hinter Drosselspalt,

$m = \frac{F_0}{F_3}$ = Öffnungsverhältnis,

$\mu = \frac{F_s}{F_0}$ = Einschnürungszahl.

Die Zustandsänderung an der Drosselstelle kann aufgefaßt werden als Ausströmung aus einer Mündung mit darauffolgender Geschwindigkeitsminderung durch Gasstoß, Bild 2.

Zur rechnerischen Erfassung stehen folgende Beziehungen zur Verfügung:

Für den Ausfluß aus der Mündung ergibt sich bei reibungsfreier Strömung (adiabat. Dehnung) durch Anwendung der Kontinuitätsgleichung und der Energiegleichung auf die Strömung in den Punkten 3, 0 und s:

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \mu^2 \left(\frac{P_s}{P_3}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} R T_3 \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_3}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} \text{ [5] } \quad (4)$$

$$w_3 = w_s m \mu \left(\frac{P_s}{P_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Hierin ist bei gut abgerundeten Düsen die Einschnürungszahl $\mu = 1$.

Bei Blenden ist die Einschnürungszahl μ abhängig vom Mündungsdruckverhältnis P_s/P_3 und vom Öffnungsverhältnis m. Sie läßt sich für Normblenden nach einem von Nusselt angegebenen Näherungsverfahren berechnen[5].

Für den Rückstau hinter der Mündung gilt nach dem Impulssatz:

$$P_4 - P_s = \frac{w_3}{v_3 g}(w_s - w_4)$$

nach der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{w_4}{v_4} = \frac{w_3}{v_3}$$

nach der Energiegleichung:

$$\frac{w_3^2}{2g} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} P_3 v_3 = \frac{w_4^2}{2g} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} P_4 v_4.$$

Wird in der letzten Gleichung P_4 und v_4 eliminiert und nach w_4 aufgelöst, so erhält man:

$$w_4 = A - \sqrt{A^2 - 2g \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} E_3} \quad . \; . \; . \; . \; (6)$$

[5]) Nusselt, Forschung Bd. 3 (1932), S. 16.

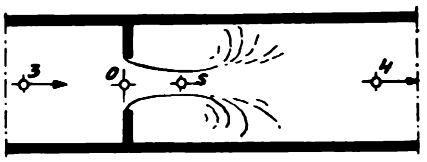


Bild 2.

worin

$$A = \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left[g R \frac{T_3}{w_3}\frac{P_s}{P_3} + w_s\right] \text{ und } E_3 = \frac{w_3^2}{2g} + \frac{\varkappa}{\varkappa-1} R T_3$$

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{P_s}{P_3} + \frac{w_3}{g R T_3}(w_s - w_4) \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{w_4}{w_3}, \quad \frac{T_4}{T_3} = \frac{P_4}{P_3} \cdot \frac{V_4}{V_3} \quad \ldots \ldots \quad (8)(9)$$

Für Druckverhältnisse $\frac{P_3}{P_s}$ unterhalb des kritischen Druckverhältnisses können diese Gleichungen in der Reihenfolge 4, 5, 6, 7, 8, 9 ausgewertet werden. $\frac{P_3}{P_s}$ ist dabei anzunehmen, die zugehörigen Werte w_3, w_4, $\frac{P_4}{P_3}$, $\frac{V_4}{V_3}$, $\frac{T_4}{T_3}$ sind zu berechnen.

Das kritische Druckverhältnis ist jenes, bei dem die Durchflußmenge ihren Höchstwert erreicht.

Es ist für die Düse bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{P_3}{P_s}\right)_{kr}^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\varkappa+1}{2} - m^2\frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{P_s}{P_3}\right)_{kr}^{\frac{2}{\varkappa}} \quad \ldots \quad (10)$$

Bei Blenden ist jenes Verhältnis $\frac{P_3}{P_s}$ das kritische, bei dem $\mu = 1$ wird.

Für überkritische Druckverhältnisse bleibt der Rechnungsgang wie früher. An Stelle von (4) und (5) treten jedoch die Gleichungen

$$w_s = w_{s_{kr}} \quad \ldots \ldots \quad (4\text{a})$$

$$w_3 = w_{3_{kr}} \quad \ldots \ldots \quad (5\text{a})$$

Besonders einfach stellen sich die überkritischen Strömungsverhältnisse dar, wenn in der Energiegleichung die Geschwindigkeitsanteile vernachlässigt werden. (Diese übliche Näherungsrechnung führt zur bekannten Regel, daß beim Drosseln der Wärmeinhalt unverändert bleibt.) Aus der Energiegleichung ergibt sich dann $v_3/v_4 \doteq P_4/P_3$, während die Kontinuitätsgleichung lautet

$$w_4 \frac{v_3}{v_4} = w_{3\,kr}.$$

Man erhält so

$$w_4 \frac{P_4}{P_3} \doteq w_{3\,kr} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Diese Gleichung besagt, daß das Druckverhältnis über w_4 in Kurvenform aufgezeichnet, näherungsweise eine gleichseitige Hyperbel ergibt.

Aus den Gleichungen (4) bis (7) geht hervor, daß das Druckverhältnis P_4/P_3 bestimmt ist durch P_s/P_3 und nicht von der Anfangstemperatur T_3 abhängt. Es entsprechen jedoch dem gleichen P_4/P_3 für geänderte Anfangstemperatur andere Geschwindigkeiten w_3 und w_4.

Es wird für $T_3' = a\,T_3$,

$$w_3' = \sqrt{a}\,w_3 \text{ und } w_4' = \sqrt{a}\,w_4.$$

Auf dieser Grundlage wurde die Rechentafel, Bild 3, aufgestellt. Sie stellt für verschiedene Öffnungsverhältnisse m und verschiedene Anfangstemperaturen T_3 die Zusammenhänge zwischen w_4, w_3 und P_4/P_3 dar. Die Drosselstelle wurde dabei einmal vorausgesetzt als gut abgerundete, reibungsfreie Düse, einmal als Normblende. Je nach der Ausführung der Drosselstelle wird die eine oder die andere Annahme der Mündung besser zutreffen. Weil den meisten üblichen Drosselorganen die Werte der Normblende am besten entsprechen dürften[6], wurden diese bei den folgenden Berechnungen benutzt.

3. Ladedruck bei saugseitiger Drosselanordnung.

Zusätzliche Bezeichnungen:

Index a = Außenluft,
» l = Ladeluft,
n = Laderdrehzahl,
ε = Verdichtungsverhältnis des Motors,
k, K = Festwerte.

[6]) Vgl. auch Zeman, ATZ Bd. 38 (1935), S. 427.

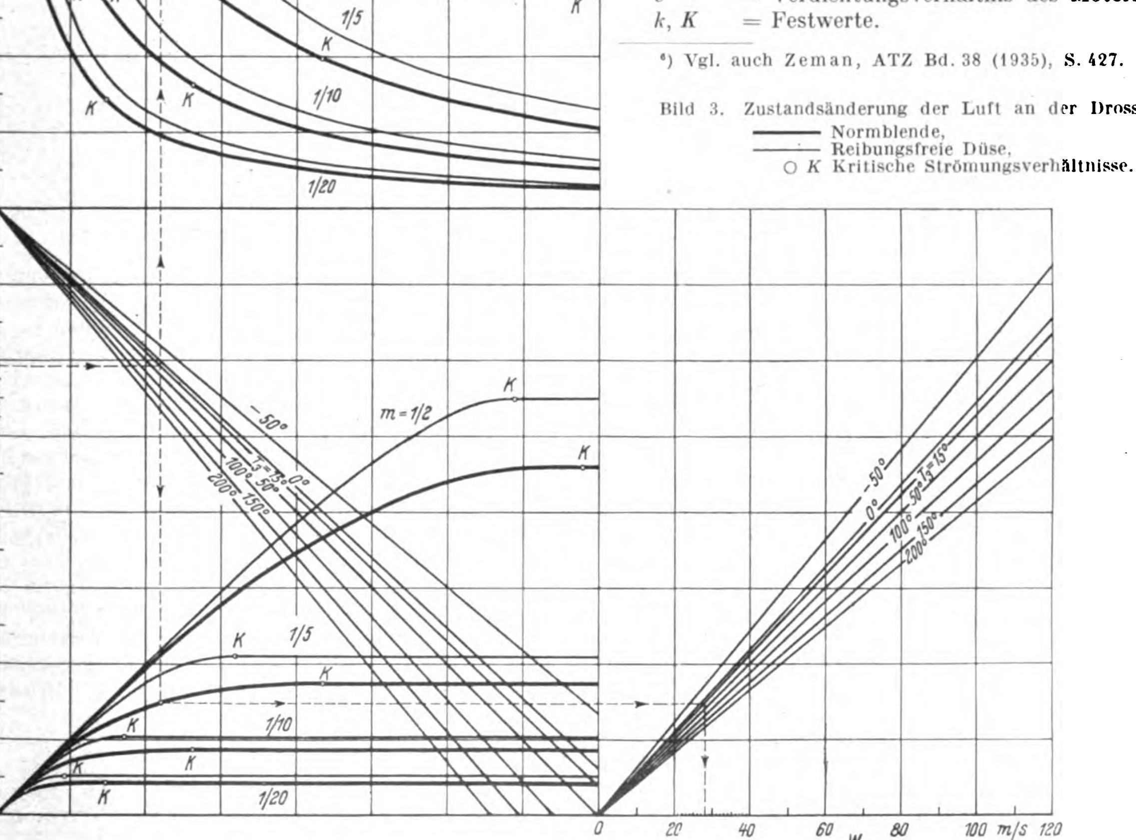


Bild 3. Zustandsänderung der Luft an der Drosselstelle.
——— Normblende,
——— Reibungsfreie Düse,
○ K Kritische Strömungsverhältnisse.

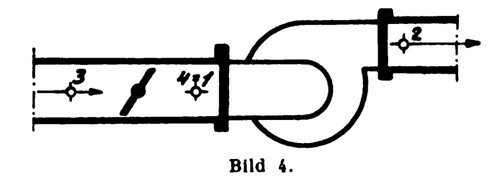


Bild 4.

Bei saugseitiger Drosselanordnung, Bild 4, ist das vom Lader gelieferte Luftvolumen V_2 verhältig dem im Hubraum des Motors aufgenommenen Luftvolumen (der Liefergrad, bezogen auf Luftzustand 2, wird im Betriebsbereich gleichbleibend angenommen) und somit auch der Laderdrehzahl.

Mit Rücksicht auf die Verdichtung bzw. Dehnung der Restgase im schädlichen Raum strömt in den Motor ein Luftgewicht ein, das C mal so groß ist als die den Hubraum füllende Ladung. Nach F. A. F. Schmidt wird

$$C = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{1}{\varkappa}\left[1 - \frac{P_a}{P_l}\right]^{7)} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Der Wert wurde aufgestellt und erprobt für Druckverhältnisse $P_l/P_a > 1$ (bis etwa 2), soll aber hier auch für $P_l/P_a < 1$ verwendet werden, was näherungsweise zulässig erscheint.

Für das gewählte $\varepsilon = 1 : 6{,}5$ und $\varkappa = 1{,}4$ wird

$$C = 1 + 0{,}13\left[1 - \frac{P_a}{P_l}\right].$$

V_2 wächst durch die Restgasverdichtung im gleichen Maße wie die Ladung, ist daher verhältig dem Wert C, außerdem der Laderdrehzahl und kann gesetzt werden

$$V_2 = k \cdot C \cdot n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Luftgeschwindigkeit hinter der Drosselstelle ist verhältig dem Ansaugvolumen des Laders:

$$w_4 = K \cdot V_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Ihr Höchstwert in den durchgerechneten Beispielen beträgt etwa 70 m/s.

Das Druckverhältnis $\frac{P_l}{P_a}$ wird

$$\frac{P_l}{P_a} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_4}{P_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

In jedem der beiden Laderkennfelder, Bild 1, wurden nun Betriebspunkte und Ladedrücke für verschiedene Drosselöffnungen berechnet. Es wurden dabei angenommen:

$$k = 2{,}525 \cdot 10^{-5},\ K = 51{,}8,\ T_3 = 288^0\,K\ (15^0\,C).$$

Betriebspunkte und Ladedrücke werden aufgefunden durch schrittweise Verbesserung. Folgender Rechnungsgang ist vorteilhaft: Ein Betriebspunkt wird schätzungsweise angenommen, dazu P_2/P_1, V_2/V_1 und w_4 ermittelt. Aus w_4 folgt P_4/P_3 und P_l/P_a. Daraus rechnet sich C, weiterhin V_2 und V_1. Mit diesem Wert V_1 wird die Lage des Betriebspunktes verbessert und neuerdings durch Rechnung überprüft.

Die gefundenen Betriebspunktsbahnen sind in den Kennfeldern eingezeichnet. Sie liegen für verschiedene Drosselstellungen eng nebeneinander (nur wegen der Restgasverdichtung wird bei offener Drossel und daher höherem Ladedruck, V_1 etwas größer), so daß bei jeder Drehzahl die Förderhöhe und P_2/P_1 nahezu unabhängig sind vom Öffnungsverhältnis m.

Die Druckverhältnisse P_l/P_a bei mehreren Drosselstellungen sind in Bild 5 für beide betrachteten Lader über der Drehzahl aufgetragen. Bei offener Drossel wird $P_l/P_a = P_2/P_1$ und steigt mit der Drehzahl stark an. Bei gedrosseltem Betrieb macht sich fühlbar, daß auch der Druckabfall an der Drosselstelle mit Drehzahl und Luftgeschwindigkeit zunimmt: Je stärker gedrosselt wird, um so flacher wird der Ladedruckanstieg. Bei kleinen Drosselöffnungen sinkt der Ladedruck sogar mit wachsender Drehzahl ab.

Die Unterschiede in den P_l/P_a-Linien der beiden vergleichsweise betrachteten Lader sind unbedeutend. Immerhin ergibt bei großer Drosselöffnung der Lader mit flachem Kennfeld etwas höhere Drücke.



[7] F. A. F. Schmidt, Verbrennungsmotoren. Berlin 1939, S. 133.

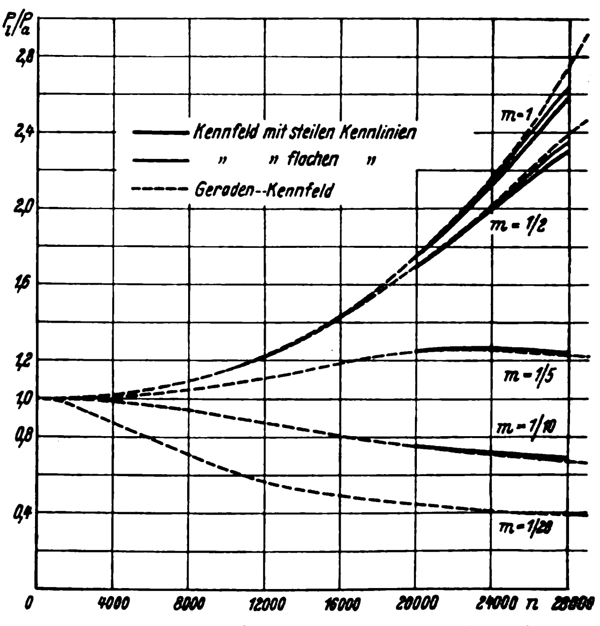


Bild 5. Ladedruckverhalten bei saugseitiger Drosselung.

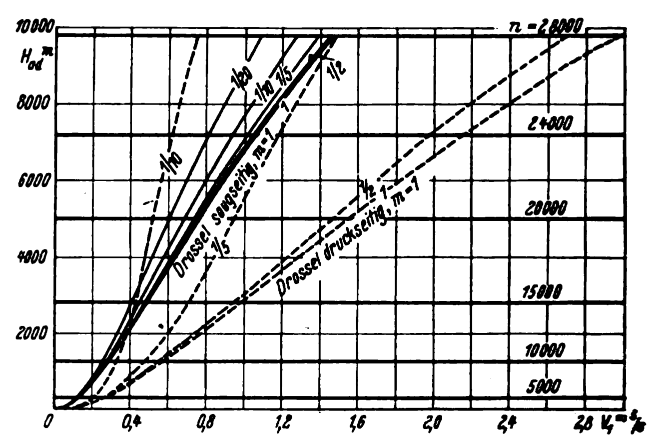


Bild 6. Ideales Laderkennfeld mit geraden Kennlinien.

Um den grundsätzlichen Verlauf der Ladedrucklinien besser erkennen zu können, wurde ein ideales Laderkennfeld mit horizontalen Kennlinien und unbeschränktem Betriebsbereich angenommen, Bild 6.

Die Schichtung der Kennlinien nach dem Gesetz:

$$H_{ad} = 12{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot n^2$$

ergibt ähnliche Förderhöhen wie bei den beiden Vergleichskennfeldern, Bild 1. Der adiabatische Wirkungsgrad wurde im ganzen Bereich mit $\eta_{ad} = 0{,}75$ angenommen.

Mit den gleichen Werten K und k wie früher ergeben sich die in Bild 6 eingetragenen Betriebspunktswege und die strichliert in Bild 5 eingezeichneten Linien für P_l/P_a.

In Bild 7 sind Ladedrucklinien für einen größeren Drehzahlbereich eingezeichnet, die aus dem gleichen idealen Kennfeld, aber ohne Berücksichtigung der Restgasverdichtung errechnet wurden und den allgemeinen Charakter des Ladedruckverhaltens bei saugseitiger Drosselung gut aufzeigen.

4. Ladedruck bei druckseitiger Drosselanordnung.

Befindet sich die Drosselstelle auf der Druckseite des Laders, Bild 8, so wird unter den gleichen Voraussetzungen, die bei saugseitiger Drosselanordnung zu Formel (13) führten:

$$w_4 = k \cdot C \cdot n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

An Stelle von Gleichung (14) tritt

$$w_3 = K \cdot V_2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

während Formel (15) auch bei druckseitiger Drosselung gilt.

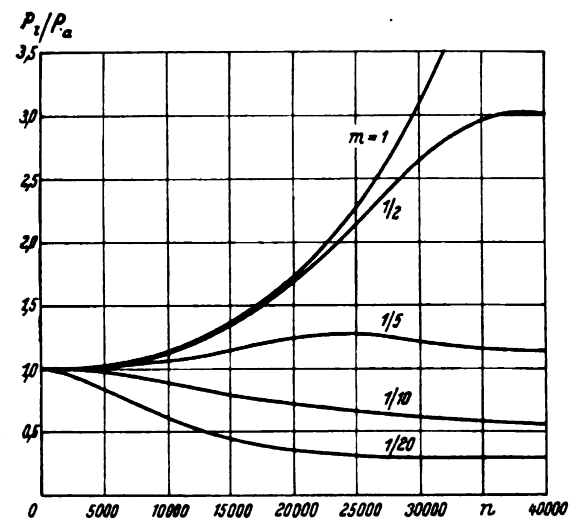


Bild 7. Ladedruckverhalten für Lader mit Geraden-Kennfeld bei saugseitiger Drosselanordnung. (Restgaseinfluß auf Füllung nicht berücksichtigt.)

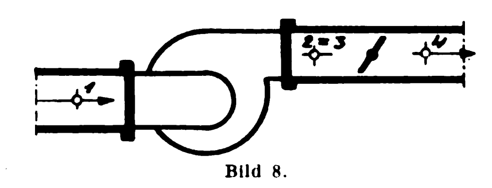


Bild 8.

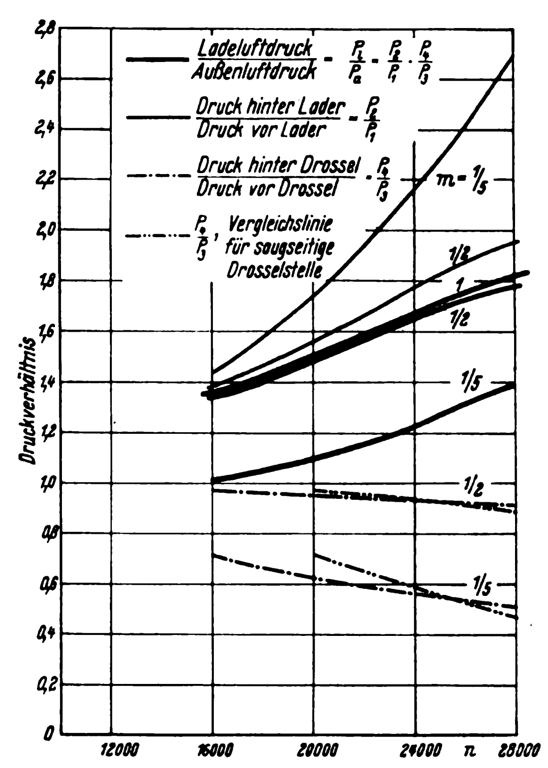


Bild 9. Druckverhältnisse bei druckseitiger Drosselung.

In jedem der beiden Laderkennfelder, Bild 1, wurden für druckseitig gelegene Drosselstellen Betriebspunkte und zugehörige Ladedrücke ermittelt.

Die Festwerte waren dabei,

im Feld mit steil abfallenden Kennlinien

$$k = 2{,}565 \cdot 10^{-3},\ K = 58{,}9,$$

im Feld mit den flachen Kennlinien

$$k = 2{,}525 \cdot 10^{-3},\ K = 52{,}6,$$

die Anfangstemperatur

$$T_1 = 288^\circ\, K\ (15^\circ\, \mathrm{C}).$$

Die größte vorkommende Geschwindigkeit hinter der Drosselstelle wird mit diesen Werten rund 75 m/s.

Die Errechnung der Betriebspunkte und Ladedrücke geschieht wieder durch schrittweise Verbesserung.

Es kann folgendermaßen verfahren werden: Ein Betriebspunkt wird schätzungsweise angenommen. Dazu P_2/P_1, V_2/V_1, T_2/T_1 aufgesucht, T_2 und V_2 berechnet. Aus abgeschätztem C wird w_4 errechnet, daraus P_4/P_3 und P_l/P_a bestimmt. Aus P_l/P_a folgt ein Wert für C, mit dem rückverbessert werden kann. Dann wird w_3 aufgesucht, V_2 und V_1 berechnet. Mit diesem V_1 wird der Betriebspunkt neu eingeschätzt und die Kontrollrechnung wiederholt.

Die so gefundenen Betriebspunkte liegen für voll offene Drossel bei sehr großen V_1, während bei kleinen Öffnungsverhältnissen, wegen der Dehnung der Luft beim Drosselvorgang, der Lader nur kleine Volumen zu fördern hat. Durch dieses Abgleiten des Betriebspunktes erhält man bei voll offener Drossel, besonders bei steilen Kennlinien, wesentlich kleinere Förderhöhen und Druckverhältnisse P_2/P_1 als bei gedrosseltem Betrieb. Dies ist gut erkennbar in Bild 9, in dem Werte von P_2/P_1 bei verschiedenen Drosselstellungen für den Lader mit den steiler abfallenden Kennlinien über den Laderdrehzahlen aufgetragen sind. In Bild 9 sind auch die Druckverhältnisse P_l/P_a eingezeichnet. Diese steigen im vorliegenden Falle auch bei stärkerer Drosselung noch ziemlich steil mit der Laderdrehzahl an, was darauf zurückzuführen ist, daß Luftgeschwindigkeit und Druckabfall an der Drosselstelle bei druckseitiger Drosselanordnung nicht in dem Maße mit der Drehzahl wachsen wie bei saugseitiger Drosselung (wo wegen der zunehmenden Verdichtung der Luft das saugseitig geförderte Volumen stärker anwächst als die Drehzahl). Es ist dies deutlich ersichtlich an den P_4/P_3-Linien für druck- und für saugseitige Drosselung, die ebenfalls in Bild 9 dargestellt sind.

In Bild 10 sind P_l/P_a-Werte nach beiden Vergleichskennfeldern aufgezeichnet. Wegen der Betriebspunktswanderung nach rechts für große Drosselöffnungen, ergeben sich für diese Drosselstellungen beim Lader mit steil abfallenden Kennlinien wesentlich geringere Förderhöhen und Ladedrücke als beim Lader mit dem flachen Kennfeld.

Auch die druckseitige Drosselung wurde mit dem idealen Geraden-Kennfeld durchgerechnet, und zwar für

$$k = 2{,}43 \cdot 10^{-3},\ K = 47{,}6.$$

Die zugehörigen P_l/P_a-Linien sind in Bild 10 strichliert eingezeichnet.

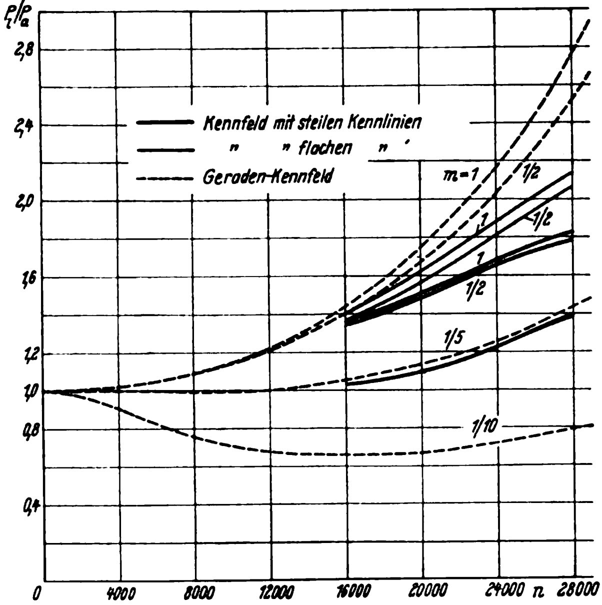


Bild 10. Ladedruckverhalten bei druckseitiger Drosselanordnung.

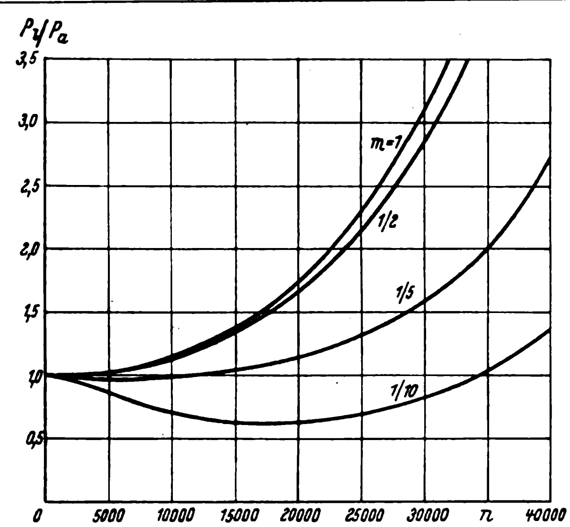


Bild 11. Ladedruckverhalten für Lader mit Geraden-Kennfeld bei druckseitiger Drosselung. (Der Einfluß der Restgase auf die Füllung ist nicht berücksichtigt.)

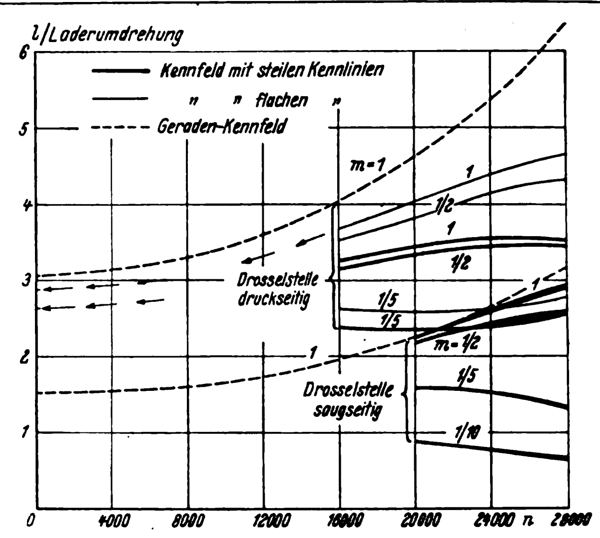


Bild 12. Je Laderumdrehung angesaugtes Luftvolumen in Abhängigkeit von Laderdrehzahl.

Bild 11 gibt P_l/P_a für das gleiche Kennfeld, aber ohne Rücksicht auf Restgasverdichtung gerechnet und für einen erweiterten Drehzahlbereich. Im Gegensatz zu dem, was bei saugseitiger Drosselung festgestellt wurde, steigt hier der Ladedruck bei hohen Drehzahlen auch für kleine Drosselöffnungen an.

5. Ladedruck und Drehmoment.

Für die, an den beiden Kennfeldern des Bildes 1 durchgerechneten Beispiele wurde das, während einer Laderumdrehung angesaugte Luftvolumen V_a vom Außenluftzustand berechnet. Dieses ist der Ladung und angenähert dem Motordrehmoment verhältig.

Bei saugseitiger Drosselung ist

$$V_a = \frac{w_3}{K} \cdot \frac{60}{n} \doteq V_1 \frac{P_4}{P_3} \frac{60}{n}$$

bei druckseitiger Drosselung

$$V_a = V_1 \frac{60}{n}.$$

In Bild 12 ist V_a über der Laderdrehzahl aufgetragen. Ein Vergleich mit den entsprechenden Ladedruckschaubildern zeigt, daß mit steigender Drehzahl die V_a-Linien weniger steil ansteigen bzw. stärker absinken als die entsprechenden Ladedrucklinien, was zurückzuführen ist auf den füllungsmindernden Einfluß des Temperaturanstiegs bei höherer Verdichtung. Von den Motordrehmomenten ist ein ähnlicher Verlauf zu erwarten.

6. Besondere Anwendung auf Flugmotoren und Zusammenfassung.

Bei Anwendung von Ladermotoren der betrachteten Bauart (mit Kreiselverdichter und unveränderlicher Laderantriebsübersetzung) im Flugzeugtriebwerk tritt der untersuchte Regelvorgang ein, wenn die Luftschraubenblätter bei festgehaltenem Drosselorgan im Fluge verdreht werden. Es ändern sich dann gleichzeitig Drehzahl und Ladedruck. Verstellung der Luftschraubenblätter auf kleinere Steigung hat zur Folge, daß sich der Motor so lange beschleunigt, bis das Gegendrehmoment der Luftschraube wieder gleich ist dem Motordrehmoment. Bei Vollgasbetrieb, wie er in großen Flughöhen möglich ist, nimmt dabei der Ladedruck und das Motordrehmoment zu, tritt also eine wesentliche Steigerung der im Triebwerk erzeugten Leistung ein. Werden jedoch die Motoren gedrosselt betrieben, was in geringer Höhe stets der Fall sein muß, so wird der Ladedruckanstieg gemindert durch die Zunahme der Drosselwirkung. Es kann bei stärkster Drosselung sogar ein Absinken des Ladedrucks mit zunehmender Drehzahl eintreten, und zwar bei Motoren mit saugseitiger Drosselung bei normalen Betriebsdrehzahlen, bei Motoren mit druckseitig gelegener Drosselstelle bei kleinsten Drehzahlen bis wenig über die Leerlaufdrehzahl (wie aus der hypothetischen Verlängerung der Ladedrucklinien mit Hilfe eines Geraden-Kennfeldes hervorgeht). Dieser fallweise eintretende Druckabfall kann übrigens leicht durch Nachstellen des Drosselorgans ausgeglichen werden.

Die Füllung und das Motordrehmoment ändern sich in ähnlicher Weise mit der Drehzahl wie der Ladedruck, sind jedoch demselben nicht genau verhältig. Es wird vielmehr bei höherer Drehzahl die Luft im Lader stärker erwärmt, und dem gleichen Ladedruck entspricht dann eine etwas geringere Füllung und ein kleineres Drehmoment als bei niedriger Drehzahl.

Die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Ladedruck und Motordrehzahl bei festgehaltenem Drosselorgan wurde durchgeführt, um vom praktischen Betrieb her bekannte Erscheinungen zu begründen. Die Ergebnisse stimmen gut mit den gemachten Erfahrungen überein. Daneben gestatten verschiedene, zur Rechnung benutzte Schaubilder einen guten Vergleich des betriebsmäßigen Verhaltens von Motoren mit druck- und solchen mit saugseitiger Drosselstelle, wie er im Schrifttum schon mehrfach durchgeführt wurde[1]). So zeigt Bild 1, daß bei saugseitiger Drosselanordnung das Laderansaugvolumen nahezu unabhängig von der Drosselöffnung ist, weshalb die Betriebspunkte stets ins Bereich günstiger Laderwirkungsgrade zu liegen kommen. Ist jedoch die Drosselstelle druckseitig angeordnet, also zwischen Lader und Motor eingeschaltet, so wird das den Lader durchströmende Luftvolumen stark beeinflußt von der Dehnung, die die Luft beim Drosselvorgang erfährt, also vom Grad der Drosselöffnung. Aus diesem Grunde führt, wie aus Bild 1 ersichtlich ist, stark gedrosselter Betrieb zu kleinem, Vollgasbetrieb zu großem Laderansaugvolumen. Wird mit Rücksicht auf diese Betriebspunktswanderung das gesamte Laderbetriebsbereich ausgenutzt, so ergeben sich bei Vollgasbetrieb schlechte Wirkungsgrade und geringe Förderhöhen. Andererseits wird aber die Fördermenge des Laders groß, und es kann ein saugseitig gedrosselter Lader, der stets im besten Teil des Kennfeldes, also bei kleinen Ansaugvolumen arbeitet, nur einen kleineren Motor speisen als der gleiche Lader bei druckseitiger Drosselung, wie dies auch Bild 12 erkennen läßt. Man könnte freilich auch den saugseitig gedrosselten Lader bei den gleichen großen Fördermengen arbeiten lassen, die sich bei Druckseitendrosselung zwangläufig ergeben, hätte aber dann auch die gleichen Abfälle in Wirkungsgrad und Förderhöhe in Kauf zu nehmen.

Überhitzungsempfindlichkeit und Neigung zur Lötbrüchigkeit verschieden legierter Einsatzstähle*).

Von Heinrich Cornelius und Franz Bollenrath, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

Einfluß überhitzter Härtung auf das Gefüge, die Streckgrenze, Zugfestigkeit, Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit von Einsatzstählen mit 0,11 bis 0,23 % C, 0,29 bis 0,64 % Si, 0,70 bis 1,64 % Mn, 0 bis 1,18 % Cr, 0 bis 0,24 % Mo, 0 bis 0,65 % V, 0 bis 0,14 % Ti und 0 bis 0,08 % Al. Neigung der Versuchsstähle zur Lötbrüchigkeit in Berührung mit flüssiger Bleibronze.

Gliederung.

Den Anstoß zu den Untersuchungen gab die Nachfrage nach einem Stahl, von dem nach Abschreckung von Temperaturen zwischen 1100 und 1200° ohne weitere Warmbehandlung eine Festigkeit über 110 kg/mm² bei guter Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit verlangt wurde. Außerdem sollte der Stahl eine geringe Neigung zur Lötbrüchigkeit in Berührung mit flüssiger Bleibronze aufweisen. Es war zu erwarten, daß ein Chrom-Molybdän-Einsatz-Stahl diesen Anforderungen entsprechen würde. Im Hinblick auf die in Betracht zu ziehenden Wandstärken wurde der Stahl ECMo 80 nach DIN 1663 gewählt. In die Prüfung wurde eine Reihe von Versuchsstählen mit zum Teil neuartiger Zusammensetzung einbezogen.

I. Versuchswerkstoffe.

Die Zusammensetzung der Versuchsstähle enthält Zahlentafel 1. Der Stahl 1 ist der Chrom-Molybdän-Stahl ECMo 80, der in Stangen mit 50 mm Dmr. bezogen wurde. Die Stähle 2 bis 11 wurden im 8 kg-Hochfrequenzofen mit saurer Zustellung erschmolzen und zu Blöcken mit 75 bis 85 mm Dmr. und 230 mm Länge vergossen. Alle Stähle wurden zu Stangen mit 12, 20 und 30 mm Dmr. ausgeschmiedet und anschließend normalgeglüht.

Für die Wahl der Zusammensetzung der Versuchsstähle waren folgende Überlegungen maßgebend: Ein Zusatz von Molybdän schied wegen des ausgeprägten Sparstoffcharakters aus, dagegen sollten Silizium, Mangan und Vanadin, letzteres auch im Austausch für Chrom, als Legierungselemente bevorzugt verwendet werden. Der Legierungseinfluß des Vanadins kommt gerade bei hohen Abschrecktemperaturen, die zu einer vollständigen Auflösung des Vanadinkarbides im Austenit führen, voll zur Geltung. Da andererseits die Verminderung der Überhitzungsempfindlichkeit der Baustähle durch Vanadin eben auf der Anwesenheit von nicht in Lösung befindlichem Vanadinkarbid beruht, war nicht sicher damit zu rechnen, daß bei sehr hohen Härtetemperaturen noch ein stärkerer Einfluß des Vanadins auf die Überhitzungsempfindlichkeit des Stahles erhalten bleibt. Daher ist eine Reihe von Versuchsstählen mit Zusatz von Titan hergestellt worden, dessen Karbid und Nitrid auch bei sehr hohen Temperaturen nur schwer im Austenit löslich sind. Der Titanzusatz läßt

Zahlentafel 1. Zusammensetzung der Versuchsstähle.

Stahl Nr.	Gehalte in %							
	C	Si	Mn	Cr	Mo	V	Ti	Al gesamt
1	0,14	0,35	0,84	1,04	0,24	—	—	—
2	0,11	0,35	0,70	1,18	—	0,25	—	—
3	0,15	0,29	0,71	1,02	—	0,20	—	0,08
4	0,16	0,33	1,25	—	—	0,19	—	0,09
5	0,21	0,47	1,64	—	—	0,29	—	—
6	0,22	0,50	1,55	—	—	0,65	—	—
7	0,20	0,45	0,74	1,01	—	—	0,09	—
8	0,23	0,56	1,12	1,15	—	—	0,14	—
9	0,19	0,42	0,97	0,50	—	0,19	0,13	—
10	0,16	0,45	0,77	—	—	0,50	0,13	—
11	0,22	0,64	1,08	—	—	0,60	0,13	—

daher eine hohe Überhitzungsunempfindlichkeit des Stahles auch bei den hier in Betracht kommenden Härtetemperaturen erwarten[1]). Der Einfluß einer Desoxydation mit Aluminium auf die Überhitzungsempfindlichkeit sollte ebenfalls untersucht werden.

Die Stähle 2 und 3 unterscheiden sich von dem Chrom-Molybdän-Stahl 1 durch den Zusatz von 0,20 bis 0,25% V und das Fehlen von Molybdän. Stahl 3 wurde, ebenso wie der Mangan-Vanadin-Stahl 4, mit Aluminium beruhigt. Die Stähle 5 und 6 sind Mangan-Silizium-Vanadin-Stähle. Stahl 6 hat einen hohen Vanadingehalt von 0,65%. Die Stähle 7 bis 11 enthalten 0,09 bis 0,14% Ti und, als weiteres gemeinsames Merkmal, einen erhöhten Siliziumgehalt. Weitere Legierungselemente sind Mangan und Chrom in den Stählen 7 und 8, Mangan, Chrom und Vanadin in Stahl 9, Vanadin in größerer Menge in Stahl 10, und schließlich Mangan und ein erheblicher Vanadinzusatz in Stahl 11.

II. Versuchsdurchführung.

Stangenabschnitte mit 12, 20 und 30 mm Dmr. aus den Versuchsstählen wurden von 880 (Haltezeit 45 min) und 1100° (Haltezeit 15 min) mit einer Wasserbrause abgeschreckt, deren radiale Strahlen aus einem konzentrisch zur Mantelfläche der Stangenabschnitte liegenden Hohlzylinder austraten. Der Wasserdruck wurde durch einen an dem Hohlzylinder angebrachten Überlauf bei allen Abschreckversuchen gleichgehalten. Um eine örtlich verschiedene Abschreckung der Proben (Härterißgefahr) zu vermeiden, wurden diese während des Abschreckens in der Wasserbrause auf und ab bewegt. Die Zahl, Anordnung und der Druck der Wasserstrahlen der Brause waren so gewählt, daß die mit ihr erreichte, mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit der Proben kleiner als die beim völligen Eintauchen in kaltes Wasser aber bedeutend größer als die beim Eintauchen in Rüböl auftretende Abkühlungsgeschwindigkeit war. Stahl 1 wurde

*) E 2113—2.

[1]) G. F. Comstock, Trans. Amer. Soc. Met. Bd. 28 (1940), S. 608/18.

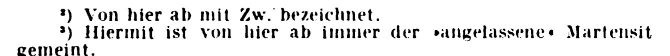
außer mit der Wasserbrause auch in Rüböl abgeschreckt. Aus den abgeschreckten Proben wurden Proportional-Rundstäbe für Zerreißversuche und, außer aus den Abschnitten mit nur 12 mm Dmr., Kerbschlagproben (10 × 10 × 55 mm³, Kerbtiefe 3 mm, Rundkerb mit 2 mm Dmr.) hergestellt.

Für die Versuche zur Ermittlung der Neigung der Versuchsstähle zur Lötbrüchigkeit wurden geschliffene Rundstäbe mit 5 mm Dmr. benutzt, die warm zu einem Winkel von 56° gebogen wurden. Die hierbei entstandene, dünne Zunderhaut wurde durch Schmirgeln entfernt. Beide Schenkel dieser Winkelproben wurden in einer Vorrichtung befestigt, die das Weiterbiegen der in eine Bleibronzeschmelze (25 bis 26% Pb) von 1200° eingetauchten Proben um bestimmte Beträge zuließ. Von jedem Stahl wurde je eine Probe um 18, 30, 40 und 56° (Schenkel parallel) gebogen. Bild 1 zeigt fünf Winkelproben, die untere im Ausgangszustand, die übrigen nach dem Biegen in der Bleibronze um die angegebenen Beträge. Die Winkelproben wurden nach dem Biegen in der Bleibronze im Längsschnitt metallographisch auf Lötrissigkeit untersucht.

III. Versuchsergebnisse.

Die Ergebnisse der Zerreiß- und Kerbschlagversuche für Proben aus dem Kern der von 880 und 1100° gehärteten Stangenabschnitte mit 12, 20 und 30 mm Dmr. aus den Versuchsstählen sollen im Zusammenhang mit den Ergebnissen der Gefügeuntersuchungen behandelt werden, die nur an den Stangen mit 20 mm Dmr. durchgeführt wurden. Alle hier wiedergegebenen Gefügebilder entstammen dem Kern dieser Stangen.

Nach dem Abschrecken von 880° in Öl hat der Stahl 1 ein Zwischenstufengefüge[2]) mit Ferritinseln, Bild 2, nach dem Abschrecken von 1100° ein gleichartiges Gefüge ohne größere Ferritinseln, aber mit gröberen, das Zw. kennzeichnenden Nadeln, Bild 3. Die Gefügeunterschiede sind nicht so beträchtlich, wie auf Grund der sehr verschiedenen Abschrecktemperaturen hätte erwartet werden können. Nach dem Härten mit der Wasserbrause zeigt sich der Einfluß der Abschrecktemperatur auf die Gefügevergröberung deutlicher. Das Abschrecken von 880° führt zu Martensit[3]) mit wenig Ferrit und Zw., Bild 4, nach dem Härten von 1100° zu grobem Martensit, Bild 5. Die Abhängigkeit der Festigkeitseigenschaften und der Kerbschlagzähigkeit des Stahles 1 von der Art der Abschreckung und dem Stangendurchmesser geben Bild 6 und 7 wieder. Sowohl beim Abschrecken in Öl wie mit der Wasserbrause ergibt die stark überhitzte Härtung für die Stangen mit 12 und 20 mm Dmr. kleinere, für die Stangen mit 30 mm Dmr. dagegen etwa gleiche Werte der Streck-


[2]) Von hier ab mit Zw. bezeichnet.
[3]) Hiermit ist von hier ab immer der »angelassene« Martensit gemeint.

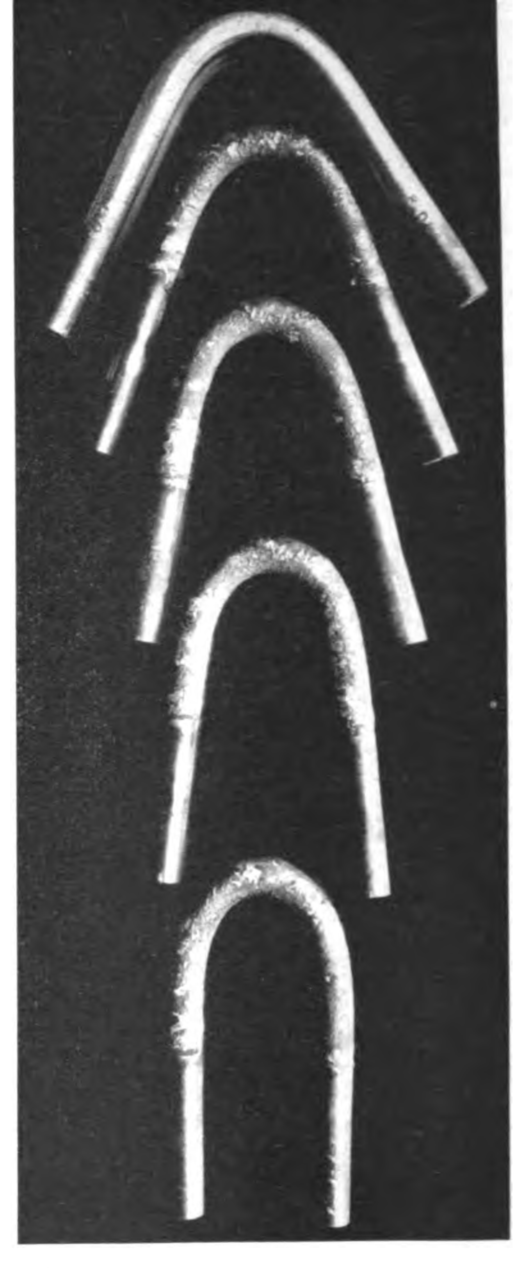

Bild 1. Lötbrüchigkeitsproben vor (unten) und nach dem Biegen in Bleibronze von 1200°. Vergr. 1 fach.


Bild 2. Von 880° in Öl abgeschreckt.


Bild 3. Von 1100° in Öl abgeschreckt.


Bild 4. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.



grenze und Zugfestigkeit wie die Härtung von 880°. Die hohe Abschrecktemperatur begünstigt, wie allgemein bekannt, die Durchhärtung. Bei Berücksichtigung der Festigkeitsunterschiede ergibt sich, daß die überhitzte Härtung in Öl nicht zu einer Verminderung der Werte für die Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit führt. Die überhitzte Härtung mit der Wasserbrause dagegen bedingt gegenüber der nicht überhitzten Härtung beeinträchtigte Werte der Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit auch bei niedrigerer Festigkeit. Die mit Stahl 1 erhaltenen Ergebnisse scheinen anzudeuten, daß sehr hohe Abschrecktemperaturen einen weniger ausgeprägten Einfluß auf die Festigkeitseigenschaften dieses Stahles haben, wenn die Abkühlungsgeschwindigkeit zu vorwiegendem Zw. führt, als wenn die Abschreckung so rasch erfolgt, daß vorwiegend Martensit entsteht.

Mit den Stählen 2 bis 11 wurden Abschreckversuche von 880 und 1100° nur mit der Wasserbrause durchgeführt. Die Ergebnisse der Zerreiß- und Kerbschlagversuche, einschließlich der mit Stahl 1, vgl. Bild 7, erhaltenen und zum Vergleich noch einmal wiedergegebenen, sind in Bild 8 bis 18 zusammengestellt: Der Chrom-Vanadin-Stahl 2 hat nach Härtung von 880° ein etwa zu gleichen Teilen aus Ferrit und Martensit (Zw. ?), nach Härtung von 1100° ein vorwiegend aus grobem Martensit mit Zw. und unterbrochenem Ferritnetz bestehendes Gefüge, Bild 19 und 20. Demgemäß nehmen Streckgrenze und Zugfestigkeit durch die überhitzte Härtung zu, Einschnürung, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit ab. Der von Stahl 2 im wesentlichen durch den höheren Kohlenstoffgehalt und die Desoxydation mit Aluminium unterschiedene Stahl 3 hat nach Abschreckung von 880° ein feines Härtungsgefüge aus Martensit, Zw. und nur kleinen Ferritresten, nach Abschreckung von 1100° ein grobes, ferritfreies Härtungsgefüge mit Martensit und Zw., Bild 21 und 22. Die Unterschiede in der Streckgrenze und Zugfestigkeit von Stahl 3 sind nach den beiden Abschreckbehandlungen nur klein. Die überhitzte Härtung vermindert aber die Einschnürung, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit. — Der mit Aluminium desoxydierte Mangan-Vanadin-Stahl 4 hat nach beiden Abschreckbehandlungen ein mit kleinen Ferritresten (Zw. ?) durchsetztes, etwas gröberes Härtungsgefüge, Bild 23 u. 24, als der vergleichbare Chrom-Vanadin-Stahl 3. Die Versuchsergebnisse lassen keinen eindeutigen Einfluß der überhitzten Härtung auf die Streckgrenze und Zugfestigkeit, aber einen mindernden Einfluß auf die Einschnürung, Bruchdehnung und Kerbschlagzähigkeit erkennen. — Das Gefüge des Mangan-Silizium-Vanadin-Stahles 5 besteht nach dem Abschrecken von 880° aus einem feinen Martensit mit zahlreichen, sehr kleinen Ferritkörnern, Bild 25. Die Härtung von 1100° führt zu mäßig vergröbertem Martensit. Kleine Ferritreste verbleiben auf den Grenzen der ursprünglichen Austenitkörner, Bild 26. Die Verminderung des Ferritgehaltes durch die überhitzte Härtung bedingt eine erhöhte Zugfestigkeit und Streckgrenze. Diese Änderung ist von einer Abnahme der Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit begleitet. — Von Stahl 5 weicht der Stahl 6 durch seinen wesentlich höheren Vanadingehalt ab und besitzt daher nach der Abschreckung von 880° ein noch vorwiegend aus Ferrit aufgebautes Gefüge, nach dem Abschrecken von 1100° dagegen einen ferritfreien, mäßig groben Martensit mit

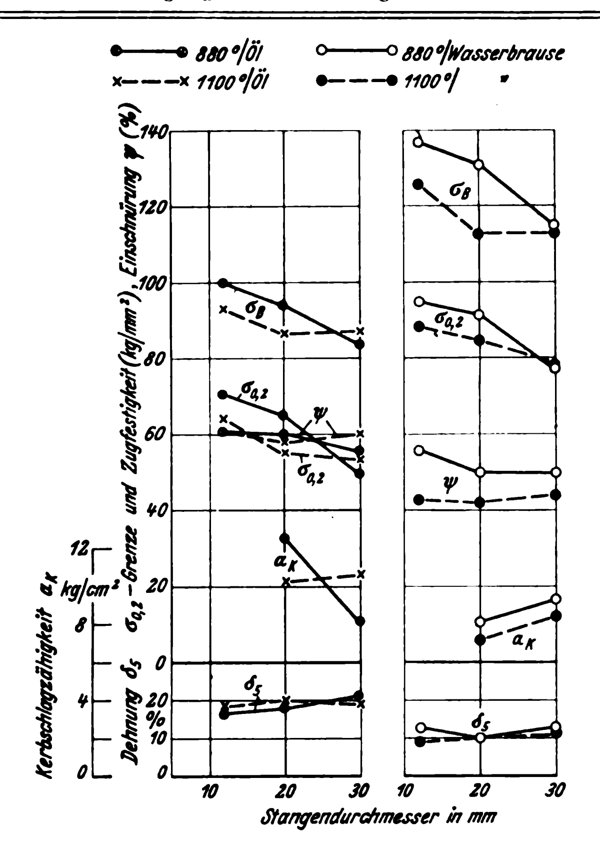


Bild 6. Abschreckung in Öl. Bild 7. Abschreckung mit der Wasserbrause.

Bilder 6 und 7. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit von Stahl 1 nach verschiedenen Abschreckbehandlungen in Abhängigkeit vom Stangendurchmesser.



Bild 5. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 2 bis 5. Gefüge von Stahl 1 nach verschiedenen Abschreckbehandlungen. Vergr. 500fach.

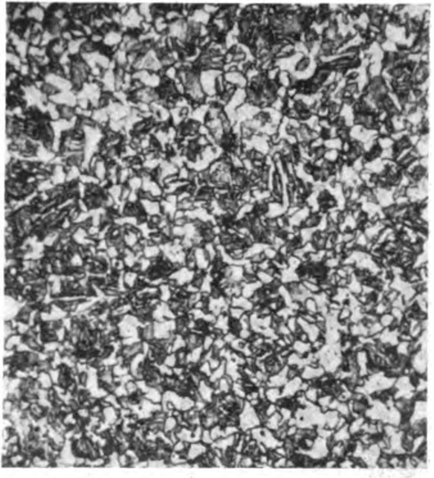


Bild 19. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

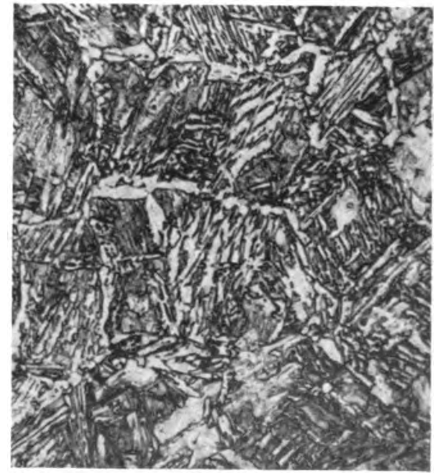


Bild 20. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 19 und 20. Gefüge von Stahl 2. Vergr. 500fach.

Bild 8. Stahl 1. Bild 9. Stahl 2. Bild 10. Stahl 3. Bild 11. Stahl 4. Bild 12. Stahl 5. Bild 13. Stahl 6. Bild 14. Stahl 7. Bild 15. Stahl 8. Bild 16. Stahl 9. Bild 17. Stahl 10. Bild 18. Stahl 11.

Bilder 8 bis 18. Festigkeitseigenschaften und Kerbschlagzähigkeit von Stangen mit 12, 20 und 30 mm Dmr. aus den Versuchsstählen nach dem Abschrecken von 880° und 1100° mit der Wasserbrause.

auffälliger Verdickung der ursprünglichen Austenitkorngrenzen, Bild 27 und 28. Entsprechend der ausgeprägten Abhängigkeit des bei der Abschreckung erhaltenen Gefüges von der Höhe der Abschrecktemperatur übt diese einen großen Einfluß auf die mechanischen Eigenschaften des Stahles 6 aus. — Das an dem Chrom-Titan-Stahl 7 mit erhöhtem Siliziumgehalt nach Abschrecken von 1100° festgestellte Gefüge ist gegenüber dem durch Abschrecken von 880° erhaltenen nur verhältnismäßig geringfügig vergröbert, Bild 29 und 30. Da auch die gleichen Gefügebestandteile, Martensit und Zw., für beide Abschrecktemperaturen vorliegen, ist deren Einfluß auf die Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit gering. Die Ursache hierfür liegt in dem Gehalt des Stahles an Titan, das auch bei den Stählen 8 bis 11 zu einer stark verminderten Überhitzungsempfindlichkeit beim Härten geführt hat. So weist der Mangan-Chrom-Silizium-Titan-Stahl 8 nach dem Härten von 880 und 1100° einen mittelfeinen Martensit auf, Bild 31 und 32, und besitzt mechanische Eigenschaften, die nur wenig von der Höhe der Härtetemperatur abhängen. Der Stahl härtet bei 30 mm Dmr. noch durch. — Infolge seiner hochliegenden A_{c3}-Umwandlung besteht der Chrom-Vanadin-Titan-Stahl 9 mit etwas erhöhtem Silizium- und Mangangehalt nach dem Abschrecken von 880° noch großenteils aus Ferrit, Bild 33. Das Abschrecken von 1100° führt ohne starke Gefügevergröberung zu Martensit und Zw., Bild 34. Den Gefügeunterschieden entsprechend sind die mechanischen Eigenschaften dieses Stahles abhängig von der Höhe der Härtetemperatur. — Der Vanadin-Titan-Stahl 10 mit etwas erhöhtem Siliziumgehalt wandelt sich erst oberhalb 880° in größerem Ausmaß in Austenit um. Infolgedessen bleibt nach dem Abschrecken von 880° der Ferrit der weitaus vorherrschende Gefügebestandteil, Bild 35. Das Abschrecken von 1100° ergibt ein Gefüge mit dem Charakter des Zw., Bild 36. Die Streckgrenze und Zugfestigkeit sind daher nach dem überhitzten Härten höher, Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit niedriger als nach dem Abschrecken von 880°. — Ähnliches wie für den Stahl 10 gilt auch für den Mangan-Vanadin-Silizium-Stahl 11, der nach dem Abschrecken von 880° noch zu mehr als der Hälfte aus Fer-

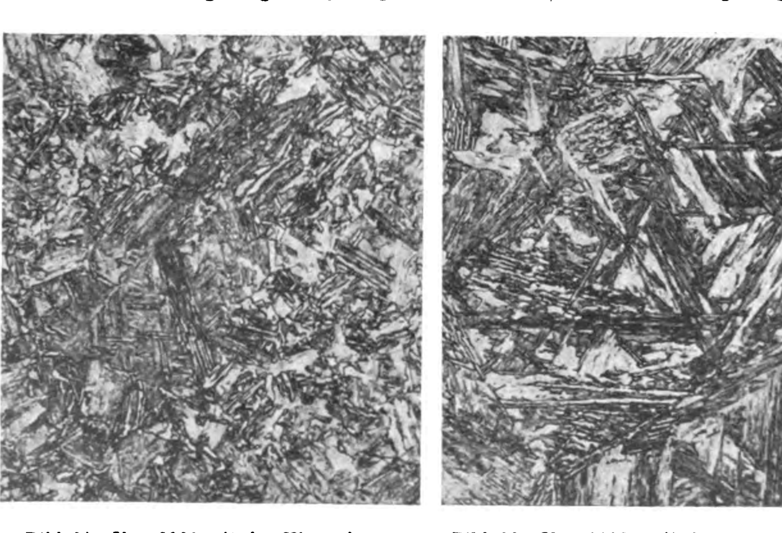


Bild 21. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt. Bild 22. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 21 und 22. Gefüge von Stahl 3. Vergr. 500fach.

rit, nach dem Abschrecken von 1100° dagegen aus einem Martensit besteht, der noch etwas feiner ist als der des nur von 880° abgeschreckten Stahles 1, Bild 37 und 38, vgl. Bild 4.

In Bild 39 sind die Streckgrenze, Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit der von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckten Stangen mit 12, 20 und 30 mm Dmr. aus den Versuchsstählen in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit dargestellt. Während die Streckgrenze trotz der Verschiedenartigkeit der Versuchsstähle näherungsweise geradlinig mit der Zugfestigkeit ansteigt, zeigen besonders die Einschnürung und die Kerbschlagzähigkeit ein stark wechselndes Verhältnis zur Zugfestigkeit. Dies gilt, weniger ausgeprägt, auch für die Bruchdehnung. Der Darstellung ist zu entnehmen, daß die Stähle 3 bis 6 im Verhältnis zu ihrer Zugfestigkeit nach stark überhitzter Härtung vorwiegend niedrige, die übrigen Stähle durchweg erheblich höhere Werte der Einschnürung, Kerbschlagzähigkeit und Bruchdehnung aufweisen. Bei der gewünschten hohen Festigkeit haben besonders der Chrom-Molybdän-Stahl 1 und die mit Titan neben Chrom, Mangan, Vanadin und Silizium legierten Stähle 7 bis 11 nach stark überhitzter Härtung, auch wenn sie chromfrei sind wie die Stähle 10 und 11, noch eine hohe Zähigkeit. Die mit den Chrom-Vanadin-Stählen 2 und 3 erhaltenen Ergebnisse sind widersprechend.

Die Ergebnisse der Lötbrüchigkeitsversuche, die außer mit den Versuchsstählen 1 bis 11 noch mit einem Stahl St C 10.61 durchgeführt wurden, sind in Zahlentafel 2 wiedergegeben. Keiner der Stähle ging bei dem Biegen im Bleibronzebad zu Bruch oder zeigte nachher mit bloßem Auge erkennbare Anrisse. Die Lötbruchneigung der Stähle wurde daher an Hand mikroskopischer Untersuchungen beurteilt. Wie zu erwarten war, ist ein eindeutiger Einfluß der Stahlzusammensetzung auf die Lötbrüchigkeit innerhalb der untersuchten Legierungsgrenzen nicht vorhanden. So zeigte der Chrom-Vanadin-Stahl 2 keine Lötbruchneigung. Der Chrom-Vanadin-Stahl 3 hingegen, der im Gegensatz zu Stahl 2 mit Aluminium beruhigt wurde, wies die stärkste Lötbruchneigung unter den Versuchsstählen auf. Wollte man als Ursache hierfür etwa den Aluminiumzusatz ansehen, so ließe sich dagegen anführen, daß der Mangan-Vanadin-Stahl 4, der ebenfalls mit Aluminiumzusatz erschmolzen wurde, sich als nicht lötbrüchig erwies. Wenn diese Ergebnisse auch darlegen, daß man nicht nur der Stahlzusammensetzung, sondern auch der Schmelzbehandlung keinen eindeutigen Einfluß auf die Lötbruchneigung von Stählen von der Art der Versuchswerkstoffe zu-



Bild 23. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.



Bild 24. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 23 und 24. Gefüge von Stahl 4. Vergr. 500fach.

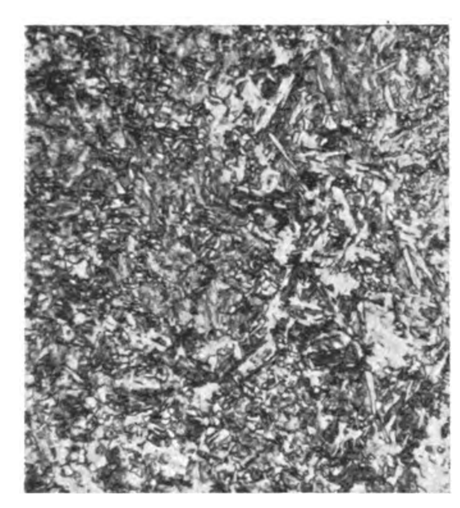


Bild 25. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.



Bild 26. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 25 und 26. Gefüge von Stahl 5. Vergr. 500fach.

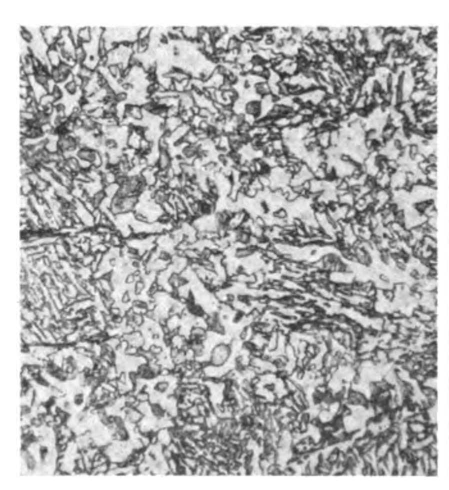


Bild 27. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.



Bild 28. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 27 und 28. Gefüge von Stahl 6. Vergr. 500fach.

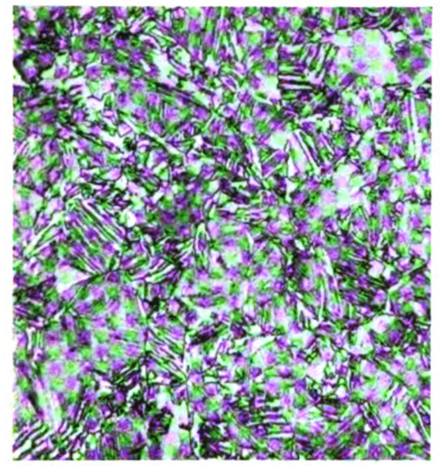


Bild 29. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

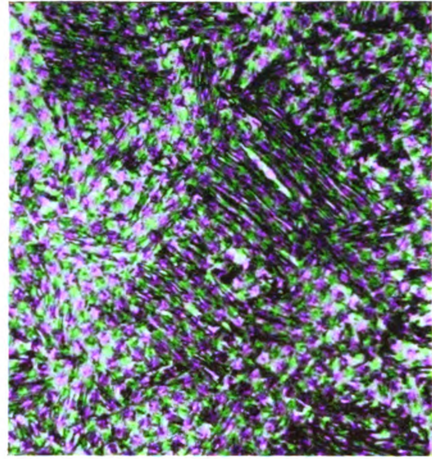


Bild 31. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

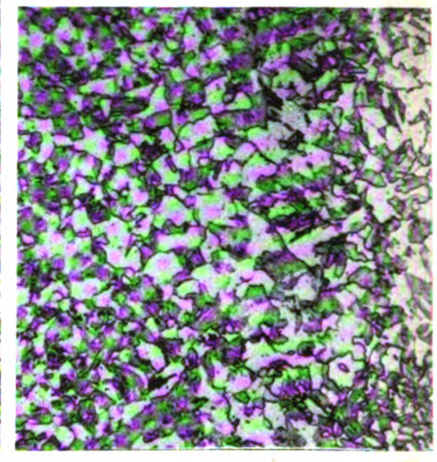


Bild 33. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

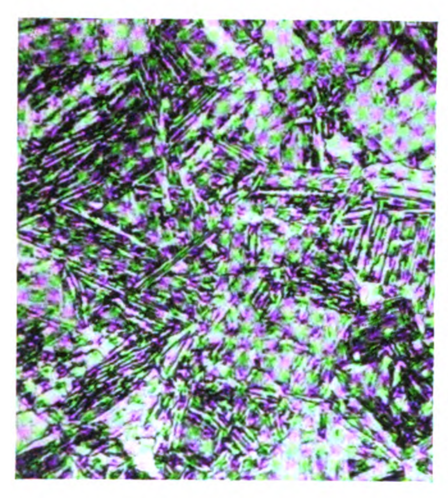
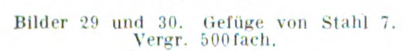


Bild 30. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.



Bilder 29 und 30. Gefüge von Stahl 7. Vergr. 500fach.

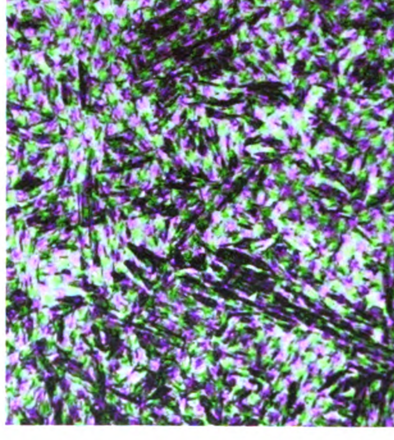


Bild 32. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 31 und 32. Gefüge von Stahl 8. Vergr. 500fach.

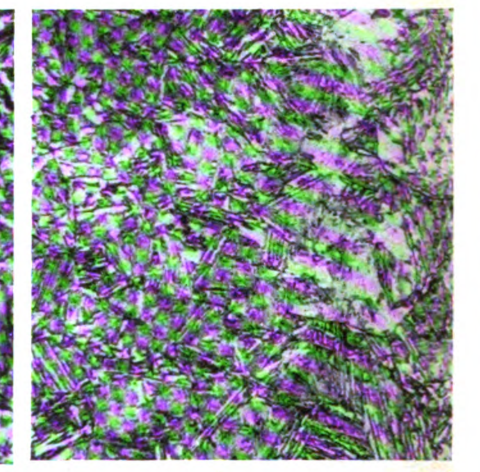


Bild 34. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 33 und 34. Gefüge von Stahl 9. Vergr. 500fach.

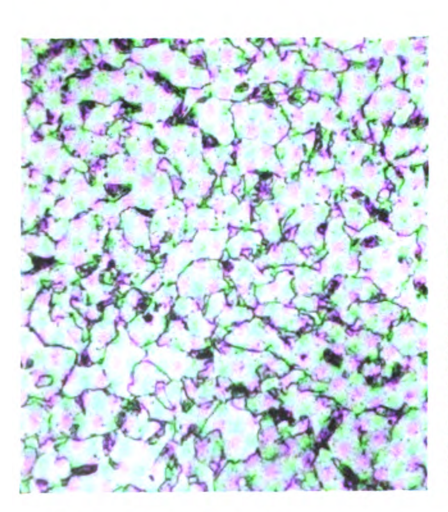


Bild 35. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

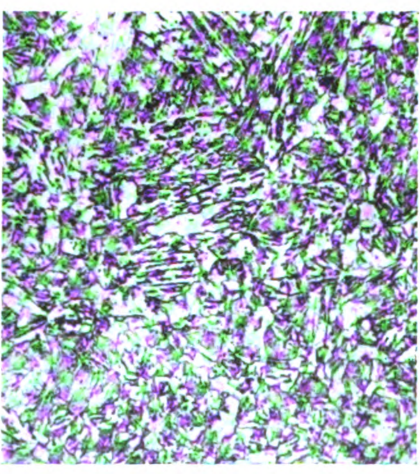


Bild 36. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 35 und 36. Gefüge von Stahl 10. Vergr. 500fach.

erkennen sollte, so läßt sich doch feststellen, daß die mit Titan legierten Stähle durchweg eine geringere Rotbruchneigung gezeigt haben als die übrigen legierten Versuchsstähle. Die Ursache für das günstigere Verhalten der titanlegierten Stähle ergibt sich aus den Versuchen nicht. Gegen einen Zusammenhang der Lötbruchneigung dieser Werkstoffe mit ihrer geringen Überhitzungsempfindlichkeit spricht die Beobachtung, daß der stark überhitzungsempfindliche Stahl St C 60.61 unter den eingehaltenen Versuchsbedingungen frei von Lötrissigkeit war. Andererseits weist die Beobachtung von E. Klose[4]), wonach Grobkörnigkeit die Neigung zu Lötrissen steigert, auf einen günstigen Einfluß einer geringen Über-

[4]) Techn. Zbl. prakt. Metallbearb. Bd. 51 (1941), Nr. 17/18, S. 522/24.





Bild 37. Von 880° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bild 38. Von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckt.

Bilder 37 und 38. Gefüge von Stahl 11. Vergr. 500fach.

hitzungsempfindlichkeit auf die Lötbruchneigung der Stähle hin.

IV. Folgerungen.

Auf Grund ihrer hohen Zähigkeit nach stark überhitzter Härtung und ihrer offenbar auch geringen Neigung zur Lötbrüchigkeit sind molybdänfreie Einsatzstähle mit Zusätzen von Titan für Verwendungszwecke geeignet, die eine stark überhitzte Härtung von Teilen erfordern, die bei sehr hoher Temperatur mit flüssiger Bleibronze in Berührung kommen und von dieser Temperatur abgeschreckt werden, ohne eine weitere Warmbehandlung zu erfahren. Hervorzuheben ist ein Stahl (Nr. 9) mit 0,3 bis 0,45% Si, 0,9 bis 1,1% Mn, 0,5 bis 0,6% Cr, etwa 0,2% V und 0,12 bis 0,16% Ti und ein chromfreier Stahl (Nr. 11) mit 0,4 bis 0,65% Si, 1,1 bis 1,3% Mn, 0,45 bis 0,6% V und 0,12 bis 0,16% Ti. Bei etwa 20 mm Wandstärke und Abschreckung mit einer Wasserbrause, in der eine Bewegung der Stücke zur Vermeidung ungleichmäßiger Härtung erforderlich ist, sind Kohlenstoffgehalte von 0,15 bis 0,2% erforderlich, um etwa Zugfestigkeiten zwischen 110 bis 135 kg/mm² bei guter Zähigkeit zu erreichen.

Zahlentafel 2. Neigung der Versuchsstähle zur Lötbrüchigkeit.
(Die eingeklammerten Zahlen geben die größte Rißtiefe in mm an.)

Stahl Nr.	Lötbrüchig beim Biegen in Bleibronze (1200°) um einen Winkel von			
	18°	30°	40°	56°
1	nein	ja (0,08)	nein	nein
2	nein	nein	nein	nein
3	ja (0,08)	ja (0,3)	ja (0,2)	ja (0,3)
4	nein	nein	nein	nein
5	nein	nein	ja (0,1)	nein
6	nein	ja (0,35)	nein	nein
7	nein	nein	nein	ja (0,01)
8	nein	nein	nein	nein
9	nein	nein	nein	nein
10	nein	nein	nein	ja (0,1)
11	nein	nein	nein	nein
St C 10.61	nein	nein	nein	nein

V. Zusammenfassung.

Molybdänfreie, mit Titan legierte Einsatzstähle haben nach stark überhitzter Härtung bei hoher Festigkeit gute Zähigkeitswerte. Außerdem neigen die Stähle auch nur sehr wenig oder nicht zur Lötbrüchigkeit in flüssiger Bleibronze.

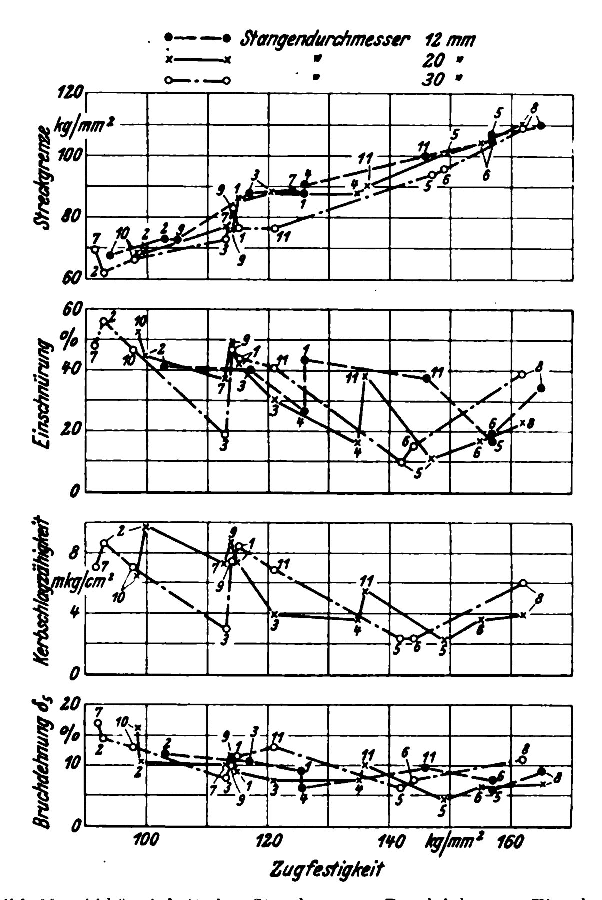


Bild 39. Abhängigkeit der Streckgrenze, Bruchdehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit der von 1100° mit der Wasserbrause abgeschreckten Stangen aus den Versuchsstählen mit 12, 20 und 30 mm Dmr. von der Zugfestigkeit.

Gefüge und Dauerfestigkeit von Al-Cu-Mg-Knetlegierungen nach DIN 1713 mit erhöhten Mangan- und Magnesiumgehalten*).

Von Walter Bungardt, Berlin.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Werkstofforschung.

In dem vorliegenden Beitrag wird gezeigt, daß bei Al-Cu-Mg-Legierungen durch eine starke Zunahme der Größe von harten und spröden Mangan-Eisen-Aluminiden im Preß- oder Walzgefüge Zugfestigkeit, Streckgrenze, Dehnung und Kerbschlagzähigkeit nur wenig beeinflußt werden, die Biegedauerfestigkeit jedoch um 10 bis 15%, erniedrigt wird. Der Einfluß der ungünstigen Gefügeausbildung tritt hinter dem von scharfen äußeren Kerben zurück.

Gliederung.

I. Einleitung.

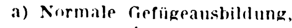
Bei den im deutschen Flugzeugbau weitgehend eingeführten hochfesten Al-Cu-Mg-Knetlegierungen nach DIN 1713 mit höheren Gehalten an Mangan und Magnesium, z. B. mit 4,0 bis 4,5% Cu, 1,0 bis 1,3% Mg, 1,0 bis 1,3% Mn, 0,5% Fe, 0,4% Si, Rest Al, wurde verschiedentlich eine auffällige Gefügeveränderung durch starke Vergröberung von primär aus der Schmelze ausgeschiedenen plattenförmigen oder auch nadeligen Mangan-Eisen-Aluminiden festgestellt. Während bei Preß- und Walzhalbzeugen aus dieser verhältnismäßig stark heterogenen Aluminium-Legierung die überschüssigen, spröden Verbindungskristalle bei mehr oder weniger ausgeprägter, zeiliger Anordnung meist nur eine geringe Kristallgröße besitzen, Bild 1a, werden namentlich bei höheren Eisen- und Mangangehalten unter gewissen, noch nicht vollständig geklärten Schmelz- und Erstarrungsbedingungen Mangan-Eisen-Aluminide von beachtlicher Größe beobachtet, Bild 1b. Setzt man, um das Ausmaß dieser Vergröberung durch eine Vergleichszahl auszudrücken, die Flächenanteile der mangan- und eisenhaltigen Gefügebestandteile bei normaler und anormaler Gefügeausbildung ins Verhältnis, so ergibt sich nach bisherigen Beobachtungen eine größte mittlere Zunahme etwa um das Hundertfache.

*) E 22—2.

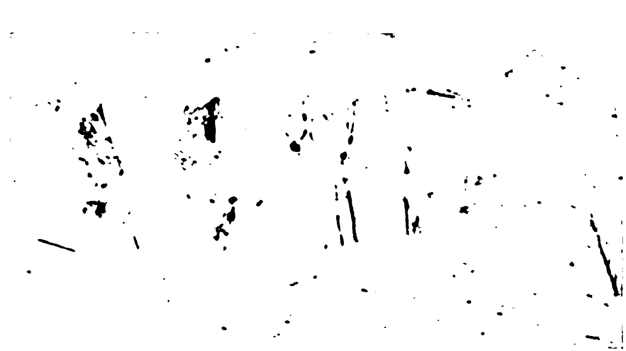
Grobkristalline Primärausscheidungen der Verbindung Al_6Mn, die nach Beobachtungen von H. Hanemann und A. Schrader[1]) größere Mengen Eisen zu lösen vermag, etwa in der Form, wie sie Bild 1b zeigt, lassen sich bei höheren Eisen- und Mangangehalten in Preß- und Walzhalbzeugen öfter nachweisen. Ihr Vorhandensein kann nicht nur mit metallographischen Hilfsmitteln sondern auch durch Beizen oder Eloxieren und durch Bruchversuche festgestellt werden. In Bild 2, das die Bruchfläche eines grobe mangan- und eisenhaltige Verbindungskristalle enthaltenden dicken Blechs wiedergibt, sind die glitzernden, hellen, nadeligen oder manchmal auch plattenförmigen Mangan-Eisen-Aluminide im Bruchgefüge mit bloßem Auge gut zu erkennen. Beim Beizen oder Eloxieren werden die Verbindungskristalle herausgelöst, und es entsteht eine poröse Oberfläche mit einer Beschaffenheit, wie sie z. B. Bild 5b und c zeigen.

Über die Ursachen, die bei Überschreitung bestimmter Eisen- und Mangangehalte zu der beschriebenen Gefügeveränderung führen, lassen sich wegen unzureichender Unterlagen zunächst nur Vermutungen äußern. Nach Beobachtungen von H. Hanemann und A. Schrader ist sicher erwiesen, daß ternäre Al-Mn-Fe-Legierungen ebenso wie binäre untereutektische Al-Fe-Legierungen[2]) stark zur Unterkühlung neigen. Nimmt man an, daß auch Al-Cu-Mg-Legierungen mit erhöhten Mangan- und Eisengehalten gleichfalls leicht unterkühlbar sind, so läßt sich die ungestörte Ausbildung großer Mangan-Eisen-Aluminide in Analogie zu Beobachtungen über die quasiprimäre Ausscheidung von Al_3Fe aus Aluminiumschmelzen nach V. Fuss[2]) in der Weise erklären, daß aus der unterkühlten, untereutektischen Schmelze längs der in Bild 3 gestrichelt gezeichneten Verlängerung der Sättigungslinie Primärkristalle ausgeschieden werden, bevor die Erstarrung der Restschmelze, die dann von diesen Kristallen ausgeht, beginnt. In welcher Weise allerdings die Größe und Ausbildungsform der mangan- und eisenhaltigen Primärkristalle durch die Legierungszusammensetzung (Fe-

[1]) Aluminium Bd. 21 (1939), S. 381/83.
[2]) V. Fuß, Metallographie des Aluminiums und seiner Legierungen. Berlin: J. Springer 1934, S. 21/22.



a) Normale Gefügeausbildung.



b) Gefüge mit stark vergröberten, plattenförmigen Mangan-Eisen-Aluminiden.

Bild 1. Gefügeaufbau von Al-Cu-Mg-Legierungen nach DIN 1713 (ungeätzt). Vergr. 200fach.

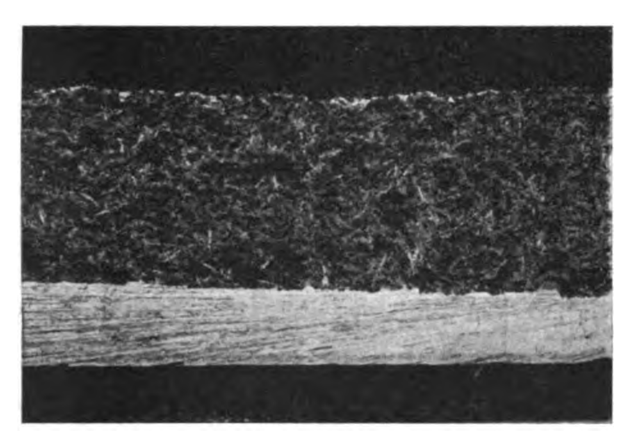


Bild 2. Bruchfläche eines dicken Blechs mit groben, nadeligen Mangan-Eisen-Aluminid-Kristallen. Vergr. 1,5fach.

und Mn-Gehalte) und die Erstarrungsbedingungen beeinflußt werden, bedarf noch der Klärung.

Die Nachteile, die mit der Anwesenheit großer Mangan-Eisen-Aluminide im Gußblock verbunden sind, entstehen dadurch, daß die großen und spröden, in der Mischkristallgrundmasse eingelagerten Verbindungskristalle die örtliche Verformbarkeit des Werkstoffes bei der Weiterverarbeitung in starkem Maße behindern. Sie zerbröckeln bei der Durchknetung der Legierung und verursachen hierdurch in ihrer Umgebung Auflockerungen und Zerreißungen des Werkstoffzusammenhanges, wie sie z. B. Bild 4 veranschaulicht, die sich nicht mehr ausfüllen. Die in dieser Weise entstandenen inneren Kerbstellen sind für die Dauerfestigkeitseigenschaften des Halbzeugs von erheblichem Nachteil[3]), wie aus den im folgenden dargelegten Ergebnissen von Dauerbiegeversuchen einwandfrei gervorgeht.

II. Versuchsergebnisse.

1. Kennzeichnung der Versuchswerkstoffe.

Für die Untersuchung standen drei T-Profilschienenabschnitte von 80 mm Breite, 50 mm Höhe und 10 mm Dicke sowie 500 mm Länge zur Verfügung, die den beschriebenen Gefügefehler in verschieden starkem Ausmaß besaßen. Wie aus der in Bild 5 gegebenen Übersicht über die Oberflächenbeschaffenheit der eloxierten Profilabschnitte zu entnehmen ist, nimmt die Porosität von Profil *1* bis *3* stark zu. Da diese Porosität ursächlich mit deren Vorhandensein großer Mangan Eisen-Aluminidkristalle zusammenhängt, nimmt im Gefügebild die Menge der groben und spröden Verbindungskristalle gleichfalls zu. Während das Profil *1* nach Ausweis der metallographischen Untersuchung fehlerfrei ist, besitzt das dritte Profil eine sehr große Anzahl grober Einlagerungen, die sich gleichmäßig über den ganzen Profilquerschnitt verteilen. Das Profil *2* nimmt hinsichtlich seines Fehlergrades eine Stellung zwischen den beiden Profilen *1* und *2* ein. Die Zahl der groben Einlagerungen ist im Mittel geringer als bei Profil *3*. Hinsichtlich des Ausmaßes der erreichten Vergröberung besteht jedoch zwischen beiden Profilen kein Unterschied.

[3]) Vgl. hierzu auch: F. Bollenrath, H. Cornelius u. W. Siedenburg. Z. VDI Bd. 83 (1939), S. 1169/73.

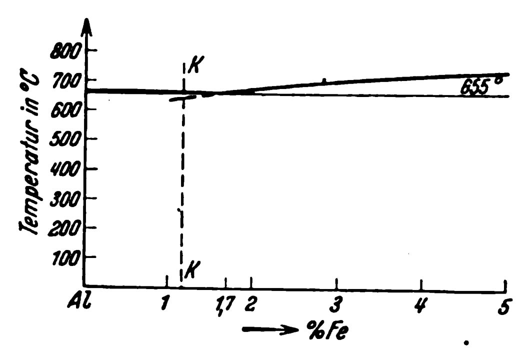


Bild 3. Erstarrung unterkühlter untereutektischer Eisen-Aluminium-Legierungen (nach V. Fuß).

Aus den in Zahlentafel 1 zusammengestellten Ergebnissen der chemischen Analyse ist zu entnehmen, daß die Verschlechterung des Gefüges durch grobkristalline Ausscheidung der Mangan-Eisen-Aluminiumverbindung offensichtlich mit der Summe der Legierungsgehalte an Mn + Fe zusammenhängt, denn von dem noch möglichen Einfluß unterschiedlicher Schmelz- und Gießbedingungen kann abgesehen werden, da die drei Preßprofile von demselben Hersteller gefertigt wurden. Es ist bemerkenswert, daß die Neigung zur anormalen Gefügeausbildung nach Zahlentafel 1 und Bild 5 bei Überschreitung des Gehaltes an Mn + Fe = 1,65 bis 1,70 beträchtlich zunimmt und daher dieser Fe + Mn-Gehalt als besonders kritisch anzusehen ist.

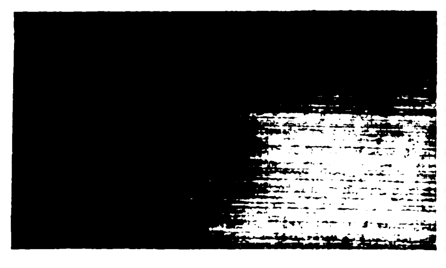
Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung der untersuchten T-Profile.

Bezeichnung	Chemische Zusammensetzung in %						Me + Fe
	Cu	Mg	Mn	Fe	Si	Al	
Profil *1*	4,49	1,19	1,13	0,49	0,46	Rest	1,62
Profil *2*	3,37	1,14	1,22	0,55	0,37	»	1,77
Profil *3*	4,10	1,16	1,33	0,54	0,33	»	1,87

In den statischen Festigkeitswerten der drei Profile, die an Längsproben aus dem Profilfuß gewonnen wurden und in Zahlentafel 2 mitgeteilt sind, ist ein merklicher Einfluß der Gefügeveränderung nicht festzustellen. In allen drei



Bild 4. Feingefüge eines Gurtlaschenabschnitts mit großen Verbindungskristallen. Vergr. 200fach.



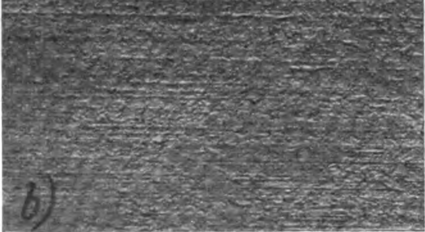




Bild 5. Oberflächenbeschaffenheit der eloxierten Profile *1* bis *3*. Vergr. 200fach.
a) fehlerfreie Oberfläche des Profils *1*,
b) und c) poröse Oberflächen der Profile *2* und *3*, verursacht durch herausgelöste grobe Mangan-Eisen-Aluminide.

Fällen genügen die erzielten Festigkeitswerte den Anforderungen, die an Halbzeuge dieser Art gestellt werden.

Auch die Kerbschlagzähigkeitswerte an Längs- und Querproben aus dem Profilfuß zeigten nach Zahlentafel 2 keinen systematischen Einfluß der Gefügebeschaffenheit. Die Kerbschlagzähigkeitswerte der Querproben, d. h. der Proben, deren Kerb in Richtung der Preßfaser und parallel zur Oberfläche liegt, sind erwartungsgemäß niedriger als die an Längsproben, d. h. Proben, deren Kerbgrund zur Faserrichtung senkrecht steht, ermittelten Kerbschlagzähigkeiten. Auffällig sind die guten Werte für Profil *2*, während die an dem fehlerfreien Profil *1* und an dem stark fehlerhaften Profil *3* praktisch übereinstimmen. Es folgt aus diesen Zahlen, daß die Kerbschlagzähigkeitsunterschiede von Preßprofilen aus verschiedenen Lieferungen im allgemeinen größer sind als die durch eine grobkristalline Erstarrung von Fe-Mn-Aluminiden bewirkten Veränderungen.

Zahlentafel 2. Festigkeit, Härte und Kerbschlagzähigkeit der untersuchten Profile.

Bezeichnung	Statische Festigkeitswerte			Brinellhärte 5/250/30	Kerbschlagzähigkeit (DVM) kg/cm²	
	Streckgrenze σ 0,2 kg/mm²	Zugfestigkeit σB kg/mm²	Dehnung δ 10 %	kg/mm²	Kerbgrund in Preßfaserrichtung	Kerbgrund senkrecht zur Preßrichtung
Profil *1*	41,1	51,9	11,1	122—123	0,54	1,21
Profil *2*	43,3	54,7	9,2	129—131	1,29	1,89
Profil *3*	40,0	48,9	10,0	122—123	0,49	1,28

Während die starke Vergröberung der mangan- und eisenhaltigen Primärkristalle auf die statischen Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit somit einen nur geringfügigen Einfluß ausübt, tritt bei Dauerfestigkeitsversuchen am glatten Stab der Nachteil dieser Gefügeausbildung stark hervor.

2. Dauerfestigkeitsuntersuchungen an glatten und gekerbten Stäben.

Die Biegedauerfestigkeit wurde bei umlaufender Biegung an Probestäben nach Bild 6 in einer Schenckschen Rundbiegemaschine bei 5000 Umdrehungen in der Minute gemessen. Sämtliche Probestäbe wurden dem Profilfuß in Preßrichtung entnommen. Die verglichen mit den sonst gebräuchlichen Probeabmessungen durchgeführte Verkleinerung der Proben war notwendig, um bei der beschränkten, zur Verfügung stehenden Werkstoffmenge eine genügende Anzahl von Probestäben entnehmen zu können. Die Stäbe wurden unter Zuhilfenahme einer besonders entwickelten Einspannvorrichtung in die Prüfmaschine eingebaut.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung an glatten, polierten Stäben, die in den Wöhlerkurven in Bild 7 zusammengefaßt dargestellt sind, zeigen eindeutig die Unterlegenheit eines Gefüges mit Einlagerungen großer und spröder intermetallischer Verbindungen bei dynamischer Beanspruchung. So betrug z. B. die Biegedauerfestigkeit des fehlerfreien Profils Nr. *1* 15,5 kg/mm², während an den Proben aus den Profilabschnitten *2* und *3* nur 13,0 bzw. 13,5 kg/mm² gemessen wurde. Die durch die Gefügeverschlechterung bewirkte Verminderung der Dauerfestigkeit liegt somit zwischen 10 bis 15%. Wie aus Bild 7 ersichtlich, wird auch die Zeitfestigkeit, besonders bei dem am stärksten fehlerhaften Profil *3*, sehr ungünstig beeinflußt; bei einer Beanspruchung von 15,5 kg/mm², die der Biegedauerfestigkeit des fehlerhaften Profils Nr. *1* entspricht, werden z. B. von Profil *2* nur

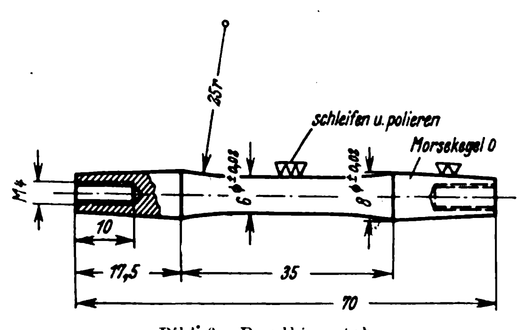


Bild 6. Rundbiegestab.

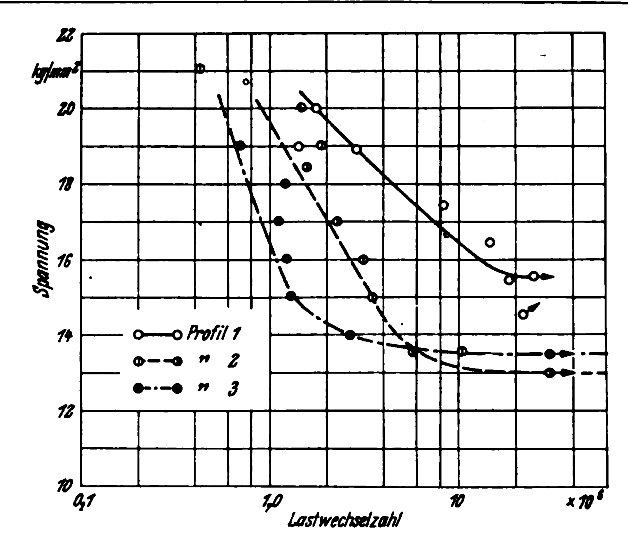
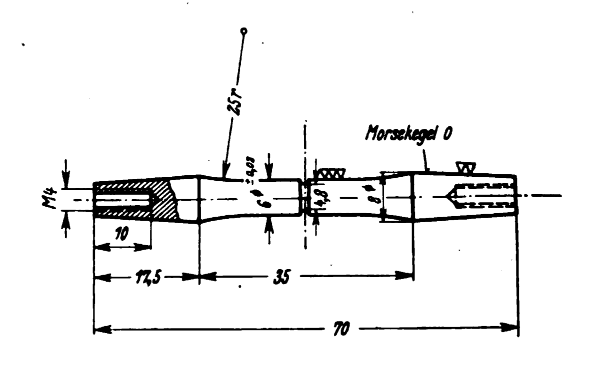


Bild 7. Ergebnisse der Dauerfestigkeitsversuche (Umlaufbiegung) an glatten polierten Stäben aus den Preßprofilen *1* bis *3*.



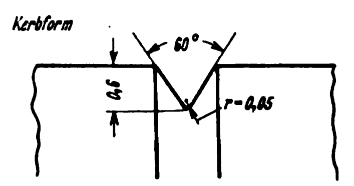


Bild 8. Rundbiegestab mit Spitzkerbe.

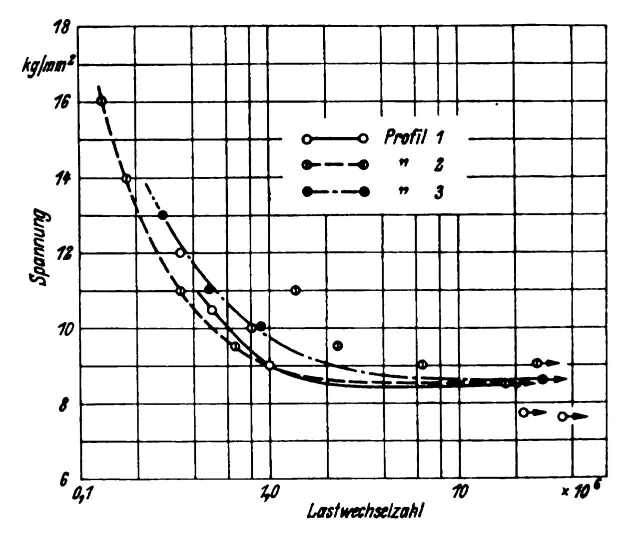




Bild 9. Ergebnisse der Dauerfestigkeitsversuche (Umlaufbiegung) an gekerbten Stäben aus den Preßprofilen *1* bis *3*.

Zahlentafel 8. Zusammenstellung der Versuchsergebnisse an glatten und gekerbten Probestäben.

Bezeichnung	Biegedauerfestigkeit (kg/mm²) bezogen auf 20 · 10⁶ Lastwechsel am		$\frac{wbk}{wb}$
	glatten Stab wb	gekerbten Stab (Spitzkerb) wbk	
Profil *1*	15,5	8,5	0,55
Profil *2*	13,3	8,6	0,65
Profil *3*	13,5	8,6	0,64

$4 \cdot 10^6$ und von Profil *3* nur $1,3 \cdot 10^6$ Lastwechsel bis zum Bruch ertragen.

Gegenüber scharfen äußeren Kerben tritt jedoch der dauerfestigkeitsmindernde Einfluß der inneren Kerbstellen zurück, wie die mit gekerbten Prüfstäben (Spitzkerb) nach Bild 8 erhaltenen, in Bild 9 dargestellten Wöhlerkurven zeigen.

Eine Zusammenstellung aller Meßwerte gibt schließlich nochmals Zahlentafel 3.

III. Zusammenfassung.

Die Untersuchung befaßt sich mit dem Einfluß von vergröberten Verbindungskristallen, vor allem von Mangan-Eisen-Aluminiden auf die statischen und dynamischen Festigkeitseigenschaften von hochfesten Preßhalbzeugen aus Al-Cu-Mg-Legierungen mit erhöhten Mangan- und Magnesiumgehalten. Es wird gezeigt, daß Zugfestigkeit, Streckgrenze, Dehnung und Kerbschlagzähigkeit nur wenig beeinflußt werden, daß aber die Biegedauerfestigkeit um 10 bis 15% erniedrigt wird. Im Vergleich zu scharfen äußeren Kerbstellen tritt indessen der Einfluß dieses Gefügefehlers zurück.

Tragfläche und Schraubenfläche*).

Von A. Pröll, Hannover.

Für das Verhältnis $\frac{\text{Schraubenfläche}}{\text{Tragfläche}}$ wird im Schrifttum häufig ein Mittelwert $\sim \frac{1}{4{,}5}$ angegeben; es ist jedoch bei den sehr verschiedenen Flugzeugtypen dieses Verhältnis offensichtlich von den jeweiligen Umständen stark abhängig. Eine einfache Beziehung, welche diese Verhältnisse berücksichtigt, ergibt sich in folgender Weise:

Mit der Gleitzahl ε ist der gesamte Widerstand des Flugzeugs $W = \varepsilon\, G$, und dieser ist im Normalflug gleich dem Schraubenschub S, also $S = G\,\varepsilon$ oder auch

$$\varepsilon\,(G/F) = S/F \quad \ldots \quad (1)$$

Für den Schraubenschub gilt die allgemeine empirische Formel

$$S = z\, k_s\, F_p\, u^2\, \varrho/2 \quad \ldots \quad (2)$$

wo $F_p = \frac{\pi D^2}{4}$ die Schraubenkreisfläche, z die Anzahl der Schrauben ist. $u = \frac{\pi D n}{60}$ ist die Spitzenumfangsgeschwindigkeit und k_s der Schubkoeffizient, der mit dem Fortschrittsgrad $\lambda = v/u$ in empirisch bekanntem Zusammenhang steht. Aus Gl. (1) und (2) folgt

$$z\left(\frac{F_p}{F}\right) = (G/F)\left(\frac{\varepsilon}{k_s}\right)\frac{2}{\varrho\, u^2} \quad \ldots \quad (3)$$

Dies ist schon eine der Beziehungen für das gesuchte Verhältnis F_p/F, das somit direkt mit der Flächenbelastung anwächst. Umgekehrt wird bei bekannten bzw. angenommenen Werten ε, k_s das Verhältnis F_p/F daraus berechnet werden können, wenn man für u eine übliche (höchste) Spitzengeschwindigkeit, etwa $u = 260$ m/s und für $\varrho/2 = 1/16$ (am Boden) einsetzt. Es ist dann

$$z\left(\frac{F_p}{F}\right) = \frac{1}{4200}\,(G/F)\left(\frac{\varepsilon}{k_s}\right) \quad \ldots \quad (4)$$

In allen Fällen ist aber die Schraubendrehzahl n und das Fluggewicht G bekannt. Führt man damit

$$\varrho/2\, u^2 = \frac{\pi^2 D^2 n^2}{3600 \cdot 16} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{\pi n^2}{900 \cdot 16} = F_p\left(\frac{n}{67{,}6}\right)^2 \qquad (5)$$

ein, so ergibt eine einfache Umformung die Beziehung

*) P 31—3.

$$z\left(\frac{F_p}{F}\right) = 67{,}6\,(G/F)\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_s}} \cdot \frac{\sqrt{z}}{n\sqrt{G}} \quad \ldots \quad (6)^{1)}$$

Hier erscheint ε/k_s unter der Wurzel, daher ist diese unbekannte und immerhin nicht wenig veränderliche Größe nicht mehr so »empfindlich« geworden als in Gl. (3). Wie auch aus der Zahlentafel, in der Flugzeuge der verschiedensten Art und Größe aufgenommen sind, ersichtlich ist, kann man hier den gut brauchbaren Mittelwert

$$\sqrt{\varepsilon/k_s} \sim 3 \quad \ldots \quad (7)$$

einsetzen. Dann aber gewinnt man in der endgültigen Formel

$$z\left(\frac{F_p}{F}\right) = 203\,(G/F)\,\frac{\sqrt{z}}{n\sqrt{G}} \quad \ldots \quad (8)$$

eine vorzüglich brauchbare Faustregel für das gesuchte Verhältnis der Schraubenfläche zur Tragfläche.

Man kann diese letzte Beziehung auch dazu benützen, um bei einem gegebenen Flugzeug den Standschraubenzug zu berechnen. Nach Blenk[2]) ist

$$S_0 = \zeta \sqrt[3]{2\,\varrho\, F_p\, N^2 \cdot 75^2} \quad \ldots \quad (9)$$

wo $\zeta \sim 0{,}85$ den Gütegrad der Schraube bedeutet. Aus Gl. (8) und (9) wird dann mit $\varrho = 1/8$

$$S_0 = 65{,}6\,\zeta \sqrt[3]{\frac{N^2}{n}\sqrt{G/z}} = \sim 56 \sqrt[3]{\frac{N^2}{n}\sqrt{G/z}} \qquad (10)$$

In dieser Formel ist für N die Leistung eines Motors einzusetzen und S_0 gilt auch nur für eine Schraube. Die Zahl der Schrauben z muß dagegen in der Formel stehen, weil ja auch nur ein Gewichtsanteil für S_0 in Frage kommt. Die Formel hat vor der von Blenk gegebenen

$$S_0 = 4\, N \sqrt[3]{\frac{F}{N}} \quad \ldots \quad (11)$$

den Vorzug, daß sie auch den Einfluß der Drehzahl n mit berücksichtigt. Im übrigen soll darauf hingewiesen werden, daß bei Blenk das Flugzeug durch die Fläche F, hier aber durch das Gewicht G in die Rechnung eingeführt wurde.

[1]) Die Rechnung ist für den normalen Schnellflug angesetzt worden; im Steigflug (Winkel γ) erhöht sich ε auf $\varepsilon + g \sin\gamma$, dafür wächst aber auch k_s entsprechend, so daß das Verhältnis ε/k_s praktisch kaum geändert erscheint.

[2]) Blenk, Der Start von Flugzeugen. Z. Flugtechn. (1927).

Zahlentafel.

Flugzeug	G kg	F m²	z	$z\,F_p$ m²	$z\,\frac{F}{F_p}$	$\frac{G}{F}$	n Motor	i Übersetzungsverhältnis	n Schraube	$n\sqrt{G}$	u m/s	V km/h	$\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_s}}$	
Ar. 66 C . .	1 330	29,6	1	4,9	6	44,8	1880	1	1880	68 500	248	210	3,7	»Mittelwert« $\sqrt{\frac{\varepsilon}{k_s}} \sim 3{,}05$
BV. 142 . .	15 700	130	4	38,5	3,4	120	2250	0,62	1400	175 500	256	400	3,15	
»Storch« . .	1 320	26	1	5,3	5	51	1880	1	1880	68 500	248	185	3,5	
FW. 200 »Condor«	17 500	118	4	35	3,34	133	2350	0,62	1460	206 000	258	420	2,9	
Ju 52 . . .	10 500	110	3	19,8	5,55	95	1930	1	1930	197 000	292	290	3,15	
Ju 86 . . .	8 200	82	2	17,1	4,8	100	2350	0,62	1460	132 000	252	375	2,9	
Ju 90 . . .	23 000	184	4	38,4	4,8	125	2100	0,62	1300	197 000	237	350	2,5	
Kl 25 D . .	720	20	1	3,0	6,7	32,5	2320	1	2320	44 500	238	160	3,05	
Me »Taifun«	1 350	16,4	1	4,34	3,8	82,3	1880	1	1880	69 000	232	303	3,25	
Mü 13 . . .	285	17,0	1	1,25	13,6	16,8	2700	1	2700	45 500	178	133	3,0	
Do 215 . . .	8 600	55	2	16,5	3,3	156,5	2550	0,5	1270	118 000	216	500	2,4	
He 70 . . .	3 460	36,5	1	8,04	4,5	95	1600	1	1600	94 000	268	360	3,25	
Do X . . .	51 000	490,0	12	91,0	5,4	104	1780	1	1780	404 000	290	170	3,2	

Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen*).

Von H. Schlichting.

Bericht des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Braunschweig.

Die Beeinflussung der Grenzschicht durch Ausblasen und Absaugen gewinnt neuerdings erhebliche Bedeutung. Für die ebene laminare Grenzschicht an einer längs angeströmten ebenen Platte mit Ausblasen und Absaugen an der Wand sollen im folgenden einige einfache Abschätzungen und für einen Sonderfall der Absaugung eine einfache Lösung der Grenzschichtgleichungen mitgeteilt werden.

Gliederung.

I. Die Grundgleichungen.

Wir betrachten die Strömung längs einer ebenen Platte und legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y zugrunde (x parallel, y senkrecht zur Wand). u und v seien die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht in der x- bzw. y-Richtung, U_0 die Anströmungsgeschwindigkeit und $v_0(x)$ die vorgegebene Absauge- oder Ausblasegeschwindigkeit an der Wand, Bild 1. Es bedeutet $v_0 < 0$ Absaugen, $v_0 > 0$ Ausblasen. Ferner sei ν die kinematische Zähigkeit. Damit lauten die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen [1] mit Randbedingungen für das ebene Problem:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$y = 0: u = 0, \quad v = v_0(x); \quad y = \infty: u = U_0 \quad \ldots (3)$$

Die Haftbedingung $u = 0$ an der Wand wird auch für die Grenzschicht mit Absaugen und Ausblasen beibehalten, ferner auch der Ansatz für die Wandschubspannung

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Außerdem wird angenommen, daß die Potentialströmung durch das Absaugen oder Ausblasen nicht geändert wird, d. h. die sog. Senkenwirkung im Sinne von O. Schrenk [4] wird vernachlässigt.

Durch Integration von Gl. (1) zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = \infty$ erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (2) und (3)

$$U_0^2\frac{d\vartheta}{dx} - U_0 v_0 = \nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad \ldots \ldots (5)$$

Dabei bedeutet ϑ die Impulsdicke, welche definiert ist durch

$$U_0^2\vartheta = \int_{y=0}^{\infty}(U_0 - u)\,u\,dy \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Die später gebrauchte Verdrängungsdicke δ^* ist definiert durch

$$U_0\delta^* = \int_{y=0}^{\infty}(U_0 - u)\,dy \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Die Gl. (5) kann man nach Prandtl [2] auch durch Anwendung des Impulssatzes auf die Grenzschicht erhalten.

*) A 35—27.

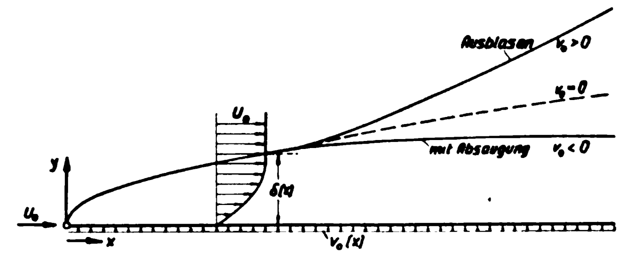


Bild 1. Erläuterungsskizze; Grenzschichten an der ebenen Platte mit Absaugen und Ausblasen.

II. Abschätzung der Impulsdicke für Absaugen und Ausblasen.

Aus Gl. (5) kann man eine einfache Abschätzung für das Anwachsen der Impulsdicke längs der Platte erhalten. Da die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht zunächst noch nicht bekannt ist, setzen wir

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \beta\frac{U_0}{\vartheta}, \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

wo $\beta \geq 0$ eine nur von der Form des Geschwindigkeitsprofiles abhängige dimensionslose Zahl ist (Formparameter). Es kann angenommen werden, daß sich der Wert von β mit der Lauflänge x nur wenig ändert, so daß man für eine erste rohe Näherung β als konstant annehmen kann. Für die Plattenströmung ohne Absaugung ist z. B. nach Blasius [3] $\beta = 0{,}220$. Aus Gl. (5) und (8) erhält man die folgende Differentialgleichung für $\vartheta(x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d\vartheta^2}{dx} = \beta\frac{\nu}{U_0} + \frac{v_0}{U_0}\vartheta \quad \ldots \ldots (9)$$

mit der Anfangsbedingung $\vartheta = 0$ für $x = 0$. Für $v_0 \equiv 0$ (ohne Absaugen und Ausblasen) ergibt sich hieraus in bekannter Weise

$$\vartheta = \sqrt{2\beta\frac{\nu x}{U_0}} = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}, \quad \ldots (10)$$

wobei der Zahlenfaktor $\sqrt{2\beta} = 0{,}664$ aus der Lösung von Blasius entnommen ist. Weiterhin sei jetzt $v_0 =$ konst. angenommen, d. h. konstante Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit längs der Platte und beginnend an der Plattenvorderkante. Dann ergibt sich aus Gl. (9) für das Anwachsen der Impulsdicke längs der Platte ein grundsätzlicher Unterschied für $v_0 < 0$ und $v_0 > 0$.

Für Absaugen ($v_0 < 0$) erhält man $\frac{d\vartheta}{dx} = 0$ bei

$$\vartheta_\infty = \beta\frac{\nu}{-v_0} \quad \text{(Absaugen)}, \quad \ldots \ldots (11)$$

d. h. die Impulsdicke erreicht nach einer gewissen Anlaufstrecke einen konstanten asymptotischen Wert, der durch Gl. (11) gegeben ist. Damit werden auch die Verdrängungsdicke δ^*, die Geschwindigkeitsverteilung und sämtliche anderen Grenzschichtbeiwerte asymptotisch unabhängig von x. Der örtliche Reibungsbeiwert ist bei der asymptotisch konstanten Grenzschichtdicke nach Gl. (4) und (5)

$$c'_{f\infty} = \frac{\tau_{0\infty}}{\varrho U_0^2} = \frac{-v_0}{U_0} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Für Ausblasen ($v_0 > 0$) ist nach Gl. (7) die Größe $\frac{d\vartheta}{dx}$ längs der ganzen Platte größer als Null, d. h. $\vartheta(x)$ wächst über alle Grenzen, so daß für große x in Gl. (9) das erste Glied gegen das zweite vernachlässigt werden kann, und man als asymptotisches Gesetz erhält $\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{v_0}{U_0}$ und hieraus

$$\vartheta_\infty = \frac{v_0}{U_0} x \quad \text{(Ausblasen)} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Bemerkenswert ist, daß in diesem Fall der asymptotische Wert der Impulsdicke und damit auch der Grenzschichtdicke unabhängig ist von der Zähigkeit. Da sich die Impulsdicke nur durch einen Zahlenfaktor von der Grenzschichtdicke unterscheidet, hat man somit für das Anwachsen der Grenzschichtdicke längs der Platte die folgenden asymptotischen Gesetze: beim Absaugen erreicht die Grenzschichtdicke einen konstanten Wert, beim Ausblasen wächst sie proportional mit x und bei undurchlässiger Wand mit $\sqrt{x}$. Eine ähnliche Abschätzung ist kürzlich auch von Herrn Dr. Damköhler ausgeführt worden [5].

Eine Überschlagsrechnung für die Zunahme der Impulsdicke im Anlaufgebiet, also vor Erreichen der asymptotischen Werte nach Gl. (11) und (13), erhält man aus Gl. (9) durch Integration. Mit der dimensionslosen Impulsdicke

$$\varphi^* = \frac{\vartheta v_0}{\beta \nu} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und der dimensionslosen Lauflänge

$$\xi^* = \frac{1}{\beta}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0 x}{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

erhält man aus Gl. (9)

$$\varphi^* - \log(1 + \varphi^*) = \xi^* \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dieses Gesetz ist in Bild 2 aufgetragen. Der Formparameter β bleibt zunächst unbestimmt, wird jedoch für die asymptotische Lösung bei Absaugung weiter unten angegeben. Für Absaugung ($\varphi^* < 0$) erhält man aus Gl. (16) als Asymptote für $\xi^* \to \infty$: $\varphi^*_\infty = -1$ oder $-v_0 \vartheta_\infty / \beta\nu = 1$ in Übereinstimmung mit Gl. (11). Für Ausblasen ($\varphi^* > 0$) erhält man als Asymptote für $\xi^* \to \infty$: $\varphi^* = \xi^*$ oder $\frac{\vartheta_x v_0}{\nu} = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0 x}{\nu}$ in Übereinstimmung mit Gl. (13). Die Lösung für Ausblasen nach Gl. (16) ist für Annäherung an die Asymptote nicht ohne weiteres brauchbar, da in diesem Fall der Formparameter $\beta \to 0$ geht. Dies ist jedoch kein besonderer Mangel, da ja der asymptotische Wert von ϑ schon durch Gl. (13) bekannt ist. Das asymptotische Geschwindigkeitsprofil beim Ausblasen hat die Form eines Ablösungsprofiles bei undurchlässiger Wand, d. h. es ist $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ und somit die Wandschubspannung gleich Null. In den Variablen φ^* und ξ^* schreibt sich die Blasiussche Lösung für die undurchlässige Wand nach Gl. (10) einfach

$$\varphi^* = \sqrt{2\xi^*} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dieses Gesetz ist in Bild 2 mit eingetragen.

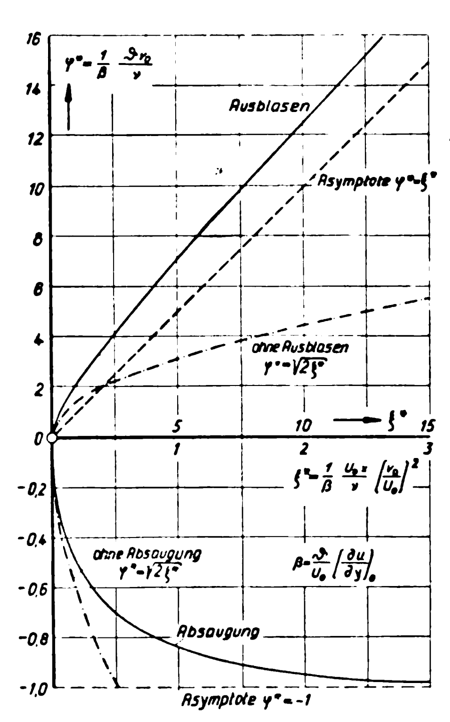


Bild 2. Die Zunahme der Impulsdicke längs der Platte mit Absaugen und Ausblasen; Anlauf.
— . — . — Lösung für undurchlässige Wand (ohne Ausblasen und Absaugen) nach Blasius [3].

III. Asymptotische Lösung der Grenzschicht-Differentialgleichungen bei Absaugung.

Im Fall der Absaugung erhält man für den asymptotisch erreichten Zustand mit konstanter Grenzschichtdicke eine exakte Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht in überraschend einfacher Form. In diesem Fall ist auch die Geschwindigkeitsverteilung nur von y abhängig, also $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$. Damit ist nach Gl. (2) auch $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ und somit

$$v(x, y) = v_0 = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Damit folgt aus Gl. (1)

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Dies läßt sich sofort integrieren und ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingungen Gl. (3):

$$u(y) = U_0\left(1 - e^{\frac{v_0 y}{\nu}}\right) = U_0\left(1 - e^{\frac{-y}{\delta^*_\infty}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Aus Gl. (19) findet man für die Verdrängungsdicke nach Gl. (7)

$$\delta^*_\infty = \frac{\nu}{-v_0} \quad \text{oder} \quad \frac{-v_0 \delta^*_\infty}{\nu} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und für die Impulsdicke nach Gl. (6):

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{2}\frac{\nu}{-v_0} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und somit $\delta^*_\infty / \vartheta_\infty = 2$. Die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (19) ist in Bild 3 dargestellt. Zum Vergleich ist gestrichelt die Geschwindigkeitsverteilung der gewöhnlichen Plattenströmung nach Blasius eingetragen. Für diese ist $\delta^*/\vartheta = 2{,}61$.

Durch Vergleich von Gl. (21) mit (11) ergibt sich für das asymptotische Absaugeprofil der Formparameter zu $\beta = 1/2$. Am Plattenanfang ($x = 0$) hat man nach Gl. (9) sowohl für Ausblasen als auch für Absaugen eine Entwicklung der Grenzschicht wie an der undurchlässigen Wand. Es ist also

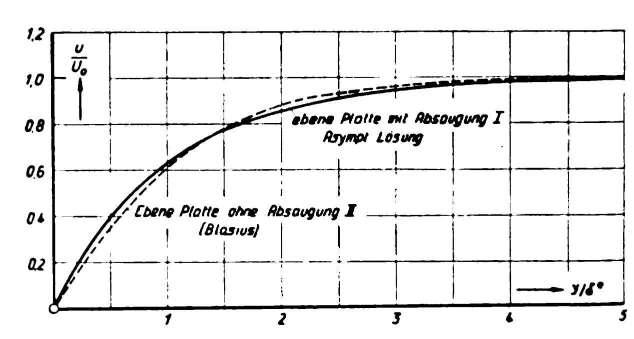


Bild 3. Die Geschwindigkeitsverteilung an der Platte mit Absaugung für das asymptotische Grenzschichtprofil mit konstanter Grenzschichtdicke.
Gestrichelte Kurve: Geschwindigkeitsverteilung an der Platte ohne Absaugung nach Blasius [3].

I: $\delta^* = \frac{\nu}{-v_0}$ II: $\delta^* = 1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$.

am Plattenanfang für beide Fälle $\beta = 0{,}220$ nach Blasius. Es ist demnach zu erwarten, daß für Absaugung für den ganzen Anlauf gilt

$$0{,}220 < \beta < \frac{1}{2} \quad \text{(Absaugung)} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

und für Ausblasen im Anlauf

$$0 < \beta < 0{,}220 \quad \text{(Ausblasen)} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Die nähere Berechnung des Anlaufs für beide Fälle bleibt einem späteren Bericht vorbehalten.

IV. Schrifttum.

[1] L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhdlg. III. Internat. Math. Kongreß Heidelberg 1904; wieder abgedruckt in »Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik« Göttingen 1927.

[2] L. Prandtl, The mechanics of viscous fluids, Durand, Aerodynamic Theory, Bd. III, Berlin 1935.

[3] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1.

[4] O. Schrenk, Grenzschichtabsaugung und Senkenwirkung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 180.

[5] G. Damköhler, Die laminare Grenzschicht beim Stofftransport von und zur längs angeströmten ebenen Platte. Z. Elektrochemie, (1942), S. 178.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 20. Juni 1942 | Lfg. 6

Der polytropische Wirkungsgrad eines Verdichters*).

Von E. Knörnschild.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Strömungsmaschinen.

In einigen im letzten Jahr erschienenen Arbeiten wurde bei der vergleichenden Betrachtung von Verdichtern ein neuer Wirkungsgrad eingeführt, der sich zur Erfassung der Strömungsvorgänge als zweckmäßig erwiesen hat und im folgenden als polytropischer Wirkungsgrad bezeichnet wird.

Die Grundlagen, die zu der neuen Wirkungsgrad-Definition führen, werden behandelt und die Verwendbarkeit dieses Wirkungsgrades erörtert.

Gliederung.

I. Der adiabatische Wirkungsgrad.

Bei Verdichtern, deren Arbeitsmittel während des Verdichtungsvorganges nicht gekühlt wird oder gekühlt werden kann, ist es üblich, den Wirkungsgrad auf die Adiabate zu beziehen.

Bild 1 zeigt den Verdichtungsvorgang im *i-s*-Diagramm. Wird dieser Vorgang verlustlos und ohne Zu- und Abfuhr von Wärme an das bzw. von dem Arbeitsmittel durchgeführt, so ergibt sich bekanntlich als Zustandslinie die Senkrechte AB[1]). Die in diesem Fall aufzuwendende Arbeit kann als Differenz der Wärmeinhalte des Gases zwischen den Punkten A und B ermittelt werden.

Beim wirklichen, mit Verlusten behafteten Prozeß verläuft der Vorgang etwa entsprechend der Linie AC [2][2]). Die Erhöhung des Wärmeinhaltes des Punktes C gegenüber B ist auf die Verluste (Reibungsverluste, Drosselung usw.) im Verdichter zurückzuführen, deren Arbeitswert über die Welle des Verdichters dem Arbeitsmittel zugeführt werden muß. Als adiabatischer Wirkungsgrad des Verdichtungsvorganges wird der Quotient aus dem geringsten, unter der Voraussetzung $dQ = 0$ möglichen Arbeitsaufwand zur Erzielung der gewünschten Druckerhöhung zum tatsächlichen Aufwand zur Erzielung dieser Druckerhöhung bezeichnet, der sich demnach angeben läßt in der Form

$$\eta_{i-ad} = \frac{c_p\,(T_2' - T_1)}{c_p\,(T_2 - T_1)} = \frac{\Delta t_{ad}}{\Delta t_w} \quad \ldots \ldots (1)$$

II. Einfluß der Stufenzahl und Gefällevergrößerung.

Bei vielstufigen Ladern stellt sich nun heraus, daß der nach Gleichung (1) definierte Gesamtwirkungsgrad niedriger

*) M 94.

[1]) Für Druck und Temperatur ist hierbei zweckmäßig der Gesamtdruck und die Gesamttemperatur einzusetzen. Siehe [1].

[2]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf den Schrifttumhinweis am Ende des Aufsatzes.

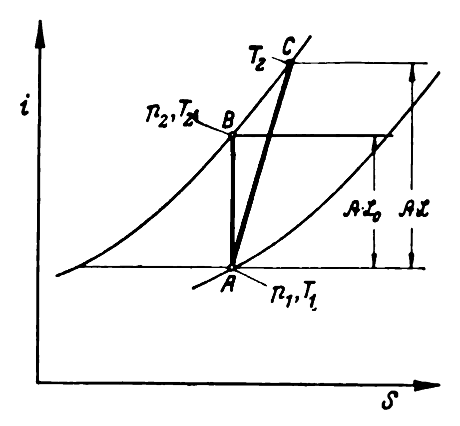


Bild 1. Verdichtungsvorgang im *i-s*-Diagramm

als der Wirkungsgrad einer einzelnen Stufe ist. Dies ist, wie an anderer Stelle [3, 4] bereits ausgeführt wurde, darauf zurückzuführen, daß durch die während des Verdichtungsvorganges in einer Stufe auftretenden Verluste jeweils die darauffolgende Stufe mit höherer Anfangstemperatur arbeitet als es bei verlustlosem Prozeß der Fall wäre. Die Gesamtförderhöhe, die die Einzelstufen zu überwinden haben, ist deshalb größer als es der adiabatischen Zustandsänderung vom Anfangs- zum Enddruck entspricht. Die Vergrößerung des Wärmegefälles eines Verdichters durch die Verlustwärmen in den einzelnen Stufen entspricht vollkommen der durch die Verluste hervorgerufenen Vergrößerung des Wärmegefälles bei vielstufigen Turbinen. Diese Vergrößerung bewirkt bei Turbinenbetrieb eine Verbesserung des Gesamtwirkungsgrades gegenüber dem der Einzelstufe.

Die Vergrößerung des Wärmegefälls wurde für Turbinen wie für Verdichter bereits verschiedentlich berechnet [5, 6][3]). Bild 2a und b zeigt für einige Stufen den Verlauf des Verdichtungs- bzw. Entspannungsvorganges im *TS*-Diagramm. Bei beiden Vorgängen wird das ursprünglich vorhandene Wärmegefälle durch die Reibungsverluste vergrößert. In Bild 2a bedeutet A den Anfangspunkt der Verdichtung. Am Ende der ersten Stufe (Stufendruck p_1) hat das Arbeitsmittel den dem Punkt C entsprechenden Zustand erreicht. Die infolge der Verluste zusätzlich zuzuführende Arbeit in der ersten Stufe wird dargestellt durch die Fläche $BCFGB$. Die adiabatische Verdichtungsarbeit in der zweiten Stufe (von C bis D) ist nun um die Fläche $BCDEB$ größer als sie

[3]) Nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung erschien ein Beitrag von Pfleiderer, Die Tafel der Beiwerte für Gasreibung bei Verdichtern (Lufo 1942 Lfg. 1), in der ebenfalls auf die Gefällevergrößerung durch Reibungswärme und daraus zu ziehende Folgerungen eingegangen wird.

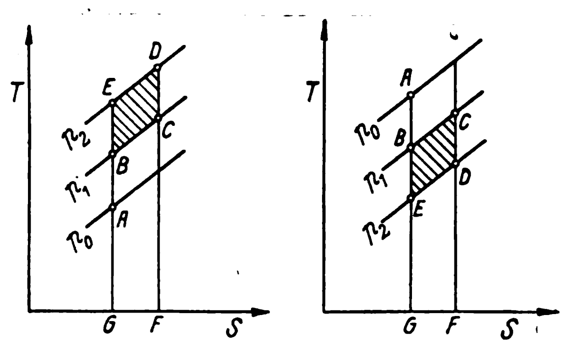


Bild 2. Gefällevergrößerungen im *Ts*-Diagramm.

wäre, wenn in der ersten Stufe keine Verluste aufgetreten wären (adiabatische Verdichtung von *B* bis *E*).

Entsprechendes gilt für die Entspannung (Bild 2b). Hier bedeutet die Fläche *BCFGB* die Verlustwärme der ersten Stufe. Von dieser Wärme wird die Fläche *BCDEB* in der nächsten Stufe zurückgewonnen. Sie stellt also eine Gefällevergrößerung der nächsten Stufe dar und wird als rückgewonnene Reibungswärme bezeichnet. Die Fläche *EDFGE* bedeutet den verbleibenden Arbeitsverlust.

Zerlegt man den Verdichtungsvorgang in unendlich viele Einzelstufen, so ergibt sich als Verlauf des Gaszustandes eine Linie *AC* in Bild 3. Die Summe der einzelnen, unendlich klein gedachten Stufenarbeiten ist hierbei um die schraffierte Fläche größer als die adiabatische Arbeit bei einer Zustandsänderung von *A* nach *B*. Sinngemäß dasselbe gilt für den Entspannungsvorgang.

Von Zinzen [5] wurde eine Gleichung abgeleitet, die die Gefällevergrößerung bei Turbinen für beliebige und unendliche Stufenzahl zu errechnen gestattet. Bezüglich der Ableitung wird auf die betreffende Arbeit verwiesen. Im vorliegenden Fall interessiert nur die Ableitung für unendliche Stufenzahl. Die Gefällevergrößerung ergibt sich in diesem Fall zu

$$\mu_{\infty-t} = \frac{1}{\eta_{st}} \cdot \frac{1 - (p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot\eta_{st}}}{1 - (p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

wobei η_{st} = Stufenwirkungsgrad und $\varkappa$ = Exponent der Adiabate bedeuten.

Die Ableitung von Zinzen wurde von Landsberg [6] auf den Verdichtungsvorgang angewandt. Hierbei ergibt sich eine ähnliche Gleichung für unendlich viele Stufen

$$\mu_{\infty-t} = \eta_{st} \cdot \frac{(p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{\eta_{st}}} - 1}{(p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Für die Ableitungen der Gleichungen (2) und (3) war ein unveränderlich bleibender Stufenwirkungsgrad Voraussetzung. Dies bedeutet, daß für jeden Teilvorgang der Verdichtung das Verhältnis der wirklich aufzuwendenden zur adiabatischen Verdichtungsarbeit und — was zum Verständnis des folgenden wichtig ist — das Verhältnis der Verlustwärme zur adiabatischen Arbeit konstant ist. In diesem Fall verläuft, wie aus dem nachfolgenden hervorgeht, die Zustandsänderung nach einer Polytrope. Der Exponent m und die Förderhöhe dieser Polytrope lassen sich aus den Zustandsgrößen Druck und Temperatur am Anfangs- und Endpunkt ermitteln.

III. Die Polytrope.

Unter einer Polytropen versteht man eine Zustandsänderung, für welche die Gleichung

$$P \cdot V^m = \text{const}$$

gilt, wobei der Exponent m jeden beliebigen, während der Zustandsänderung allerdings unveränderlich bleibenden Wert annehmen kann. Die Bedingung der Unveränderlich-

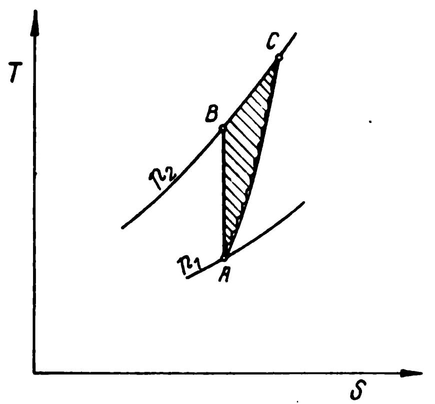


Bild 3. Die Polytrope im *Ts*-Diagramm.

keit des Exponenten ist — wie sich aus dem ersten Hauptsatz ergibt — z. B. erfüllt, wenn bei Betrachtung eines unendlich kleinen Teilvorganges sich das Verhältnis der geleisteten Arbeit zum verfügbaren Wärmegefälle $Avdp/di$ oder auch das Verhältnis der zugeführten Wärme zur geleisteten Arbeit $dQ/A\,dL$ während des Verlaufs der Zustandsänderung nicht ändert. Der erste Vorschlag, der von Zeuner stammt [7, 8], führt unter Einführung einer unveränderlichen Widerstandszahl ζ zu einer Gleichung für den Exponenten $m = \frac{\varkappa(1+\zeta)}{1+\varkappa\cdot\zeta}$. Im zweiten Fall [9] läßt sich der Exponent m angeben in der Form $m = \frac{\varkappa - \text{const}}{1 - \text{const}}$.

Für die vorliegende Untersuchung erscheint es zweckmäßig, die Polytrope als eine Zustandslinie eines verlustlos verlaufenden Verdichtungsvorganges zu betrachten, während dessen Verlaufs Wärme zugeführt wird, wobei das Verhältnis der zugeführten Wärme zur geleisteten Arbeit $dQ/A\,dL$ sich während des gesamten Verdichtungsvorganges nicht ändern soll. Der Idealfall einer solchen Polytrope wäre bei der Kolbenmaschine denkbar, wo durch Mantelkühlung oder Heizung Wärme zu- oder abgeführt werden kann, während das Gas nahezu verlustlos verdichtet oder entspannt wird [10]. Beim wirklichen Verdichtungsvorgang in einer Strömungsmaschine wird Wärme zwar nicht von außen, infolge der Reibung der Gasteilchen aber als innere Wärme während des Strömungsvorganges zugeführt. Im Gegensatz zum idealen mit Mantelheizung ausgerüstet gedachten Kolbenkompressor, bei dem der polytropische Vorgang durch die im Mantel zugeführte (äußere) Wärme erzielt wird, wird hier die zugeführte (innere) Wärme als mechanische Arbeit zusätzlich aufgewandt.

Betrachtet man einen unendlich kleinen Teilvorgang, so läßt sich dieser aus einer Druckerhöhung, welche der geleisteten adiabatischen Arbeit $A\,dL$ entspricht, und anschließenden Wärmezufuhr dQ bei konstantem Druck, die der Verlustwärme entspricht, entstanden denken. Diese Darstellung ist aber gleichbedeutend mit der oben abgeleiteten Gefällevergrößerung, die demnach auch aus dem Unterschied zwischen der adiabatischen und polytropischen Verdichtungsarbeit berechnet werden kann. Die letztere ist also auch um die in Bild 3 schraffierte Fläche größer als die adiabatische Verdichtungsarbeit.

Bild 4 zeigt noch einmal den Unterschied zwischen polytropischer und wirklicher Verdichtungsarbeit an einem Element des Verdichtungsvorganges. Während die polytropische Verdichtung sich durch einen Linienzug darstellen läßt, der jeweils aus einer verlustlosen adiabatischen Verdichtung und daran anschließend einer Wärmezufuhr unter konstantem Druck gebildet werden kann, kann man sich den wirklichen Verdichtungsvorgang, dessen Verlauf im übrigen nicht mit der polytropischen Verdichtungslinie identisch sein muß, so entstanden denken, als ob an eine adiabatische Verdichtung jeweils eine isothermische Zustandsänderung (Drosselung), die den auftretenden Verlusten bei der Verdichtung entspricht, anschließt.

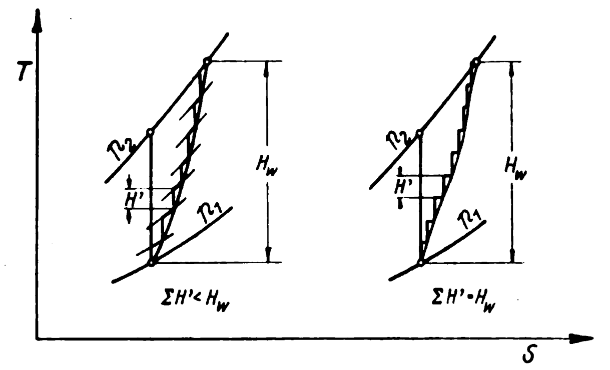


Bild 4. Unterschied zwischen polytropischer und wirklicher Verdichtungsarbeit.

Die Reibungswärme und die ihr entsprechende Arbeit erscheint dann im Ts-Diagramm als $\int T ds$ der unter den Isothermen bis zur Abszisse verlaufenden senkrechten Flächenstreifen.

Die Summe der Einzelgefälle H' ist beim wirklichen Verdichtungsvorgang (Bild 4, rechts) gleich der Gesamtförderhöhe H_w und im Fall der Polytrope (Bild 4, links) wesentlich kleiner als H_w.

Aus dem vorher Gesagten ergibt sich, daß die Polytrope als Bezugsgröße für den verlustlosen Vorgang den wirklichen Verhältnissen in einer Strömungsmaschine besser gerecht wird als die Adiabate. Es liegt deshalb nahe, sie als Vergleichsvorgang zu verwenden.

Einen vollkommenen Vergleichsvorgang stellt die Polytrope im übrigen deshalb noch nicht dar, weil sich die Verlustwärmen nicht gleichmäßig über den Verdichtungsvorgang verteilen, sondern an bestimmten Stellen des Strömungsweges sitzen. Um auch diese Eigenschaften zu erfassen, müßten für die einzelnen Strömungsabschnitte verschiedene Polytropen zugrunde gelegt werden [11]. Aus Bild 5 geht dies deutlich hervor. Die Gefällevergrößerung durch die Verluste kann z. B. um die schräg schraffierte Fläche kleiner sein als die, welche sich bei gleichmäßig verteilten Verlusten ergeben würde (Fläche $ADCBA$ gegenüber $ACBA$). Der gesamte infolge der Verluste auftretende zusätzliche Arbeitsaufwand (Fläche unter BC bis zur Abszisse) wird hierdurch nicht berührt.

IV. Der polytropische Wirkungsgrad.

Legt man dem Verdichter den der Vergrößerung des Gefälles durch die Verluste entsprechenden Mehraufwand an Verdichtungsarbeit nicht zur Last, da er keinen Strömungsverlusten entspricht, so kann man einen polytropischen Wirkungsgrad definieren, bei dem der sich durch Einbeziehung des erwähnten Mehraufwandes erst ergebende Mindestaufwand zum Gesamtaufwand ins Verhältnis gesetzt wird. Dieser Wirkungsgrad zeigt sich in Bild 6 als das Verhältnis der Fläche $CAEFGC$ zu der unter GC liegenden Fläche (CDFGC).

Zum Unterschied hiervon wird der adiabatische Wirkungsgrad dargestellt als das Verhältnis der Flächen $BEFGB$ zu CDFGC.

1. Ableitung nach Flügel.

Von Flügel [12] stammt eine Ableitung, die auf den polytropischen Wirkungsgrad führt, und die 1918 erschienen ist. Denkt man sich die Verdichtung in sehr vielen hintereinander geschalteten Stufen vollzogen und bedeutet ΔT_{ad} die der adiabatischen Verdichtung entsprechende Temperaturerhöhung, die infolge der Druckerhöhung Δp auftritt, so lautet die Gleichung der Adiabate

$$\frac{T + \Delta T_{ad}}{T} = \left(\frac{p + \Delta p}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Da $\Delta p/p$ klein ist, darf der binomische Satz angewendet werden

$$1 + \frac{\Delta T_{ad}}{T} \sim 1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

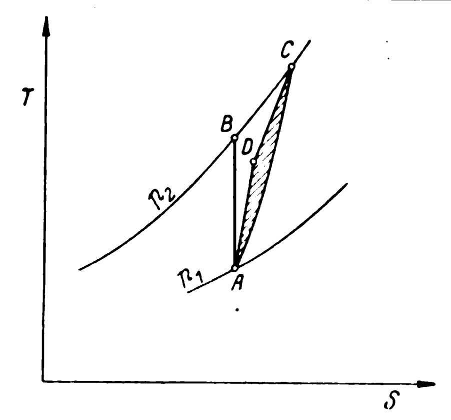


Bild 5. Gefällevergrößerungen bei Annahme verschiedener Polytropen.

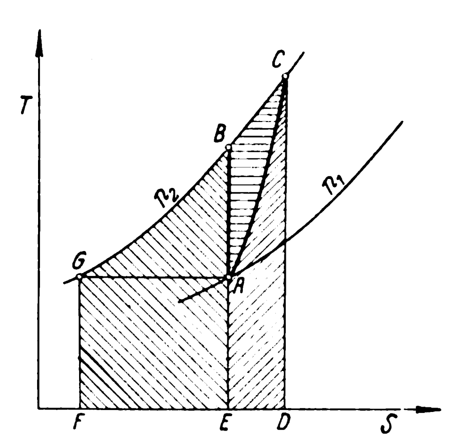


Bild 6. Der polytropische Wirkungsgrad im Ts-Diagramm.

Die wirkliche Temperaturerhöhung ΔT werde durch einen Wirkungsgrad η erfaßt gemäß der Gleichung

$$\eta = \frac{\Delta T_{ad}}{\Delta T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

damit erhält man schließlich für einen unendlich kleinen Teilvorgang

$$\frac{dT}{T} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Setzt man nun voraus, daß sich η während des Verdichtungsvorganges nicht ändert, daß also η unabhängig von p und T sei, so ergibt die Integration dieser Gleichung die bekannte Gleichung der Polytrope

$$T/T = (p/p)^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

mit dem Exponenten

$$\alpha = \frac{m - 1}{m} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Aufgelöst nach dem Wirkungsgrad ergibt Gleichung (7)

$$\eta = \eta_{pol} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T}{dT} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{\ln p_2/p_1}{\ln T_2/T_1} \quad (10)$$

Es zeigt sich also, daß die Annahme der Unveränderlichkeit der Verluste über dem gesamten Verdichtungsvorgang zu einem Wirkungsgrad führt, der sich von dem adiabatischen unterscheidet und als polytropischer bezeichnet werden kann, da er — wie sich aus dem nächsten Abschnitt ergibt — das Verhältnis der polytropischen Verdichtungsarbeit zur wirklichen darstellt.

2. Ableitung nach Rateau.

Rateau und seine Mitarbeiter benutzen bei der Laderauswertung den polytropischen Wirkungsgrad[4]) seit langem. Seine Ableitung ergibt sich nach Rateau wie folgt.

Es werden nur die reinen Strömungsverluste in Rechnung gesetzt. Mit der durch diese Verluste auftretenden Gefällevergrößerung wird der Lader nicht belastet. Damit kann

[4]) Wie dem Verfasser von M. Sédille, Fa. Rateau, mitgeteilt wurde.

als Bezugsgröße die polytropische Verdichtungsarbeit eingesetzt werden

$$H_{pol} = R \cdot T_1 \cdot \frac{m}{m-1} \left[(p_2/p_1)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]$$

$$= R \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \Delta t_w \quad . . . (11)$$

Die wirklich aufgewandte Arbeit ist gleich

$$H_w = \frac{c_p}{A} \cdot (T_2 - T_1) = R \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \Delta t_w \quad . . . (12)$$

$$\eta_{pol} = H_{pol}/H_w = \frac{m}{m-1} \Big/ \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \quad . . . . . (13)$$

Da aber, wie man leicht nachrechnen kann

$$\frac{m}{m-1} = \frac{\ln p_2/p_1}{\ln T_2/T_1}, \quad . . . . (14)$$

so wird

$$\eta_{pol} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{\ln p_2/p_1}{\ln T_2/T_1} = \frac{AR}{c_p} \cdot \frac{\log p_2/p_1}{\log T_2/T_1}, \quad . . . (15)$$

gleichbedeutend mit Gleichung (10).

3. Nach Weinig.

Weinig [4] kommt aus einer Grenzbetrachtung, die zu ähnlichen Ansätzen wie bei Flügel führt, ebenfalls zur Ableitung des polytropischen Wirkungsgrades, den er $\eta_{ström}$, Strömungswirkungsgrad, nennt. Weinig weist auf die für die schnelle Ermittlung des Wirkungsgrades sehr geeignete Darstellung im *TS*- oder *i-s*-Diagramm hin. Der im Zähler von Gleichung (15) stehende Ausdruck $AR \cdot \ln p_2/p_1$ stellt nämlich den Entropie-Zuwachs der Isotherme, der im Nenner stehende Ausdruck $c_p \cdot \ln T_2/T_1$ den Entropie-Zuwachs der Isobare dar. Das Verhältnis der beiden Entropie-Zunahmen ist im *Ts*- oder *is*-Diagramm leicht abzugreifen, und es ergibt sich als polytropischer Wirkungsgrad (s. Bild 7) der Quotient

$$\eta_{pol} = a/b.$$

Dieses Ergebnis hätte man auch bei Betrachtung der geometrischen Form der Arbeitsflächen erhalten, wie man aus Bild 7 entnehmen kann.

Der Vorschlag von Weinig, aus Versuchen, die mit kleiner Umfangsgeschwindigkeit durchgeführt wurden, mit Hilfe des polytropischen Wirkungsgrades eine Aussage über das Verhalten bei größeren Umfangsgeschwindigkeiten zu machen, läßt sich allerdings nur dann durchführen, wenn außer der Berücksichtigung der Reynoldsschen und der Machschen Zahl vor allem der Einfluß der Volumenverhältnisse genügend genau erfaßt werden kann (siehe [13]).

4. Nach Pfau.

Pfau [13] kommt bei der Erörterung des Einflusses der Kaltluft auf das Betriebsverhalten von Ladern ebenfalls zur Ableitung des polytropischen Wirkungsgrades, den er mit η' bezeichnet, wobei er die Beziehung zwischen dem adiabatischen Wirkungsgrad der Gesamtverdichtung und η' in folgender Form angibt

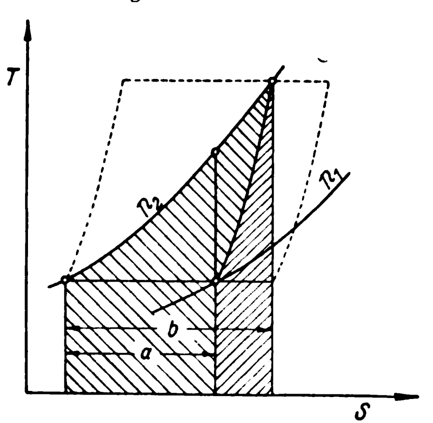


Bild 7. Wirkungsgradbestimmung nach Weinig.

$$\eta_{ad} = \frac{0{,}00976 \cdot \frac{H_{ad}}{T_1}}{\left(0{,}00976 \cdot \frac{H_{ad}}{T_1} + 1\right)^{1/\eta'} - 1} \quad . . . . (16)$$

Bei Betrieb eines Verdichters mit Kaltluft wurde gegenüber dem Betrieb mit Warmluft des öfteren eine Verringerung des adiabatischen Wirkungsgrades gemessen. Diese Erscheinung tritt bei Anwendung des polytropischen Wirkungsgrades nicht in diesem Maße auf (siehe [13]). Ein Teil der Verluste, die sich durch die adiabatische Wirkungsgradbestimmung zu ergeben scheinen, ist also thermodynamisch bedingt. Pfau weist auch darauf hin, daß die Wirkungsgradlinien im Laderkennfeld bei Verwendung des polytropischen Wirkungsgrades eine Verschiebung nach höheren Drehzahlen hin erhalten. Dies bedeutet, daß die Erscheinung, daß sich die Wirkungsgradlinien bei größeren Förderhöhen wieder schließen, zum Teil durch die Gefällevergrößerung erklärt werden kann.

5. Nach Zweifel.

Zweifel [14] hat im Schweizer Archiv 1942 einige Beziehungen zur Bestimmung des Zustandsverlaufs in vielstufigen Turbomaschinen mit Hilfe der Entropiezunahme abgeleitet. Hierbei führt er ebenfalls einen polytropischen Wirkungsgrad bzw. eine polytropische Zustandsänderung unter Zugrundelegung der von Zeuner bzw. Stodola [7, 8] angegebenen Definitionen ein.

Zweifel gibt auch — ähnlich wie Weinig — eine Beziehung für den Entropiezuwachs während des Verdichtungsvorganges an, der dargestellt werden kann in der Form

$$\Delta s = (\Delta s)_i \cdot \frac{1 - \eta_{pol}}{\eta_{pol}}, \quad . . . . . . (17)$$

wobei mit $(\Delta s)_i$ die mittlere Entropiedifferenz zwischen der Anfangs- und Endisobare bezeichnet wird. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich, wenn der polytropische Wirkungsgrad bekannt ist oder geschätzt werden kann, der Verlauf der Zustandslinie schnell im *is*- oder *Ts*-Diagramm eintragen, Bild 8.

Zweifel schlägt vor, die polytropische Zustandsänderung in einem Schaubild, auf dessen Abszisse wie üblich der Entropiezuwachs einer beliebigen Zustandsänderung und auf dessen Ordinate der Entropiezuwachs der Isobaren aufgetragen wird, darzustellen, weil hier sowohl die Polytrope wie die Adiabate als Gerade erscheint. Bild 9 zeigt ein solches Schaubild für Gase mit unveränderlicher spezifischer Wärme. Es hat gegenüber dem *TS*- bzw. *i-s*-Schaubild Vorteile bei der Untersuchung einzelner Stufen vielstufiger Turbomaschinen.

6. Das Verhältnis η_{pol}/η_{ad}.

Das Verhältnis zwischen dem polytropischen und dem adiabatischen Wirkungsgrad läßt sich wie folgt angeben. Da

$$\eta_{pol} = \frac{ART_1 \frac{m}{m-1} \left[(p_2/p_1)^{\frac{m-1}{m}} - 1 \right]}{c_p \cdot \Delta t_w} \quad . . . . (18)$$

und

$$\eta_{ad} = \frac{ART_1 \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \left[(p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right]}{c_p \cdot \Delta t_w} \quad . . . . (19)$$

und außerdem

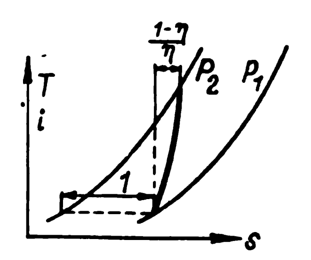


Bild 8. Konstruktionen der Polytropen.



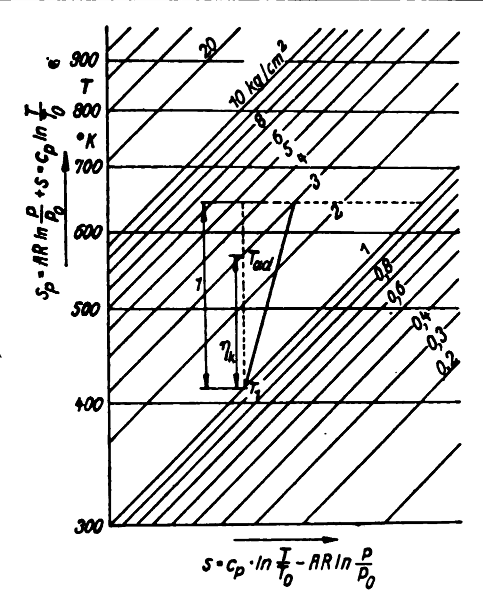


Bild 9. ln T, s-Diagramm nach Zweifel.

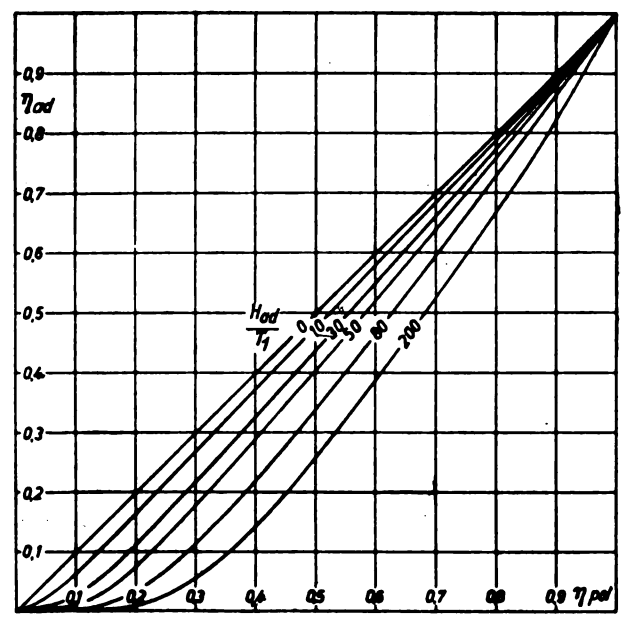


Bild 10. Beziehung zwischen polytropischen und adiabatischen Wirkungsgrad nach Pfau.

$$\frac{m}{m-1} = \eta_{\text{pol}} \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}, \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

so wird

$$\frac{\eta_{\text{pol}}}{\eta_{ad}} = \eta_{\text{pol}} \cdot \frac{(p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\eta_{\text{pol}}}} - 1}{(p_2/p_1)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1} \quad \ldots \quad (21)$$

Gleichung (21) ist nun, wie man beim Vergleich mit Gleichung (3), dem Gefällevergrößerungsfaktor, erkennt, identisch mit diesem, d. h. der Stufenwirkungsgrad bei unendlich vielen Stufen ist identisch mit dem polytropischen Wirkungsgrad. Damit läßt sich die Gefällevergrößerung bei unendlich vielen Stufen auch aus dem Verhältnis der Polytrope zur Adiabate berechnen

$$\mu_{\infty - i} = \frac{\eta_{\text{pol}}}{\eta_{ad}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

Sinngemäß gilt dies auch für den Entspannungsvorgang. Die Beziehung (21) ist in der Form, wie sie Pfau [13] angibt, in Bild 10 dargestellt.

V. Zusammenfassung und Folgerungen.

Versucht man, den Wirkungsgrad eines Verdichters derart zu definieren, daß dieser unabhängig vom Druckverhältnis in jedem Teilvorgang des gesamten Verdichtungsvorganges der gleiche bleibt, so gelangt man zur Ableitung eines Wirkungsgrades, der sich als das Verhältnis der polytropischen zur wirklichen Verdichtungsarbeit angeben läßt. Er wird als polytropischer Wirkungsgrad bezeichnet und geht nur bei Betrachtung eines unendlich kleinen Teilvorganges in den adiabatischen Wirkungsgrad über. Der polytropische Wirkungsgrad kommt den Strömungsvorgängen in einem Verdichter deshalb näher als der adiabatische, weil in ihm die Gefällevergrößerung, die ein Teilvorgang infolge der Verluste der vorhergehenden Vorgänge erleidet, berücksichtigt wird.

Seine Bedeutung kann also darin gesehen werden, daß durch ihn angegeben wird, inwieweit die in einem Verdichter auftretenden Verluste reine Strömungsverluste sind. Der polytropische Wirkungsgrad ist damit besonders zur vergleichenden Untersuchung der Strömungsverhältnisse in Ladern geeignet.

Die Auswertung von Versuchen an Verdichtern mit Hilfe des polytropischen Wirkungsgrades ist nicht schwieriger als wenn mit dem adiabatischen Wirkungsgrad gerechnet wird. Im ersteren Fall ist hierzu lediglich die Kenntnis der Drücke und Temperaturen am Anfang und Ende der Verdichtung nötig, im letzteren Fall die Kenntnis der Anfangs- und Endtemperaturen des Verdichtungsvorganges, sowie die der adiabatischen Temperaturerhöhung.

Bei der Vorausrechnung der wirklichen Verdichterarbeit ist der Rechnungsgang, wenn — wie dies meist der Fall ist — das Druckgefälle oder die adiabatische Förderhöhe gegeben ist, bei Angabe des polytropischen Wirkungsgrades umständlicher als bei Angabe des adiabatischen Wirkungsgrades. In diesem Fall muß nämlich zuerst entweder die polytropische Verdichtungsarbeit als Bezugsgröße des polytropischen Wirkungsgrades aus der adiabatischen Arbeit ermittelt werden, um dann aus dem Quotient aus H_{pol} und η_{pol} die wirkliche Verdichtungsarbeit bestimmen zu können, oder es muß der polytropische Wirkungsgrad nach Gleichung (21) bzw. unter Zuhilfenahme von Bild 10 auf den adiabatischen umgerechnet werden, um in der bisher üblichen Weise aus H_{ad} und η_{ad} die wirkliche Verdichtungsarbeit zu erhalten.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Anwendung des polytropischen Wirkungsgrades eine wenn auch geringfügige Erschwerung des Rechnungsganges bedeutet. Andererseits hat sich für die allgemeine Vorausrechnung von Verdichtern, bei der es auf eine genaue Erfassung der Strömungsverhältnisse weniger ankommt als auf eine einfache auch Nichtfachleuten auf dem Strömungsgebiet leicht verständliche Formulierung, der adiabatische Wirkungsgrad als ausreichend gezeigt. Es ist deshalb fraglich, ob der polytropische Wirkungsgrad trotz seiner Vorzüge den adiabatischen verdrängen kann oder soll. Zum mindesten scheint es jedoch empfehlenswert zu sein, sich bei der Berechnung von Verdichtern je nach dem beabsichtigten Zweck beider Wirkungsgrade zu bedienen.

VII. Schrifttum.

[1] H. Pfau, Über die Thermodynamik der Strömung beim Ladevorgang von Fahrzeugkraftmaschinen. ATZ Bd. 42 (1939), Nr. 10.

[2] S. auch W. Schüle, Technische Thermodynamik I, 1, 5. Aufl., Abschnitt IV. 73.

[3] H. Pfau, Einfluß der Leistungsverhältnisse der Einzelstufen auf das Verhalten mehrerer hintereinander geschalteter Lader bzw. mehrstufiger Lader. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. II 196.

[4] F. Weinig, Wärmemechanische Grundlagen der Durchführung und Auswertung von Ladeversuchen. MTZ Bd. 3 (1941), Nr. 7.

[5] A. Zinzen, Rückgewinnbare Verlustwärme und Vergrößerung des Wärmegefälles in mehrstufigen Dampfturbinen. Z. techn. Physik (1925), S. 185.
[6] R. Landsberg, Die Vergrößerung des Wärmegefälles durch die Verluste bei Verdichtern. Z. techn. Physik (1929), S. 171
[7] Stodola, Dampf- und Gasturbinen. 5. Aufl., S. 41.
[8] Hütte Bd. I, 26. Aufl., S. 552.
[9] Schüle, Technische Thermodynamik. 5. Aufl., I. 1, S. 128.
[10] S. auch P. Ostertag, Kolben- und Turbokompressoren. Berlin 1923, Verlag J. Springer, S. 28ff.
[11] S. auch P. Ostertag, wie [10], S. 171.
[12] G. Flügel, Z. VDI. Bd. 62 (1918), S. 662.
[13] H. Pfau, Die Leitschaufel in ihrer Beziehung zu den Kennwerten von Flugmotorenladern. MTZ Bd. 3 (1941), Nr. 12.
[14] O. Zweifel, Die Bestimmung des Zustandsverlaufes in Turbomaschinen mit Hilfe der Entropiezunahme. Schweizer Archiv (1942), Januar.

Die Berechnung des Temperaturfeldes in der laminaren Grenzschicht schnell angeströmter, unbeheizter Körper*).

Von E. Eckert und O. Drewitz.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

In der Grenzschicht eines unbeheizten, von Luft schnell angeströmten Körpers bildet sich infolge der Wärmeentwicklung durch innere Reibung ein Temperaturfeld aus. Dieses wird für die laminare Grenzschicht durch numerische Integration der den Vorgang beschreibenden Differentialgleichungen gelöst. — Im zweiten Teil der Arbeit wird auch das Temperaturfeld berechnet, das in der laminaren Grenzschicht eines beheizten, langsam angeströmten Körpers entsteht. Die sich damit ergebenden Wärmeübergangszahlen werden mit Messungen am quer angeströmten Zylinder verglichen.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Temperatur, die ein Körper in einem Gasstrom annimmt, wird bei großen Strömungsgeschwindigkeiten durch die Wärmeentwicklung infolge innerer Reibung der strömenden Flüssigkeit in der Grenzschicht beträchtlich beeinflußt. Durch die Reibungswärme bildet sich ein Temperaturfeld in der Grenzschicht am Körper aus, und die Temperatur des Körpers wird dadurch erhöht. Der geschilderte Vorgang ist auf den verschiedensten Gebieten der Gasdynamik von Bedeutung, in der Technik spielt er in Strömungsmaschinen und bei den heutigen Fluggeschwindigkeiten auch bei Schnellflugzeugen eine Rolle. Eine Berechnung desselben wurde bisher nur für die ebene, längs angeströmte Platte von Pohlhausen[1]) durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind durch neuere Versuche[2])[3]), gut bestätigt für Strömungsgeschwindigkeiten bis zur doppelten Schallgeschwindigkeit. Im folgenden wird die Berechnung für umströmte Körper mit laminarer Grenzschicht mitgeteilt. Die Durchführung der Rechnung ist allerdings nur mit gewissen Vereinfachungen möglich, die im wesentlichen auch schon von Pohlhausen für die Berechnung der Grenzschicht an der ebenen Platte eingeführt wurden, und die sich dort als zulässig erwiesen haben. Die Zulässigkeit der gleichen Vereinfachungen für die vorliegende Aufgabe wird ebenfalls durch Versuche, die eine gute Übereinstimmung mit den Rechenergebnissen zeigten, nachgeprüft. Allerdings werden durch die Vereinfachungen die Berechnungen vermutlich auf das Gebiet der Unterschallgeschwindigkeiten beschränkt.

II. Die Differentialgleichungen für die laminare Grenzschicht.

An einem umströmten Körper bildet sich eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit von dem Wert Null an der Körperoberfläche auf die Strömungsgeschwindigkeit im freien Gasstrom ansteigt. Diese Grenzschicht ist in der Nähe des Staupunktes laminar, in einer bestimmten Entfernung vom Staupunkt geht sie in eine turbulente Grenzschicht über. Die folgenden Berechnungen befassen sich nur mit der laminaren Grenzschicht, die nach dem Gesagten bei größeren Körpern nur in der Umgebung des Staupunktes auftritt, bei kleineren Körpern aber die ganze Oberfläche überzieht. Die Gleichungen für die laminare Grenzschicht wurden von Prandtl aus den Navier-Stokesschen Gleichungen entwickelt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Grenzschichtdicke bei Gasen und normalen Flüssigkeiten klein ist gegen die Abmessungen des umströmten Körpers. Die Gleichungen lauten für ebene, stationäre Strömung[1])

$$\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\varrho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = g \varrho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - u \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

Die Randbedingungen hierzu sind für die Geschwindigkeiten: $u_{y=0} = 0$, $v_{y=0} = 0$, $u_{y=\infty} = u_0$ und für das Temperaturfeld an einem unbeheizten Körper, innerhalb dessen kein Temperaturausgleich durch Wärmeleitung erfolgt: $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$, $T_{y=\infty} = T_0$. u_0 und T_0 sind dabei die Werte an der äußeren Grenze der Grenzschicht. Die Gleichungen beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen x-Achse nach Bild 1 in der Körperoberfläche verläuft und dessen y-Achse auf der Oberfläche senkrecht steht. Die Grenzschicht wird also in eine Ebene abgewickelt gedacht. Infolge ihrer geringen Dicke ist dies zulässig. In den drei Gleichungen bedeutet: u die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Körperoberfläche und v die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Flächennormalen in einem Punkte 1 innerhalb der Grenzschicht, p den Druck und T die Temperatur an der gleichen Stelle (Bild 1); ϱ ist die Dichte des strömenden Gases, η seine Zähigkeit, λ seine Wärmeleitfähigkeit und c_p seine spezifische Wärme bei konstantem Druck. Die Erdbeschleunigung g tritt in der Energiegleichung (3) auf, wenn man im technischen Maßsystem rechnet, da dort die spezifische Wärme c_p auf die Gewichtseinheit bezogen wird; im physikalischen Maßsystem, das

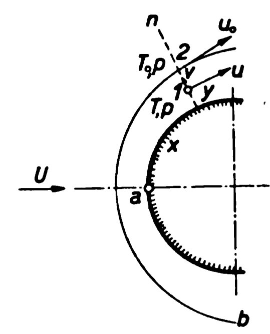


Bild 1. Grenzschicht an einem umströmten Körper. a Staupunkt, b äußere Grenze der Grenzschicht.

*) A 63.
[1]) E. Pohlhausen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 115.
[2]) E. Eckert, Z. VDI. Bd. 84 (1940), S. 813.
[3]) E. Eckert u. W. Weise, Forschg. Ing.-Wes. Bd. 12 (1941), S. 40.

auf die Masseneinheit bezieht, fällt g in Gleichung (3) weg. Das mechanische Wärmeäquivalent A wurde in Gleichung (3) weggelassen, da es bei dimensionsrichtigem Einsetzen der spezifischen Wärme in die Gleichung überflüssig ist. Von der Bewegungsgleichung für die y-Richtung bleibt in der Grenzschicht nur die Beziehung $\partial p/\partial y = 0$ übrig. Diese besagt, daß sich der Druck innerhalb der Grenzschicht auf einer Flächennormalen nicht ändert. Er wird der Grenzschicht von der äußeren Strömung aufgeprägt. Zur Lösung der Grenzschichtgleichung muß daher der Druckverlauf p längs der Körperoberfläche bekannt sein. Er läßt sich für Körper, bei denen keine Ablösung der Strömung erfolgt, aus der Potentialströmung um den Körper berechnen, für Körper mit Strömungsablösung ist er aus Messungen zu entnehmen.

An der ebenen, mit konstanter Geschwindigkeit längs angeströmten Platte ergibt die konstante Strömungsgeschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht einen konstanten Druck. Innerhalb der Grenzschicht ändert sich der Druck nach Obigem auch nicht. Die Stoffwerte können sich daher nur infolge ihrer Temperaturabhängigkeit ändern, und diese Änderungen sind verhältnismäßig klein, so daß die von Pohlhausen seinen Berechnungen[1]) zugrunde gelegte Annahme konstanter Stoffwerte bis zur doppelten Schallgeschwindigkeit zulässig ist[4]). Bei umströmten Körpern gilt das gleiche nurmehr auf jeder Flächennormalen. Denn da auf dieser konstanter Druck herrscht, ändern sich die Stoffwerte hier ebenfalls nur infolge ihrer Temperaturabhängigkeit. Für nicht zu große Strömungsgeschwindigkeiten können daher die Stoffwerte auf den Flächennormalen als konstant angenommen werden. Sie sind dann ebenso wie der Druck p nur mehr Funktionen von x. Führt man diese Vereinfachung in die Gleichungen (1) bis (3) ein, so wird aus ihnen:

$$\frac{u}{\varrho}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \ldots \quad (4)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}, \quad \ldots \quad (5)$$

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = g\,c_p\,\varrho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - u\frac{dp}{dx} \quad (6)$$

An Stelle des Druckverlaufes ist meist der Geschwindigkeitsverlauf außerhalb der Grenzschicht vorgegeben. Aus der Geschwindigkeit u_0 auf der gleichen Flächennormalen wie Punkt 1 an der Grenze der Grenzschicht (Punkt 2 in Bild 1) kann der Druckverlauf ohne weiteres berechnet werden. Denn da die Strömung außerhalb der Grenzschicht als reibungsfrei angesehen werden kann, gilt längs der Stromlinie am Rande der Grenzschicht die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} = -u_0\frac{du_0}{dx}.$$

Für die Zustandsänderung längs dieser Stromlinie gilt die Adiabatengleichung $p = c\varrho^{\varkappa}$, in der $\varkappa$ den Adiabatenexponenten und c eine Konstante bedeutet. Hieraus folgt $\frac{dp}{p} = \varkappa\frac{d\varrho}{\varrho}$. Damit ergibt sich mit der Zustandsgleichung $\frac{p}{\varrho} = gRT$ (R Gaskonstante) für das erste Glied in Gleichung (4):

$$\frac{u}{\varrho}\frac{d\varrho}{dx} = \frac{u}{\varkappa p}\frac{dp}{dx} = -\frac{\varrho}{\varkappa p}u\,u_0\frac{du_0}{dx}$$
$$= -\frac{u\,u_0}{g\varkappa R T_0}\frac{du_0}{dx} = -\frac{u}{u_0}(Ma_0)^2\frac{du_0}{dx},$$

denn die Größe $\sqrt{g\varkappa RT_0}$ ist gleich der Schallgeschwindigkeit des Gases und $\frac{u_0}{\sqrt{g\varkappa R T_0}}$ gleich der Machschen Zahl Ma_0 im Punkte 2. Damit formen sich die Gleichungen (4) und (5) folgendermaßen um:

$$-\frac{u}{u_0}(Ma_0)^2\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

$$u\frac{du}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u_0\frac{du_0}{dx} \quad \ldots \quad (8)$$

In der Energiegleichung (6) läßt sich das Druckglied folgendermaßen wegschaffen. Da die Zustandsänderungen außerhalb der Grenzschicht adiabatisch verlaufen, ändert sich die Temperatur T_0 am äußeren Rande der Grenzschicht nach folgender Beziehung: $c_p T_0 = \frac{1}{\varrho g}dp$. Es ergibt sich daher $u\frac{dp}{dx} = u\,\varrho\,g\,c_p\frac{dT_0}{dx}$. Führt man dies in Gleichung (6) ein, so erhält man:

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = g\,c_p\,\varrho\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - u\frac{\partial T_0}{\partial x}\right).$$

Für die Temperaturdifferenz $T - T_0$ wollen wir die Bezeichnung ΔT einführen. Da T_0 nur eine Funktion von x ist, wird damit aus der letzten Gleichung:

$$\lambda\frac{\partial^2(\Delta T)}{\partial y^2} + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = g\,\varrho\,c_p\left(u\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + v\frac{\partial(\Delta T)}{\partial y}\right) \quad (9)$$

Diese Gleichung gibt die Übertemperaturen ΔT innerhalb der Grenzschicht über die Temperaturen T_0 an der gleichen Stelle x außerhalb der Grenzschicht an.

Die in Gleichung (7), (8) und (9) eingeführten Vereinfachungen haben den Vorteil gebracht, daß sich das Strömungsfeld lediglich aus den Gleichungen (7) und (8) ohne Kenntnis des Temperaturfeldes berechnen läßt, da die Größen Ma_0 und ν nunmehr durch den Geschwindigkeitsverlauf u_0 vorgegebene Funktionen von x sind. Bei kleineren Strömungsgeschwindigkeiten, also kleinen Machschen Zahlen, verschwindet das erste Glied in Gleichung (7). Die Geschwindigkeitsgrenze, bis zu der dieses Glied vernachlässigt werden kann, wird aber recht hoch liegen, da bei einem umströmten Körper der stärkste Geschwindigkeitsanstieg $\frac{du_0}{dx}$ in der Nähe des Staupunktes, also bei kleinen Machschen Zahlen, auftritt. Seitlich am Körper, wo die Strömungsgeschwindigkeit, also auch die Machsche Zahl, bereits große Werte angenommen hat, ist wieder der Geschwindigkeitsanstieg $\frac{du_0}{dx}$ verhältnismäßig klein, so daß hier aus diesem Grunde das erste Glied vernachlässigt werden kann. Die Stoffwerte ändern sich für Geschwindigkeiten bis zur Schallgeschwindigkeit auch bei adiabatischer Zustandsänderung nicht sehr, sie sollen daher auch als von x unabhängig angenommen werden. Damit erhalten die Gleichungen (7) und (8) die von Grenzschichtrechnungen bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten her bekannte Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u_0\frac{du_0}{dx} \quad \ldots \quad (11)$$

Es können daher die dort üblichen Lösungsverfahren auf sie angewendet werden. Im Folgenden wird ein Verfahren benutzt, das von Falkner und Skan angegeben wurde[5]).

III. Umformung in totale Differentialgleichungen.

Die Gleichungen (10) und (11) lassen sich durch Einführen der Stromfunktion ψ, wobei $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ist, in eine einzige zusammenfassen. Für die Strömung längs einer ebenen Platte, bei der die Geschwindigkeit u_0 außerhalb der Grenzschicht konstant ist, wurde bereits von Prandtl darauf hingewiesen, daß sich diese partielle Differentialgleichung in eine totale Differentialgleichung umformen läßt, wenn man zwei neue Veränderliche einführt, und zwar $\zeta = \frac{\psi}{\sqrt{\nu\,x\,u_0}}$ als abhängige und $\xi = \frac{1}{2}y$

[4]) E. Eckert u. O. Drewitz, Forschg. Ing.-Wes. Bd. 11 (1940), S. 116.

[5]) V. M. Falkner u. S. W. Skan, Phil. Mag. Bd. 12 (1931), S. 865. Aeron. Res. Comm. Rep. a. Mem. 1314.

$\sqrt{\frac{u_0}{\nu x}}$ als unabhängige Veränderliche. Durch die gleiche Umformung konnte Blasius[6]) auch die Grenzschicht in der Umgebung des Staupunktes eines abgerundeten Körpers berechnen. Die Geschwindigkeit u_0 wächst dort linear mit der Entfernung vom Staupunkt x an. Falkner und Skan[5]) führten die gleiche Umformung für den Fall durch, daß sich die Geschwindigkeit u_0 längs der Körperoberfläche nach einem Potenzgesetz ändert: $u_0 = u_1 x^m$. Für die neuen Unbekannten ergeben sich nunmehr die Beziehungen

$$\xi = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad \psi = \sqrt{\nu u_1} x^{\frac{m+1}{2}} \zeta(\xi) \qquad (12)$$

Führt man diese Unbekannten in Gleichung (10) und (11) ein, so erhält man die totale Differentialgleichung

$$m\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 - \frac{m+1}{2}\zeta\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{1}{2}\frac{d^3\zeta}{d\xi^3} + 4m \quad . . (13)$$

Die Randbedingungen hierfür lauten:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0 \text{ und } \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=\infty} = 2.$$

Eine sehr genaue numerische Lösung dieser Gleichung wurde von Hartree angegeben[7]). Hartree formt die Gleichung (13) noch etwas um, indem er an Stelle von ξ und ζ die Unbekannten $z = 2\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,\xi$ und $f = \sqrt{\frac{m+1}{2}}\,\zeta$ einführt. Die Gleichung (13) nimmt damit die folgende Form an

$$\frac{d^3 f}{d z^3} = -f\frac{d^2 f}{d z^2} + \beta\left[\left(\frac{d f}{d z}\right)^2 - 1\right] \quad . . . . (14)$$

mit den Randbedingungen

$$\left(\frac{d f}{d z}\right)_{z=0} = 0 \text{ und } \left(\frac{d f}{d z}\right)_{z=\infty} = 1.$$

β bedeutet darin: $\beta = \frac{2m}{m+1}$. Das Geschwindigkeitsprofil innerhalb der Grenzschicht ist durch die erste Ableitung der Funktion f gegeben, denn es gilt, wie sich aus der Beziehung $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ durch Einführen von f und z leicht ergibt, $df/dz = u/u_0$. Die von Hartree berechneten und in einer Tabelle auf 4 Stellen angegebenen Geschwindigkeitsprofile für eine Reihe von β-Werten sind in Bild 2 dargestellt. Zahlentafel 1 gibt die den β-Werten entsprechenden Exponenten m an.

Ein Geschwindigkeitsanstieg nach einem Potenzgesetz ergibt sich bei einem keilförmigen, symmetrisch angeströmten Körper, wie er in Bild 3 dargestellt ist. Durch konforme Abbildung der Strömung um diesen Körper auf die ebene, längs angeströmte Platte mit Hilfe des Satzes von Schwarz-Christoffel läßt sich leicht zeigen, daß zwischen dem Öffnungswinkel φ des keilförmigen Körpers und dem von Hartree verwendeten Parameter β die einfache Beziehung besteht: $\varphi = \beta\pi$. Aus Bild 2 läßt sich auch die Grenzschichtdicke an dem umströmten Körper entnehmen. Je nach der Difinition der Grenzschichtdicke kann aus der Abbildung ein Wert z_0 entnommen werden, der die Grenze der Grenzschicht angibt. Beispielsweise erhält man die sog. Verdrängungsdicke z_0^*, wenn man die dreieckähnlichen Flächen zwischen dem Geschwindigkeitsprofil, der Ordinatenachse und der Waagerechten durch den Ordinatenpunkt 1 durch ein flächengleiches Rechteck von der Breite z_0^* und der Höhe 1 ersetzt. Mit diesem Wert z_0 erhält man die Grenzschichtdicke $y = \delta$ aus der Gleichung:

Zahlentafel 1. Zuordnung des Parameters β zum Exponenten m.

β	−0,14	0	0,2	0,5	1	1,6
m	−0,0654	0	0,111	0,333	1	4

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{m+1}}\, z_0 \sqrt{\frac{\nu}{u_1}}\, x^{\frac{1-m}{2}}.$$

Für $m = 1$ ist nach dieser Gleichung die Grenzschichtdicke unabhängig von x. Der Wert $m = 1$ entspricht $\beta = 1$ und $\varphi = \pi$. An der ebenen, senkrecht angeströmten Platte bildet sich demnach an allen Stellen die gleiche Grenzschichtdicke aus. Das gleiche muß für die Umgebung des Staupunktes an einem abgerundeten Körper gelten, den man sich in einem gewissen Bereich durch eine Ebene ersetzen kann. Für $m > 1$, also für einen konkaven Keil ist die Grenzschichtdicke in der Kehle am größten und nimmt mit wachsender Entfernung x ab.

Falkner und Skan zeigten, daß sich die mitgeteilten Lösungen der Grenzschichtgleichungen auch dazu verwenden lassen, um näherungsweise die Ausbildung der Grenzschicht an einem umströmten Körper beliebiger Form zu bestimmen. Es ergibt sich nämlich, daß in erster Näherung das Geschwindigkeitsprofil an einer bestimmten Stelle x des Körperumfanges mit demjenigen Geschwindigkeitsprofil aus Bild 2 identisch ist, das für einen Anstieg du_0/dx gleicher Größe und für die gleiche Entfernung vom Staupunkt x gilt.

Die Temperaturgleichung (9) läßt sich nun ebenfalls in eine totale Differentialgleichung überführen, wenn als unabhängige Veränderliche die gleiche Größe ξ und als abhängige Veränderliche $\vartheta = \Delta T/u^2_0/2 g c_p$ eingeführt wird. Wenn man hierbei u_0 durch den Potenzansatz ausdrückt,

[6]) H. Blasius, Z. Math. u. Phys. Bd. 56 (1908), S. 1.
[7]) D. R. Hartree, Proc. Cambridge Phil. Soc. Bd. 33 (1937), S. 223.

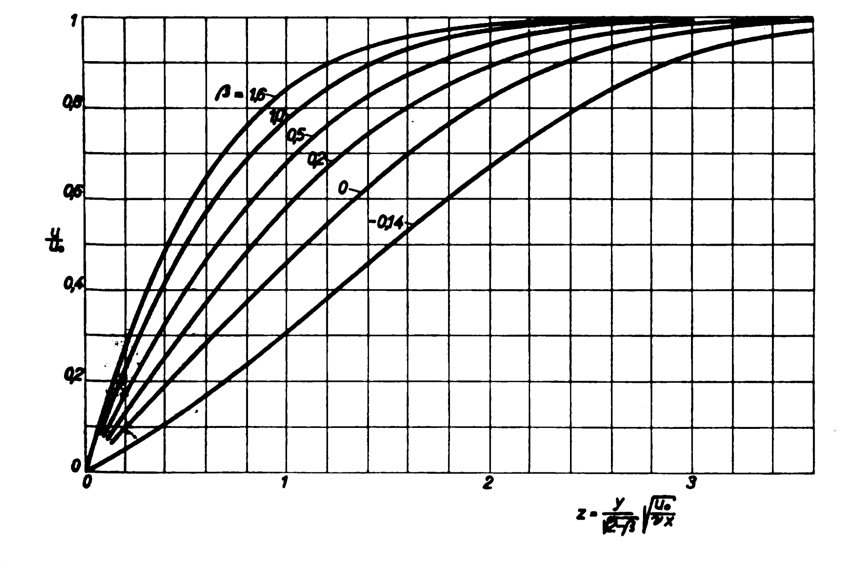


Bild 2 (links). Geschwindigkeitsfeld (u) in der laminaren Grenzschicht.
u_0 Geschwindigkeit am äußeren Rande der Grenzschicht,
z dimensionsloser Abstand von der Körperoberfläche,
β der den Anstieg der Geschwindigkeit u_0 längs der Körperoberfläche kennzeichnende Parameter.

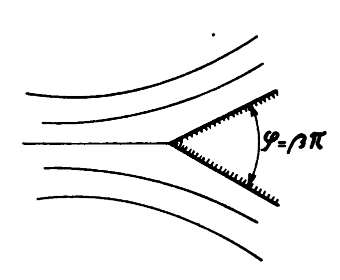


Bild 3. Angeströmter Keil.

ergibt sich $\Delta T = \frac{u_1^2}{2 g c_p} x^{2m} \vartheta(\xi)$. Damit wird aus Gleichung (9)

$$\frac{1}{Pr}\frac{d^2\vartheta}{d\xi^2} + (m+1)\zeta\frac{d\vartheta}{d\xi} - 4m\vartheta\frac{d\zeta}{d\xi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 \quad (15)$$

Die Randbedingungen nehmen die Form an:

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0 \text{ und } \vartheta_{\xi=\infty} = 0.$$

In Gleichung (15) ist noch die Prandtlsche Zahl $Pr = g c_p \eta/\lambda$ eingeführt. Verwendet man die Veränderlichen f und z nach Hartree, so wird daraus

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + Pr f\frac{d\vartheta}{dz} - 2\beta\, Pr\frac{df}{dz}\vartheta = -2\,Pr\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)^2 \quad (16)$$

mit den Randbedingungen:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad \vartheta_{z=\infty} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt das Temperaturfeld in der Grenzschicht.

IV. Lösung der Differentialgleichung für das Temperaturfeld.

Die Gleichung (16) für das Temperaturfeld in der laminaren Grenzschicht wurde durch Umformung in eine Differenzengleichung gelöst. Wenn die Übertemperaturen ϑ in gleich großen Abständen e betrachtet und von der Oberfläche des Körpers ($z = 0$) beginnend, fortlaufend gezählt werden, so erhält man aus Gleichung (16) die folgende Differenzengleichung

$$\frac{\vartheta_n - 2\vartheta_{n-1} + \vartheta_{n-2}}{e^2} + Pr f\frac{\vartheta_n - \vartheta_{n-1}}{e} - 2\beta\, Pr f'_{n-1}\vartheta_{n-1} = -2\,Pr f''^2_{n-1} \quad (17)$$

Die Ableitungen von f nach z sind in dieser Gleichung zur Abkürzung mit einem bzw. zwei Strichen bezeichnet. Die erste Ableitung f' wurde aus der Arbeit von Hartree[7]) entnommen. Die Funktion f selbst und ihre zweite Ableitung f'' wurde daraus durch numerische Integration bzw. Differentiation gewonnen. Löst man die Gleichung (17) nach ϑ_n auf, so ergibt sich

$$\vartheta_n = 4\frac{\beta\, Pr\, e^2 f'_{n-1} + 1}{Pr\, e f_{n-1} + 2}\vartheta_{n-1} + \frac{Pr\, e f_{n-1} - 2}{Pr\, e f_{n-1} + 2}\vartheta_{n-2} - \frac{4\, Pr\, e^2 f''^2_{n-1}}{Pr\, e f_{n-1} + 2} \quad (18)$$

Mit den Abkürzungen

$$a_n = 4\frac{\beta\, Pr\, e^2 f'_{n-1} + 1}{Pr\, e f_{n-1} + 2}, \quad b_n = \frac{Pr\, e f_{n-1} - 2}{Pr\, e f_{n-1} + 2}, \quad c_n = \frac{4\, Pr\, e^2 f''^2_{n-1}}{Pr\, e f_{n-1} + 2} \quad (19)$$

erhält die Gleichung (18) die Form

$$\vartheta_n = a_n \vartheta_{n-1} + b_n \vartheta_{n-2} - c_n \quad \ldots \quad (20)$$

Die Auswertung dieser Rekursionsformel ist im vorliegenden Falle dadurch erschwert, daß die beiden Randbedingungen nicht für die gleiche Stelle vorgegeben sind, sondern die eine Randbedingung an der Körperoberfläche, die zweite am äußeren Rand der Grenzschicht. Durch einen Kunstgriff, dessen Mitteilung wir Herrn Dr.-Ing. habil. H. Neuber, Braunschweig, verdanken, läßt sich jedoch die Auswertung in der im folgenden geschilderten Weise vornehmen. Zunächst werde die Randbedingung an der Körperoberfläche eingeführt: $(\vartheta')_0 = 0$. Um aus dieser Randbedingung eine Beziehung für drei aufeinanderfolgende ϑ-Werte zu erhalten, wird nach Bild 4 der wahre Verlauf der ersten Ableitung von ϑ in unmittelbarer Nähe der Körperoberfläche durch eine Gerade ersetzt. Es ergibt sich dann die Größe $(\vartheta_0)' = \left(\frac{d\vartheta}{dz}\right)_0$ aus den ϑ'-Werten für $e = \frac{1}{2}$ und $e = \frac{3}{2}$ mit Hilfe der Gleichung

$$\vartheta'_0 = \vartheta'_{1/2} + \frac{3}{2}(\vartheta'_{1/2} - \vartheta'_{3/2}) = \frac{3}{2}\vartheta'_{1/2} - \frac{1}{2}\vartheta'_{3/2} = \frac{3}{2}\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{e} - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{e}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\vartheta'_0 = 0$, so ergibt sich

$$\vartheta_2 = 4\vartheta_1 - 3\vartheta_0.$$

Eine zweite Beziehung zwischen ϑ_0, ϑ_1 und ϑ_2 folgt aus Gleichung (20)

$$\vartheta_2 = a_2\vartheta_1 + b_2\vartheta_0 - c_2$$

aus beiden ergibt sich ϑ_1 zu

$$\vartheta_1 = \frac{b_2 + 3}{4 - a_2}\vartheta_0 - \frac{c_2}{4 - a_2} = m_1\vartheta_0 - n_1 \quad \ldots \quad (21a)$$

und ϑ_2 zu

$$\vartheta_2 = \frac{3a_2 + 4b_2}{4 - a_2}\vartheta_0 - \frac{4c_2}{4 - a_2} = m_2\vartheta_0 - n_2 \quad (21b)$$

Nunmehr kann fortlaufend auch ϑ_3 und alle folgenden ϑ-Werte mit Hilfe des noch unbekannten ϑ_0 ausgedrückt werden:

Bild 5. Temperaturfeld ϑ in der laminaren Grenzschicht für ein Gas mit der Prandtlschen Kennzahl $Pr = 0{,}7$.
ϑ dimensionslose Übertemperatur über die Temperatur am äußeren Rande der Grenzschicht,
z dimensionsloser Abstand von der Körperoberfläche,
β der den Anstieg der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht kennzeichnende Parameter.

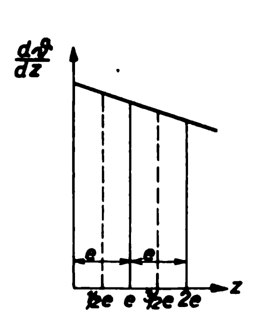


Bild 4.

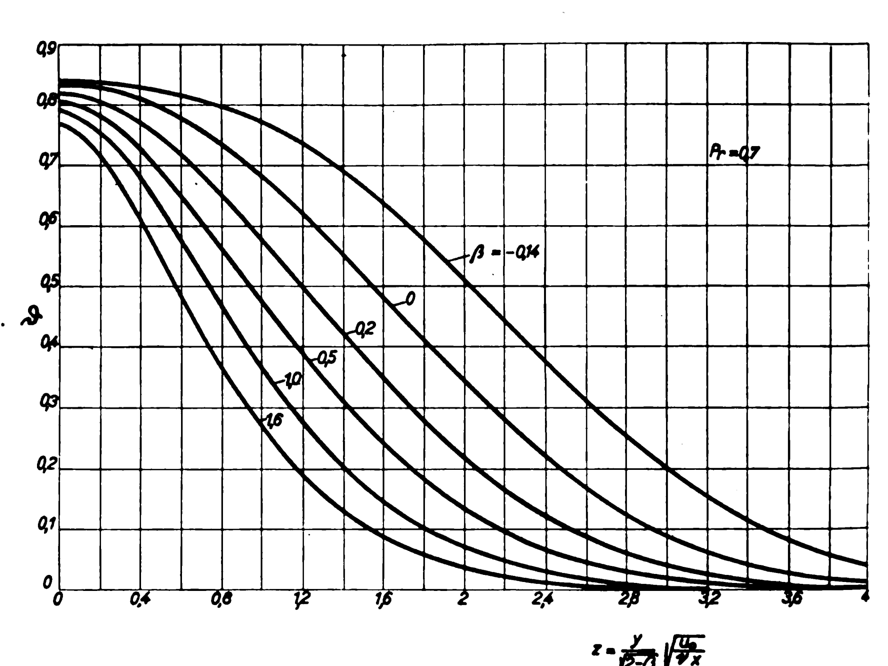


Bild 5.

$$\vartheta_3 = a_3\,\vartheta_2 + b_3\,\vartheta_1 - c_3 = (a_3\,m_2 + b_3\,m_1)\,\vartheta_0 - (a_3\,n_2 + b_3\,n_1 + c_3) = m_3\,\vartheta_0 + n_3, \quad . \; . \; . \qquad (21\,c)$$

$$\vartheta_n = a_n\,\vartheta_{n-1} + b_n\,\vartheta_{n-2} + c_n = (a_n\,m_{n-1} + b_n\,m_{n-2})\,\vartheta_0 - (a_n\,n_{n-1} + b_n\,n_{n-2} + c_n) = m_n\,\vartheta_0 + n_n \qquad (21\,\mathrm{d})$$

In einem Rechenschema lassen sich die Koeffizienten a_n, b_n, c_n und daraus fortlaufend die Koeffizienten m_1, $m_2 \ldots m_n$ und ebenso n_1, $n_2 \ldots n_n$ berechnen. Diese Rechnung wird bis an die äußere Grenze der Grenzschicht fortgeführt. Streng genommen wäre die zweite Randbedingung an der Stelle $z = \infty$ zu erfüllen. Da jedoch die ϑ-Kurven sehr rasch gegen den Wert Null konvergieren, genügt die Erfüllung derselben für einen endlichen z-Wert. Die Ausdehnung der Grenzschicht ist zunächst aus dem Geschwindigkeitsfeld in Bild 2 abzuschätzen. Aus dem berechneten Temperaturfeld sieht man dann, ob die Konvergenz von ϑ an der betrachteten Stelle schon genügend gut ist. Der ϑ-Wert an dieser Stelle z ist nach der zweiten Randbedingung gleich Null, so daß durch Nullsetzen der entsprechenden Gleichung (21d) die Größe von ϑ_0 folgt. Nunmehr kann rückläufig das ganze Temperaturfeld durch Einführen dieses Wertes ϑ_0 in die Gleichungen (21) bestimmt werden.

Die numerische Ausrechnung der Differenzengleichung (17) auf die angegebene Weise wurde für eine Prandtlsche Kennzahl $Pr = 0{,}7$ vorgenommen. Die Ergebnisse der Berechnung sind in Bild 5 und Zahlentafel 2 zusammengestellt. Die Rechnung wurde mit der Rechenmaschine ausgeführt und ihre Genauigkeit durch Verändern der Schrittgrößen e überprüft. Sie ist auf die angegebenen Stellen genau. Bild 5 zeigt, daß zwar die Ausdehnung des Temperaturfeldes recht stark vom Parameter β, d. h. vom Geschwindigkeitsanstieg längs der Körperoberfläche abhängt, daß dagegen die Wandtemperatur (bei $z = 0$) sich nur wenig mit β ändert. Für eine längs angeströmte Platte ($\beta = 0$) ist nach Bild 5 die dimensionslose Übertemperatur der Wand $\vartheta = 0{,}833$. In der Nähe des Staupunktes eines abgerundeten Körpers ($\beta = 1$) ist die Übertemperatur 0,791. Da bei einem umströmten Körper der gleiche Geschwindigkeitsanstieg wie bei der ebenen Platte seitlich am Körper auftritt, ist demnach zu erwarten, daß für ein strömendes Gas mit einer Prandtlschen Kennzahl $Pr = 0{,}7$ die dimensionslose Übertemperatur der Wand ϑ längs eines umströmten Körpers von dem Werte 0,79 am Staupunkt allmählich auf den Wert 0,83 an der Stelle ansteigt, wo der Geschwindigkeitsanstieg längs des Umfanges 0 ist und auf noch etwas größere Werte für das Gebiet, wo die Geschwindigkeit längs des Umfanges wieder abnimmt (β negativ). Dieses Ergebnis der Berechnung kann mit Versuchen verglichen werden, die wir an quer angeströmten Kreiszylindern aus Hartgummi von 1 bis 2 cm Dmr. im Windkanal bei Machschen Zahlen bis 0,9 anstellten. Als Beispiel ist in Bild 6 das Meßergebnis für eine mit der Anströmgeschwindigkeit gebildete Machsche Zahl $Ma_0 = 0{,}685$ wiedergegeben. Bei dieser Messung war die Grenzschicht am Zylinder bis zur Ablösungsstelle B der Strömung laminar. Die Versuche wurden mit Luft ausgeführt, die nach den neuesten Messungen der Stoffwerte[9]) eine Prandtlsche Kennzahl $Pr = 0{,}715$ hat. Danach ist zu erwarten, daß die Meßergebnisse etwas höher liegen als die vorstehenden Berechnungen, die für eine Prandtlsche Zahl $Pr = 0{,}7$ durchgeführt wurden. E. Pohlhausen hat an der ebenen, längs angeströmten Platte den ϑ_e-Wert für verschiedene Prandtlsche Zahlen ausgerechnet[1]). Es ergibt sich dort, daß die Größe ϑ_e für Luft ($Pr = 0{,}715$) die Größe 0,845, für ein Gas mit einer Prandtlschen Kennzahl 0,7 die Größe 0,835 hat. In der gleichen Größenordnung wird die Zunahme des Wertes ϑ_e auch für die anderen Parameter liegen. In Bild 6 gibt die gestrichelte Kurve den Verlauf der Übertemperatur der Wand über die Temperatur außerhalb der Grenzschicht, bezogen auf den lokalen adiabatischen Temperaturanstieg, an. Diese Werte können also unmittelbar mit unserer Rechnung verglichen werden. Man sieht aus Bild 6, daß die gestrichelte Kurve von dem Werte 0,8 am Staupunkt bis auf den Wert 0,84 an der Ablösungsstelle ansteigt. Der Wert am Staupunkt selbst ist allerdings extrapoliert, da der adiabatische Temperaturanstieg $u_0^2/2\,g\,c_p$ in der Nachbarschaft des Staupunktes sehr klein ist und daher dort die Versuchsgenauigkeit bei den Messungen nicht ausreichte. Die Übereinstimmung zwischen den Meßergebnissen und den Ergebnissen unserer vorstehenden Berechnung ist sehr gut, so daß damit auch die Vereinfachungen, die der Berechnung zugrunde gelegt werden mußten, gerechtfertigt sind.

[9]) F. Henning, Techn. Richtwerte, VDI-Verlag, Berlin 1938.

Zahlentafel 2. Temperaturfeld ϑ des unbeheizten, von einem Gas mit der Prandtlschen Kennzahl 0,7 schnell angeströmten Körpers.

z \ β	0,14	0	0,2	0,5	1	1,6
0.0	0,838	0,833	0,818	0,805	0,791	0,768
0,2	0,836	0,828	0,805	0,782	0,766	0,716
0,4	0,829	0,808	0,770	0,729	0,683	0,610
0,6	0,817	0,778	0,719	0,652	0,579	0,489
0,8	0,798	0,736	0,653	0,562	0,470	0,368
1,0	0,772	0,683	0,581	0,475	0,368	0,271
1,2	0,736	0,622	0,502	0,389	0,280	0,192
1,4	0,693	0,554	0,421	0,307	0,207	0,132
1,6	0,641	0,483	0,347	0,242	0,150	0,091
1,8	0,580	0,411	0,278	0,181	0,105	0,059
2,0	0,509	0,341	0,216	0,133	0,073	0,038
2,2	0,448	0,276	0,167	0,097	0,049	0,024
2,4	0,380	0,218	0,121	0,067	0,032	0,013
2,6	0,315	0,166	0,087	0,046	0,021	0,007
2,8	0,254	0,124	0,060	0,031	0,013	0,002
3,0	0,200	0,091	0,039	0,019	0,008	0,000
3,2	0,153	0,062	0,024	0,011	0,005	
3,4	0,115	0,042	0,014	0,006	0,003	
3,6	0,084	0,028	0,008	0,003	0,001	
3,8	0,059	0,016	0,004	0,000	0,000	
4,0	0,040	0,009	0,000			
4,2	0,027	0,004				
4,4	0,017	0,002				
4,6	0,011	0,001				
4,8	0,006	0,001				
5,0	0,004	0,000				
5,2	0,002					
5,4	0,001					
5,6	0,000					

V. Der Wärmeübergang bei kleinen Geschwindigkeiten.

Die Tatsache, daß sich das Temperaturfeld bei angeströmten, unbeheizten Körpern aus Gleichung (16) ohne allzu großen Rechenaufwand gewinnen läßt, legt den Gedanken nahe, die gleiche Rechnung auch für beheizte Körper

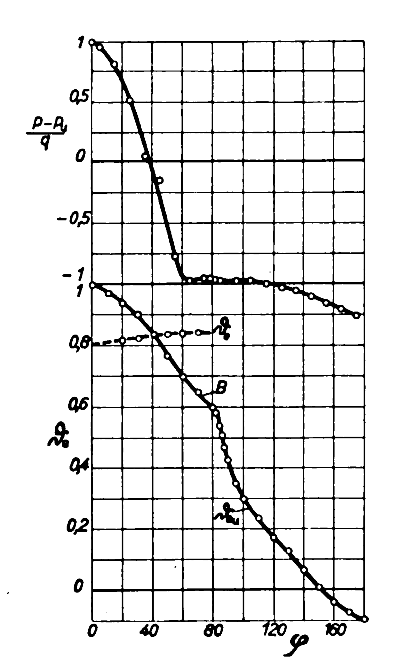


Bild 6. Druck- und Temperaturverlauf über den Umfang eines von Luft quer angeströmten Zylinders vom Durchmesser $d = 1$ cm aus schlecht wärmeleitendem Werkstoff.

Anblasegeschwindigkeit $U = 227$ m/s, Machsche Zahl $Ma_0 = U/a = 0{,}685$, Reynoldssche Zahl

$$Re_0 = \frac{U d}{\nu} = 1{,}4 \cdot 10^5,$$

p, T_0, u_0 Druck, Temperatur und Geschwindigkeit am äußeren Rande der Grenzschicht,
p_u, T_u, U Druck, Temperatur und Geschwindigkeit im ungestörten Zustrom,
q Staudruck,
Te Temperatur der Oberfläche des Kreiszylinders

$$\vartheta_e = \frac{Te - T_0}{u_0^2/2\,g\,c_p},$$

$$\vartheta_{e,0} = \frac{Te - Tu}{U^2/2\,g\,c_p},$$

a Schallgeschwindigkeit,
ν kinematische Zähigkeit,
c_p spezifische Wärme bei konstantem Druck,
g Erdbeschleunigung,
B Ablösungsstelle der Strömung.

vorzunehmen. Bei der ebenen, längs angeströmten Platte war dies ohne weiteres möglich[4]), dagegen scheitert die Berechnung hier an der Tatsache, daß für den praktisch vor allem interessierenden Fall eines Körpers mit konstanter, vorgegebener Wandtemperatur die dimensionslose Übertemperatur ϑ an der Körperoberfläche wegen der veränderlichen Temperatur T_0 im Gasstrom außerhalb der Grenzschicht eine verwickelte Funktion der Entfernung x vom Staupunkt wird. Dagegen läßt sich die Berechnung des Temperaturfeldes um einen mit kleiner Geschwindigkeit angeströmten Körper sehr einfach ausführen. In der Gleichung (3) für das Temperaturfeld kann in diesem Fall das Glied $\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, das die Wärmeerzeugung durch innere Reibung angibt und ebenso das Glied $u\frac{\partial p}{\partial x}$, das die Temperaturänderung durch Expansion erfaßt, vernachlässigt werden. Die Temperatur T_0 außerhalb der Grenzschicht ist dann für alle x-Werte die gleiche. Ebenso können bei nicht zu großer Übertemperatur des angeströmten Körpers über die Gastemperatur die Stoffwerte als konstante Größen angesehen werden. Gleichung (3) hat dann die Form

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=g\varrho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Diese Gleichung läßt sich für Keilkörper ohne weiteres durch Einführen der unabhängigen Veränderlichen ξ in eine totale Differentialgleichung überführen:

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2}+Pr\,(m+1)\,\zeta\,\frac{dT}{d\xi}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Verwendet man an Stelle von ξ die unabhängige Veränderliche z, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\frac{d^2 T}{dz^2}+Pr\,f\,\frac{dT}{dz}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Diese Gleichung hängt von dem Parameter β nur mehr über die Lösung f der zugehörigen Strömungsgleichung (14) ab. Die Randbedingungen lauten folgendermaßen

$$T_{z=0}=T_w, \quad T_{z=\infty}=T_0,$$

wenn T_W die vorgegebene Wandtemperatur ist. Die Gleichung (24) kann durch zweimalige Integration ohne weiteres gelöst werden. Unter Berücksichtigung der Randbedingung ergibt sich

$$\frac{T-T_0}{T_w-T_0}=1-A\int_0^z e^{-Pr\int_0^z f\,dz}\,dz, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wobei die Größe A durch die folgende Gleichung festgelegt ist

$$\frac{1}{A}=\int_0^\infty e^{-Pr\int_0^z f\,dz}\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Die numerische Auswertung wurde für eine Prandtlsche Kennzahl $Pr = 0{,}7$ mit der Rechenmaschine vorgenommen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Bild 7 und Zahlentafel 3 und 4 dargestellt. An Bild 7 fällt auf, daß das Temperaturfeld von dem Parameter β nur wenig beeinflußt wird, viel weniger als das in Bild 2 dargestellte Geschwindigkeitsfeld. Bei der Berechnung für die ebene Platte[4]) war darauf hingewiesen worden, daß für eine Prandtlsche Kennzahl $Pr = 1$ das Temperatur- und das Geschwindigkeitsfeld einander ähnlich werden. Ein Vergleich der Gleichungen (14) und (24) zeigt, daß diese Gleichungen nur für $\beta = 0$ und $Pr = 1$ identisch werden. In beschleunigter oder verzögerter Strömung ist also eine Ähnlichkeit zwischen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld auch für $Pr = 1$ nicht vorhanden.

Zahlentafel 3. Temperaturfeld $\frac{T-T_0}{T_w-T_0}$ an einem von Gas mit der Prandtlschen Kennzahl 0,7 langsam angeströmten, beheizten Körper.

z \ β	0	0,2	0,5	1	1,6
0	1,—	1,—	1,—	1,—	1,—
0,8	0,672	0,648	0,628	0,609	0,596
1,6	0,373	0,339	0,310	0,285	0,269
2,4	0,158	0,130	0,111	0,095	0,086
3,2	0,047	0,035	0,028	0,022	0,019
4,0	0,010	0,006	0,005	0,003	0,003
4,8	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
5,6	0,000	0,000			

Zahlentafel 4. Größe A für einen von Gas mit der Prandtlschen Kennzahl 0,7 langsam angeströmten, beheizten Körper.

β	0	0,2	0,5	1	1,6
A	0,413	0,444	0,470	0,496	0,514

Bei der Umströmung des beheizten Körpers interessiert vor allem die Wärmeabgabe desselben. Diese ist durch den Temperaturgradienten an der Wand festgelegt und läßt sich daher in folgender Weise berechnen:

$$q=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=-\lambda\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\,x^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z=0}$$

$$=\lambda\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,A\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\,x^{\frac{m-1}{2}}\,(T_w-T_0) \quad . \quad . \quad (27)$$

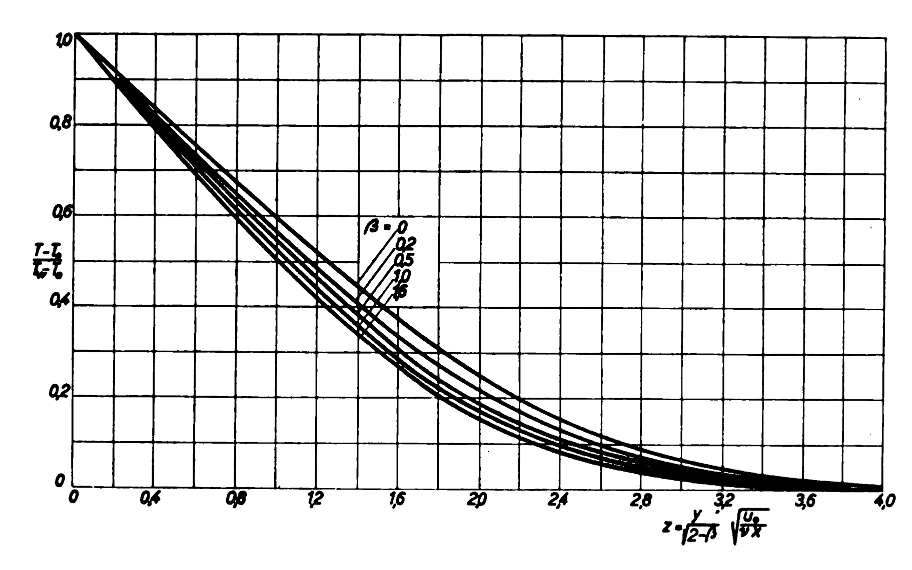


Bild 7. Temperaturfeld T in der Grenzschicht eines von einem Gas mit der Prandtlschen Kennzahl Pr = 0,7 mit kleiner Geschwindigkeit angeströmten, beheizten Körpers.
T_w Temperatur der Körperoberfläche,
T_0 Gastemperatur außerhalb der Grenzschicht,
β der den Anstieg der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht kennzeichnende Parameter,
z dimensionsloser Abstand von der Körperoberfläche.

Die Wärmeübergangszahl $\alpha = \frac{q}{T_w - T_0}$ ergibt sich daraus zu

$$\alpha = \lambda \sqrt{\frac{m+1}{2}} A \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Diese Gleichung zeigt, daß für $m = 1$ die Wärmeübergangszahl unabhängig von der Entfernung vom Staupunkt x ist, für $m < 1$ ist α am Staupunkt unendlich und fällt mit wachsendem x, für $m > 1$ ist α am Staupunkt 0 und steigt mit wachsendem an. Eine senkrecht angeströmte, ebene Platte hat also an allen Stellen die gleiche Wärmeübergangszahl, ein konvexer Keil hat die größte Wärmeübergangszahl an der Schneide und in einem konkaven Keil ist die Wärmeübergangszahl in der Kehle am kleinsten. Die Wärmeübergangszahl verhält sich also genau umgekehrt wie die Grenzschichtdicke. Wenn man in Gleichung (28) die Geschwindigkeit u_0 aus dem Ansatz $u_0 = u_1 x^m$ einführt und die Wärmeübergangszahl mit Hilfe der Entfernung vom Staupunkt x und der Wärmeleitzahl λ dimensionslos macht, gewinnt man für die Nusseltsche Kennzahl $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$ die Beziehung

$$Nu_x = \sqrt{\frac{m+1}{2}} A \sqrt{\frac{u_0 x}{\nu}}.$$

Die Größe $\frac{u_0 x}{\nu}$, die in dieser Gleichung auftritt, ist die mit der örtlichen Geschwindigkeit u_0 und der Entfernung vom Staupunkt x gebildete Reynoldssche Kennzahl Re_x. Wir können daher schreiben

$$Nu_x = \sqrt{\frac{m+1}{2}} A \sqrt{Re_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Die Nusseltsche Kennzahl wächst daher bei laminarer Grenzschicht mit der Wurzel aus der Reynoldsschen Kennzahl.

Falkner und Skan[5]) haben, wie bereits erwähnt, nachgewiesen, daß die Lösungen für die keilförmigen Körper auch dazu verwendet werden können, näherungsweise das Geschwindigkeitsfeld an umströmten Körpern beliebiger Form zu gewinnen. Im folgenden sei nachgeprüft, ob dies auch für das Temperaturfeld möglich ist. Hierzu sollen die Wärmeübergangszahlen nachgerechnet werden, die von E. Schmidt und K. Wenner[9]) an einem quer angeströmten Kreiszylinder gemessen wurden. Von den Verfassern ist in ihrer Arbeit die Wärmeübergangszahl in üblicher Weise mit Hilfe des Durchmessers d (Bild 8) und der Wärmeleitzahl λ dimensionslos gemacht. Es ergibt sich so die Nusseltsche Kennzahl $Nu_d = \frac{\alpha d}{\lambda}$. Diese Kennzahl ist in Abhängigkeit von der auf die Anströmgeschwindigkeit U und den Durchmesser d bezogenen Reynoldsschen Kennzahl $Re_d = \frac{U d}{\nu}$ und vom Winkel φ angegeben. Wenn wir aus Gleichung (28) die Kenngröße Nu_d ausrechnen, ergibt sich hierfür

$$Nu_d = \sqrt{\frac{m+1}{2}} A \sqrt{\frac{u_0}{U}} \sqrt{\frac{d}{x}} \sqrt{Re_d} \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Das Gesetz, daß die Nusseltsche Kennzahl in laminaren Grenzschichten von der Wurzel aus der Reynoldsschen Kennzahl abhängt, gilt also auch hier, solange das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_0}{U}$ konstant ist. Die Kennzahl Nu_d läßt sich aus Gleichung (30) berechnen, sofern der Geschwindigkeitsverlauf u_0 längs des Zylinderumfanges gegeben ist. Für die vorliegenden Versuche läßt sich der Geschwindigkeitsverlauf aus dem für einige Versuchsreihen mitgeteilten Druckverlauf um die Zylinder bestimmen. Die Größe m wird nach Falkner und Skan für jeden Winkel φ so festgelegt, daß der Geschwindigkeitsanstieg nach einem Potenzgesetz $u_0 = u_1 x^m$ an der betrachteten Stelle x bzw. φ ebenso groß ist wie der wahre Geschwindigkeitsanstieg. Durch Eintragung des Geschwindigkeitsverlaufes u_0 über φ in einem logarithmischen Diagramm läßt sich die Größe m aus dem Neigungswinkel der Tangente ohne weiteres ablesen. Das Ergebnis dieser Berechnung ist zusammen mit den Meßergebnissen für zwei Zylinder vom Durchmesser 50 mm und 100 mm in Bild 9 und 10 eingetragen. Da sich die Druckverläufe im unterkritischen Gebiet nur wenig voneinander unterscheiden, wurde für alle eingetragenen Versuchsreihen mit dem angegebenen Druckverlauf für $d = 100$ mm, $Re_d = 39\,800$ gerechnet. Die Kurven $Nu/\sqrt{Re}$ müssen nach dem Gesagten untereinander und mit dem gestrichelten Verlauf zusammenfallen.

Man sieht, daß die Übereinstimmung in der Nähe des Staupunktes recht gut ist. Für größere Entfernung vom Staupunkt dagegen liegen die berechneten Werte zu tief. Ein neues Berechnungsverfahren, das bessere Übereinstimmung erzielt, wird demnächst mitgeteilt. Die Rechnung wurde für ein Gas mit einer Prandtlschen Zahl 0,7 durchgeführt, für Luft ($Pr = 0{,}715$) werden die Werte $Nu_d/\sqrt{Re_d}$ noch um etwa 1% höher liegen, wie eine Abschätzung an Hand der Rechenergebnisse von Pohlhausen[1]) für die ebene Platte ergibt. Bei der Versuchsreihe für $Re_d = 170\,000$, die in Bild 10 höher liegt als die anderen, war nach den Messungen die kritische Reynoldssche Zahl, bei der ein Umschlag in die turbulente Grenzschicht eintritt, eben erreicht. Aus diesem Grunde ist der Druckverlauf ein etwas anderer als bei den anderen Versuchsreihen, und damit ist auch nicht mehr zu erwarten, daß sich die Kurve $Nu_d/\sqrt{Re_d}$ mit den übrigen deckt. Die Wärmeübergangszahlen für einen Zylinder von 250 mm Dmr., die ebenfalls gemessen wurden, lassen sich in der Auftragung $Nu_d/\sqrt{Re_d}$ über φ nur schlecht zur Deckung bringen. Dies kann einmal daran liegen, daß für diese Zylindergröße die Abmessungen des Luftstrahles schon zu klein waren, zum anderen wäre eine Turbulenz im Zustrom möglich. Mit Bild 9 und 10 ist gezeigt, daß die oben für keilförmige Körper abgeleitete Tatsache, daß die Nusseltsche Kennzahl bei laminarer Grenzschicht mit der Wurzel aus der Reynoldsschen Kennzahl ansteigt, auch für Körper beliebiger Form gilt und daß sich die Größe der Wärmeübergangszahl durch die vorstehende Berechnung einigermaßen genau gewinnen läßt.

In der Nähe des Staupunktes des umströmten Zylinders stimmt der wahre Geschwindigkeitsverlauf mit dem Verlauf, der sich für Potentialströmung ohne Ablösung berechnen läßt, gut überein. Der letztere ist durch die Gleichung $u_0 = 2\,U \sin\varphi$ gegeben. Führt man dies in Gleichung (30) ein, so ergibt sich

$$Nu_d = 2\sqrt{\frac{m+1}{2}} A \sqrt{\frac{\sin\varphi}{\varphi}} \sqrt{Re_d}.$$

Für kleine Winkel φ kann der Sinus gleich dem Winkel gesetzt werden. Damit wird $m = 1$ und

$$Nu_d = 2\,A\sqrt{Re_d} = 0{,}992\sqrt{Re_d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Dieses Ergebnis wurde auch von Squire in einer nicht veröffentlichten Berechnung gewonnen und von Goldstein mitgeteilt[10]). Das Temperaturfeld an umströmten Keilkörpern (Bild 7) wurde von Fage und Falkner[11]) angenähert mit der

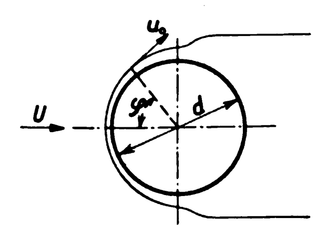


Bild 8. Ausbildung der Grenzschicht am quer angeströmten Zylinder.

[9]) E. Schmidt u. K. Wenner, Forschg. Ing.-Wes. Bd. 12 (1941), S. 65.

[10]) S. Goldstein, Modern developments in fluid dynamics. Oxford 1938, S. 631.

[11]) A. Fage u. V. Falkner, A. R. C. Reports and Memoranda, Nr. 1408 (1931).

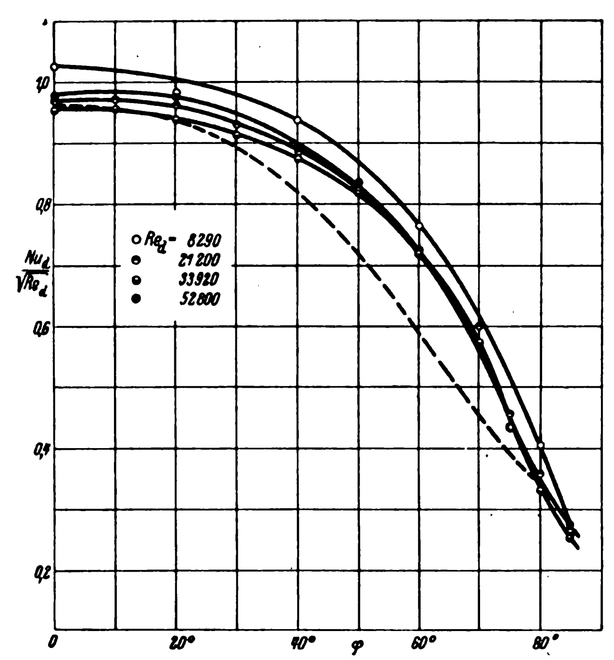


Bild 9. Verlauf der Nusseltschen Kennzahl Nu_d über den Umfang eines von Luft quer angeströmten, beheizten Kreiszylinders von 50 mm Dmr.
——— Meßergebnisse, - - - - - Nachrechnung.
○ $Re_d = 8290$, $Re_d = 21200$, $Re_d = 33920$, $Re_d = 52800$.
Re_d Reynoldssche Kennzahl, φ Winkel, gemessen vom Staupunkt.

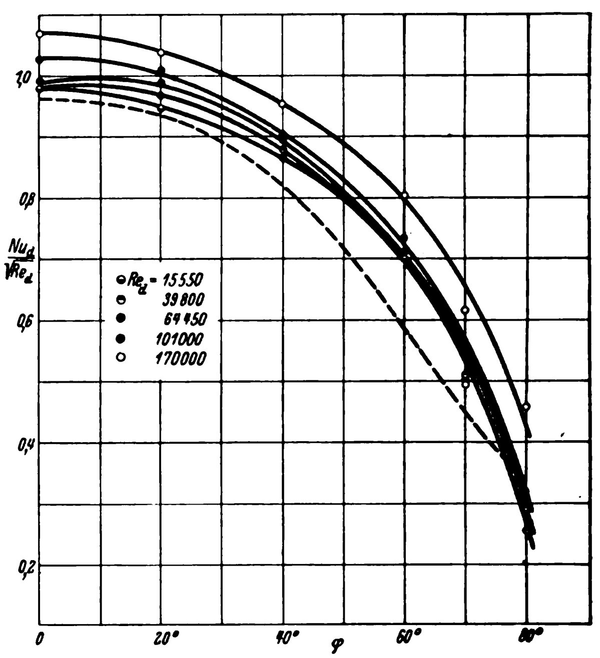
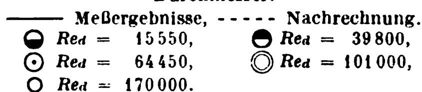


Bild 10. Verlauf der Nusseltschen Kennzahl über den Umfang eines von Luft quer angeströmten, beheizten Kreiszylinders von 100 mm Durchmesser.
——— Meßergebnisse, - - - - - Nachrechnung.



$Re_d = 15550$, $Re_d = 39800$,
$Re_d = 64450$, $Re_d = 101000$,
○ $Re_d = 170000$.
Re_d Reynoldssche Kennzahl, φ Winkel, gemessen vom Staupunkt.

Annahme berechnet, daß das Geschwindigkeitsfeld in der laminaren Grenzschicht linear ansteigt. Die Ergebnisse dieser Berechnung lassen sich mit unseren nicht unmittelbar vergleichen, da von Fage und Falkner ein Gas mit einer Prandtlschen Kennzahl $Pr = 0{,}77$ untersucht wurde. Eine Abschätzung des Einflusses der Prandtlschen Kennzahl führt jedoch dazu, daß für größere β-Werte die Rechenergebnisse von Fage und Falkner wesentlich zu hoch liegen müssen. Dies nimmt auch nicht wunder, da für $\beta > 0$ der wirkliche Geschwindigkeitsverlauf in der Grenzschicht von einem linearen Gesetz stark abweicht.

VI. Zusammenfassung.

Das Temperturfeld, das sich an einem schnell angeströmten, unbeheizten Körper infolge der Wärmeentwicklung durch innere Reibung in der laminaren Grenzschicht ausbildet, wurde durch Integration der Grenzschichtgleichungen berechnet. Zur Durchführung der Rechnung sind einige Vereinfachungen dieser Gleichung notwendig, die das Ergebnis im wesentlichen auf das Gebiet der Unterschallgeschwindigkeiten beschränken. Die Zulässigkeit der Vereinfachungen für diesen Bereich wurde durch einen Vergleich der Rechenergebnisse mit Versuchen an einem quer angeströmten Kreiszylinder nachgeprüft. Die Berechnungen gelten unmittelbar für symmetrisch angeströmte, keilförmige Körper von verschiedenem Öffnungswinkel. Sie lassen sich jedoch auch dazu benutzen, um eine erste Näherung für das Temperaturfeld angeströmter Körper beliebiger Form zu gewinnen.

Im Anschluß wurde auch die Berechnung des Temperaturfeldes durchgeführt, das sich in der Grenzschicht eines beheizten Körpers bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten ausbildet. Aus dem ermittelten Temperaturgradienten an der Wand des Körpers ließen sich die Wärmeübergangszahlen bestimmen. Auch die Ergebnisse dieser Berechnung gelten zunächst für keilförmige Körper, durch Vergleich der mit ihnen gewonnenen Wärmeübergangszahlen mit Messungen an Kreiszylindern wird wieder gezeigt, daß sie sich näherungsweise auch auf Körper beliebiger Form anwenden lassen. Als allgemeines Gesetz folgt aus den Rechnungen, daß der Wärmeübergang in der laminaren Grenzschicht umströmter Körper mit der Wurzel aus der Reynoldsschen Kennzahl ansteigt, solange nicht die Strömung außerhalb der Grenzschicht sich verändert, wie dies beispielsweise am quer angeströmten Kreiszylinder bei der kritischen Reynoldsschen Kennzahl $4 \cdot 10^5$ der Fall ist.

Differenzenverfahren zur Berechnung zeitveränderlicher kugelsymmetrischer Temperaturfelder*).

Von H. Pfriem VDI.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof,
Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik.

I. Allgemeines.

Differenzenverfahren sind zur näherungsweisen Berechnung von zeitveränderlichen Temperaturfeldern, vor allem auch bei geschichteten Stoffen geeignet. Sie ermöglichen ferner ihre Berechnung bei zeitlich veränderlichen Wärmeübergangsbedingungen an den freien Oberflächen der untersuchten Körper. Nach dem eleganten, von E. Schmidt[1]) zunächst für ebene bzw. räumliche Felder in rechtwinkligen Koordinaten angegebenen Zeichnungs- bzw. Rechnungsverfahren können derartige Temperaturfelder sogar von mathematisch ungeschulten Hilfskräften bestimmt werden. Einige Verbesserungen und Verallgemeinerungen dieses Schmidtschen Verfahrens wurden von Nessi und Nisolle[2]) angegeben; sie beziehen sich vor allem auf die Behandlung von geschichteten Stoffen sowie auf die Bestimmung von zylinder- und kugelsymmetrischen Temperaturfeldern. Im deutschen Schrifttum wurden diese Erweiterungen von M. Jakob[3]) übernommen.

Die Übertragung des Schmidtschen Differenzenverfahrens auf zylinder- und kugelsymmetrische Temperaturfelder beruht auf der Umformung des Längenmaßstabes in einen logarithmischen bzw. reziproken Maßstab. Dadurch werden die konzentrischen Schichten eines Zylinders bzw. einer Kugel auf die entsprechenden, thermisch gleichwertigen Schichten einer gedachten Platte abgebildet, so daß auf diese Weise das Schmidtsche Differenzverfahren wieder angewendet werden kann. Damit sind alle Möglichkeiten dieses Verfahrens auch zur Bestimmung von Zylinder- und Kugelfeldern gegeben, also beispielsweise die Berücksichtigung zeitveränderlicher Wärmeübergangsbedingungen an den Oberflächen usw. Nachstehend soll nun ein weiteres Differenzenverfahren zur näherungsweisen Berechnung von kugelsymmetrischen Temperaturfeldern kurz dargelegt werden, das trotz seiner naheliegenden Grundlagen bisher anscheinend noch nicht bekannt wurde.

II. Grundlagen des Verfahrens.

Die Differentialgleichung der quellfreien Wärmeleitung für kugelsymmetrische Temperaturfelder lautet bei unveränderlicher Wärmeleitfähigkeit des Stoffes[3]):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

wenn bedeuten:

t (°C) die zeitlich und örtlich veränderliche Temperatur,
r (m) der Halbmesser einer Kugelschale als Ortskoordinate,
τ (sec) die Zeit,
$a = \lambda / c\gamma$ (m²/h) die Temperaturleitfähigkeit, wobei λ (kcal/mh °C) die Wärmeleitfähigkeit, c (kcal/kg °C) die spez. Wärme und γ (kg/m³) das spezifische Gewicht des Stoffes sind.

Diese Differentialgleichung (1) kann bekanntlich auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial (r\,t)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 (r\,t)}{\partial r^2} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Wie man sich leicht durch Ausführung der Differentiation überzeugt, geht dabei die Gl. (2) unmittelbar in Gl. (1) über.

Nach Gl. (2) lassen sich grundsätzlich alle kugelsymmetrischen Temperaturfelder in gleicher Weise wie ebene Felder behandeln, wenn man an Stelle der Temperatur beim ebenen Feld jeweils das Produkt aus Ortskoordinate und zugehöriger Temperatur beim Kugelfeld setzt. Dies bedeutet aber, daß auch das Schmidtsche Differenzenverfahren in allen seinen Einzelheiten unmittelbar für die Berechnung kugelsymmetrischer Temperaturfelder anwendbar ist, wenn man als Ortskoordinate den jeweiligen Halbmesser einer Kugelschale beibehält und an Stelle der Temperatur beim ebenen Feld hier das Produkt rt aufträgt. In einem über dem Halbmesser r anfänglich vorgegebenen Feld (Anfangszustand) wird daher zunächst die Temperatur in jedem Punkt mit dem zugehörigen Halbmesser r multipliziert und die so erhaltene Kurve dann wie das Temperaturfeld in einem ebenen Körper behandelt. Man erhält auf diese Weise für beliebige spätere Zeitpunkte zunächst den Verlauf des Produktes rt und damit durch Division mit dem jeweils einem bestimmten Punkt zugehörigen Halbmesser r auch das gesamte zeitlich und örtlich veränderliche, kugelsymmetrische Temperaturfeld.

Zur Erfüllung von Wärmeübergangsbedingungen ist zu beachten, daß das Produkt rt und nicht die Temperatur t allein aufgetragen wird. Der Wärmestrom in irgendeinem Punkt im Innern der Kugel ist bekanntlich:

$$q = -\lambda\frac{\partial t}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r} + t\right) + \frac{\lambda}{r}t = \frac{\lambda}{r}\left[t - \frac{\partial (r\,t)}{\partial r}\right] \quad (3)$$

Soll nun beispielsweise der Wärmestrom an der Kugeloberfläche zum Unterschied der Temperaturen an ihr und der Umgebung verhältnisgleich sein, so wird also:

$$q_0 = \alpha\,(t_0 - \vartheta), \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

wenn bedeuten:

α (kcal/m² h °C) die zeitveränderliche Wärmeübergangszahl und
ϑ (°C) die zeitveränderliche Temperatur der Umgebung.

---

*) A 63.

[1]) Ernst Schmidt, Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme, Beiträge zur techn. Mechanik und techn. Physik (Föppl-Festschrift), Berlin, Springer 1924, S. 179/89; s. a. Einführung in die technische Thermodynamik, Berlin, Springer 1936, S. 262/68. Das Verfahren ist ferner dargestellt in: H. Gröber und S. Erck, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Berlin, Springer 1933, S. 92/96, sowie A. Eucken und M. Jakob, Der Chemie-Ingenieur Bd. I, Teil 1, S. 216/222.

[2]) A. Nessi und L. Nisolle, Méthodes graphiques pour l'étude des installations de chauffage et de réfrigération en régime discontinu. Dunod, Paris 1929, S. 58ff. Unabhängig davon hat später auch Ernst Schmidt sein Verfahren in gleicher Weise auf Zylinder und Kugelfelder erweitert, vgl. M. Jakob, Z. VDI Bd. 75 (1931), S. 969.

[3]) A. Eucken und M. Jakob, Der Chemie-Ingenieur Bd. I, Teil 1, S. 219/20 und S. 222/25.

Der Zeiger »0« soll dabei auf die Oberfläche der Kugel hinweisen.

Da der zur Kugeloberfläche fließende Wärmestrom nach Gl. (3) stets gleich dem abgeleiteten Wärmestrom nach Gl. (4) sein muß, gilt hier für die Tangenten der rt-Kurven die Bedingung:

$$\left[\frac{\partial (r t)}{\partial r}\right]_0 = \frac{\alpha r_0}{\lambda} (\vartheta - t_0) + t_0 = \left(\frac{\alpha r_0}{\lambda} - 1\right) (\vartheta - t_0) + \vartheta \quad (5)$$

Der Richtpunkt, durch den die jeweiligen Tangenten der Temperaturkurven an der Kugeloberfläche gehen müssen, liegt also bei gleicher Umgebungstemperatur auch hier wieder auf einer Geraden, die aber im Gegensatz zum ebenen Problem im allgemeinen geneigt ist; der Abstand von der Kugeloberfläche ist reziprok zu dem Faktor $(\alpha r_0/\lambda - 1)$, kann also (je nachdem $\alpha r_0 \gtreqless \lambda$ ist) vor oder hinter ihr liegen. Für $\alpha r_0 = \lambda$ wird die Neigung der rt-Kurven an der Kugeloberfläche unveränderlich, d. h. der Richtpunkt liegt dann im Unendlichen. Andere Wärmeübergangsbedingungen können ganz entsprechend berücksichtigt werden.

Das hier vorgeschlagene Berechnungsverfahren für Kugelfelder liefert bei zeichnerischer Auswertung das Temperaturfeld an der Kugeloberfläche mit wesentlich größerer Genauigkeit als in der Nähe des Kugelmittelpunktes, da hier die jeweiligen Produkte rt sehr klein werden. Bei rechnerischer Auswertung ist dies bedeutungslos. Das von Nessi und Nisolle bzw. E. Schmidt[2]) angegebene Kugelverfahren ergibt umgekehrt an der Oberfläche eine geringere Zeichengenauigkeit als im Kugelmittelpunkt. Beide Verfahren ergänzen sich daher.

Das Schmidtsche Differenzenverfahren ist natürlich nicht nur auf Temperaturfelder beschränkt, sondern in gleicher Weise auch für alle physikalischen Vorgänge geeignet, die einer Differentialgleichung von der Form der Gl. (2) genügen; beispielsweise gilt dies auch für nichtstationäre Diffusionsvorgänge, zeitveränderliche elektrische Wirbelfelder, Turbulenzaustauschprobleme usw.

Zur Berechnung von Drehschwingungssystemen mit federndem Umlaufgetriebe*).

Von J. Meyer.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Triebwerk-Mechanik.

Die im Gegensatz zum Reihenmotor einfacheren Drehschwingungsverhältnisse beim Sternmotor mit federndem Umlaufgetriebe werden behandelt und durch die Wahl günstiger Ausgangsgleichungen in übersichtlicher Form eine Bestimmungsgleichung für die Grund- und Oberschwingungszahl abgeleitet. Hieraus lassen sich Schlüsse auf die Verhältnisse beim Reihenmotor ziehen.

I. Einleitung.

Eine rechnerische Untersuchung eines Reihenmotors mit federndem Umlaufgetriebe wurde 1937 in der DVL[1]) durchgeführt. Die zusätzliche Federung besteht darin, daß das Stützrad, an dem die Planetenräder abrollen, gegen das Gehäuse drehnachgiebig gefedert ist. Die Drehschwingungsrechnung wird hierdurch sehr verwickelt. Für den einfacheren Sternmotor empfiehlt sich daher die Aufstellung einer geschlossenen Frequenzgleichung für seine Grund- und Oberschwingung, die die hauptsächlichsten Besonderheiten einer solchen Anordnung miteinbezieht.

II. Aufstellung der Frequenzgleichung.

In Bild 1 ist das zu betrachtende System schematisch dargestellt. Um die Rechnung übersichtlich zu gestalten, werden die Drehfederung der Luftschraubenwelle und die Massenträgheitsmomente der Planetenräder, bezogen auf ihre Drehachse, vernachlässigt, beides Vereinfachungen, die in vielen Fällen zulässig sind. Im folgenden Rechnungsgang bedeuten:

- Θ_G Massenträgheitsmoment von Luftschraube und Getriebestern samt seinen Planetenrädern (Luftschraubenwelle unendlich drehsteif),
- Θ_i Massenträgheitsmoment des gefederten Innenrings,
- c_i dessen Federung,
- Θ_a Massenträgheitsmoment des Außenrades,
- c_k Drehfederung der Kurbelwelle,
- Θ_k Massenträgheitsmoment der Kurbelkröpfung mit Kolben und Pleuel,
- φ Drehschwingungsausschläge.

Das Gleichgewicht um die erste Momentenachse in Bild 1 erfordert

$$\{\Theta_k \varphi_k + \Theta_a \varphi_a + \Theta_G \varphi_G\}\,\omega^2 + (\Theta_i \omega^2 - c_i)\,\varphi_i = 0 \quad (1)$$

Das Gleichgewicht um die zweite Momentenachse in Bild 1 erfordert

$$\{\Theta_k \varphi_k + \Theta_a \varphi_a\}\,\omega^2 \frac{\varrho}{R_a} = (\Theta_i \omega^2 - c_i)\,\varphi_i \frac{\varrho}{R_i} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Durch Einsetzen von (2) in (1) erzielt man zweckmäßig

$$\Theta_G \varphi_G \omega^2 + (\Theta_i \omega^2 - c_i)\,\varphi_i \frac{R_a + R_i}{R_i} = 0.$$

Hieraus erhält man den Ausschlag φ_G

$$\varphi_G = \varphi_i \frac{c_i - \Theta_i \omega^2}{\Theta_G \omega^2} \cdot \frac{R_a + R_i}{R_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Den Ausschlag des Außenrades φ_a kann man darstellen als Überlagerung einer Funktion von φ_G mit einer solchen von φ_i, da er gleichzeitig von dem des Getriebesterns bzw. der Luftschraube und dem des Innenringes abhängt:

$$\varphi_a = F_1(\varphi_G) + F_2(\varphi_i).$$

Nach Bild 2 ist

$$F_1(\varphi_G) = \varphi_a(\varphi_i = 0) = \varphi_G\left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)$$

$$F_2(\varphi_i) = \varphi_a(\varphi_G = 0) = -\varphi_i \frac{R_i}{R_a}.$$

Somit folgt für den Ausschlag des Außenrades φ_a

$$\varphi_a = \varphi_G \frac{R_a + R_i}{R_a} - \varphi_i \frac{R_i}{R_a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

und man erhält so für den Ausschlag φ_G eine zweite Gleichung

$$\varphi_G = \varphi_a \frac{R_a}{R_a + R_i} + \varphi_i \frac{R_i}{R_a + R_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Aus Gleichung (3) und (5) ergibt sich

$$\varphi_i \left\{\frac{c_i - \Theta_i \omega^2}{\Theta_G \omega^2} \frac{R_a + R_i}{R_i} - \frac{R_i}{R_a + R_i}\right\} = \varphi_a \frac{R_a}{R_a + R_i} \quad (6)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Kurbelwelle folgt andererseits wegen

$$\Theta_k \ddot{\varphi}_k + c_k (\varphi_k - \varphi_a) = 0$$

$$\varphi_k = \varphi_a \frac{c_k}{c_k - \Theta_k \omega^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

*) A 25 42.

[1]) W. Behrmann, Drehschwingungssysteme mit federndem Umlaufgetriebe, unveröffentlichter DVL-Bericht.

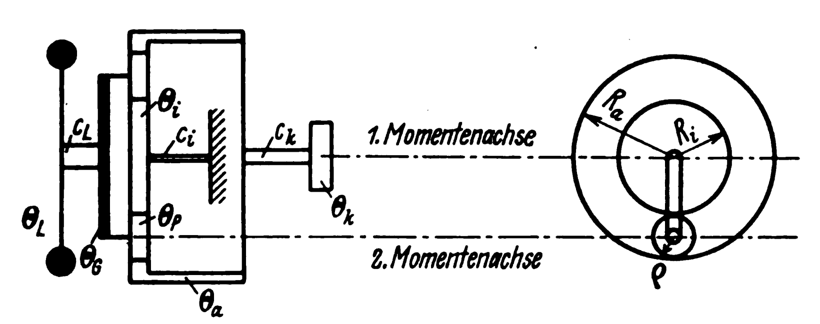


Bild 1. Schema eines Sternmotors mit federndem Umlaufgetriebe.

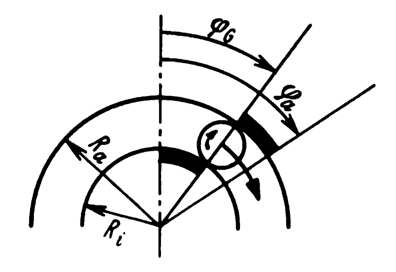


Bild 2. Zur Bestimmung der Abrollbögen der Planetenräder auf Außenrad und Innenring.

Alle Ausschläge sind nun in φ_a ausgedrückt und werden jetzt so in die einfache Gleichung (2) eingesetzt. Mit einigen Umformungen kommt

$$\omega^4 \left\{\Theta_k \left[\Theta_a + \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right] \Theta_G \left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2 + \Theta_k \Theta_a \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right\}$$
$$- \omega^2 \left\{c_k \left[\Theta_k + \Theta_a + \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right]\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right.$$
$$\left. + c_k[\Theta_k+\Theta_a]\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2 + c_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\left[\Theta_a+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right]\Theta_k\right\}$$
$$+ c_k c_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\left[\Theta_k+\Theta_a+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right] = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Die entsprechende Gleichung für einen Reihenmotor ist mit erträglichem Rechenaufwand noch durchführbar, wenn dessen Kröpfungsmassen in zwei zusammengefaßt werden. Die geschweiften Klammern der Gleichungen (1) und (2) enthalten dann ein Glied mehr und zur Gleichung (7) tritt noch eine weitere hinzu. Die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung ist dann vom dritten Grad in ω^2.

Wendet man beim Reihenmotor unter Berücksichtigung jeder einzelnen Kröpfung das Probierverfahren an, so lauten die Gleichungen (1) und (2)

$$\sum_{k=1}^{k=G \text{ bzw. } L} \Theta_k \varphi_k \omega^2 + (\Theta_i\omega^2 - c_i)\varphi_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (1a)$$

$$\sum_{k=1}^{k=a} \Theta_k\varphi_k\omega^2 \frac{\varrho}{R_a} = (\Theta_i\omega^2 - c_i)\varphi_i \frac{\varrho}{R_i} \quad . \; . \; . \quad (2a)$$

Durch Aufstellen einer dritten Gleichung, die das Gleichgewicht der am Planetenrad angreifenden Kräfte fordert[1]), kann man zwei weitere Gleichungspaare erhalten. Doch ist dieses Gleichungspaar für das Probierverfahren am geeignetsten.

Eine unmittelbare Einbeziehung der Drehfederung des Abstützringes in das System Kurbelwelle-Luftschraube ergibt auch für den Sternmotor unter den hier vorliegenden vereinfachten Verhältnissen nicht die genauere Gleichung (8). Bei dieser unmittelbaren Einbeziehung wird das Massenträgheitsmoment des Innenringes mit dem Quadrat seines Hebelverhältnisses vervielfacht und am Orte und mit dem Ausschlag des Außenrades eingefügt; die Drehfederung des Innenringes — ebenfalls entsprechend vervielfacht — zwischen Außenrad und Getriebestern eingesetzt, und dann das System unter Beachtung des Untersetzungsverhältnisses mit der Luftschraubenwelle fortgesetzt[1]). Dies liefert die Gleichung (9)

$$\omega^4 \left\{\Theta_k \left[\Theta_a + \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right] \Theta_G \left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right\}$$
$$- \omega^2 \left\{c_k \left[\Theta_k + \Theta_a + \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right]\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right.$$
$$\left. + c_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\left[\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right]\Theta_k\right\}$$
$$+ c_k c_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\left[\Theta_k+\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2+\Theta_k\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2\right] = 0 \quad (9)$$

Diese unterscheidet sich von Gleichung (8) dadurch, daß dann in der Klammer bei ω^4 das Glied

$$\Theta_k \Theta_a \Theta_i \left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2$$

und bei ω^2 das Glied fehlt

$$c_k[\Theta_k+\Theta_a]\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2$$

andererseits in der Klammer bei ω^2 ein Glied

$$c_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\Theta_k\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2$$

und bei dem Absolutglied ein Glied dazukommt

$$c_k c_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2.$$

Dies wirkt sich so aus, daß die für das durchgehende System erhaltene Grundschwingung zu hoch und die Oberschwingung zu niedrig herauskommt (vergl. (11) und (12)). Der Unterschied ist bei der Grundschwingung viel größer und beträgt etwa 6%. Es darf daher geschlossen werden, daß auch noch die erste Oberschwingung eines Reihenmotors mittels des einfacheren durchgehenden Systems errechnet werden darf, wenn die Luftschraubenwelle sehr drehsteif gegenüber der Kurbelwelle ist, bzw. wenn die Eigenschwingungszahl des Teilsystems Getriebestern-Luftschraubenwelle-Luftschraube viel höher liegt als die betreffende Oberschwingungszahl. Für den Fall unendlich großer Getriebesternmasse, d. h. immer wenn ein Knoten in den Getriebestern fällt, werden die Gleichungen (8) und (9) identisch.

Physikalisch gesehen besteht die grundsätzliche Ungenauigkeit der Vereinfachung mittels des durchgehenden Systems darin, daß dann in dem sich für unendlich harte Abfederung des Innenrings ergebenden Frequenzausdruck[2])

$$\omega^2_{(c_i=\infty)} = \frac{c_k}{\Theta_k}\cdot\frac{\Theta_k+\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2}{\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2} \quad (10)$$

noch das Massenträgheitsmoment des Innenrings auftritt, was jedoch nicht sein kann.

Für die Grund- und Oberschwingung erhält man im Falle sehr weicher Abfederung des Innenrings sehr gute Näherungen, wenn man in Gleichung (8) einmal die Kurbelwellendrehfederung c_k gleich unendlich, das andere Mal die Federung des Innenrings c_i gleich Null setzt. Es ergibt sich so

$$\omega_1^2 = c_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\frac{\Theta_k+\Theta_a+\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2}{\left[\Theta_k+\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right]\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2+(\Theta_k+\Theta_a)\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

$$\omega_2^2 = \frac{c_k}{\Theta_k}\frac{\left[\Theta_k+\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right]\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2+(\Theta_k+\Theta_a)\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2}{\left[\Theta_a+\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2\right]\Theta_G\left(\frac{R_a}{R_a+R_i}\right)^2+\Theta_a\Theta_i\left(\frac{R_a}{R_i}\right)^2} \quad . \; . \; . \quad (12)$$

Von diesen beiden Eigenschwingungszahlen wird nur die letzte von der in Wirklichkeit vorhandenen Drehfederung der Luftschraubenwelle merklich beeinflußt. Der dadurch bedingte weitere Freiheitsgrad bewirkt eine Aufspaltung dieser Eigenschwingungszahl in eine niedrigere und eine höhere.

III. Zusammenfassung.

Die Berechnung von Drehschwingungssystemen mit federndem Umlaufgetriebe ist im allgemeinen sehr verwickelt. In dieser Arbeit wird daher für den einfacheren Fall des Sternmotors eine einfache quadratische Bestimmungsgleichung für die beiden Dreheigenschwingungszahlen abgeleitet, die alle Besonderheiten dieser Anordnung berücksichtigt. Ein Vergleich mit der entsprechenden Gleichung des durchgehenden Systems läßt auch für den Reihenmotor den Schluß zu, daß sich mit dieser Vereinfachung auch noch die erste Oberschwingung richtig errechnen läßt, wenn die Luftschraubenwelle gegenüber der Kurbelwelle sehr drehsteif ist.

[2]) S. a. Neumann, Dynamik der Flugmotoren (Russisch), Moskau und Leningrad 1940.

Der Kondensationsstoß in Überschall-Windkanaldüsen*).

Von R. Hermann, Berlin.

(Nach Versuchen aus dem Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen aus den Jahren 1934 bis 1936.)

Der Aufsatz bringt eine Zusammenstellung von Versuchsergebnissen über den Einfluß des Kondensationsstoßes auf die Strömung in Lavaldüsen, wie sie in Überschall-Windkanälen verwandt werden. Zweck der Untersuchung war, zunächst nachzuweisen, daß der dicht hinter dem engsten Querschnitt zu beobachtende Verdichtungsstoß durch Kondensation der Luftfeuchtigkeit hervorgerufen wird, seine Wirkung auf die Geschwindigkeitsverteilung in der Düse festzustellen sowie die auftretenden Änderungen des statischen Druckes an der Düsenwand zu klären. Die schnelle Errichtung eines arbeitsfähigen Überschall-Windkanals und nicht die Durchführung grundsätzlicher Untersuchungen stand hierbei im Vordergrund.

Gliederung.

I. Einleitung.

Der folgende Aufsatz bringt Ergebnisse von Versuchen, die vom Verfasser in den Jahren 1934 bis 1936 im Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen als Mitarbeiter von Professor Wieselsberger durchgeführt wurden. Es war die Aufgabe gestellt, einen Überschall-Windkanal von 10 cm × 10 cm Strahlquerschnitt und unterbrochenem Betrieb zu bauen [1]. Bei der Herstellung von Windkanaldüsen mit möglichst guter Parallelströmung machte sich der Kondensationsstoß — von uns damals X-Stoß genannt — in starker und oft störender Weise bemerkbar und führte zu den im folgenden dargelegten Untersuchungen. Da die schnelle Errichtung eines arbeitsfähigen Überschallwindkanals und die Durchführung von Messungen für verschiedene Entwicklungsstellen im Vordergrund standen, konnte den Vorgängen des Kondensationsstoßes nicht näher nachgegangen werden, als dies zur Lösung der genannten Aufgaben unbedingt erforderlich war. Aus diesem Grund unterblieb seinerzeit die Veröffentlichung der gewonnenen Ergebnisse.

Professor Wieselsberger hat lediglich zweimal kurz von den Aachener Ergebnissen berichtet. Auf dem Volta-Kongreß [2] nahm er Bezug auf eine Vortragsbemerkung Prandtls (S. 197), der von der noch unerklärten Erscheinung eines sich kreuzenden Systems von Verdichtungsstößen hinter dem engsten Querschnitt einer Lavaldüse berichtete. Wieselsberger teilte in der Diskussion (S. 558) mit, daß nach eingehenden Versuchen seines Institutes dieser Verdichtungsstoß sich nicht immer an gleicher Stelle befindet und seine Lage in eindeutiger Beziehung zur Feuchtigkeit der angesaugten Luft steht. Später zeigte er in der »Akademie der Luftfahrtforschung« Schlierenbilder, welche die verschiedene Form, Stärke und Lage des X-Stoßes in Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit veranschaulichen.

*) A 35 4. Die Arbeit war für das Wieselberger-Gedenkheft Bd. 19 (1942) Lfg. 4 vorgesehen.

Als später[1]) Oswatitsch [3] einen ausführlichen, im wesentlichen theoretischen Vortrag über das physikalische Zustandekommen des Kondensationsstoßes hielt, regte Professor Wieselsberger eine Veröffentlichung der früheren experimentellen Aachener Untersuchungen unter dem Namen des Verfassers an[2]). Wegen dringender Arbeiten konnte die Veröffentlichung damals nicht vorgenommen werden. Der vorliegende Bericht erhebt keinen Anspruch auf vollständige Klärung der Verhältnisse, sondern bringt im wesentlichen die Aachener experimentellen Ergebnisse, da während des jetzigen Zeitgeschehens keine Gelegenheit bestand, diese eingehend theoretisch durchzuarbeiten.

In dem vorliegenden, dem Gedenken Professor Wieselsbergers gewidmeten Heft, komme ich seinem früheren Wunsche besonders gern nach. Ich glaube, hiermit einen Teil meiner Dankesschuld an meinen verehrten, langjährigen Lehrer abstatten zu können, insbesondere da er den hier vorgelegten Untersuchungen jahrelang sein größtes Interesse entgegenbrachte.

II. Qualitative Beobachtungen über den X-Stoß.

1. Erste Beobachtung.

Sämtliche im Aachener Überschall-Windkanal verwendeten Düsen sind auf Grund einer Anregung von Busemann so gebaut, daß der engste Querschnitt durch Kreisbögen begrenzt wird, deren Radien r gleich der Höhe F^* des engsten Querschnittes sind. Je nach der Machschen Zahl, für welche die Düse entworfen ist, endigt der Kreisbogen früher oder später und die Düsenberandung geht mit einem Wendepunkt in konkave Krümmung über. Die Düsen sind somit in der Nähe des engsten Querschnittes einander ähnlich.

[1]) Auf der Tagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Braunschweig im Mai 1940.
[2]) Brief Wieselsbergers an den Verfasser vom 7. Juni 1940.

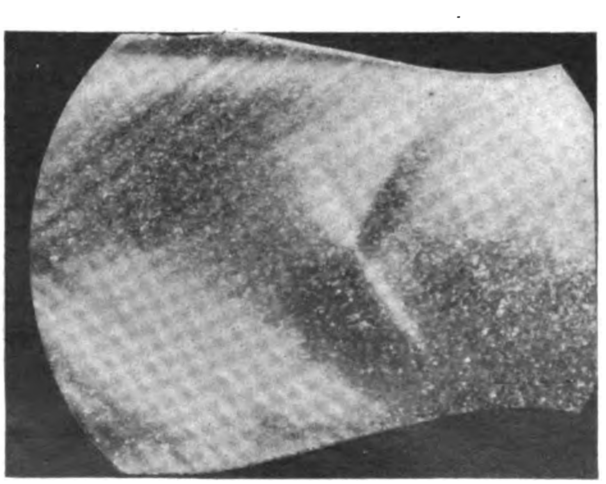


Bild 1. X-Stoß in einer Düse für $Ma = 1{,}70$ bei ungenügender Aufnahmetechnik (2. Aachener Aufnahme).

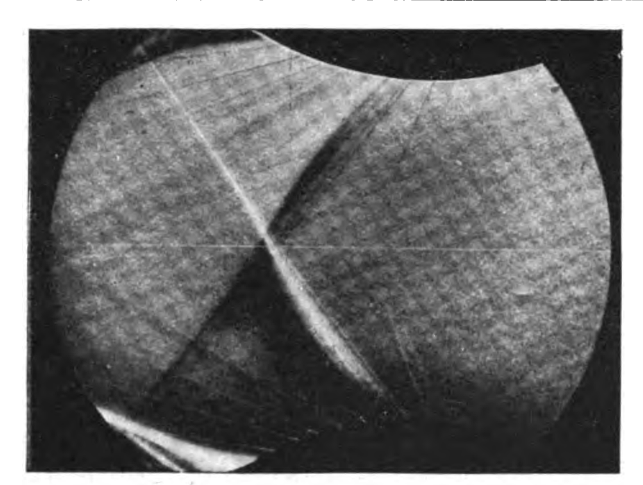


Bild 2. X-Stoß mittlerer Stärke in einer von Kreisbögen begrenzten Düse mit $F^* = 65$ mm; $\chi = 0,48$.

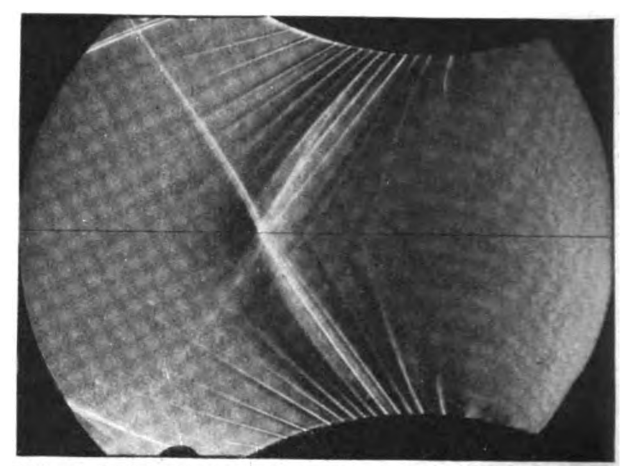


Bild 3. X-Stoß mittlerer Stärke in einer von Kreisbögen begrenzten Düse mit $F^* = 65$ mm; $\chi = 0,48$.

Bild 1 zeigt eine der ersten Aachener Schlierenaufnahmen (Okt. 1934) von einer Düse ($F^* = 60$ mm) für die Machsche Zahl 1,70. Dicht hinter dem engsten Querschnitt ist der X-förmige Kondensationsstoß zu erkennen. Vom Wendepunkt an stromabwärts sind die von den Rauhigkeiten der Düsenwände ausgehenden Machschen Wellen zu sehen, die nur einigermaßen parallel verlaufen und so auf einen mangelhaften Parallelstrahl hinweisen. Unsere Vermutung, daß es sich bei dem Verdichtungsstoß um eine Kondensationserscheinung handele, wurde zunächst durch eine persönliche Mitteilung Busemanns entkräftet. Danach waren auch im Göttinger Überschallwindkanal solche Stöße hinter dem engsten Querschnitt beobachtet worden. Wurde die Luft aus einem Gasometer eingesaugt, in dem Chlorkalzium zur Trocknung eingebracht war, so blieb die Erscheinung bestehen.

2. Die Veränderlichkeit des X-Stoßes.

Zahlreiche Schlierenaufnahmen von zwei Düsen $F^* = 65$ mm und $F^* = 89$ mm), die lediglich durch zwei Kreisbögen begrenzt waren und zur Untersuchung der Strömung in der Nähe des engsten Querschnittes dienten, zeigten sehr bald, daß es sich bei dem X-Stoß um eine veränderliche Erscheinung handelt. Bild 2, 3, 4 und 5 geben einige charakteristische Formen wieder. Die Düsenwände erhielten absichtlich Rillen, um die hiervon ausgehenden Störungslinien zur Auswertung des Geschwindigkeitsfeldes heranzuziehen. Die Ausbildung des X-Stoßes wird hierdurch nicht beeinflußt. Folgende qualitative Gesetzmäßigkeiten wurden erkannt:

1. Es gibt X-Stöße verschiedener Stärke, die als »weiche«, »mittlere« oder »harte« X-Stöße bezeichnet werden.
2. Die weichen Stöße haben die Form Machscher Wellen und sind nahezu geradlinig. Mit wachsender Härte zeigen die X-Stöße in ihrem Kreuzungspunkt wachsende Krümmung. Bei harten Stößen laufen die beiden Äste des Kreuzes ein Stück zusammen und bilden somit in der Nähe der Düsenachse einen geraden Verdichtungsstoß.
3. Mit wachsender Härte wandert der Kreuzungspunkt des X-Stoßes stromauf nach dem engsten Querschnitt zu. Zur Charakterisierung der Lage des X-Stoßes wurde der Abstand x des Kreuzungspunktes vom engsten Querschnitt eingeführt. Er wird durch die Höhe des engsten Querschnittes F^* dimensionslos gemacht und dann mit $\chi = \frac{x}{F^*}$ bezeichnet.

Bild 2 und 3 zeigen X-Stöße mittlerer Stärke bei verschiedener Einstellung der Schlierenoptik ($\chi = 0,48$). Bild 4 zeigt einen harten Stoß ($\chi = 0,36$), Bild 5 eine Aufnahme eines noch härteren Stoßes ($\chi = 0,33$).

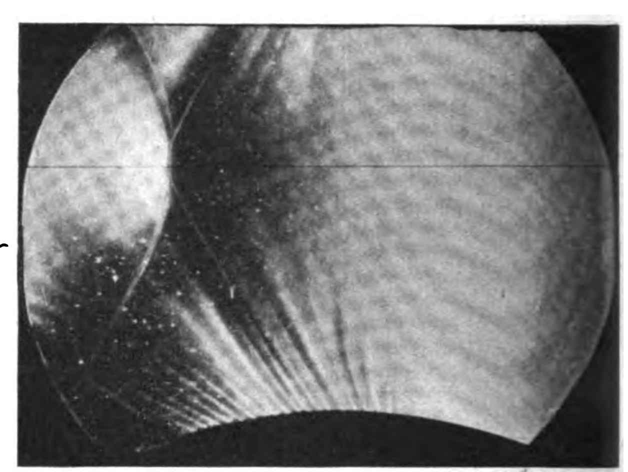


Bild 4. Harter X-Stoß in einer von Kreisbögen begrenzten Düse mit $F^* = 89$ mm; $\chi = 0,36$ (Ausschnitt, obere Düsenbegrenzung ist nicht zu sehen).

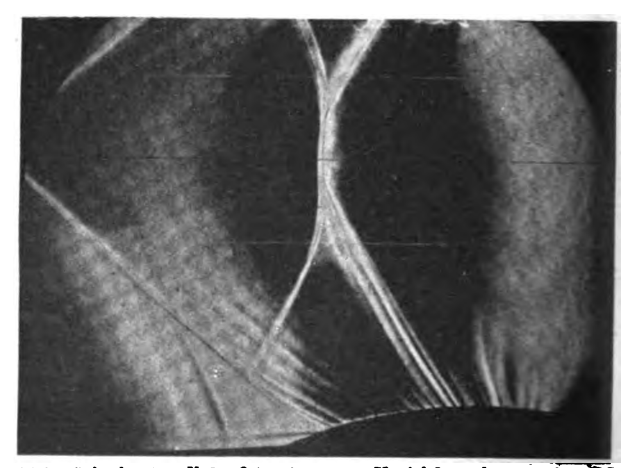


Bild 5. Sehr harter X-Stoß in einer von Kreisbögen begrenzten Düse (Ausschnitt, obere Düsenbegrenzung ist nicht zu sehen). $\chi = 0,33$. Bei Bild 2 bis 5: Düsenwand ist durch Rillen aufgerauht.

3. Qualitative Beziehungen des X-Stoßes zur Luftfeuchtigkeit.

Bei dem Entwurf und der Verbesserung von Düsen für die Machschen Zahlen 1,70 ($F^* = 65$ mm) und 2,29 ($F^* = 37,8$ mm) entstanden eine große Zahl von Schlierenbildern (Nr. 61 bis 126), die den X-Stoß in verschiedener Stärke zeigten. Hierzu wurden nachträglich aus den Angaben des Meteorologischen Instituts die Luftfeuchtigkeiten bestimmt. Der Vergleich lieferte die qualitative Beziehung, daß weiche X-Stöße an Tagen geringer Feuchtigkeit, harte X-Stöße an Tagen hoher Feuchtigkeit aufgetreten waren. Damit bestätigte sich unsere ursprüngliche Vermutung,

daß der X-Stoß eine Folge der Kondensation der Luftfeuchtigkeit ist. Eine quantitative Beziehung war noch nicht aufzustellen, da die meteorologischen Daten die atmosphärischen Verhältnisse betrafen, der Windkanal jedoch Laborluft ansaugte, die allerdings mit der Atmosphäre in Verbindung stand. Außerdem war die Uhrzeit der Schlierenbilder nicht vermerkt worden, so daß an Tagen mit stark wechselnder Feuchtigkeit eine Zuordnung nicht möglich war.

III. Lage des X-Stoßes in Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit.

1. Sammlung von Unterlagen bei verschiedenen Feuchtigkeiten.

Zur Ermittlung von quantitativen Beziehungen zwischen dem Verhalten des X-Stoßes und der Luftfeuchtigkeit wurden ab April 1935 systematische Untersuchungen in den bereits genannten Düsen sowie in einer weiteren für $Ma = 1{,}40$ ($F^* = 81{,}6$ mm) durchgeführt bei gleichzeitiger Bestimmung der absoluten und relativen Luftfeuchtigkeit. Als erste Untersuchungsreihe stehen die Schlierenbilder Nr. 127 bis 177 zur Verfügung (in Bild 15, 16, 17, 19 mit ausgefülltem Kreis bezeichnet). Außerdem wurden (Mai 1935) Messungen der Lage des X-Stoßes unmittelbar auf der Mattscheibe der Schlierenkamera vorgenommen, ohne daß photographische Aufnahmen gemacht wurden (in Bild 15, 16, 17, 19 mit Ring bezeichnet). Hierzu tritt eine spätere Versuchsreihe (September bis November 1936), die insbesondere zur Untersuchung des Einflusses des X-Stoßes auf den statischen Druck in der Meßkammer durchgeführt wurde (in Bild 15, 16, 17, 19 mit halb ausgefülltem Kreis bezeichnet).

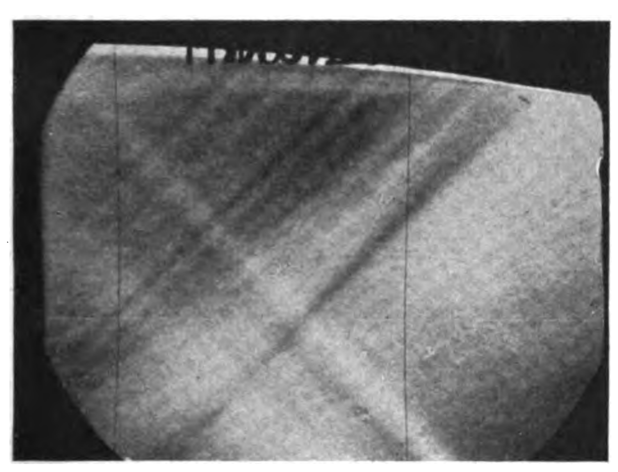


Bild 6.

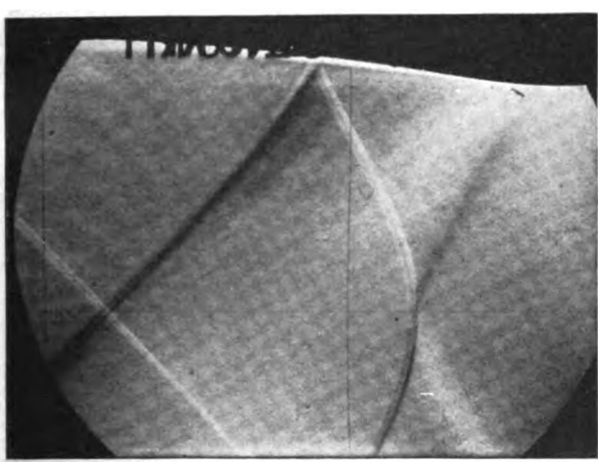


Bild 7.

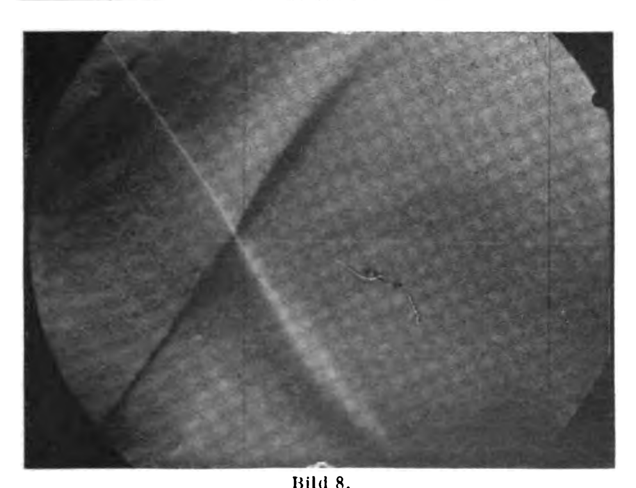


Bild 8.

Bild 6 bis 8. Weicher, mittlerer und harter X-Stoß in Düse für $Ma = 1{,}40$.

2. Ergebnisse.

a) Schlierenbilder. Die quantitativen Beziehungen zwischen der Lage des X-Stoßes und der Feuchtigkeit veranschaulichen Bild 6 bis 14. Je drei gehören zu einer Düse. Von jeder Düse wird ein weicher, ein mittlerer und ein harter X-Stoß gezeigt. Die folgende Zahlentafel zeigt die für die Schlierenbilder geltenden Werte im einzelnen:

Bild	Bild Nr.	Düse Ma	X-Stoß	φ (%)	f (g/m³)	χ
6	169	1,40	weich	27,5	3,96	0,698
7	139	1,40	mittel	42,5	5,48	0,447
8	154	1,40	hart	61,5	7,28	0,280
9	179	1,70	weich	25,2	3,46	0,835
10	138	1,70	mittel	41,0	5,41	0,479
11	149	1,70	hart	59,0	7,35	0,328
12	187	2,29	weich	30,0	3,98	0,701
13	147	2,29	mittel	40,0	6,85	0,537
14	151	2,29	hart	66,5	8,00	0,350

Aus den Bildern sind die oben angegebenen Eigenschaften des X-Stoßes hinsichtlich Härte, Form und Lage in ihrer Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit einwandfrei zu erkennen.

b) Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte. Bild 15, 16 und 17 zeigen den dimensionslosen Abstand χ des X-Stoßes vom engsten Querschnitt in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte φ. Die drei Signaturen bezeichnen die im Abschnitt III,1. genannten Untersuchungsreihen. In Anbetracht der Schwierigkeit der Bestimmung des genauen Kreuzungspunktes des X-Stoßes sowie der genauen Bestimmung der relativen Feuchte ordnen sich die Punkte gut in einen Kurvenzug. Hieraus folgt, daß die Lage des X-Stoßes im wesentlichen eine Funktion der relativen Luftfeuchte ist.

Bild 18 zeigt den Vergleich der dimensionalen Lage des X-Stoßes für die drei Düsen. Die Kurven verlaufen weitgehend gleich, eine gewisse Aufspaltung nach Düsen ist jedoch zu erkennen. Der Grund für die ungefähre Übereinstimmung ist der, daß die Berandungen der drei Düsen in der Nähe des engsten Querschnittes einander ähnlich sind und demnach auch weitgehend ähnliche Strömungen vorliegen. In der Aufspaltung der drei Kurven kann u. U. ein Einfluß der absoluten Größe der Düsen vorliegen, wie er nach den Betrachtungen von Oswatitsch [3] über die kondensationskernlose Kondensation bei starker Übersättigung vorhanden sein muß.

An dieser Stelle soll noch ein Versuch mit künstlicher Befeuchtung der Laborluft erwähnt werden, der später[3]) durchgeführt wurde. Bei der Düse $Ma = 1{,}70$ lag bei $\varphi = 66\%$ Feuchte der Laborluft der X-Stoß in einer Entfernung von $\chi = 0{,}27$ vom engsten Querschnitt. Durch

[3]) Auf Veranlassung von Prof. Wieselsberger von meinem früheren Mitarbeiter Friesing im Juli 1937.

Bild 9.

Bild 12.

Bild 10.

Bild 13.

Bild 11.

Bild 14.

Bild 9 bis 11. Weicher, mittlerer und harter X-Stoß in Düse für $Ma = 1{,}70$.

Bild 12 bis 14. Weicher, mittlerer und harter X-Stoß in Düse für $Ma = 2{,}29$.

Zerstäuben von Wasser stieg die relative Feuchte der Laborluft auf 77%, wodurch der X-Stoß auf $\chi = 0{,}18$ stromauf wanderte. Weiteres Zerstäuben führte zur Luftfeuchte von 84% und hatte weiteres Stromaufwandern des X-Stoßes auf $\chi = 0{,}15$ zur Folge. Auch diese Punkte mit künstlicher Befeuchtung liegen ungefähr auf der Kurve Bild 16 oder ihrer Verlängerung.

c) Abhängigkeit von der absoluten Luftfeuchte. Bei genauerer Betrachtung der abweichenden Punkte auf Bild 15 bis 17 zeigt sich, daß eine gewisse Aufspaltung derart vorliegt, daß die Punkte mit größerer absoluter Feuchte etwas tiefer, die Punkte mit kleiner absoluter Feuchte etwas höher liegen. Eine Auftragung der dimensionslosen Lage des X-Stoßes in Abhängigkeit von der absoluten Luftfeuchte f zeigt Bild 19 für die Düse der Machschen Zahl 1,70. Die Einordnung in einen Kurvenzug ist hier wesentlich schlechter, die Streubreite rund dreimal so groß als im Falle der Auftragung nach der relativen Feuchte, Bild 16. Falls man die einzelnen Punkte innerhalb der Streubreite besonders untersucht, ist eine deutliche Ordnung nach der relativen Feuchte festzustellen. Ein ähnliches Bild ergibt sich für die anderen Düsen. Ein endgültiger Entscheid über die Bedeutung der absoluten oder relativen Luftfeuchte ist aus dem vorliegenden Material nicht zu treffen, da hier beide nicht ganz voneinander unabhängig sind. Hohe absolute Feuchten sind meist auch mit hohen relativen Feuchten (hohe Außentemperaturen) und umgekehrt (geringe Außentemperaturen) gekoppelt.



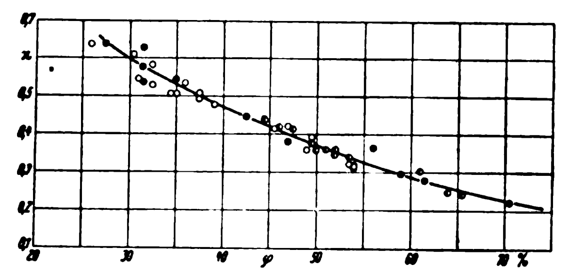


Bild 15. Dimensionsloser Abstand χ des X-Stoßes vom engsten Querschnitt in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte φ für die Düse $Ma = 1,40$.

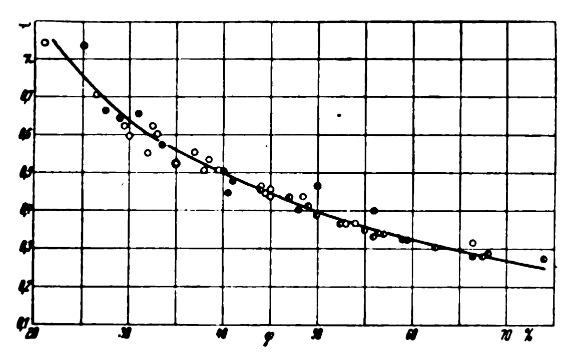


Bild 16. Dasselbe für $Ma = 1,70$.

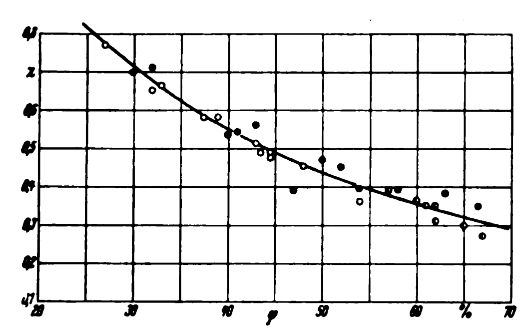


Bild 17. Dasselbe für $Ma = 2,29$.

IV. Drücke und Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit vom X-Stoß.

1. Die Abhängigkeit des Düsenwanddruckes von der Luftfeuchte.

Die Kenntnis des statischen Druckes an der Düsenwand p_D ist von Interesse einmal bei der Herstellung einwandfreier Parallelströmung, zum anderen bei der Berechnung des Staudruckes und damit der Auswertung der Windkanalergebnisse überhaupt. Denn sobald isentropische Strömung nicht vorausgesetzt werden kann, muß der Staudruck q aus dem statischen Druck p_D an der Düsenwand nach der Formel

$$\frac{q}{p_D} = \frac{\varkappa}{2} \cdot Ma^2$$

bestimmt werden. Feuchtigkeitsabhängige Schwankungen in p_D äußern sich also in Schwankungen des Staudruckes q.

Der Düsenwanddruck p_D wurde durch Druckanbohrungen bestimmt, die an den inneren Düsenwänden in Höhe der Düsenachse kurz vor dem Düsenaustrittsquerschnitt angebracht waren. Es wurden die Drücke sowohl auf der rechten wie auf der linken Düsenwand ermittelt. Sie sind in Bild 20, 21 und 22 verschieden bezeichnet (rechte Seite Vollkreise, linke Seite Ringe). Zur Auswertung lagen Messungen vom Oktober bis November 1935 vor. Da die Zahl der Meßpunkte (12 bis 17 Meßpunkte je Düse) und der überdeckte Bereich der Luftfeuchtigkeiten nur mäßig sind, erheben die folgenden Ergebnisse keinen Anspruch auf besondere quantitative Genauigkeit. Doch vermitteln sie einen guten qualitativen Einblick. Eine Darstellung in Abhängigkeit von der relativen oder absoluten Feuchte zeigt

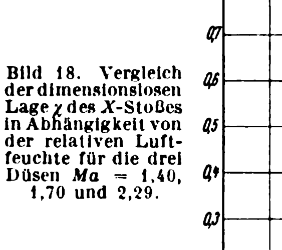
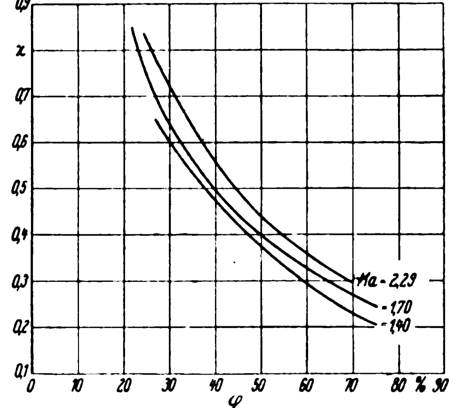


Bild 18. Vergleich der dimensionslosen Lage χ des X-Stoßes in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte für die drei Düsen $Ma = 1,40$, $1,70$ und $2,29$.



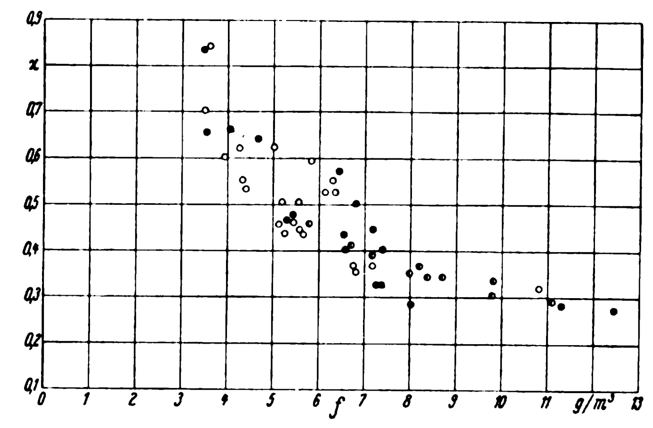


Bild 19. Dimensionsloser Abstand χ des X-Stoßes vom engsten Querschnitt in Abhängigkeit von der absoluten Luftfeuchte f für die Düse $Ma = 1,70$.

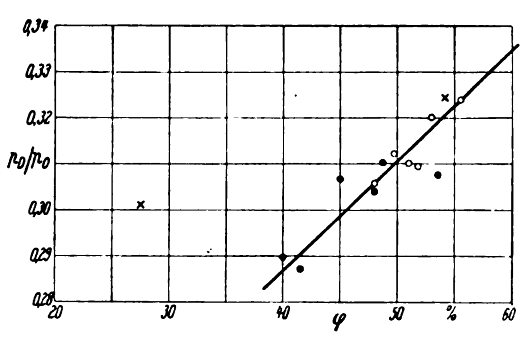


Bild 20. Dimensionsloser Druck an der Düsenwand in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte bei $Ma = 1,40$ (rechte Düsenwand Vollkreise, linke Düsenwand Ringe).

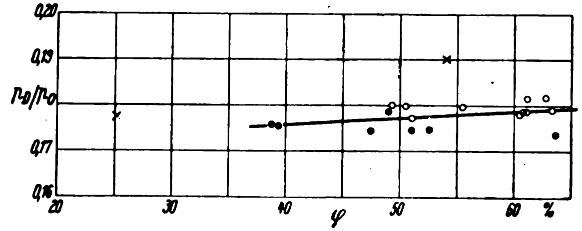


Bild 21. Dasselbe bei $Ma = 1,70$.

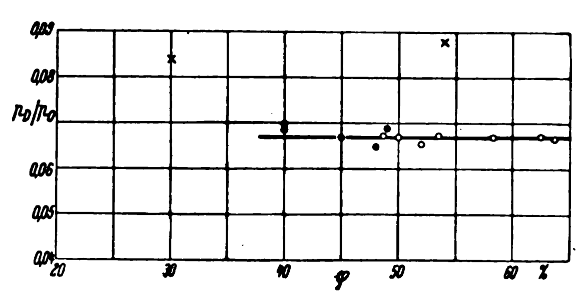


Bild 22. Dasselbe bei $Ma = 2,29$.

hier wenig Unterschied. Der Einheitlichkeit halber wird der ersteren der Vorzug gegeben.

Bild 20, 21 und 22 zeigen die Düsenwanddrücke p_D durch den jeweiligen Ruhedruck p_0 dimensionslos gemacht, in Abhängigkeit von der relativen Feuchte φ für die drei Düsen $Ma = 1{,}40$; $1{,}70$ und $2{,}29$. Mit zunehmender Feuchte steigen die Düsenwanddrücke an, und zwar bei $Ma = 1{,}40$ sehr stark (um 15% zwischen $\varphi = 40\%$ und $\varphi = 60\%$), bei $Ma = 1{,}70$ schwächer (um 2%). Bei $Ma = 2{,}29$ sind die Drücke innerhalb der Meßgenauigkeit unabhängig von der Luftfeuchte. Das Anwachsen der Düsenwanddrücke zeigt, daß bei wechselnder Feuchtigkeit starke Änderungen in Geschwindigkeits- und Druckverteilung der Lavaldüse vor sich gehen.

2. Die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von der Härte des X-Stoßes.

Um Windkanaldüsen mit einwandfreier Parallelströmung zu erhalten, wurde die Güte der Strömung durch Schlierenaufnahmen geprüft. In dem Teil vor und hinter der Düsenaustrittskante, in dem theoretisch Parallelströmung herrscht, muß die Schlierenaufnahme also konstanten Machschen Winkel, z. B. längs der Strömungsachse, zeigen. Bei mehrfach versuchter Korrektur der Düsen zeigt sich bald, daß der Verbesserung der Düsen eine Grenze dadurch gezogen war, daß bereits bei ein- und derselben Düse durch die Schwankungen der X-Stöße an verschiedenen Tagen auch verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen erzeugt wurden.

Bild 23, 24 und 25 zeigen die Verteilung des Machschen Winkels μ längs der Düsenachse im Gebiete theoretischer Parallelströmung, jeweils für weiche und harte X-Stöße. Die zugehörigen relativen Feuchtigkeiten sind diejenigen, die durch die Kreuze in Bild 20, 21 und 22 gekennzeichnet sind. Man erkennt, daß allgemein mit zunehmender Härte des X-Stoßes die Machschen Winkel zunehmen, d. h. die Machschen Zahlen abnehmen. Der Einfluß des X-Stoßes ist bei $Ma = 1{,}40$ besonders stark und nimmt mit steigender Machscher Zahl ab. Eine ähnliche Abhängigkeit von der Luftfeuchte zeigte der Düsenwanddruck.

3. Vergleich zwischen statischem Druck und Geschwindigkeitsverteilung.

Es lag nahe, die an der Düsenwand gemessenen statischen Drücke zu vergleichen mit denjenigen Drücken, die sich aus dem photographierten Machschen Winkel unter Annahme isentropischer Strömung berechnen lassen. Hierzu wurde aus der μ-Verteilung Bild 23, 24 und 25 jeweils der μ-Wert kurz vor der Düsenaustrittskante benutzt. Die berechneten Drücke in Bild 20, 21 und 22 als Kreuze eingetragen) steigen mit der Luftfeuchtigkeit, d. h. mit der Härte des X-Stoßes an und liegen stets über den gemessenen Drücken. Es ist zu verlangen, daß die Verbindungslinie der berechneten Kreuze und die Kurve der gemessenen Drücke bei $\varphi = 0\%$ zusammenlaufen. Dies ist bei Bild 21 und 22 ungefähr der Fall, in Bild 20 überwiegt die Streuung.

Wegen des zum Teil erheblichen Unterschiedes zwischen den gemessenen und berechneten Drücken bestand in Aachen lange Zeit die Vermutung, daß durch die Druckanbohrung an der Düsenwand zu niedrige Drücke gemessen würden. Aus Untersuchungen im Überschallwindkanal des Heereswaffenamtes [4] ist heute bekannt, daß solche Bohrungen richtige Druckwerte liefern. Aus Bild 20, 21, 22 folgt also, daß durch den Kondensationsstoß ein Drosselverlust (vgl. Abschn. V) auftritt. Bei der geringen Zahl von Meßpunkten und der vorliegenden Streuung ist er nicht exakt anzugeben. Schätzungsweise wird bei 50% relativer Luftfeuchte der Drosselverlust 10 bis 20% betragen.

4. Die Meßkammerdrücke in Abhängigkeit vom X-Stoß und ihr Einfluß auf die Windkanalmessungen.

Der in Aachen verwandte Überschallwindkanal hatte hinter der Lavaldüse einen Freistrahl. Bei Modellmessungen ist die richtige Einstellung des Druckes in der Meßkammer

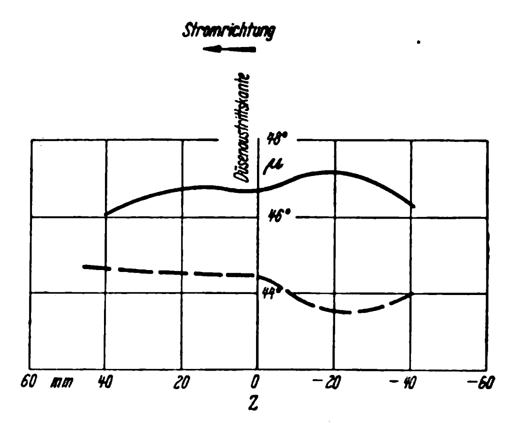


Bild 23. Verteilung des Machschen Winkels μ in der Düsenachse vor und hinter der Düsenaustrittskante bei $Ma = 1{,}40$ (gestrichelte Kurve: weicher X-Stoß, ausgezogene Kurve: harter X-Stoß).

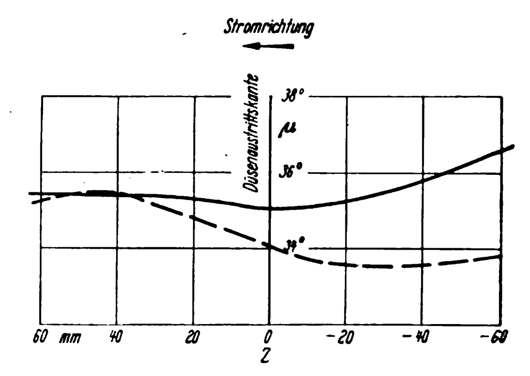


Bild 24. Dasselbe bei $Ma = 1{,}70$.

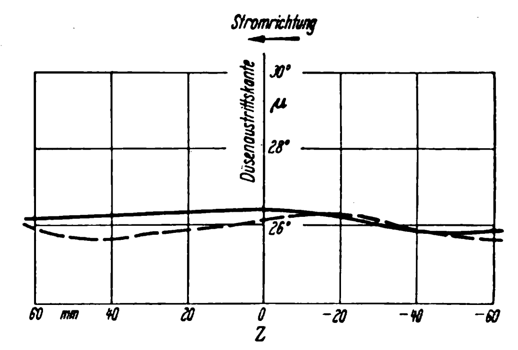


Bild 25. Dasselbe bei $Ma = 2{,}29$.

auf den gleichen Druck, der im sog. Meßrhombus herrscht, von großer Wichtigkeit. Dies geschieht in bekannter Weise durch Einstellung des hinter der Meßkammer befindlichen Verstelldiffusors unter Kontrolle durch Schlierenbildbeobachtung. Einmal werden durch den Druck hinter dem Meßrhombus die Kräfte auf den Modellhalter bestimmt. Außerdem tritt bei Überdruck oder Unterdruck in der Meßkammer eine fälschliche Belüftung oder Absaugung des Totwassergebietes hinter dem Modell ein, womit eine Fälschung des Anteils des Totwassers am Gesamtwiderstand verbunden ist.

Als Grundlage der Auswertung dient die in Abschnitt III, 1 genannte Versuchsreihe. Bild 26 und 27 zeigen ein kräftiges Anwachsen der Meßkammerdrücke mit steigender relativer Feuchte in den Düsen für $Ma = 1{,}40$ und $Ma = 1{,}70$. Da diese Änderungen des Meßkammerdruckes mit den Tagesschwankungen der Luftfeuchte auch während der Messung einer Polaren auftreten und die Kräfte auf den Modellhalter erst durch eine anschließende zweite Meßreihe bestimmt werden, ist ersichtlich, daß bei Anwesenheit des X-Stoßes einwandfreie Windkanalmessungen äußerst schwierig sind. Große Streuung der Meßwerte bei starken Feuchtigkeitsschwankungen sind unvermeidlich.



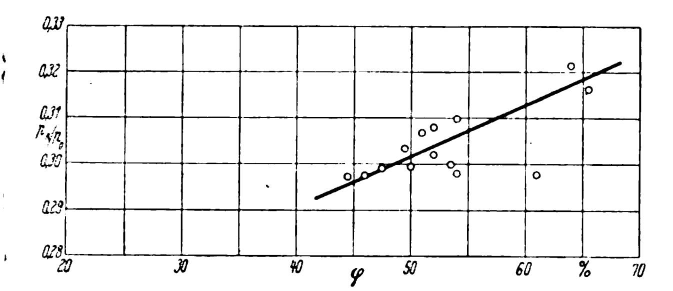


Bild 26. Dimensionsloser Druck in der Meßkammer p_K/p_0 in Abhängigkeit von der relativen Luftfeuchte bei der Düse für $Ma = 1,40$.

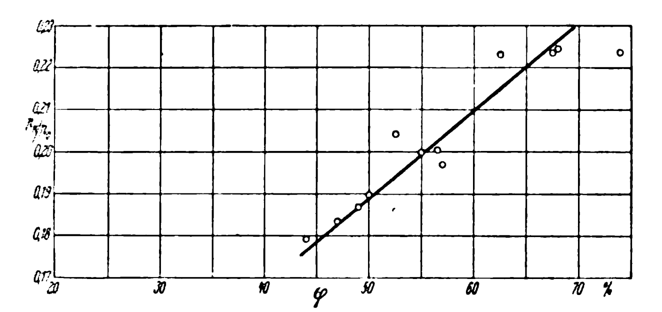


Bild 27. Dasselbe für $Ma = 1,70$.

V. Erklärung der experimentellen Ergebnisse mit Hilfe der Theorie des „geraden Kondensationsstoßes".

Bald nach Feststellung der gewonnenen qualitativen und quantitativen Beziehungen des X-Stoßes bestand der Wunsch, diese theoretisch zu verstehen. Ausgehend von den seinerzeit in Aachen gemachten Überlegungen seien diese hier näher ausgeführt, obwohl sie keinerlei Anspruch auf eine vollständige Klärung der Verhältnisse erheben.

Es soll zunächst versucht werden, folgende Frage zu beantworten: Was geschieht, wenn eine plötzliche Kondensation von Wasserdampf an einer Stelle der Lavaldüsen stattfindet? Es muß erwartet werden, daß diese Frage auf Grund der gasdynamischen Gesetze im Sinne des experimentellen Befundes beantwortet werden kann: An der Stelle der Kondensation tritt ein Verdichtungsstoß auf, der mit einem Drosselverlust verbunden ist und der eine Verringerung der Machschen Zahl und eine Druckerhöhung im Düsenaustrittsquerschnitt zur Folge hat. Die damaligen Überlegungen berühren in keiner Weise die inzwischen von Oswatitsch [3] gebrachten Zusammenhänge physikalischer Art. Die Fragen nach der auftretenden Übersättigung und der Zahl und Größe der notwendigen Kondensationskerne werden nicht erörtert. Auch kann die Frage nach der Lage des Kondensationsstoßes und der Menge des kondensierenden Wasserdampfes in Abhängigkeit von den Zustandsgrößen der angesaugten Luft nicht beantwortet werden.

Obwohl zur Beantwortung der von uns gestellten Frage die zweidimensionale Theorie der Düsenströmung herangezogen werden müßte, wird der Einfachheit halber zunächst die eindimensionale Stromfadentheorie benutzt. In entsprechender Weise wird die Theorie des geraden Verdichtungsstoßes angewandt. Wenn auch im allgemeinen der X-Stoß zwei sich kreuzende schräge Verdichtungsstöße darstellt, so bildet er bei härteren Stößen in der Nähe der Düsenachse auch ein Stück geraden Verdichtungsstoß (vgl. Bild 4, 5, 8, 11, 14), so daß die Anwendung der Theorie des geraden Verdichtungsstoßes wenigstens für diese Fälle gerechtfertigt ist.

Um mit einem Minimum an Rechnung[4]) auszukommen, bedienen wir uns mit Vorteil der von Busemann [5] angegebenen geometrischen Deutung der beim gewöhnlichen geraden Verdichtungsstoß auftretenden Verhältnisse im Druck-Geschwindigkeits-Diagramm. Grundlegend ist zu beachten, daß es sich bei dem hier behandelten »geraden Kondensationsstoß« um einen Vorgang mit Energiezufuhr handelt, also vor und hinter dem Stoß eine andere Konstante des Energiesatzes gilt, während die bisherige Theorie des geraden Verdichtungsstoßes auf der Energiekonstanz vor und hinter dem Stoß beruht.

Folgende Sätze gelten für den geraden Kondensationsstoß:

1. der Energiesatz:

$$\text{vor dem Stoß:}\quad \frac{w_1^2}{2} + i_1 = i_0,$$

$$\text{nach dem Stoß:}\quad \frac{w_2^2}{2} + i_2 = i_0'$$

wobei $i_0' = i_0 + \Delta i$ (w = Geschwindigkeit, i = Enthalpie).

Δi entspricht der durch Kondensation freigewordenen Wärmemenge.

Zur Veranschaulichung sei angegeben, daß bei Kondensation von $f = 1\,\mathrm{g/m^3}$ Wasserdampf eine Temperaturerhöhung der Luft von rd. $2{,}0^0$ auftritt. Demnach würde bei Kondensation von $14\,\mathrm{g/m^3}$ Wasserdampf unter Zugrundelegung normaler atmosphärischer Bedingungen $i_0' : i_0 \approx 1{,}1$ werden.

2. Der Kontinuitätssatz:

$$w_1\,\varrho_1 = w_2\,\varrho_2$$

sowie

3. der Impulssatz:

$$\varrho_1\,w_1^2 + p_1 = \varrho_2\,w_2^2 + p_2$$

gelten wie im Falle des gewöhnlichen geraden Verdichtungsstoßes, da die Massenverminderung an strömendem Gas durch Kondensation vernachlässigt werden soll. Hierzu treten

4. die Zustandsgleichung des Gases und
5. die Bedingung des 2. Wärme-Hauptsatzes, die später untersucht wird.

Busemann hat gezeigt, daß die Gültigkeit des Kontinuitätssatzes im p-w-Diagramm gleichbedeutend ist mit der Erhaltung der Tangentenrichtung an die jeweilige p-w-Isentrope vor und nach dem Stoß. Die Gültigkeit des Satzes von der Impulsstromdichte ist gleichbedeutend mit der Erhaltung des Tangentenabschnittes auf der Druckachse. Bei dem üblichen geraden Verdichtungsstoß springt die Strömung von der Ausgangsisentropen auf eine Isentrope der Schar, die durch affine Verzerrung in der Druckachse aus der ursprünglichen hervorgeht. Denn die Geschwindigkeitsachse bleibt wegen Erhaltung der Ruhe-Enthalpie i_0 vor und nach dem Stoß unverzerrt.

Die Verhältnisse im Falle des geraden Kondensationsstoßes zeigt Bild 28. Zur Ausgangsisentrope I gehört der Geschwindigkeitsmaßstab I, der proportional zu $a^* = \sqrt{\frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1} i_0}$ ist. Die möglichen Zustände nach dem geraden Kondensationsstoß müssen auf einer Schar II von Isentropen liegen, zu denen der Maßstab II gehört, der proportional zu $a^{*\prime} = \sqrt{\frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1} i_0'}$ ist. Die durch den gleichen Ruhedruck p_0 gehende Isentrope II_0 der Schar II ist aus der Isentropen I durch affine Verzerrung in der Geschwindigkeitsrichtung hervorgegangen. Die übrigen Isentropen der Schar II sind ihrerseits gegen II_0 in der Druckrichtung affin verzerrt. Die auf Bild 28 durchgeführte Tangentenkonstruktion führt vom Ausgangspunkt P_1 auf der Isentrope I vor dem Stoß zum Punkte P_2 nach dem Stoß, der auf einer Isentrope II' der Schar II liegt. Man überzeugt sich durch geometrische Anschauung, daß die Konstruktion dann und nur dann zum Erfolg führt, wenn der Punkt P_1 genügend im Überschall liegt und die frei-

[4]) Den analytischen Nachweis der im folgenden durch geometrische Anschauung gewonnenen Ergebnisse führte in dankenswerter Weise mein jetziger Mitarbeiter Dr. Heybey durch.

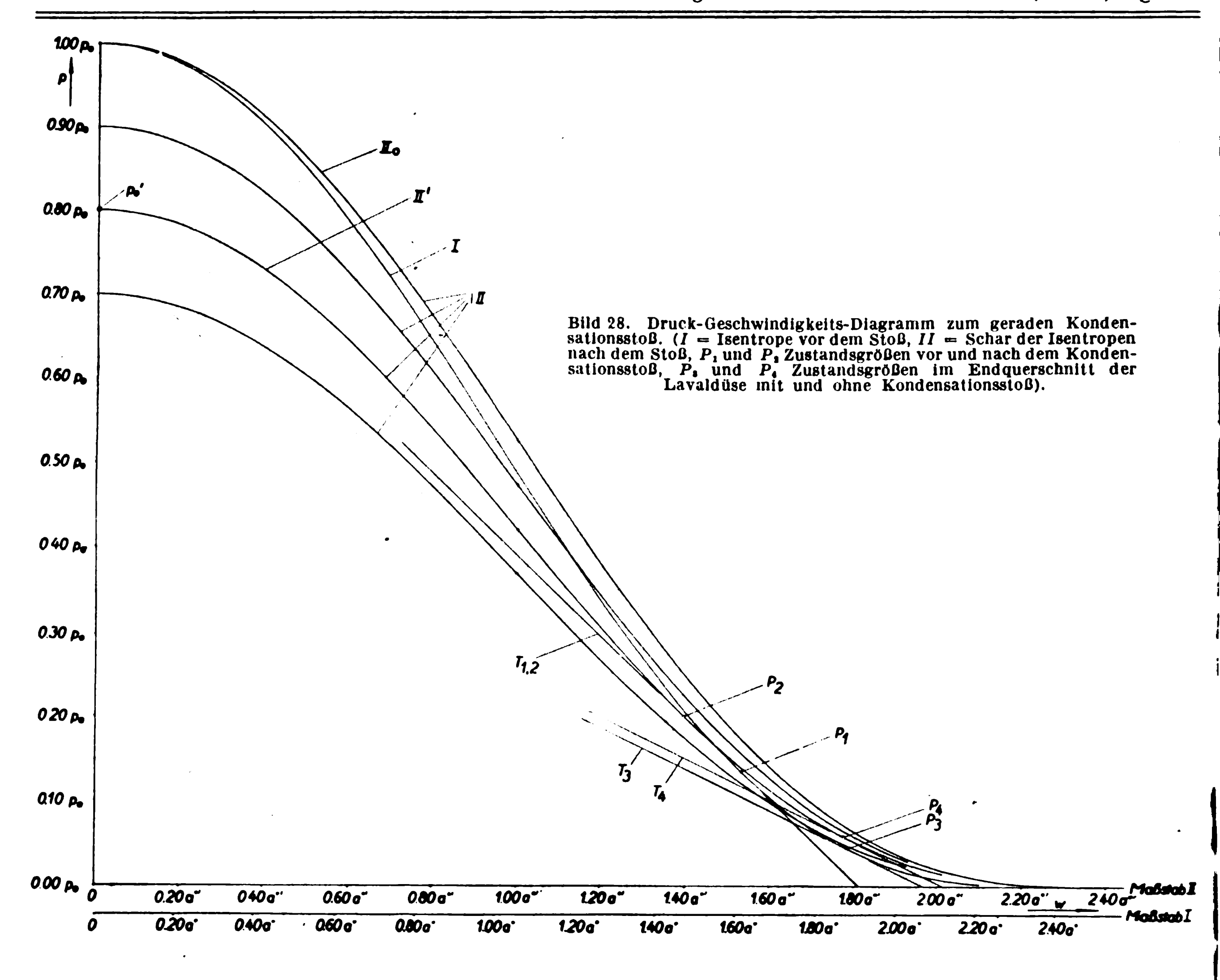


Bild 28. Druck-Geschwindigkeits-Diagramm zum geraden Kondensationsstoß. (I = Isentrope vor dem Stoß, II = Schar der Isentropen nach dem Stoß, P_1 und P_2 Zustandsgrößen vor und nach dem Kondensationsstoß, P_3 und P_4 Zustandsgrößen im Endquerschnitt der Lavaldüse mit und ohne Kondensationsstoß).

gewordene Wärmemenge Δi nicht zu groß ist. Offensichtlich gehört zu jeder Ausgangs-Machschen Zahl ein maximal möglicher Betrag Δi, der durch einen Stoß aufgenommen werden kann. Hierbei liegt der Punkt P_2 stets im Überschallgebiet und auf einer Isentropen durch einen Ruhedruck p_0', der kleiner ist als der ursprüngliche Ruhedruck p_0.

Wir erhalten das wichtige Ergebnis: der gerade Kondensationsstoß führt von Überschallgeschwindigkeit durch Druckerhöhung zu Überschallgeschwindigkeit, und es tritt dabei ein Drosselverlust ($p_0' < p_0$) auf. Der gewöhnliche gerade Verdichtungsstoß führt demgegenüber bekanntlich stets von Überschallgeschwindigkeit zu Unterschallgeschwindigkeit. Es ist selbstverständlich, daß sich vom Punkte P_2 noch ein weiterer Verdichtungsstoß anschließen läßt, der bei ungeänderter Energie auf eine Isentrope der Schar II mit weiterem Drosselverlust ins Unterschallgebiet führt. Er stellt einen möglichen gewöhnlichen geraden Verdichtungsstoß dar und braucht hier nicht betrachtet zu werden. Nach dem experimentellen Befund auf Schlierenaufnahmen tritt offenbar nur der erstgenannte, im Überschallgebiet verbleibende Stoß auf.

Man überzeugt sich, daß der Sprung von P_1 nach P_2 auch mit dem 2. Wärmehauptsatz verträglich ist, also mit Entropievermehrung verbunden ist. Ist s_1 die Entropie längs der Isentropen I durch den Ruhedruck p_0 vor dem Stoß und s_2' die Entropie längs der Isentropen II' nach dem Stoß durch den neuen Ruhedruck p_0', so gilt:

$$s_1 = c_p \ln \frac{i_0}{c_p} - R \ln p_0,$$

$$s_2' = c_p \ln \frac{i_0'}{c_p} - R \ln p_0'.$$

Hieraus folgt die Entropieänderung zu

$$s_2' - s_1 = \ln \left\{ \left(\frac{i_0'}{i_0} \right)^{c_p} \cdot \left(\frac{p_0}{p_0'} \right)^R \right\}.$$

Die Bedingung des 2. Wärme-Hauptsatzes $s_2' - s_1 > 0$ ist dann gleichbedeutend mit

$$\frac{p_0'}{p_0} < \left(\frac{i_0'}{i_0} \right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung größer als 1 ist (im oben angegebenen Beispiel $1{,}1^{3,47} \sim 1{,}4$) und da außerdem die geometrische Konstruktion $\frac{p_0'}{p_0} < 1$ liefert, ist die Bedingung des 2. Hauptsatzes erfüllt. Aus der letzten Gleichung sieht man, daß nach dem 2. Hauptsatz allein auch Sprünge zu Isentropen der Schar II möglich wären, die noch etwas über der höchsten in Bild 28 gezeichneten Isentrope II_0 liegen und für die $p_0' > p_0$ gelten würde. Auf Grund der Gültigkeit der Sätze 1 bis 3 kommen diese Isentropen jedoch nicht in Frage.

Sind P_1 und P_2 die Zustände vor und hinter dem Stoß im Inneren der Lavaldüse, so seien jetzt noch die Zustände im Austrittsquerschnitt der Düse betrachtet. Ohne Kondensation von Feuchtigkeit, also bei trockener Luft, sei auf der Ausgangsisentropen I der Zustand im Endquerschnitt durch P_3 gegeben. Nach erfolgtem geraden Kondensationsstoß von P_1 nach P_2 führt die Expansion längs der Isentropen II' bis zum Punkte P_4. P_4 ist dadurch bestimmt, daß die dortige Tangente die gleiche Richtung wie die im Punkt P_3 aufweist, da beide Zustände zum gleichen Endquerschnitt der Düse, also zur gleichen Stromdichte gehören. Man überzeugt sich durch geometrische An-

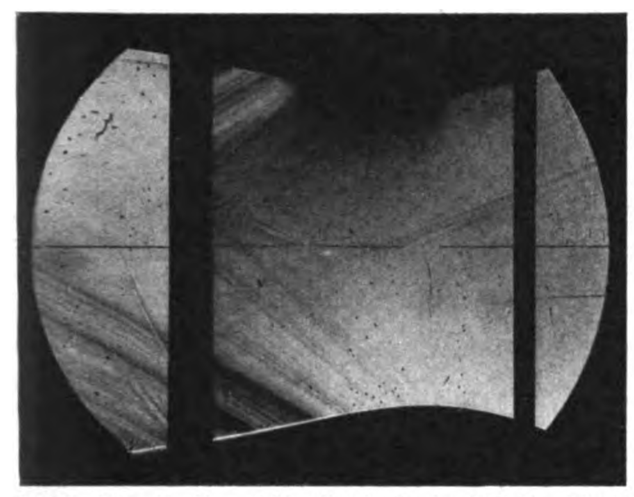


Bild 29. Düse für $Ma = 1.86$ mit getrockneter Luft ($f \approx 0.2$ g/m³; $\varphi \approx 2$ %) ohne X-Stoß aus dem Überschallwindkanal des Heereswaffenamts.

schauung, daß zu P_4 die kleinere Machsche Zahl und der höhere Druck als zu P_3 gehören. Hierbei brauchen nur die einfachen Beziehungen über die Größe der Machschen Zahlen und Tangentenrichtungen auf den Isentropen I, II_0 und II' bei waagerechtem und senkrechtem Fortschreiten im p-w-Diagramm beachtet werden.

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen:

Aus der Theorie des geraden Kondensationsstoßes folgt, daß plötzliche Kondensation von Wasserdampf an einer Stelle im Überschallteil der Lavaldüse einen ins Überschallgebiet führenden Verdichtungsstoß zur Folge hat, der mit einem Drosselverlust verbunden und mit dem 2. Hauptsatz verträglich ist. Im Endquerschnitt der Düse tritt gegenüber einer Expansion ohne X-Stoß eine Verringerung der Machschen Zahl und eine Druckerhöhung auf, wobei jedoch auf Grund des Drosselverlustes der erhöhte Druck geringer ist als derjenige, der bei isentropischer Strömung zu der verringerten Machschen Zahl gehört.

VI. Vermeidung des Kondensationsstoßes.

In den vorangegangenen Abschnitten ist gezeigt worden, welch schwerwiegenden Einfluß der X-Stoß auf die Geschwindigkeitsverteilung in den Windkanaldüsen hat, und daß damit die Herstellung einwandfreier Parallelströme unmöglich gemacht wird. Die mit dem X-Stoß verbundenen starken Drosseleffekte bedingen Änderungen des statischen Druckes an der Düsenwand und in der Meßkammer und haben starke Beeinträchtigung von Windkanal-Modellmessungen zur Folge.

Beim Bau des Überschallwindkanals des Heereswaffenamtes wurde deshalb grundlegend Abhilfe geschaffen, da alsbald nach der Erstellung einwandfreie Modellmessungen in größerer Zahl durchgeführt werden sollten. Dies war um so wichtiger, da der Kanal Frischluft aus der Atmosphäre ansaugt, die meistens 90 bis 100% Feuchtigkeit aufweist. Es wurde deshalb eine Lufttrocknungsanlage [6] nach dem Silica Gel-Verfahren errichtet, die dem Stoßbetrieb und den Erfordernissen eines Windkanals auf störungsfreien Luftzufluß besonders angepaßt ist. Mit ihr wird eine Trocknung der angesaugten Blasluft auf unter 0,5 g/m³ gewährleistet. Damit ist der X-Stoß mit allen seinen lästigen Einflüssen auf Druck und Geschwindigkeitsverteilung vollständig verschwunden. Bild 29 zeigt die Gegend des engsten Querschnitts einer Düse für $Ma = 1{,}86$ mit scharf getrockneter Luft ohne X-Stoß ($f \approx 0{,}2$ g/m³, $\varphi \approx 2\%$).

Weiter ist durch Vergleich der nach verschiedenen Meßmethoden bestimmten Machschen Winkel, der Drücke und der Dichten eindeutig nachgewiesen, daß bei Verwendung scharf getrockneter Luft die Expansion in der Windkanaldüse isentropisch erfolgt [4]. Als besonderer Vorteil ergibt sich außerdem, daß die nach dem Prandtl-Busemannschen Charakteristikenverfahren konstruierten Windkanaldüsen bereits so gute Parallelströmung ergeben, daß nur eine kleine Korrektur wegen Anwachsens der Grenzschicht vorzunehmen ist.

Auf eine Erscheinung sei noch hingewiesen. Im Aachener Überschallkanal war der X-Stoß jederzeit nur mit der Schlierenoptik sichtbar. Bei Beobachtung mit bloßem Auge war die Luft auch hinter starkem Kondensationsstoß stets völlig klar. Wurde der Überschall-Windkanal des Heereswaffenamts ohne Trockenanlage benutzt, so war die Strömung in der Meßkammer nur an besonders trockenen Tagen bei Beobachtung mit bloßem Auge klar. Bei dem meist vorhandenen hohen Feuchtigkeitsgehalt ($f > 5$ g/m³, $\varphi \approx 90\%$) wurde starke Nebelbildung hinter dem X-Stoß dicht hinter dem engsten Querschnitt beobachtet, die die Strömung völlig milchig und undurchsichtig machte.

Der sichtbare Ausfall von Nebel brachte auch die Aufklärung der sog. »Zonenbildung«, die uns in Aachen viel Kopfzerbrechen gemacht hatte. Auf den Schlierenbildern wurden hinter starkem X-Stoß in der Nähe der Düsenwandung keilförmige Zonen beobachtet, die etwa in Strömungsrichtung liegen, jedoch deutlich von der Grenzschicht zu unterscheiden sind, da zwischen Grenzschicht und genannter Zone noch eine Schicht mit normaler Strömung liegt. Sie sind deutlich auf Bild 12, 13, 14 zu sehen. Auf Bild 2, 6, 8 sind sie angedeutet. Sie stellen nicht etwa eine Strömungsablösung hinter dem X-Stoß dar, da beobachtet werden kann, daß die Machschen Wellen von der Düsenwandung aus ungestört durch sie hindurchgehen. Im Windkanal des Heereswaffenamts wurden bei Betrieb ohne Trockenanlage auf den Schlierenbildern die gleichen Zonen beobachtet. Falls Nebelbildung in der Kammer eintrat, wurden diese Zonen auch dem bloßen Auge sichtbar. Der Nebel füllt die einzelnen Querschnitte der Lavaldüse nicht gleichmäßig aus, sondern die genannten keilförmigen Zonen bleiben scharf begrenzt ohne Nebelbildung. Bei Windkanaldüsen für niedrige Machsche Zahlen (1,2 oder 1,4) tritt gewöhnlich auch noch eine Zone in der Düsenachse ohne oder mit geringer Nebelbildung auf. In diesen Düsen sind also außer den zwei Grenzschichten noch sieben verschiedene Zonen zu unterscheiden. Dies ist ein weiterer Hinweis auf die außerordentlich verwickelten Verhältnisse des Kondensationsstoßes, sobald man ihn in seiner zweidimensionalen Struktur verstehen will.

Zum Schluß spreche ich meinen Aachener Mitarbeitern, den Herren Geßner, Schoeneberger und Friesing, die mich bei der Durchführung der Versuche stets tatkräftig unterstützten, meinen besten Dank aus.

VIII. Schrifttum.

[1] C. Wieselsberger, Luftwissen Bd. 4 (1937), S. 301.
[2] Convegno Di Scienze Fisiche, Matematiche E Naturali 1935. Le Alte Velocità In Aviazione.
[3] K. Oswatitsch, Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech., voraussichtlich Januar 1942.
[4] S. Erdmann, Heereswaffenamt, HAP-Archiv, Bericht Nr. 66/47.
[5] A. Busemann, Handbuch der Experimentalphysik, Band 4, I. Teil, S. 375.
[6] K. H. Grünewald, Heereswaffenamt, HAP-Archiv, Bericht Nr. 66/49.
[7] H. Ramm, Heereswaffenamt, HAP-Archiv, Bericht Nr. 66/62.

Spannungen und Formänderungen bei tordierten dünnwandigen Hohlzylindern mit kreisförmigem Ausschnitt*).

Teil I von D. Thoma, München. Teil II von M. Schilhansl, Heidenheim/Brenz.

Bericht der J. M. Voith, Maschinenfabrik, Heidenheim/Brenz.

Es ist bekannt, daß Bohrungen und Löcher erhebliche Spannungserhöhungen am Lochrand gegenüber den Spannungsmittelwerten im ungelochten Bauteil verursachen. Die vorliegende Arbeit erweitert die Kenntnis der Größe dieser Spannungserhöhung auf den Fall einer auf Verdrehen beanspruchten dünnwandigen Hohlwelle mit kreisförmigem Ausschnitt.

Teil I.

Ein dünnwandiges tordiertes Rohr ohne Ausschnitt und den in ihm bestehenden sehr einfachen Spannungszustand kann man sich dadurch entstanden denken, daß ein passendes Stück einer ebenen Scheibe, in der eine reine Schubspannung besteht, unter Belassung der Spannungen zu einem Hohlzylinder aufgewickelt wird. Beim Aufwickeln bleibt an jeder Stelle das Gleichgewicht gewahrt.

Wenn man dagegen eine ebene Scheibe mit kreisförmigem Ausschnitt, in der in größerer Entfernung vom Ausschnitt eine reine Schubspannung besteht, zu einem Zylinder aufwickelt, bleibt zwar das Gleichgewicht gegen Verschiebungen in Richtung der Wand überall gewahrt; hinsichtlich der Verschiebungen in Richtung senkrecht zur Wand wird jedoch das Gleichgewicht der dem Ausschnitt benachbarten Teile, in denen keine reine Schubspannung besteht, gestört. Diese Störung bewirkt eine räumliche Verformung der Rohrwand in der Nähe des Ausschnittes und das Entstehen von Biegespannungen.

*) A 22 3.

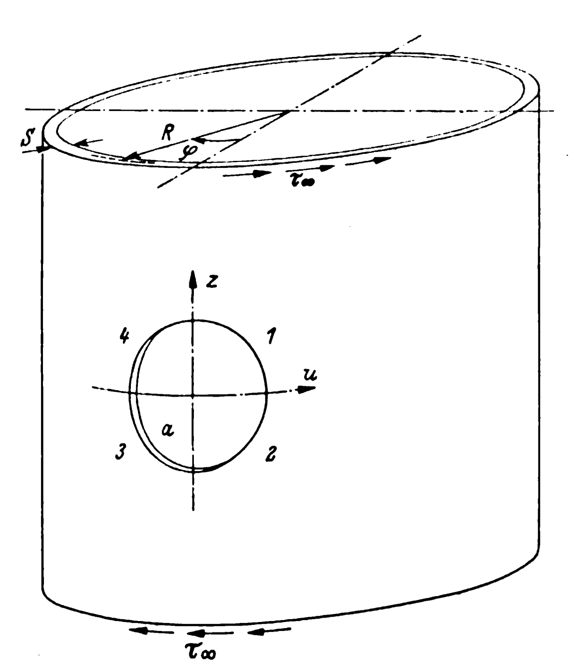


Bild 1. Bezeichnungen am zylindrischen Rohr mit kreisförmigem Ausschnitt.

Man kann nun fragen, welche zusätzlichen äußeren, senkrecht auf der Rohrwand stehenden stetig verteilten Kräfte hinzugefügt werden müßten, um die Rohrwand in die zylindrische Gestalt zurückzubringen, wobei natürlich auch die Biegungsspannungen verschwinden. Nach Ermittlung dieser zusätzlichen Kräfte wird es möglich, die Formänderungen und Biegespannungen abzuschätzen, die entstehen, wenn man die zusätzlichen Kräfte wieder entfernt und dadurch den wirklichen Zustand herstellt.

Der (unendlich lange) Zylinder, Halbmesser R, habe ein kreisrundes Loch vom Halbmesser a. Zur Bezeichnung einer Stelle der Wand sollen die Koordinaten u und z, Bild 1, dienen. Die Schubspannung in der Wand in großer Entfernung vom Loch sei τ_∞.

Man denkt sich den Zylinder längs der dem Loch gegenüberliegenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, Bild 2. Um eine strenge Lösung auf dem oben angedeuteten Wege zu ermöglichen, müßte man den Spannungszustand in dem abgewickelten Mantel für folgende Randbedingungen ermitteln: der Lochrand ist unbelastet, an den unendlich fernen Stirnrändern besteht die konstante Schubspannung τ_∞, an den Seitenrändern ($u = \pm \pi R$) sind die Schubspannungen zwar nicht konstant, aber für dasselbe z rechts und links gleich. Um die Ermittlung zu vereinfachen, wird jedoch im folgenden vorausgesetzt, daß a klein gegen R ist. Dann ist der Spannungszustand in der Umgebung des Loches nicht merklich verschieden von dem Spannungszustand, der sich ergibt, wenn man auch die Seitenränder in unendliche Entfernung rückt, wobei auch an ihnen überall die Schubspannung τ_∞ auftritt.

Dieser Spannungszustand kann mit Hilfe der bekannten strengen Lösung von Kirsch [1] für die gelochte, einachsig gespannte Scheibe ermittelt werden. Man stellt die Schubspannung her durch Überlagerung der einachsigen Zugspannung I mit der einachsigen Druckspannung II, jede von gleichem Betrage wie τ_∞ (vgl. Bild 3). Die Ausrechnung

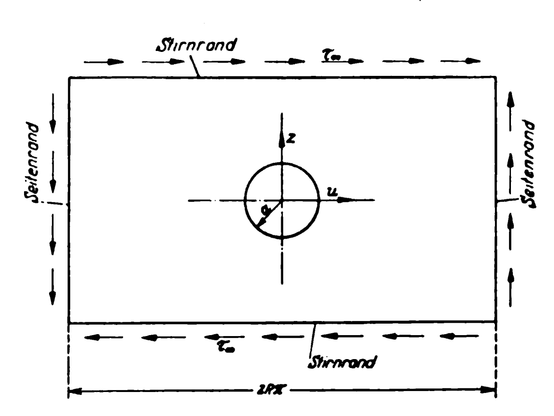


Bild 2. Abwicklung des Zylindermantels mit kreisförmigem Ausschnitt.

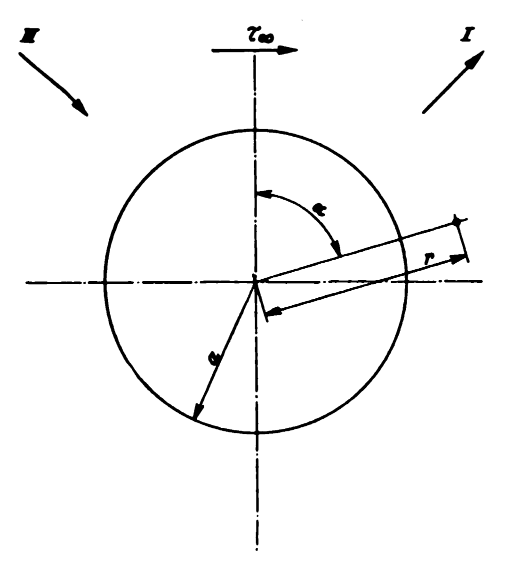


Bild 3. Überlagerung der Zugspannung I und der Druckspannung II.

liefert für das Polarkoordinatensystem r, α folgende Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_\infty \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\alpha \\ \sigma_t &= \tau_\infty \left(-1 - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\alpha \\ \tau &= \tau_\infty \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Aus einem später ersichtlich werdenden Grunde rechnet man noch die Spannung in der Umfangsrichtung σ_u aus nach der Formel:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_t}{2}\cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha \quad . \; . \; (2)$$

Die Ausrechnung liefert:

$$\sigma_u = -\tau_\infty \left[2\frac{a^2}{r^2}\sin 2\alpha + \left(-2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 4\alpha\right]. \quad (3)$$

Man denkt sich nun den abgewickelten Mantel unter Belassung der Spannungen (σ_r, σ_t, τ sowie σ_u) wieder zu einem Zylinder gebogen. Dabei bleiben die Bedingungen für das Gleichgewicht gegen Verschiebungen in der Richtung der Fläche erfüllt. Für Verschiebungen in Richtung senkrecht zur Fläche ist jedoch kein Gleichgewicht vorhanden, so daß eine Biegung der Mantelfläche eintritt. Wir wollen uns überlegen, welche zusätzlichen äußeren Kräfte wir auf den Mantel wirken lassen müssen, um diese Biegung zu verhindern, so daß der Mantel die genaue zylindrische Form behält. Da in diesem Fall keine Biegungsmomente in der Wand auftreten, muß die für vollkommen biegsame Zylinderschalen geltende Gleichgewichtsbedingung für Verschiebungen in Richtung senkrecht zur Wand erfüllt sein. Diese Bedingung lautet:

$$\sigma_u = \frac{p\,R}{s}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

wobei p der innere Überdruck und s die Wandstärke ist. Es darf daran erinnert werden, daß diese Formel, die gewöhnlich nur für vollständige Rohre und konstanten Innendruck abgeleitet wird, ganz allgemein auch für beliebig begrenzte Zylinderschalen — also auch in der Umgebung von Ausschnitten — sowie für veränderlichen Innendruck gilt [2], wenn keine Biegemomente auftreten. Unter Benützung der obigen Gleichung für σ_u ergibt sich auf diese Weise, daß beim Auftreten eines zusätzlich stützenden Innendruckes

$$p_{si} = -\tau_\infty \frac{s}{R}\left[2\frac{a^2}{r^2}\sin 2\alpha + \left(-2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 4\alpha\right]. \quad (5)$$

die Mantelfläche eine genaue zylindrische Gestalt annehmen würde. In Wirklichkeit fehlt dieser Innendruck, d. h. die wirkliche Belastung des Mantels unterscheidet sich von der die Biegung verhindernden Belastung um

$$p = +\tau_\infty \frac{s}{R}\left[2\frac{a^2}{r^2}\sin 2\alpha + \left(-2\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\sin 4\alpha\right] \quad (6)$$

Nach dem Superpositionsgesetz kann man die in dem wirklichen tordierten Zylinder vorhandenen Biegungsspannungen und die Verschiebungen in Richtung senkrecht zur Wand dadurch erhalten, daß man sich an einem nicht tordierten Zylinder Innendrücke gemäß der obigen Gleichung (6) angebracht denkt; die Gleichung liefert einen inneren Überdruck in den Bereichen *1* und *3* (Bild 1) und einen äußeren Überdruck in den Bereichen *2* und *4*. Der tordierte Hohlzylinder wird sich also in den Bereichen *1* und *3* nach außen auswölben und in den Bereichen *2* und *4* nach innen einziehen.

Diese Schlußfolgerung wurde durch Versuche mit einem aus einer Gummiplatte erstellten Hohlzylinder qualitativ bestätigt, Bild 4. Bei der Aufnahme lag der Mittelpunkt des Objektivs in der durch das Lochmittel gehenden, senkrecht zur Zylinderachse stehenden Ebene.

Teil II.

Wir wollen eine Abschätzung der durch den Druck p hervorgerufenen Biegebeanspruchung machen. Es soll von vornherein bemerkt werden, daß es sich hier nur um eine Abschätzung handeln kann, denn die strenge Lösung dieser Aufgabe dürfte wohl nur mit einem sehr erheblichen Aufwand an Rechenarbeit möglich sein. Für die Zwecke der Abschätzung ist es erlaubt, den Halbmesser R des Zylinders, der auch schon im ersten Teil als groß gegenüber dem Lochhalbmesser a vorausgesetzt worden ist, als unendlich groß zu betrachten. Wir betrachten also den Zylindermantel in der Umgebung des Loches als ebene Platte.

Neben den im Teil I verwendeten Bezeichnungen führen wir noch folgende ein:

w Verschiebung senkrecht zur Plattenmittelebene,
E Elastizitätsmodul,
ν Querdehnung,
$N \left(= \frac{E\,s^3}{12\,(1-\nu^2)}\right)$ Plattensteifigkeit,
$\varrho = r/a$.

Wir untersuchen also die Deformation einer gelochten Platte unter dem Einfluß einer Flächenlast p, die gemäß Gleichung (6) über die Platte verteilt ist.

Wir müssen die Theorie der Plattenbiegung [3] [4] als bekannt voraussetzen. Führt man für die Differentialoperation

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

wie üblich das Zeichen Δ ein, so lautet die Differentialgleichung unseres Problems:

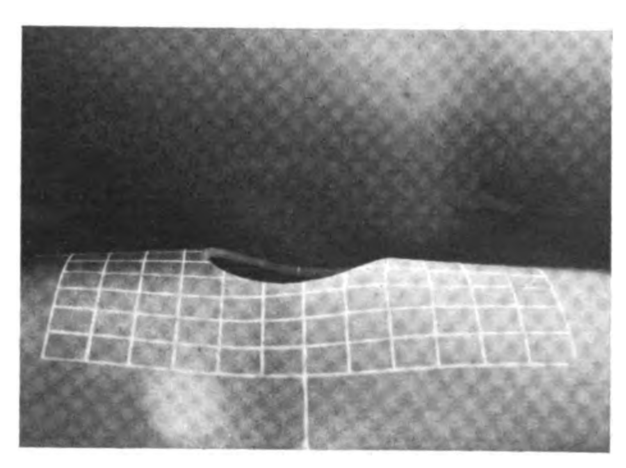


Bild 4. Verformung eines Gummimodells.

$$\Delta \Delta w = + \frac{s\, a^4}{R} \frac{\tau_\infty}{N} \left[2\, \varrho^{-2} \sin 2\alpha + (3\, \varrho^{-4} - 2\, \varrho^{-2}) \sin 4\alpha \right]. \quad (7)$$

Wenn auf der rechten Seite dieser Gleichung Null stehen würde, so hätten wir eine homogene Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Lösungen bekannt sind. Wir bezeichnen mit c_{jn} die bei der Integration auftretenden Freiwerte. Der zweite Index bedeutet das Winkelvielfache. Da für jedes beliebige Winkelvielfache vier Lösungen (entsprechend der Ordnung der Differentialgleichung) möglich sind, so durchläuft der Index j also nur die Zahlen *1*, *2*, *3*, *4* und numeriert damit die Lösungen. Da auf der rechten Seite der Gleichung (7) eine Funktion von r und α steht, so tritt zu diesen allgemeinen Integralen noch ein Partikulärintegral w_p hinzu. Dafür findet man [5]:

$$w_p = + \frac{s}{R} \frac{\tau_\infty}{N} \left[\frac{1}{8} \varrho^2 \ln \varrho \sin 2\alpha - \left(\frac{1}{96} \varrho^2 - \frac{1}{64} \right) \sin 4\alpha \right]. \quad (8)$$

Mit Rücksicht darauf, daß auf der rechten Seite der Gleichung (7) lediglich der doppelte und der vierfache Winkel α vorkommen, brauchen wir bei den allgemeinen Integralen ebenfalls nur die Lösungen mit 2α und 4α zu berücksichtigen. Wir schreiben also als vollständige Lösung an:

$$w = + \frac{s}{R} \tau_\infty \frac{a^4}{N} \left[\left(c_{12} \varrho^2 + c_{22} \varrho^{-2} + c_{32} \varrho^4 + c_{42} + \frac{1}{8} \varrho^2 \ln \varrho \right) \right.$$
$$\times \sin 2\alpha + \left(c_{14} \varrho^4 + c_{24} \varrho^{-4} + c_{34} \varrho^6 + c_{44} \varrho^{-2} \right.$$
$$\left. \left. - \frac{1}{96} \varrho^2 + \frac{1}{64} \right) \cdot \sin 4\alpha \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Freiwerte c_{jn} müssen so bestimmt werden, daß den Randbedingungen Genüge geleistet wird. Am Lochrand selbst müssen die radialen Biegemomente m_r und die um die sog. Ersatzscherkräfte $\frac{\partial m_{r\alpha}}{r\, \partial \alpha}$ vergrößerten radialen Schubkräfte, nämlich die Stützkräfte q_r ([4], S. 195) verschwinden.

Die radialen Biegemomente finden wir aus der Beziehung

$$m_r = - \frac{N}{a^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \nu \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \right] \quad . . \quad (10)$$

Setzen wir hier w aus Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$m_r = - \frac{s}{R} \tau_\infty a^2 \left\{ \left[2\,(1-\nu)\, c_{12} + 6\,(1-\nu)\, c_{22} \varrho^{-4} + 12\, c_{32} \varrho^2 \right. \right.$$
$$\left. - 4\nu\, c_{42} \varrho^{-2} + \frac{1-\nu}{4} \ln \varrho + \frac{3+\nu}{8} \right] \sin 2\alpha$$
$$+ \left[12\,(1-\nu)\, c_{14} \varrho^2 + 20\,(1-\nu)\, c_{24} \varrho^{-6} + 10\,(3-\nu)\, c_{34} \varrho^4 \right.$$
$$\left. \left. + 6\,(1-3\nu)\, c_{44} \varrho^{-4} + \frac{7\nu - 1}{48} - \frac{\nu}{4} \varrho^{-2} \right] \sin 4\alpha \right\} \quad . . \quad (11)$$

Am Innenrand ist $\varrho = 1$. Aus der Bedingung, daß $m_r = 0$ für alle Werte des Winkels α sein soll, folgen die Gleichungen

$$2\,(1-\nu)\, c_{12} + 6\,(1-\nu)\, c_{22} + 12\, c_{32} - 4\nu\, c_{42} + \frac{3+\nu}{8} = 0, \quad (12)$$

$$12\,(1-\nu)\, c_{14} + 20\,(1-\nu)\, c_{24} + 10\,(3-\nu)\, c_{34}$$
$$+ 6\,(1-3\nu)\, c_{44} - \frac{1+5\nu}{48} = 0. \quad (13)$$

Für die Stützkräfte q_r gilt die allgemeine Beziehung

$$q_r = p_r + \frac{\partial m_{r\alpha}}{r\, \partial \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Da

$$p_r = - \frac{N}{a^3} \frac{\partial \Delta w}{\partial \varrho}$$

und

$$m_{r\alpha} = -(1-\nu) \frac{N}{a^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right),$$

so folgt

$$q_r = - \frac{N}{a^3} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial \varrho} + (1-\nu) \frac{\partial}{\varrho\, \partial \alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\partial w}{\varrho\, \partial \alpha} \right) \right\} \right]. \quad (15)$$

Setzen wir hier w aus Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$q_r = - \frac{s}{R} \tau_\infty a \left\{ \left[-4\,(1-\nu)\, c_{12} \varrho^{-1} + 12\,(1-\nu)\, c_{22} \varrho^{-5} \right. \right.$$
$$\left. + 12\,(1+\nu)\, c_{32} \varrho + 4\,(3-\nu)\, c_{42} \varrho^{-3} - \frac{1-\nu}{2} \varrho^{-1} (\ln \varrho + 1) \right] \sin 2\alpha$$
$$+ \left[-48\,(1-\nu)\, c_{14} \varrho + 80\,(1-\nu)\, c_{24} \varrho^{-7} + 80\,\nu\, c_{34} \varrho^3 \right.$$
$$\left. \left. + 48\,(2-\nu)\, c_{44} \varrho^{-5} + \frac{1-\nu}{6} \varrho^{-1} + \frac{3-\nu}{4} \varrho^{-3} \right] \sin 4\alpha \right\}. \quad (16)$$

Aus der Bedingung, daß für $\varrho = 1$ und alle Winkel α die Stützkräfte verschwinden sollen, erhalten wir die beiden weiteren Gleichungen:

$$-4\,(1-\nu)\, c_{12} + 12\,(1-\nu)\, c_{22} + 12\,(1+\nu)\, c_{32}$$
$$+ 4\,(3-\nu)\, c_{42} - \frac{1-\nu}{2} = 0, \quad (17)$$

$$-48\,(1-\nu)\, c_{14} + 80\,(1-\nu)\, c_{24} + 80\,\nu\, c_{34}$$
$$+ 48\,(2-\nu)\, c_{44} + \frac{11-5\nu}{12} = 0. \quad (18)$$

Damit sind alle Bedingungen am Innenrande erfüllt. Wenn wir in ähnlicher Weise die am Außenrand geltenden Bedingungen zur Aufstellung von weiteren Gleichungen benützen wollen, so entsteht zunächst die Frage, was wir als Außenrand ansehen müssen. In diesem Zusammenhang muß auf die Vereinfachungen hingewiesen werden, die im ersten Teil gemacht wurden; aus der Begründung derselben geht hervor, daß die fiktive Belastung p nur in der unmittelbaren Umgebung des Loches den durch die Gleichung (6) bestimmten Verlauf hat, und mit zunehmendem Abstand vom Lochrand stärker davon abweicht. Wir müssen ferner daran denken, daß wir zu Beginn des zweiten Teils die Einschränkung gemacht haben, daß wir nur die unmittelbare Umgebung des Loches durch eine ebene Platte ersetzen wollen. Das ist gleichbedeutend mit der Vorstellung, daß in der Nähe des Loches nur unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit des Zylindermantels ein Gleichgewichtszustand hergestellt werden kann, während mit wachsender Entfernung vom Lochrand der Einfluß der Biegesteifigkeit abnimmt, weil zwei Teilchen des Zylindermantels, von denen das eine im ersten und das andere im vierten Bereich nach Bild 1 liegt, nicht nur unmittelbar, sondern auch über dem im Bild rückwärtigen Mantelteil zusammenhängen. Würde man nun trotzdem die Ersatzplatte als unendlich groß ansehen wollen, so kommt man zu folgenden Widersprüchen: Die Partikulärintegrale nach Gleichung (8) ergeben für $\varrho = \infty$ eine unendlich große Verschiebung, die aber mit Rücksicht auf den Zusammenhang über den rückwärtigen Mantelteil in Wirklichkeit nicht eintreten kann. Versucht man nun die Freiwerte c_{nj} der allgemeinen Integrale so zu bestimmen, daß für $\varrho = \infty$ die Durchbiegung $w = o$ wird, so erhält man unendlich große Verschiebungen und unendlich große tangentiale Biegemomente am Lochrand. Um diesem rückwärtigen Zusammenhang gerecht zu werden, nehmen wir in einer endlichen Entfernung βa vom Lochrand eine Stützung der Platte an. Einen Anhalt für die Wahl des Abstandes dieser Stützung gewinnt man aus der bekannten Art, wie die Spannungen in Zylindermänteln in axialer Richtung abklingen. Bei rotationssymmetrischer Belastung ist die »Wellenlänge« gleich

$$\frac{2\pi}{\sqrt[4]{3\,(1-\nu^2)}} \sqrt{s R},$$

also dem geometrischen Mittel aus Wandstärke und Halbmesser proportional. Der Einfluß der Randbelastung ist in diesem Fall bereits nach einer halben Wellenlänge vernachlässigbar klein. In unserem Fall handelt es sich jedoch nicht um eine auf einen achsnormalen Rand konzentrierte und gleichförmig verteilte Belastung, sondern um eine flächenhaft auf die Umgebung eines anders geformten Randes ungleichförmig verteilte Belastung. Der flächenhaften Verteilung können wir Rechnung tragen, indem wir die Einflußzone der Randlasten größer als die halbe Wellenlänge machen. Die Auswirkungen der Tatsache, daß nur

auf einem Teil des Zylinderumfanges die Belastung p nennenswerte Beträge erreicht, können aus dem Vergleich mit dem Verhalten eines Zylinders bei nicht rotationssymmetrischer Randbelastung abgeschätzt werden. Es ist bekannt ([7], S. 126), daß bei einer Randbelastung, deren Verlauf durch trigonometrische Funktionen von Vielfachen n des Winkels φ gegeben ist, sowohl schnell als auch langsam abklingende Spannungen auftreten. Dabei bewerkstelligen teils die Ringmomente, d. h. die Momente der Umfangsspannungen um die Erzeugende der Mittelfläche des Zylindermantels, teils die Ringkräfte, d. h. die Summe der Umfangsspannungen über die Wandstärke, den Abbau der Randstörungen; erstere vermögen wegen der Kleinheit der Biegesteifigkeit dies nur langsam zu tun und geben so Anlaß zu den langsam abklingenden Spannungen, während letztere infolge der relativ größeren Dehnungssteifigkeit dies schnell tun und so den Anlaß zu den schnell abklingenden Spannungen geben. Beim rotationssymmetrischen Problem dagegen leisten die Ringkräfte die gesamte Abbauarbeit. Wir schließen daraus, daß beim nichtrotationssymmetrischen Problem das Abklingen der Spannungen im ganzen gesehen langsamer erfolgt als bei rotationssymmetrischer Belastung. Es führt also auch die Berücksichtigung dieser Tatsache genau so wie die Berücksichtigung der flächenhaften Verteilung zu einer Vergrößerung der Einflußzone. Wir haben den Vergleich mit dem rotationssymmetrischen Problem hauptsächlich deshalb gemacht, weil in diesem Fall die Berechnung der »Wellenlänge« besonders einfach ist, während sie im anderen Fall außerordentlich zeitraubend ist. Wir wollen also in unserem Fall zunächst die »Wellenlänge« ausrechnen, die sich an einem Zylinder gleicher Abmessungen bei rotationssymmetrischer Randlast einstellt, und dann die Vergrößerung der Einflußzone dadurch berücksichtigen, daß wir die Einflußzone nicht mehr gleich der halben Wellenlänge setzen, sondern gleich der ganzen. Wir setzen also näherungsweise

$$\beta \approx \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \frac{\sqrt{sR}}{a} \approx 4{,}88 \frac{\sqrt{sR}}{a} \quad . \; . \; . \; (19)$$

Auf dem Rand $\varrho = \beta$ verlangen wir entsprechend unserer früheren Annahme einer »Stützung«, daß die radialen Biegemomente m_r und die Verschiebungen w verschwinden. Aus der Gleichung (11) können so folgende Gleichungen abgeleitet werden:

$$2(1-\nu)c_{12} + 6(1-\nu)c_{22}\beta^{-4} + 12 c_{32}\beta^2 - 4\nu c_{42}\beta^{-2} + \frac{1-\nu}{4}\ln\beta + \frac{3+\nu}{8} = 0, \quad (20)$$

$$12(1-\nu)c_{14}\beta^2 + 20(1-\nu)c_{24}\beta^{-6} + 10(3-\nu)c_{34} + 6(1-3\nu)c_{44}\beta^{-4} + \frac{7\nu-1}{48} - \frac{\nu}{4}\beta^{-2} = 0. \quad (21)$$

Aus Gleichung (9) folgt mit $\varrho = \beta$:

$$c_{12}\beta^2 + c_{22}\beta^{-2} + c_{32}\beta^4 + c_{42} + \frac{1}{8}\beta^2\ln\beta = 0 \quad . \; . \; (22)$$

$$c_{14}\beta^4 + c_{24}\beta^{-4} + c_{34}\beta^6 + c_{44}\beta^{-2} - \frac{1}{96}\beta^2 + \frac{1}{64} = 0. \quad (23)$$

Die Gleichungen (12), (17), (20) und (21) einerseits und (13), (18), (21) und (23) andererseits bilden je ein System von linearen Gleichungen, aus dem die Unbekannten c_{jn} ermittelt werden können.

Wir gehen nun dazu über, das Biegemoment m_t in der Umfangsrichtung zu bestimmen. Dafür gilt allgemein

$$m_t = -\frac{N}{a^2}\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right] \quad . \; . \; . \; (24)$$

Setzen wir hier die Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$m_t = -\frac{s}{R}a^2\tau_\infty\Big\{\Big[-2(1-\nu)c_{12} - 6(1-\nu)c_{22}\varrho^{-4} + 12\nu c_{32}\varrho^2 - 4c_{42}\varrho^{-2} - \frac{1-\nu}{4}\ln\varrho + \frac{1+3\nu}{8}\Big]\sin 2\alpha$$

$$+\Big[-12(1-\nu)c_{14}\varrho^2 - 20(1-\nu)c_{24}\varrho^{-6} - 10(1-3\nu)c_{34}\varrho^4 - 6(3-\nu)c_{34}\varrho^{-4} + \frac{7-\nu}{48} - \frac{1}{4}\varrho^{-2}\Big]\sin 4\alpha\Big\} \quad . \; . \; . \; . \; (25)$$

Wir wollen das Biegemoment m_{t0} am Lochrand aufsuchen und setzen zu diesem Zweck $\varrho = 1$; dann wird mit den Abkürzungen

$$-A_2 = -2(1-\nu)c_{12} - 6(1-\nu)c_{22} + 12\nu c_{32} - 4c_{42} + \frac{1+3\nu}{8}$$

$$-A_4 = -12(1-\nu)c_{14} \; 20(1-\nu)c_{24} - 10(1-3\nu) - 6(3-\nu) - \frac{5+\nu}{48}$$

endgültig:

$$m_{t_0} = +\frac{s}{R}a^2\tau_\infty[A_2\sin 2\alpha + A_4\sin 4\alpha] \quad . \; . \; . \; (26)$$

Die Werte von A_2 und A_4 sind in Abhängigkeit von der Verhältniszahl β in der Zahlentafel 1 mitgeteilt; dabei wurde die Querdehnung $\nu = 0{,}3$ gesetzt.

Zahlentafel 1.

β	A_2	A_4	$\alpha_{m_t\,max}$
2	+ 0,2204	— 0,0030	45° 47′
3	+ 0,3649	+ 0,0138	42° 52′
4	+ 0,4589	+ 0,0220	42° 18′
5	+ 0,5280	+ 0,0263	42° 13′
10	+ 0,7310	+ 0,0323	42° 31′

Man sieht, daß A_4 nur rund $^1/_{20}$ von A_2 ausmacht. In der letzten Spalte ist derjenige Winkel α angegeben, bei welchem das Maximum des Biegemomentes m_t eintritt. Der Übergang zu den Biegespannungen σ_{tB} an der Oberfläche $\pm s/2$ erfolgt dadurch, daß man die Biegemomente m_t durch $^1/_6\, s^2$ dividiert. Man erhält so:

$$\sigma_{t_{B_0}} = \pm\frac{6a^2}{sR}\tau_\infty[A_2\sin 2\alpha + A_4\sin 4\alpha] \quad . \; . \; (27)$$

Da der Größtwert des Biegemomentes dicht bei dem Größtwert von $A_2\sin 2\alpha$ liegt und außerdem am Ort des größten Biegemomentes der Anteil $A_4\sin 4\alpha$ noch sehr klein ist, so bleibt der Fehler, den wir machen, wenn wir den Größtwert

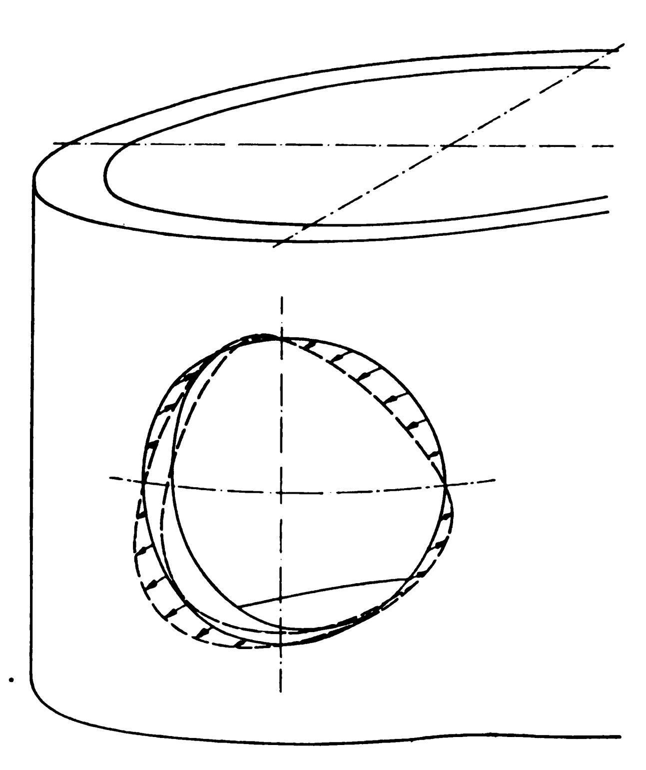


Bild 5. Verformung des Lochrandes laut Rechnung — stark überhöht gezeichnet.

$$\pm \frac{6a^2}{sR} \tau_x \, [A_2 \sin 2\, x_{m\,t\,\max} + A_4 \sin 4\, x_{m\,t\,\max}]$$

durch den Näherungswert bei $\alpha = 45^0$

$$\pm \frac{6\,a^2}{s\,R} \tau_x \, A_2$$

ersetzen, kleiner als 0,5%.

Aus den Gleichungen (1) des ersten Abschnittes geht hervor, daß die gleichmäßig über die Wandstärke verteilte Spannung σ_t in der Umfangsrichtung ihren Größtwert bei $\alpha = 45^0$ hat. Er ist gleich $\pm 4\,\tau_\infty$. Überlagert man die Biegespannung, so erhält man an der Oberfläche $\pm s/2$ den Spannungshöchstwert

$$\sigma_{\max} = \pm \tau_x \left[4 + A_2 \frac{6\,a^2}{s\,R}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

Ist beispielsweise

$$a = 10 \text{ cm}, \quad R = 62{,}5 \text{ cm}, \quad s = 1 \text{ cm},$$

so wird entsprechend Gleichung (19)

$$\beta \approx 3{,}85.$$

Setzen wir also in die Formel (28) den Wert A_2, den wir für $\beta = 4$ der Zahlentafel 1 entnehmen, so erhalten wir

$$\sigma_{\max} = 8{,}4\,\tau_x\,.$$

Dieser Wert erscheint außerordentlich hoch; man könnte nun meinen, daß unsere Abschätzung des Wertes β unbrauchbar sei. Wir verdanken jedoch einer persönlichen Mitteilung von Herrn Prof. H. Peters, München, den Hinweis, daß an den Rändern von Ausschnitten in Schalenrümpfen Spannungserhöhungen auf den 10fachen Betrag der mittleren Verdrehbeanspruchung im ungeschwächten Querschnitt gemessen worden sind. Ferner kann den Bildern 65 und 66 der Arbeit von Thum und Petri über »Steifigkeit und Verformung von Kastenquerschnitten« [6] entnommen werden, daß die Randspannungen bis zum 9fachen der mittleren Verdrehbeanspruchung anwachsen, wenngleich die etwas ungewöhnliche Form des von den beiden Forschern untersuchten Querschnitts einen unmittelbaren Vergleich nicht zuläßt.

Die zustande kommende Verformung ist aus Bild 5 ersichtlich.

Schrifttum.

[1] Kirsch, Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. Z. VDI Bd. 42 (1898), S. 797.
[2] D. Thoma, Spannungen in dünnen zylindrischen Gefäßwänden. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. A. Föppl zum 70. Geburtstag. Springer, Berlin 1924, S. 42.
[3] A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. 1. Oldenbourg München und Berlin.
[4] Nadai, Elastische Platten. Springer Berlin 1925.
[5] Schilhansl, Kreisplatte mit Rippenstern. Z. angew. Math. Mech. (1926), S. 484.
[6] Thum-Petri, Steifigkeit und Verformung von Kastenquerschnitten. VDI-Forschungsheft 409.
[7] Flügge, Statik und Dynamik der Schalen. Springer, Berlin 1934.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 20. Juli 1942 Lfg. 7

Max Dieckmann zum 60. Geburtstag.



In diesen Tagen beging Max Dieckmann seinen 60. Geburtstag; ich glaube nicht, daß er ihn gefeiert haben wird oder ihn gefeiert wissen wollte, denn so viel ich ihn kenne, versteht er es zwar meisterhaft in geradezu traditioneller Gastfreundschaft andere zu feiern, hat aber eine gewaltige Abneigung dagegen, selbst gefeiert zu werden. Trotzdem freue ich mich besonders darüber, daß die Schriftleitung mir Gelegenheit gibt, ihm die Glückwünsche der Deutschen Flugfunktechnik zu übermitteln und ich dadurch die Möglichkeit habe, einiges zu sagen, das im Alltag meist nicht ausgesprochen werden kann. Ich bitte daher Herrn Kollegen Dieckmann, diese Zeilen mit Fassung über sich ergehen zu lassen, sie werden nur die Sprache des Dankes und der Würdigung seiner Fachkollegen zum Ausdruck bringen.

Es ist nicht ganz leicht, den Entwicklungsgang der Arbeiten Dieckmanns an ihren Quellen zu verfolgen, weil er selbst nur äußerst schwer dazu zu bewegen ist, von seiner persönlichen Arbeit zu erzählen. Trotzdem hoffe ich, daß es mir gelungen ist, aus eigener langjähriger Kenntnis und aus dem Gespräch mit seinen engsten Mitarbeitern einige der wesentlichsten Punkte zu kennen.

Max Dieckmann ist am 5. Juli 1882 in Hermannsacker im Harz geboren. Er studierte Mathematik und Physik in Göttingen, Leipzig, Straßburg und München und promovierte dort 1907, wo er bis 1911 Assistent am physikalischen Institut der Technischen Hochschule war. Es ist vielleicht wenig bekannt, daß er bereits 1909 in einer naturwissenschaftlichen Zeitschrift die Braunsche Röhre als eine Möglichkeit für das Fernsehen vorgeschlagen hat und daß ihm in dieser Zeit auch ein Patent hierüber erteilt worden ist.

Er beschäftigte sich damals außerdem vor allem mit luftelektrischen und drahtlostelegraphischen Untersuchungen, zu deren Durchführung sehr bald die Notwendigkeit eines freien, ungestörten Geländes erkannt wurde, das sich in unmittelbarer Nähe seines kleinen Wohnhauses in Gräfelfing bei München gefunden hat. Die ersten Anfänge, die Keimzelle der heute in der ganzen Welt bekannten Gräfelfinger Versuchsstation, lagen im Keller dieses Wohnhauses und in seinem Gartenhaus. Dort wurde ein für die damalige Zeit sehr leistungsfähiger Funkensender in Betrieb genommen unter allgemeiner und höchst unfreiwilliger aber interessierter Versuchsanteilnahme der ganzen Gräfelfinger Nachbarschaft, die den Takt der Morsezeichen am Schwanken ihres elektrischen Lichtes des Abends wahrnehmen mußten.

In diesen primitiven Versuchsanlagen wurden die ersten Feststellungen der elektrischen Aufladung von Otto-Motoren gemacht. Ein Motorrad wurde säuberlich isoliert im Raume aufgehängt und mit Elektrometer seine Aufladung gemessen; die ganze Anlage ist, genau abgebildet, wie es sich gehört, in einer Veröffentlichung der damaligen Zeit zu sehen. Die Arbeiten gaben die Unterlage für Probleme, die uns heute gerade wieder, insbesondere bei der Aufladung von Dieselmotoren, beschäftigen.

Ein entscheidender Schritt für die Weiterentwicklung und den Ausbau der Station war die Begegnung Max Dieckmanns mit dem Grafen Zeppelin 1909—1910. Es wurde damals in Fachkreisen das Experiment der Funkerei im Luftschiff wegen Explosionsgefahr vielfach stark abgelehnt. In gemeinsamer Arbeit zwischen Dieckmann und der Firma Telefunken konnte aber der Nachweis der Brauchbarkeit solcher Anlagen im Luftschiff geführt werden und es wurde der erste Luftschiffsender zum Einsatz gebracht.

Eine Reihe schwerer Unglücksfälle, die den Luftschiffbau betroffen haben, führte zu eingehenden Versuchen über die Quer- und Längsleitfähigkeit von Ballonhüllen zur Ableitung von Ladungen an das metallische Gerippe des Luftschiffs. Es stellte sich heraus, daß vor allem die Querleitfähigkeit einen möglichst hohen Wert haben mußte; es wurde ein elektrischer Ballonstoffprüfer entwickelt und damit die Grundlage zur Erzeugung von modernen Ballonstoffen aus entsprechend präparierten Goldschlägerhautzellen geliefert.

Viel später, bei dem Unglück des Luftschiffes »Hindenburg« in Amerika, konnte auf diese Untersuchungen mit neuen Hilfsmitteln und Gedanken wieder zurückgegriffen werden.

1911 habilitierte sich Dieckmann als Privatdozent für reine und angewandte Physik an der Münchener Technischen Hochschule. Damit traten erhöhte Anforderungen von seiten des Hochschulunterrichts an ihn heran. Es entstand ein hölzernes Stationshaus auf gepachtetem Gelände in Gräfelfing, ein geordneter Praktikumsbetrieb für die Studierenden der Technischen Hochschule konnte aufgenom-

men werden, Militär- und Postbehörde nahmen Interesse an den Einrichtungen und Versuchen der Station.

1914 trat Dieckmann als Kriegsfreiwilliger in die Nachrichten-Ersatzabteilung in München ein. In die Kriegsjahre 1914 bis 1918 fallen eine große Zahl wichtiger Arbeiten, die Dieckmann aus den verschiedensten Kommandostellen durchführen konnte, wobei ihm die Gräfelfinger Station immer als ein wertvoller Heimatboden zur Durchführung solcher, durch dauernd wechselnde Bedürfnisse sich ändernder Arbeiten zur Verfügung stand.

Dieckmann erfand auf Anregung des Armee-Oberkommandos 5 ein einfaches Kabelsuchgerät mit tragbarem Sender und Empfänger mit Rahmenantenne. Das Gerät wurde zum Aufsuchen von Telegraphenkabeln zuerst im Bereich von Verdun eingesetzt, da man vermutete, daß von französischer Seite noch betriebsfähige Leitungen hinter unsere Stellungen führten. Die Anlage bewährte sich ausgezeichnet, da hierdurch das zeitraubende und hinderliche Aufgraben von Straßen bei der Suche vermieden wurde. Mit diesem Kabelsuchgerät hatte es noch eine besondere Bewandtnis: Max Dieckmann wurde ein Patent darauf erteilt und da er in der Patentschrift ein entzückendes Bildchen als Unterlage zur Beschreibung beigegeben hatte, das Sender und Empfänger im Gelände getragen von zwei figürlich abgebildeten Männchen darstellte, erhielt er eine schriftliche Belobigung durch das Reichspatentamt für vorbildliche Darstellung von Patentunterlagen.

In den Kriegsjahren wurde von Dieckmann auch ein Verfahren zur drahtlosen Bildübertragung von einfachen Zeichnungen für Artilleriebeobachtung vom Flugzeug zum Boden entwickelt und probeweise am Ende des Krieges eingesetzt.

Überhaupt wurden damals von ihm und seinen Mitarbeitern eine ganze Reihe von Verfahren durchgebildet, die zum Teil erst erheblich später, ja erst in diesen Tagen, praxisreif wurden, zu denen aber damals schon tastend der Weg gesehen wurde. In erster Linie sind hier die Versuche zur Funknavigation von Luftfahrzeugen zu nennen. Der erste Drehrahmenpeiler auf einer beweglichen Station wurde in einem Motorboot am Bodensee ausprobiert; es folgte der erste ausklappbare Drehrahmen für Luftschiffe und es wurde ein Entfernungsmeßverfahren durch Feldstärkenmessung angegeben und in Versuchsbetrieb genommen.

Der Zusammenbruch nach dem Kriege brachte auch für Dieckmanns Arbeiten sehr schwere Zeiten und erforderte zunächst eine völlige Umstellung. Es wurde viel und mit Erfolg an der Zerstäubung von Metallen auf Stoffe im Vakuum gearbeitet. Eine Verbesserung des Bildübertragungsverfahrens führte zur regelmäßigen Ausstrahlung von Wetterkarten durch den Rundfunksender München.

Erfreulicher und der eigentlichen Neigung und Zielsetzung von Dieckmanns Arbeiten näherliegend waren schon die Versuche über Fernlenkung, die auf dem Ammersee mit dem in Ammersee-schiffahrenden Kreisen berühmten »Geister-Motorboot Asle« vorgenommen wurden, das vielfach unbemannt über den See kreuzte. Es war gesteuert von einem Fernlenkgerät, das den offiziellen Decknamen »Dackelgerät« erhielt, weil es einmal wollte und einmal auch nicht. Das Schönste war, daß man sich genötigt sah, eine lebensgroße Puppe an das Steuer dieses Schiffes zu setzen, um es so vor wohlmeinenden Ammerseepiraten zu schützen, die das herrenlos umhersausende Boot mehrfach zu jagen und einzuschleppen versuchten, gerade dann, wenn der Dackel seine Schuldigkeit bestens tat.

Fundamental waren die Arbeiten von Dieckmann und seinem Mitarbeiter Hell zur Zielfahrtpeilung mit der heute allgemein eingeführten Rahmen-Festantennen-Kombination. Das heute in allen Kampfmaschinen eingebaute Telefunken-Zielfluggerät geht auf diese Anfangsarbeiten zurück.

Die ersten Registrierungen des Nachteffektes der Rahmenpeilung in Deutschland wurden von Dieckmann mit Schwenkrahmen und später mit Drehrahmen etwa ab 1930 durchgeführt. Diese gaben die Unterlagen zu dem Gedanken des heute an allen Luftwaffen-Adcockpeilern eingeführten Schnellpeilverfahrens mit Sichtanzeige.

Angeregt durch eine Nachtfahrt im Zeppelin-Luftschiff wurden 1931 die ersten Adcockversuche in Deutschland angestellt.

Der Wert der Dieckmannschen Arbeiten war in führenden Kreisen des heutigen Reichsluftfahrtministeriums auch damals schon wohlbekannt. Daher erfolgte nach 1933 ein ungemein schneller und umfangreicher Ausbau aller Arbeitsmöglichkeiten. Zu dem Gräfelfinger Institut trat das neue Flugfunkforschungsinstitut Oberpfaffenhofen und der Ausbau des Institutes für Radiotechnik und Flugfunkwesen an der Technischen Hochschule München, so daß Dieckmann heute Leiter dieser drei Münchener Institute ist und 1936 zum planmäßigen a. o. Professor an der Technischen Hochschule München ernannt wurde. Eine Fülle neuer Aufgaben trat an ihn heran, über die ich im einzelnen nicht sprechen will, weil sie diesem Kreise aus seinen eigenen Berichten im wesentlichen wohlbekannt sind.

So bleibt mir nur, unserem lieben Kollegen Dieckmann nochmals den Dank der Deutschen Flugfunkforschung auszusprechen für viele Wege, die er uns gewiesen hat und den Wunsch, daß noch viele fruchtbare Arbeitsjahre folgen mögen.

v. Handel.

Eigenschaften zweier wärmebehandelter mit Vanadin legierter Chrom-Mangan-Stähle.

Von A. Göschl und K. Scheinichen.

Bericht der Arado-Flugzeugwerke G. m. b. H.

Durch Wärmebehandlung sind Stähle, im besonderen Konstruktionsstähle mit feststehender Zusammensetzung grundlegend in ihren physikalischen Eigenschaften zu beeinflussen. Zur Beurteilung der Qualitätsverbesserung für die Zwecke des Flugzeugbaues sind die Veränderungen der Zugfestigkeit, der Streckgrenze, des Streckgrenzenverhältnisses, der Dehnung, der Kerbzähigkeit, der Härte und des Gefüges als Maßstab geeignet.

Gliederung.

Der Einfluß des Vanadins auf legierte Stähle ist im allgemeinen bekannt[1]). Als feststehend ist die kornverfeinernde Wirkung, die Erhöhung der Warm- und Dauerstandfestigkeit, bei Vergütungsstählen die Verminderung der Überhitzungsempfindlichkeit und Erhöhung der Anlaßbeständigkeit[2]) anzusehen. Die letzteren Eigenschaften werden schon durch einen geringen Vanadingehalt erzielt. Durch höhere Vanadingehalte wird jedoch die Abschreckhärtbarkeit infolge Bindung von Härtungskohlenstoff[3]) herabgesetzt.

Bei den Arado-Flugzeugwerken wurde bislang vor allem der Chrom-Molybdän-Stahl Flw. 1452 in der Festigkeitsstufe 60 bis 75 kg/mm² angewendet, der sowohl auf die Festigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm², als auch in schwächeren Querschnitten auf die Festigkeitsstufe 110 bis 125 kg/mm² vergütbar ist.

Bekannt ist die vorzügliche Schweißbarkeit dieses Werkstoffes und die Möglichkeit der einwandfreien Vergütung geschweißter Teile, wobei die Schweißnaht die gleiche Festigkeit wie der Grundwerkstoff erhält.

Die vorliegenden beiden mit Vanadin legierten Chrom-Mangan-Stähle besitzen in den Zuständen 2 und 4 (geglüht respektive zäh vergütet) ungefähr die gleiche Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dehnung. Sie entsprechen also in der Festigkeitsstufe 60 bis 75 kg/mm² dem bisher verwendeten Cr-Mo-Stahl.

Durch die Untersuchung sollte nun geklärt werden, inwieweit durch eine geeignete Wärmebehandlung die Eigenschaften dieser mit Vanadin legierten Chrom-Mangan-Stähle denen des bisher verwendeten Chrom-Molybdän-Stahles in den höheren Festigkeitsstufen angleichbar sind. Dabei soll vor allem darauf hingezielt werden, die Festigkeitsbereiche 90 bis 105 kg/mm² und 110 bis 125 kg/mm² zu erreichen und eine einwandfreie Durchvergütung zu erhalten.

A. Versuchswerkstoffe.

Es wurden 2 mit Vanadin legierte Chrom-Mangan-Stähle Sorte B und Sorte E zweier Hersteller, die im folgenden kurz mit I und II bezeichnet werden, verwendet. Der Versuchswerkstoff bestand aus Blechen 1, 2 und 10 mm dick, aus Stangen 20, 50 und 150 mm Dmr.

Die Zusammensetzung der angelieferten Bleche und Stangen ist in Zahlentafel 1 angegeben. Bei der Sorte B handelt es sich um einen Stahl mit 0,91 bis 1,06% Cr, 0,55 bis 0,60% Mn, 0,19 bis 0,30% V und 0,22 bis 0,27% C. Der Si-Gehalt liegt zwischen 0,22 und 0,29%. Der P-Gehalt beträgt in keinem Falle mehr als 0,015% und der S-Gehalt nicht mehr als 0,026%. Alle Halbzeuge enthalten ca. 0,1% Ni. Die Sorte E ist ein Stahl mit 0,47 bis 0,61% Cr und 1,10 bis 1,19% Mn. Der V-, C-, Si-, P-, S- und Ni-Gehalt bewegt sich in ungefähr den gleichen Grenzen wie bei der Sorte B. Lediglich bestehen einige Unterschiede im Cr-Gehalt, der bei der Sorte B des Lieferwerkes I um ca. 0,1% höher, bei der Sorte E um 0,1% niedriger liegt als bei Lieferwerk II. Ein auffallender Unterschied zeigt sich beim Vanadin. Lieferwerk I hält den V-Gehalt nahe 0,3%, Lieferwerk II nahe 0,2%.

Für Schweißversuche wurde vom Lieferwerk II Schweißdraht aus beiden Stählen hergestellt. Die Zusammensetzung ist ebenfalls in der Zahlentafel 1 aufgeführt. Mit Ausnahme des Schwefelgehaltes, der gerade beim Schweißdraht unerwünscht höher liegt als bei den anderen Halbzeugen, entspricht die Zusammensetzung der beiden Drahtsorten der der entsprechenden Bleche und Stangen.

B. Versuchsausführung.

a) Wärmebehandlung.

Wie schon einleitend erwähnt, gehört Vanadin zu den härtungskohlenstoffbindenden Elementen, den sog. Karbidbildnern. Diese neigen je nach Menge des abgebundenen Kohlenstoffes und des im Gamma-Eisen gelösten Karbides beim Anlassen zur Ausscheidungshärtung. Um bei der Versuchsabwicklung die Wahl geeigneter Härte- und Anlaßtemperaturen zu erleichtern, wurde deshalb nach der Ermittlung der Umwandlungspunkte die Aufstellung von Anlaßtemperaturkurven für zweckmäßig gehalten.

1. Haltepunktsbestimmungen.

Zur Ermittlung der Ac_3- und Ac_1-Haltepunkte wurden aus je einer Stange von 20 mm Dmr. jeder Lieferfirma und jeder Sorte 35 cm lange Abschnitte auf 10 mm Dmr.

[1]) Ed. Houdremont, Sonderstahlkunde.
[2]) H. Cornelius, Eigenschaften von Mangan-Vergütungsstählen mit weiteren Legierungszusätzen. Stahl u. Eisen 60 (1940), S. 1075/83.
[3]) E. Houdremont, H. Benneck u. H. Schrader, Arch. Eisenhüttenw. Bd. 6 (1932/33), S. 24/34.

Zahlentafel 1.

Lfd. Nr.	Halbzeug-form	Halbzeug-abmessung mm	Liefer-werk	Sorte und Halbzeug-Nr.	C	Si	Mn	P	S	P + S	Cr	V	Ni
1	Blech	1	I	B 1	0,26	0,26	0,58	0,007	0,011	0,018	1,02	0,29	0,09
2	»	1	I	B 2	0,25	0,25	0,57	0,008	0,008	0,016	1,02	0,28	0,08
3	»	1	II	B 1	0,26	0,29	0,59	0,015	0,025	0,040	0,91	0,21	0,14
4	»	1	II	B 2	0,22	0,28	0,60	0,013	0,021	0,034	0,93	0,20	0,12
5	»	1	I	E 1	0,24	0,25	1,15	0,012	0,010	0,022	0,48	0,26	0,07
6	»	1	I	E 2	0,26	0,25	1,16	0,010	0,009	0,019	0,48	0,26	0,08
7	»	1	II	E 1	0,26	0,28	1,17	0,010	0,027	0,037	0,59	0,22	0,06
8	»	1	II	E 2	0,26	0,28	1,17	0,010	0,025	0,035	0,59	0,22	0,07
9	»	2	I	B 1	0,25	0,27	0,58	0,008	0,006	0,014	1,06	0,30	0,05
10	»	2	II	B 1	0,23	0,29	0,60	0,014	0,023	0,037	0,94	0,20	0,13
11	»	2	I	E 1	0,25	0,25	1,15	0,011	0,006	0,017	0,50	0,28	0,07
12	»	2	II	E 1	0,26	0,29	1,17	0,010	0,025	0,035	0,60	0,20	0,05
		Dmr.											
13	Stab	20	I	B 1	0,26	0,25	0,57	0,008	0,005	0,013	1,04	0,30	0,09
14	»	20	I	B 2	0,26	0,27	0,55	0,010	0,005	0,015	1,07	0,29	0,07
15	»	20	II	B 1	0,23	0,29	0,60	0,015	0,020	0,035	0,93	0,21	0,13
16	»	20	II	B 2	0,25	0,29	0,60	0,015	0,026	0,041	0,94	0,20	0,12
17	»	20	I	E 1	0,25	0,26	1,14	0,005	0,012	0,017	0,47	0,30	0,07
18	»	20	I	E 2	0,27	0,27	1,11	0,013	0,006	0,019	0,51	0,29	0,06
19	»	20	II	E 1	0,25	0,28	1,17	0,010	0,030	0,040	0,57	0,21	0,07
20	»	20	II	E 2	0,27	0,30	1,19	0,014	0,027	0,041	0,61	0,20	0,06
21	»	50	I	B 1	0,26	0,26	0,57	0,009	0,006	0,015	1,06	0,28	0,08
22	»	50	I	B 2	0,26	0,26	0,57	0,008	0,006	0,014	1,05	0,28	0,07
23	»	50	II	B 1	0,24	0,26	0,60	0,014	0,024	0,038	0,92	0,22	0,13
24	»	50	II	B 2	0,24	0,27	0,59	0,014	0,023	0,037	0,91	0,20	0,12
25	»	50	I	E 1	0,26	0,25	1,12	0,010	0,005	0,015	0,48	0,29	0,07
26	»	50	I	E 2	0,27	0,23	1,13	0,011	0,004	0,015	0,48	0,30	0,08
27	»	50	II	E 1	0,27	0,28	1,16	0,010	0,027	0,037	0,61	0,22	0,08
28	»	50	II	E 2	0,26	0,26	0,17	0,010	0,028	0,038	0,59	0,20	0,07
29	Stab Randzone	150	I	B 1	0,27	0,23	0,56	0,009	0,007	0,016	1,06	0,29	0,08
30	»	150	I	B 2	0,25	0,26	0,58	0,013	0,006	0,019	1,04	0,28	0,10
31	»	150	II	B 1	0,25	0,27	0,58	0,013	0,022	0,035	0,93	0,20	0,13
32	»	150	II	B 2	0,25	0,29	0,60	0,015	0,026	0,041	0,94	0,20	0,12
33	»	150	I	E 1	0,26	0,22	1,11	0,011	0,007	0,018	0,50	0,30	0,08
34	»	150	I	E 2	0,25	0,26	1,12	0,013	0,006	0,019	0,50	0,29	0,08
35	»	150	II	E 1	0,28	0,27	1,16	0,010	0,026	0,036	0,60	0,20	0,05
36	»	150	II	E 2	0,27	0,30	1,19	0,014	0,027	0,041	0,61	0,20	0,06
37	Kern	150	I	B 1	0,26	0,23	0,55	0,009	0,007	0,016	1,05	0,26	0,08
38	»	150	I	B 2	0,23	0,26	0,56	0,012	0,006	0,018	1,05	0,29	0,07
39	»	150	II	B 1	0,25	0,28	0,58	0,015	0,026	0,041	0,93	0,20	0,12
40	»	150	II	B 2	0,24	0,29	0,56	0,014	0,024	0,038	0,96	0,19	0,12
41	»	150	I	E 1	0,27	0,22	1,11	0,012	0,007	0,019	0,49	0,29	0,08
42	»	150	I	E 2	0,25	0,28	1,10	0,014	0,005	0,019	0,49	0,31	0,07
43	»	150	II	E 1	0,27	0,24	1,17	0,011	0,023	0,034	0,59	0,19	0,07
44	»	150	II	E 2	0,27	0,29	1,17	0,014	0,025	0,039	0,60	0,20	0,06
45	Schweiß-draht	1	II	B 1	0,23	0,30	0,60	0,017	0,025	0,042	0,94	0,20	0,09
46	»	1	II	B 2	0,23	0,30	0,59	0,013	0,024	0,037	0,96	0,20	0,11
47	»	1	II	E 1	0,26	0,29	1,18	0,012	0,029	0,041	0,60	0,20	0,06
48	»	1	II	E 2	0,27	0,29	1,18	0,014	0,030	0,044	0,58	0,21	0,04

abgedreht. Hierauf wurden die Abschnitte normalisiert und zu Dilatometer-Versuchsstäben fertig bearbeitet.

2. Bestimmung von Anlaßtemperaturkurven.

Aus Stäben 20 mm Dmr. wurden je Sorte und Hersteller 96 Abschnitte 260 mm lang, abgedreht auf 18 mm Dmr., hergestellt. Alle Proben wurden an einem Ende mit einer Bohrung 2 mm Dmr. versehen, in denen vor dem Einsetzen im Vergütungsofen je 12 Proben mit Draht aufgefaßt wurden. Aus Blech 2 mm dick wurden je Sorte und Hersteller 120 Abschnitte, 180 mm lang, hergestellt. Alle Proben wurden an einem Ende ebenfalls mit einer Bohrung 2 mm Dmr. versehen, in denen vor dem Einsetzen in den Vergütungsofen je 12 Proben mit Draht aufgefaßt wurden.

Bei der Bestimmung der Anlaßtemperaturkurven für 20 mm Dmr. wurde von den ermittelten Ac_3-Punkten ausgegangen. Als Härtetemperatur wurde $Ac_3 + 30^0$ C, $Ac_3 + 60^0$ C, $Ac_3 + 90^0$ C gewählt. Das Anlassen erfolgte in dem Temperaturbereich von 420 bis 730° C. Die Anlaßtemperatur wurde um jeweils 20° bzw. 10° C gesteigert. Jeder Kurvenpunkt wurde mit einem Wert belegt.

Bei der Bestimmung der Anlaßtemperaturkurven für Blech 2 mm dick wurden für die Sorte B beider Lieferwerke 900° C und für die Sorte E beider Lieferwerke 890° C als Härtetemperatur angewendet. Die gehärteten Bleche wurden teils 30, teils 60 min lang bei Temperaturen zwischen 500 und 660° C bzw. 720° C angelassen. Die Kurven wurden in Zwischenräumen von 40 zu 40° C mit Punkten, die aus je drei Ergebnissen gebildet wurden, gezeichnet.

Bei allen Untersuchungen wurde in Öl abgelöscht. Das Öl hatte folgende Daten: Flammpunkt 270 bis 280° C, Viskosität bei 50° C = 16 E, spez. Gewicht $(d_{15}) = 0{,}93$ bis 0,94, Reaktion neutral. Die Öltemperatur lag nach dem Abschrecken in allen Fällen unter 40° C. Alle Proben wurden bei 650° C eingesetzt und auf die entsprechende Härtetemperatur gebracht. Die Härtetemperatur wurde 30 min gehalten, dann wurden die aus dem Ofen herausgenommenen Proben in einem daneben aufgestellten Ölbehälter sofort abgeschreckt. Die Proben wurden bis zur Annahme der Temperatur des Öles im Ölbad bewegt.

Die gehärteten Proben wurden von anhaftendem Öl befreit und bei der jeweiligen Anlaßtemperatur in den Ofen eingesetzt. Nach Wiedererreichen der eingestellten Anlaßtemperatur wurde der Ofen rd. 30 min konstant auf Temperatur gehalten, worauf die Proben aus dem Ofen genommen und in unbewegter Luft hängend abgekühlt wurden. Der

verwendete Muffelofen arbeitete mit Temperaturabweichungen von ± 5° C.

3. Lufthärtungsversuche.

Zur Ermittlung der Lufthärtungseigenschaften wurden je Sorte und Hersteller aus Stabmaterial 20 mm Dmr. 10 Zugstäbe, auf 11 mm Dmr. vorgearbeitet, hergestellt. Als Vergleich wurden zur Prüfung gleichartige Stäbe aus Flw. 1452.4 angefertigt. Alle Stäbe wurden an einem Ende mit einer Bohrung von 2 mm Dmr. versehen, in denen vor dem Einsetzen in den Vergütungsofen je 10 Stäbe gleicher Sorte und Hersteller auf Stahldraht aufgefaßt wurden. Nach der Wärmebehandlung wurden die Zugstäbe auf 10 mm — entsprechend Probenform B, Bild 28 — abgedreht.

4. Abschreckhärte und Durchhärtevermögen.

Die Abschreckhärte wurde an 1 und 10 mm dicken Blechen sowie an Stäben von 20, 50 und 150 mm Dmr. ermittelt. Die Härtetemperatur betrug für die Sorte B 900° und für die Sorte E 890° C. Abgeschreckt wurde in Öl gleicher Zusammensetzung, wie unter a2 angegeben.

Das Durchhärtevermögen wurde an Stabmaterial 50 und 150 mm Dmr. untersucht. Beim Stab mit 50 mm Dmr. waren die angewendeten Härtetemperaturen Ac_3 + 30° C, Ac_3 + 60° C und Ac_3 + 90° C, während die für Stäbe von 150 mm Dmr. für die Sorte B bei 900° und für die Sorte E bei 890° C lagen. Das Öl hatte nach dem Ablöschen der Abschnitte 150 mm Dmr. eine Temperatur von 60° C.

5. Nachweis der Anlaßsprödigkeit.

Nach K. Reichel[4]) wird die Anlaßsprödigkeit durch Abschrecken kurz unterhalb und oberhalb der Ac_3-Umwandlung und langsames Abkühlen des gehärteten Stahles unterhalb der Ac_1-Umwandlung begünstigt. Sie wird durch längeres Anlassen unterhalb der Ac_1-Umwandlung beseitigt oder verhindert. Zwecks einwandfreien Nachweises von Anlaßsprödigkeit wurde deshalb wie folgt verfahren: Sämtliche Proben wurden nach dem Glühen oberhalb Ac_3 in Wasser abgeschreckt und nach dem Härten 30 min lang bei 650° C angelassen. Die eine Hälfte der Proben wurde sofort in Wasser abgeschreckt, die andere mit einer Geschwindigkeit von 0,3° C pro min im Ofen bis auf 400° C abgekühlt, bei dieser Temperatur aus dem Ofen genommen und in unbewegter Luft hängend abgekühlt. Vergleichsweise wurde der Flw. 1452, der bekanntlich nicht anlaßspröde ist, mitgeprüft. Die Härtetemperatur für diesen war 850° C, für die Sorte B 900° C und für die Sorte E 890° C.

b) Zugversuche.

Um die durch Interpolation aus den Anlaßtemperaturkurven ermittelten günstigsten Härte- und Anlaßtemperaturen zu belegen, wurden zur Bestimmung der Zugfestigkeit, der 0,2-Grenze, des Streckgrenzenverhältnisses und der Dehnung δ_{10} aus den vergüteten Stäben von 20 und 50 mm Dmr. je Sorte und Lieferwerk 15 bzw. 10 Zugstäbe nach Probenform B, Bild 28, angefertigt. Die vergüteten Abschnitte 20 mm Dmr. wurden in eine Zug- und eine Kerbschlagprobe getrennt und dann fertig bearbeitet, während die Zugstäbe aus Stäben mit 50 mm Dmr. aus dem Kern herausgearbeitet wurden. Die 1 mm dicken Blechproben wurden vor dem Vergüten mittels einer Stanze aus den Blechtafeln herausgestanzt und nach dem Vergüten entgratet und abgezogen.

Aus zwei Tafeln Blech jeder Lieferfirma und Sorte wurden je 50 Proben längs und quer zur Walzrichtung entnommen. Jede zweite Probe wurde mit der Azetylenflamme stumpfgeschweißt, und zwar beide Stähle des Lieferwerkes I mit Schweißdraht Flw. 1452.0, die Stähle B und E des Lieferwerkes II dagegen mit den entsprechenden Schweißdrähten Sorte B und E des Lieferwerkes II. Für geschweißte und ungeschweißte Proben wurde die Probenform A in Bild 28 verwendet.

[4]) K. Reichel, Beitrag zur Kenntnis der Anlaßsprödigkeit. Dr.-Ing. Dissertation (Freiberg: Sachs. Bergakademie 1933).

Vor dem Schweißen wurden die Stäbe in der Mitte bis auf einen 1 mm breiten Steg eingesägt. Die Proben wurden erst nach dem Schweißen vergütet.

c) Kerbschlagprüfung.

Die Kerbschlagzähigkeit wurde an DVM-Proben (Probenform C Bild 28) 10 × 10 × 55 mm, Rundkerb 2 mm Dmr., Auflageentfernung 40 mm ermittelt. Aus dem Stabmaterial 50 mm Dmr. wurden die Kerbschlagproben aus dem Kern entnommen, während bei Stabmaterial 20 mm Dmr., das an der Zugprobe befindliche Rundmaterial auf die Normabmessung verarbeitet wurde. Die Anlaßtemperaturkurvenpunkte sind mit einem Wert, die durch Interpolation herausgefundenen günstigsten Vergütungstemperaturen mit 25 Werten belegt worden.

Zur Ermittlung der Anlaßsprödigkeit wurden vorgearbeitete Kerbschlagproben 11 × 11 × 58 mm verwendet, die nach dem Anlassen ebenfalls auf 10 × 10 × 55 mm abgearbeitet wurden. Von jeder Sorte beider Lieferwerke sind je 5 Proben nach dem Anlassen in Wasser und je 5 im Ofen langsam abgekühlt worden.

d) Brinellhärteprüfung.

Die Brinellhärte wurde an Kerbschlag- und an Zugproben ermittelt. Die Zugproben wurden vor der Prüfung mittels Schleifpapier an den Stellen, an denen der Eindruck erfolgen sollte, sauber plan geschliffen. Die Brinellhärteprüfung selbst wurde auf einer Schopper-Brinellpresse nach DIN 1605 mit 5/750/30 durchgeführt.

Die Durchhärtung des Stabes mit 50 mm Dmr. wurde nur mittels Brinellhärteprüfung festgestellt. Hierbei wurden die Eindrücke auf den Querschnitt der Probe verteilt.

e) Gefügeuntersuchungen.

Zur Beurteilung der Korngrößenveränderung durch die Warmbehandlung, der Überhitzungsunempfindlichkeit und der Durchhärtung waren metallographische Untersuchungen notwendig. Es wurden deshalb zur Prüfung Schliffe sowohl im gehärteten als auch im vergüteten Zustand von den einzelnen Proben entnommen. Die Durchhärtung des Stabes mit 150 mm Dmr. wurde an besonders wärmebehandelten Probeabschnitten metallographisch untersucht, nachdem die 150 mm langen Stangenabschnitte nach der Warmbehandlung in entsprechende Schliffproben für Randzone, Kernzone und Kern zerlegt waren.

C. Versuchsergebnisse.

a) Wärmebehandlung.

1. Haltepunktbestimmungen.

Es wurden die in Zahlentafel 2 aufgeführten Haltepunkte ermittelt. Die Ac_1-Punkte zeigen innerhalb der gleichen Stahlsorte bis zu 6° C Abweichungen voneinander. Die Ac_3-Punkte dagegen liegen bei der Sorte E um 16° C, bei der Sorte B um 27° C auseinander. Diese Unterschiede können mit den Abweichungen in der chemischen Zusammensetzung, vor allem was den Vanadingehalt anbelangt, der, wie schon vorher ausgeführt, bei den Halbzeugen des Lieferwerkes I um rd. 0,1% höher liegt als bei denen des Lieferwerkes II, in Verbindung stehen. Auch auf das metallurgische und technologische Herstellungsverfahren können diese verschiedenen hohen Haltepunkte zurückzuführen sein.

Zahlentafel 2. Haltepunktbestimmungen.

Lfd. Nr.	Lieferwerk	Sorte	Haltepunkt Ac 1	Haltepunkt Ac 3
1	I	B	754°	824°
2	II	B	748°	851°
3	I	E	735°	831°
4	II	E	739°	815°



2. Bestimmung von Anlaßtemperaturkurven.

Die Werte der Zerreiß- und Kerbschlagversuche zwecks Bestimmung von Anlaßtemperaturkurven sind in Bild 1 bis 8 eingezeichnet und zu Kurven verbunden. Wie diese zeigen, sind besonders die Brinellhärte und die Zugfestigkeit (Bild 2, 4, 6 und 8) ein Maßstab für den Vorgang beim Härten und Anlassen. Sowohl bei der Sorte B als auch bei der Sorte E tritt Ausscheidungshärtung oberhalb 520° C auf. Bei der Sorte E ist dies auffälliger als bei der Sorte B. Während bei Härtetemperaturen Ac_3 + 30° C der Abfall der Härte in dem Ausscheidungshärtungsbereich dem von Stählen, die keine Ausscheidungshärtung zeigen, ähnlich ist, geht der Abfall der Härte bei Härtetemperaturen Ac_3 + 60° C weniger schroff vor sich. Bei Härtetemperaturen Ac_3 + 90° C tritt bereits ein erheblicher Härteanstieg ein, der erst oberhalb 640° C in einen raschen Abfall übergeht. Die Härte erreicht vereinzelt sogar Werte, die über die durch Anlassen bei 420° C erhaltenen hinausgeht (Bild 4 und 6).

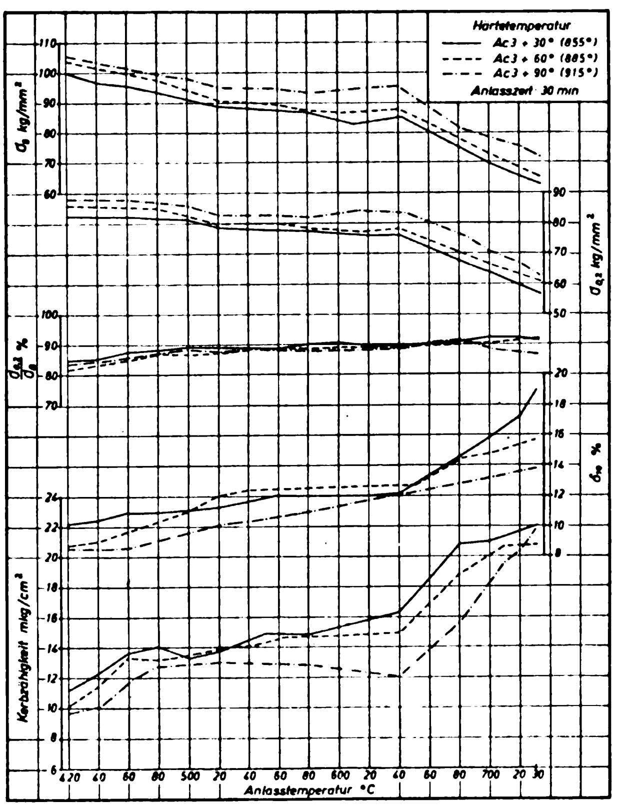


Bild 1. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte B, Lieferfirma I.

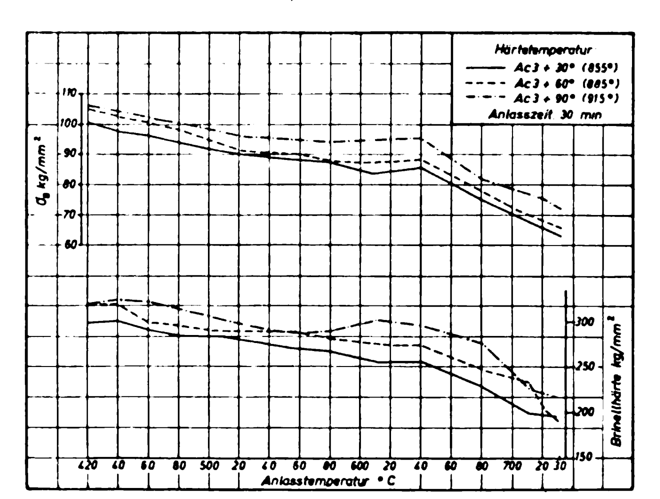


Bild 2. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte B, Lieferfirma I.

In gleicher Weise wie die Zugfestigkeit und Härte verhält sich auch die Streckgrenze in dem Ausscheidungshärtungsbereich. Bei Härtetemperaturen Ac_3 + 90° C steigt sie ebenfalls merklich an (Bild 1, 3, 5 und 7). Gegenüber Härtetemperaturen Ac_3 + 60° C tritt eine Streckgrenzenerhöhung bei der Sorte E um rd. 10 kg/mm² ein.

Mit steigender Anlaßtemperatur wird beim Einsetzen der Ausscheidungshärtung der Dehnungsanstieg gehemmt. Jedoch wirkt sich der Einfluß der Ausscheidungshärtung nicht so auffallend aus wie bei der Zugfestigkeit und der Härte. Größenordnungsmäßig liegen die Unterschiede bei den einzelnen Härtetemperaturen bei ungefähr 1% Dehnung.

Die Kerbzähigkeit wird im Ausscheidungshärtungsgebiet bei den Härtetemperaturen Ac_3 + 30° C und Ac_3 + 60° C nur unwesentlich verändert. Erst bei Ac_3 + 90° C wird ein Abfall der Kerbzähigkeit infolge der sich ausscheidenden Karbide beobachtet. Der Abfall hält sich jedoch gegenüber

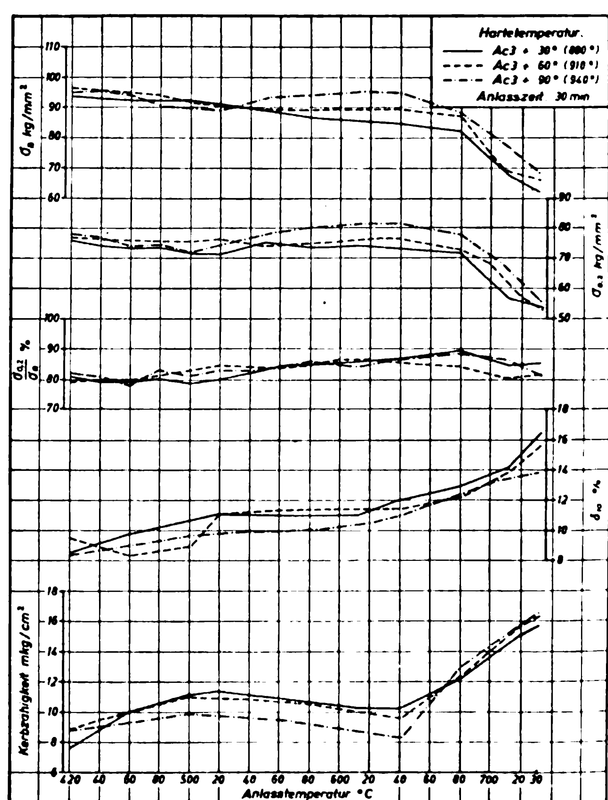


Bild 3. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte B, Lieferfirma II.

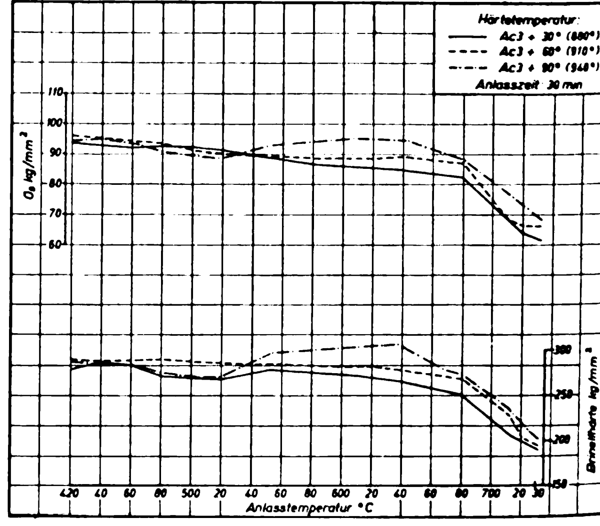


Bild 4. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte B. Lieferfirma II.

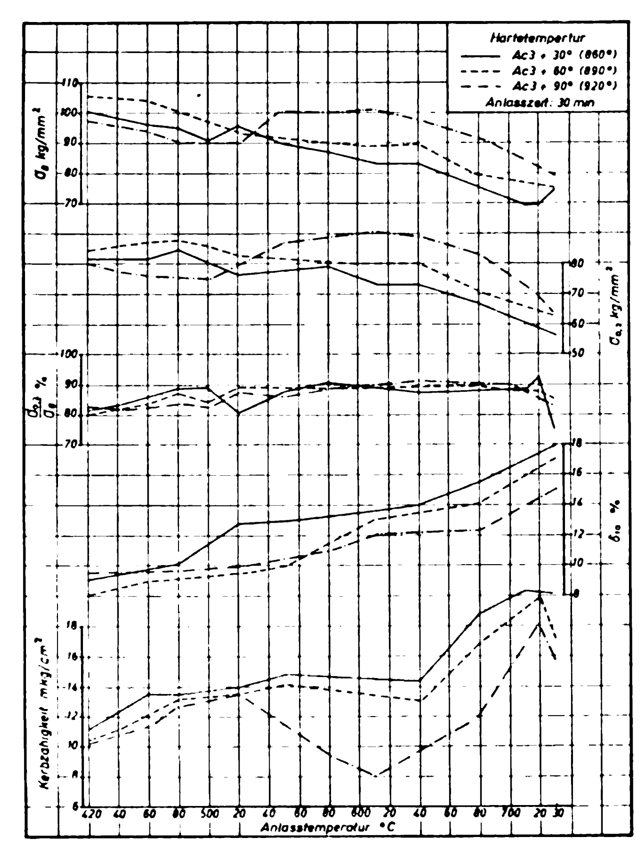


Bild 5. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte E, Lieferfirma I.

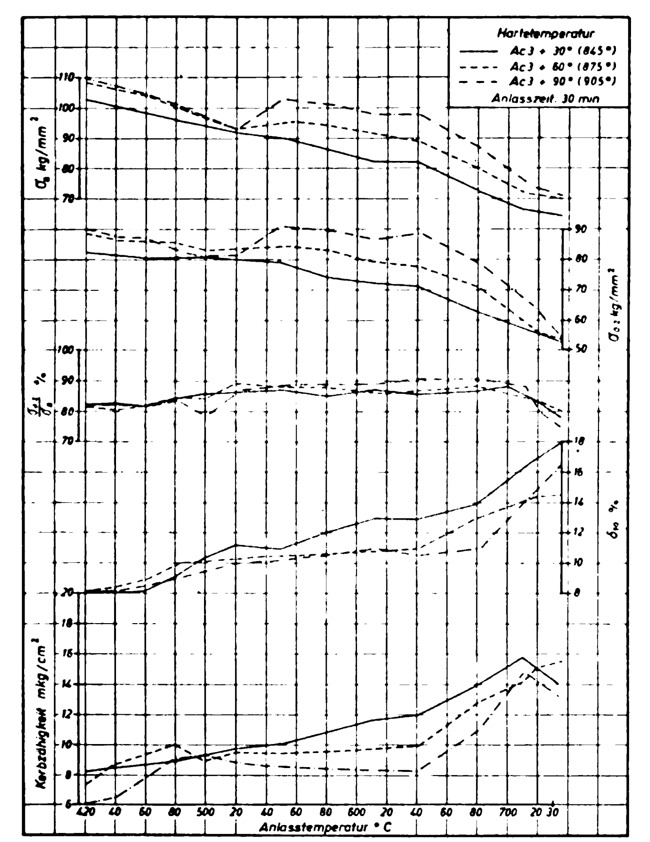


Bild 7. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte E, Lieferfirma II.

den durch Anlassen kurz oberhalb 400° C ermittelten Werten in mäßigen Grenzen.

Das Streckgrenzenverhältnis liegt zwischen 80 und 90%. Es wird durch die Ausscheidungshärtung nicht wesentlich

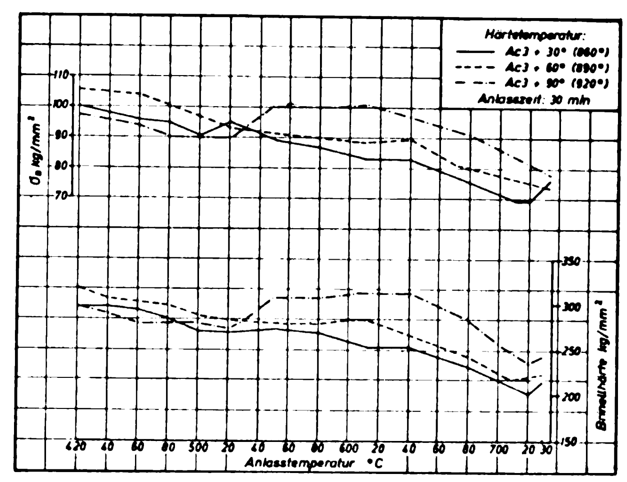


Bild 6. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte E, Lieferfirma I.

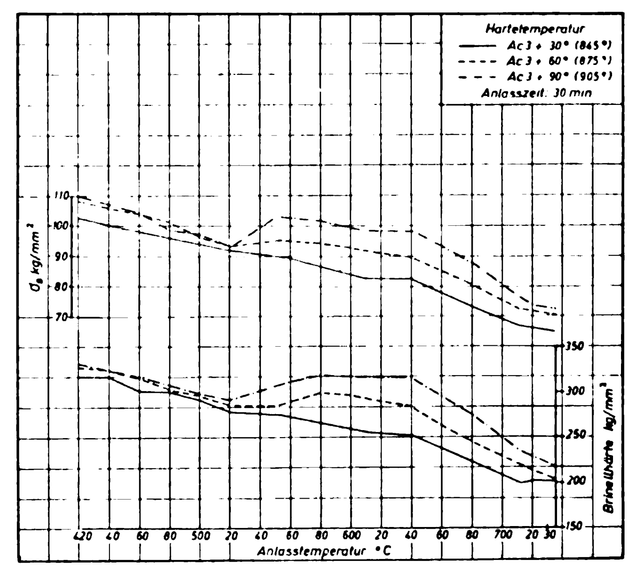


Bild 8. Anlaßtemperaturkurven für Stäbe mit 20 mm Dmr. Stahlsorte E, Lieferfirma II.

verändert, da in diesem Gebiet sowohl die Zugfestigkeit als auch die Streckgrenze sich ungefähr gleichlaufend ändern.

Das Hauptziel, durch eine geeignete Wärmebehandlung die beiden Stähle sowohl auf die Zugfestigkeitsbereiche 90 bis 105 kg/mm² als auch 110 bis 125 kg/mm² zu vergüten, ist bei den angewendeten Härtetemperaturen (Bild 1 bis 8) nicht erreichbar. Die Härtetemperaturen noch weiter über Ac_3 hinaus zu erhöhen, wurde aus praktischen Erwägungen nicht für zweckmäßig gehalten, da bei sehr hohen Härtetemperaturen mit einer starken Randentkohlung und erheblichem Verzug geschweißter und ungeschweißter Bauteile zu rechnen ist.

Da im Prinzip das Verhalten der beiden Chrom-Vanadin-Stähle beim Härten und Anlassen an dem Stabmaterial 20 mm Dmr. geklärt werden konnte, wurde bei Aufstellung der Anlaßtemperaturkurven mit 2 mm starken Blechen von dem bisher gewählten Verfahren, den Härtetemperaturen die Ac_3-Punkte zugrunde zu legen, abgewichen. Nach den in Bild 1 bis 8 gezeichneten Kurven waren die günstigsten Vergütungsergebnisse mit Härtetemperaturen, die für die Sorte B bei 900° C und für die Sorte E bei 890° C liegen, zu erwarten. Diese Härtetemperaturen wurden deshalb zur Aufstellung der Anlaßtemperaturkurven für Bleche und für alle nachfolgenden Vergütungsversuche angewendet. In Bild 9 bis 12 sind die ermittelten Ergebnisse eingezeichnet und zu Kurven verbunden. Bei einer vergleichenden Gegenüberstellung dieser Anlaßtemperaturkurven mit denen für Stäbe von 20 mm Dmr., fällt besonders die erheblich höhere Zugfestigkeit der 2 mm starken Bleche bei den zwischen

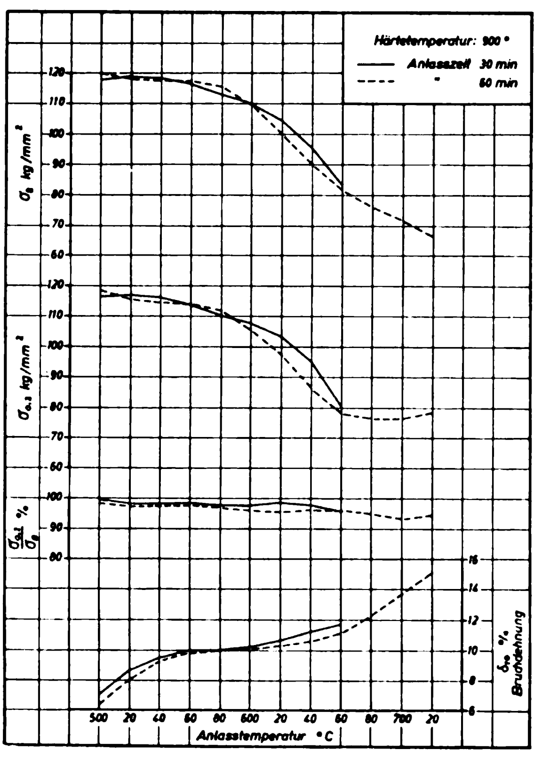


Bild 9. Anlaßtemperaturkurven für Blech 2 mm dick. Stahlsorte B, Lieferfirma I.

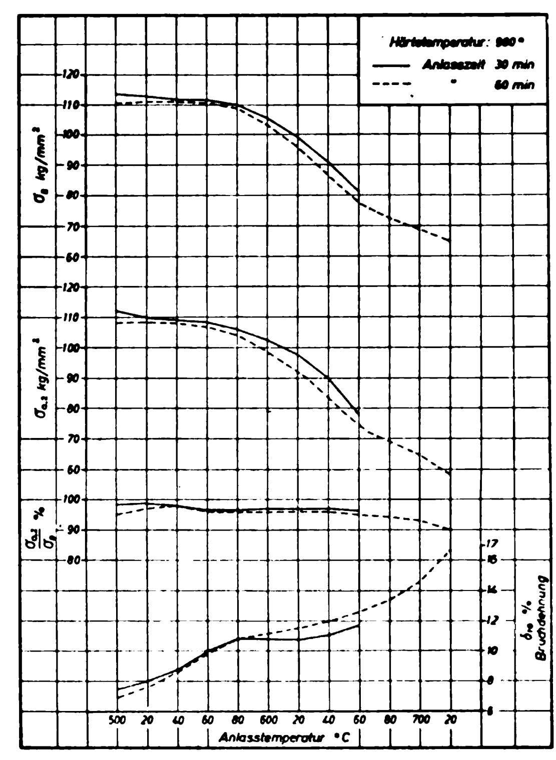


Bild 10. Anlaßtemperaturkurven für Blech 2 mm dick. Stahlsorte B. Lieferfirma II.

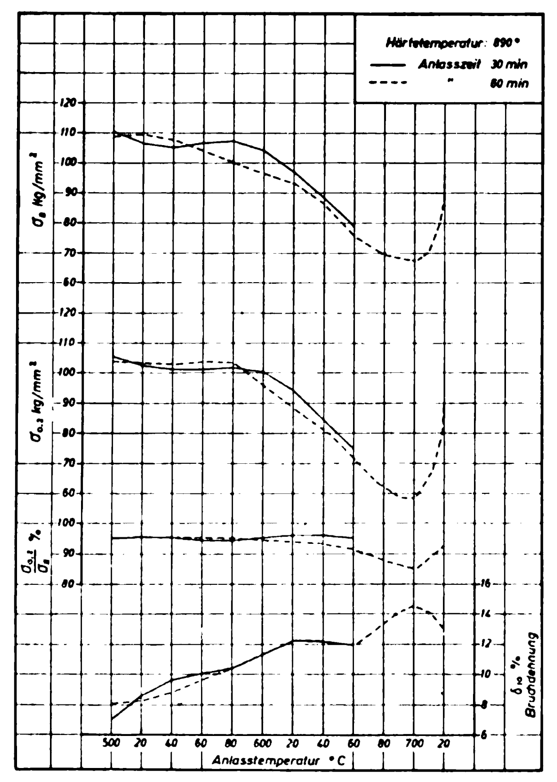


Bild 11. Anlaßtemperaturkurven für Blech 2 mm dick. Stahlsorte E. Lieferfirma I.

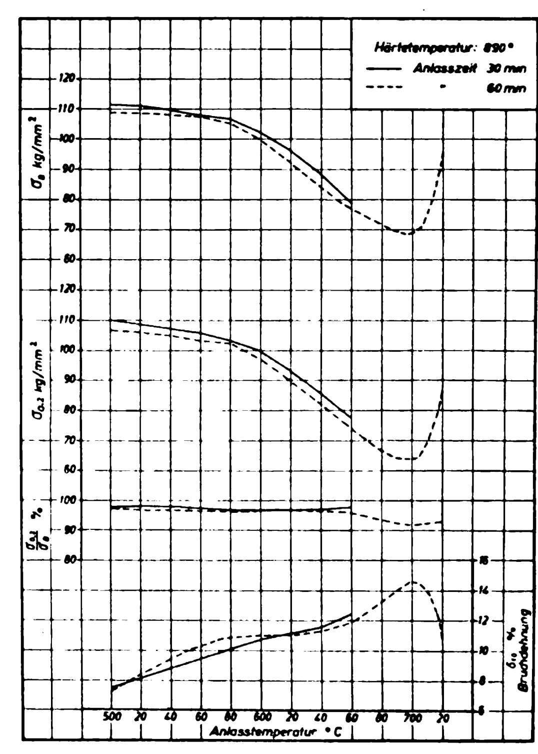


Bild 12. Anlaßtemperaturkurven für Blech 2 mm dick. Stahlsorte E. Lieferfirma II.

500° C und 600° C liegenden Anlaßtemperaturen auf. So liegt beispielsweise bei fast gleicher Härtetemperatur und einer Anlaßtemperatur von 500° C die Zugfestigkeit der Stahlsorte B 20 mm Dmr. im Mittel um 93 kg/mm², die der Bleche 2 mm dick dagegen im Mittel um 116 kg/mm². Der Unterschied zwischen beiden Abmessungen beträgt demnach 23 kg/mm². Beim Anlassen oberhalb 600° C ist der Abfall sowohl der Zugfestigkeit als auch der Streckgrenze bei den 2 mm dicken Blechen größer als bei dem Stab mit 20 mm Dmr. Bei Anlaßtemperaturen um 700° C nähern sich die verschieden starken Halbzeuge mit ihren mechanischen Werten fast vollkommen.

Der Verlauf der Dehnung ist bei beiden Abmessungen ähnlich, wogegen der Stab mit 20 mm Dmr. eine im Mittel um ungefähr 1% höhere Dehnung gegenüber den Blechen 2 mm dick aufweist.

Weiter muß noch auf die Unterschiede des Verhältnisses von Streckgrenze zu Zugfestigkeit bei den 2 mm starken Blechen und Stäben mit 20 mm Dmr. hingewiesen werden. Beim Blech liegt das Streckgrenzenverhältnis ober-

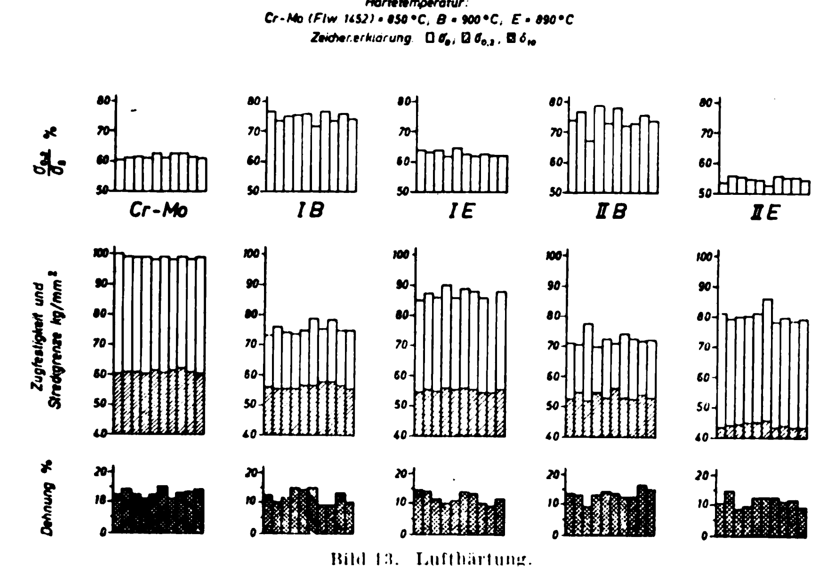


Bild 13. Lufthärtung.

wiederum härtet bei Luftabkühlung stärker als die Sorte B. Besonders bei der Betrachtung des Streckgrenzenverhältnisses kommt diese Tatsache recht deutlich zum Ausdruck. Sowohl Flw. 1452 als auch Stahl E hat ein solches von 60% oder kleiner, während das von Stahl B ungefähr 70% beträgt. Durch die Dehnung kommen diese die Lufthärtung kennzeichnenden Merkmale nicht zum Ausdruck. Bei allen Stählen liegt, von einigen Unregelmäßigkeiten abgesehen, die Dehnung bei 10%.

4. Abschreckhärte und Durchhärtevermögen.

Die Ergebnisse der Untersuchung der Abschreckhärte, wiedergegeben in Bild 14 und 15, zeigen, daß mit den gewählten Härtetemperaturen für die einzelnen Abmessungen recht unterschiedliche Abschreckhärten erhalten werden. Während die Abschreckhärte der 1 mm dicken Bleche oberhalb 160 kg/mm² liegt, erreichen die 20 mm dicken Stangen in

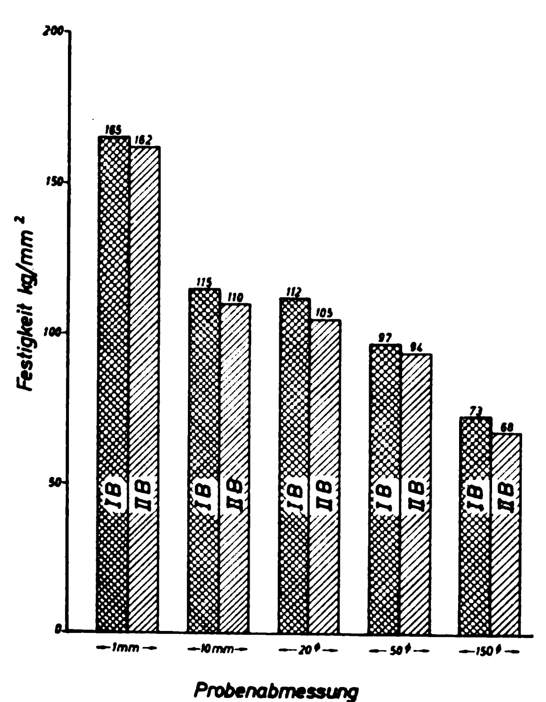


Bild 14. Abschreckfestigkeit der Stahlsorte B. Härtetemperatur 900° C.

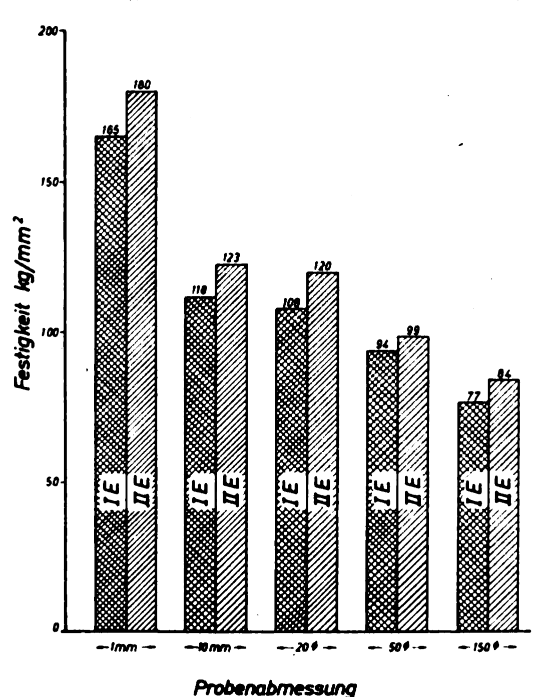


Bild 15. Abschreckfestigkeit der Stahlsorte E. Härtetemperatur 890° C.

halb 95%, bei Stäben 20 mm Dmr. in den meisten Fällen unter 90%.

Um ferner den Einfluß der Anlaßzeit auf das Verhalten der statischen Eigenschaften zu ermitteln, wurde ein Teil der 2 mm dicken Bleche teils ½ h, teils 1 h angelassen. Die Kurven in Bild 9 bis 12 veranschaulichen ebenfalls die ermittelten Ergebnisse. Der Einfluß der Anlaßzeit auf Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dehnung ist ohne praktische Bedeutung. Im Gebiet stärkster Ausscheidungshärtung sind Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dehnung der ½ und 1 h angelassenen Proben ungefähr gleich hoch.

3. Lufthärtungsversuche.

In Bild 13 sind Zugfestigkeit, Streckgrenze, Streckgrenzenverhältnis und Dehnung der untersuchten Proben nach der Lufthärtung zusammengestellt. Danach ist Flw. 1452, der vergleichsweise in die Prüfung miteinbezogen wurde, stärker lufthärtend als beide Stähle Sorte B und E. Die Sorte E

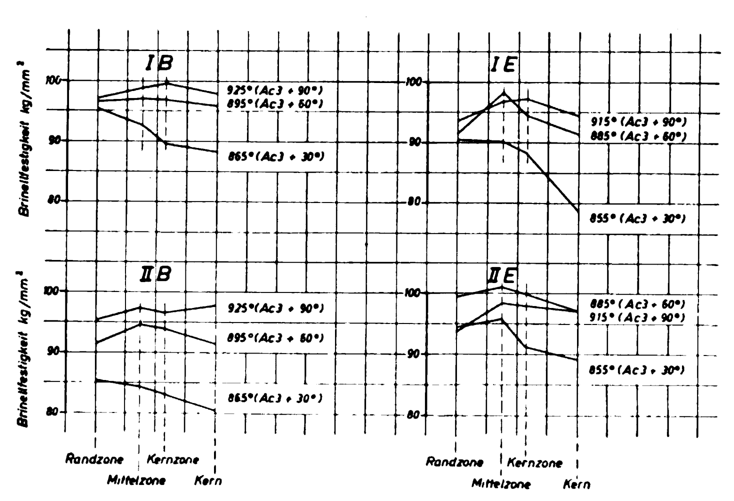


Bild 16. Einfluß der Abschrecktemperatur auf Durchhärtung und Abschreckhärte von Stäben mit 50 mm Dmr.

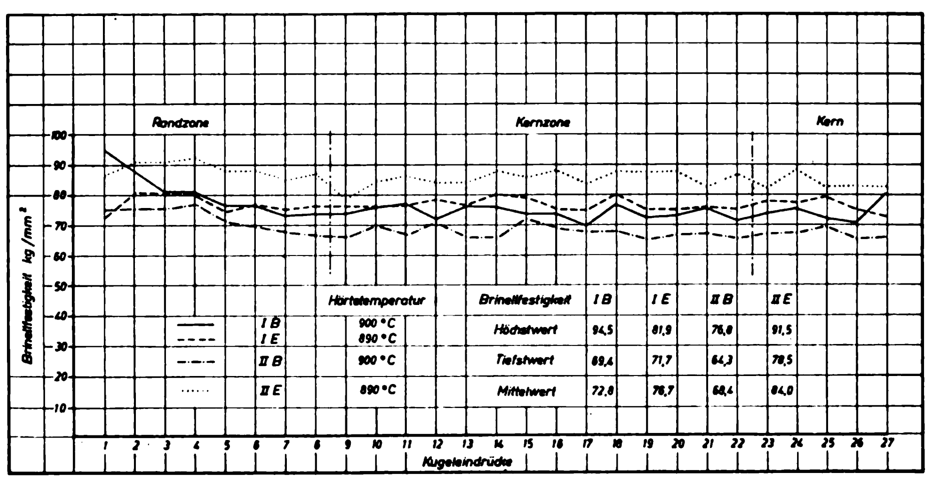


Bild 17. Abschreckhärte von Stäben mit 150 mm Dmr.

keinem Fall 125 kg/mm². Stäbe mit 150 mm Dmr. kommen noch nicht einmal an die untere Grenze des Festigkeitsbereiches 90 bis 105 kg/mm² heran. 50 mm dicke Stangen erreichen nach Härten und Ablöschen in Öl noch die Festigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm².

Bild 16 zeigt die Abschreckhärte und das Durchhärtevermögen von Stäben mit 50 mm Dmr., Bild 17 das von Stäben mit 150 mm Dmr. Aus Bild 16 geht deutlich hervor, wie stark das Vanadin an den Härtungsvorgängen beteiligt ist. Nicht nur die Absoluthärte steigt mit ansteigender Härtetemperatur, sondern auch das Durchhärtevermögen verbessert sich. Während bei den kurz oberhalb Ac_3 (Ac_3 + 30° C) liegenden Härtetemperaturen der Kern der untersuchten Stähle noch in der Härte beträchtlich niedriger ist als die Kernzone, tritt bei Härtetemperaturen Ac_3 + 90° C Durchhärtung ein. Die teilweise unter den Härtewerten der Kernzone liegenden Werte der Randzone sind auf eine teilweise stattgefundene geringfügige Randentkohlung zurückzuführen. In Bild 17 wird die bereits obenerwähnte Tatsache, daß Stangen von 150 mm Dmr. beim Ablöschen in Öl von einer Abschrecktemperatur, die für Sorte B 900° C und für Sorte E 890° C beträgt, den Festigkeitsbereich 90 bis 105 kg/mm² nicht mehr erreicht, bestätigt. Die Gegenüberstellung der Brinellfestigkeiten von Randzone, Kernzone und Kern zeigt trotz des verschiedenen Gefüges gleichmäßige Werte.

5. Nachweis der Anlaßsprödigkeit.

Die Versuchsergebnisse sind in Bild 18 zusammengestellt. Bis auf den Stahl E des Lieferwerkes I zeigen die Kerbzähigkeitswerte zwischen den nach dem Anlassen in Wasser abgeschreckten und den nach dem Anlassen im Ofen langsam abgekühlten Proben keinen Abfall. Die Kerbzähigkeit des Stahles E des Lieferwerkes I ist durch die langsame Abkühlung im Ofen dagegen im Mittel um 30% zurückgegangen. Dieser Stahl neigt demnach zur Anlaßsprödigkeit. Auch das Bruchgefüge der beiden verschieden schnell abgekühlten Proben unterscheidet sich voneinander. Die von 650° C abgeschreckten Proben haben wie alle anderen mituntersuchten Proben einen feinen bis ausgesprochen sehnigen Bruch, während der anlaßspröde Stahl ein muschelförmiges feines Gefüge, das nur vereinzelt sehnig und an diesen Stellen beim Bruch unter dem Pendelschlagwerk aufgerissen ist, besitzt.

b) Zugversuche.

Die Festigkeitseigenschaften jeder Probe sind in Bild 19 bis 26 als Säulen dargestellt. Die Ergebnisse der Blechproben sind geordnet nach Lieferwerken, Stahlsorten längs und quer zur Walzrichtung ungeschweißt, längs und quer zur Walzrichtung geschweißt. Aus den mit 2 mm starken Blechen aufgestellten Anlaßtemperaturkurven (Bild 9 bis 12) wurde für den Zugfestigkeitsbereich 90 bis 105 kg/mm² auf eine Anlaßtemperatur von 620° C, und für den Zugfestigkeitsbereich 110 bis 125 kg/mm² auf eine solche von 500° C für beide Stähle beider Lieferwerke geschlossen. Bei der Anlaßtemperatur 620° C liegen die für die ungeschweißten Bleche (Bild 19, 20) erhaltenen Zugfestigkeiten teils oberhalb, teils innerhalb des Zugfestigkeitsbereiches 90 bis 105 kg/mm². Im besonderen für die Sorte B des Lieferwerkes I ist die Anlaßtemperatur zu niedrig gewählt, während sie für die anderen Stahlsorten Festigkeiten erbracht hat, die den Anforderungen größtenteils entsprechen. Auffallend ist auch das mehr als 90% betragende Streckgrenzenverhältnis bei einer Dehnung

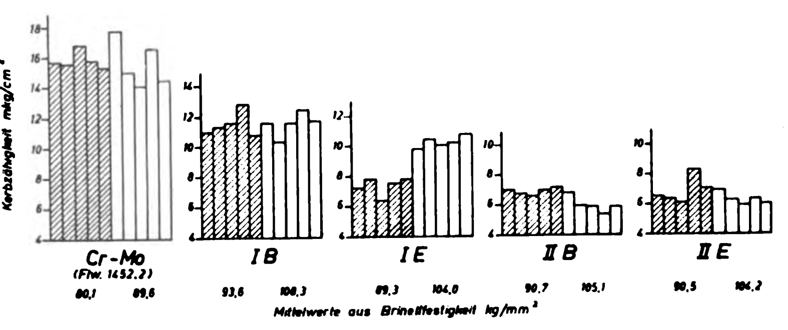


Bild 18. Untersuchung über Anlaßsprödigkeit an Kerbschlagproben aus Blech 10 mm dick.

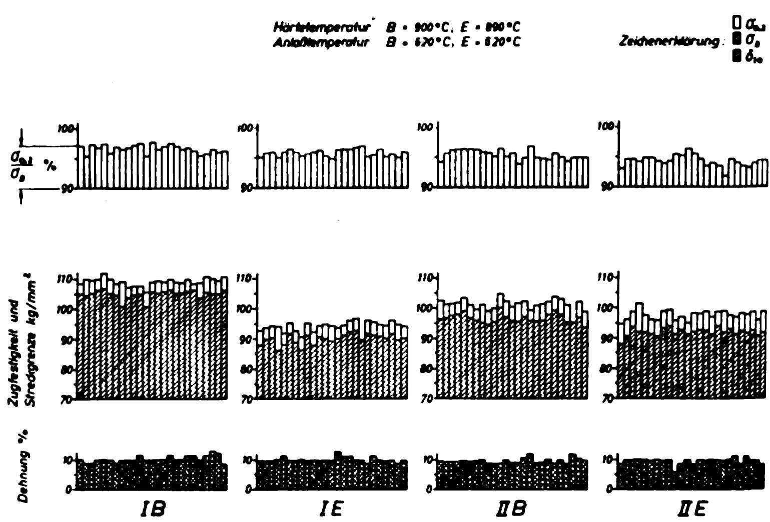


Bild 19. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, ungeschweißt, längs, vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

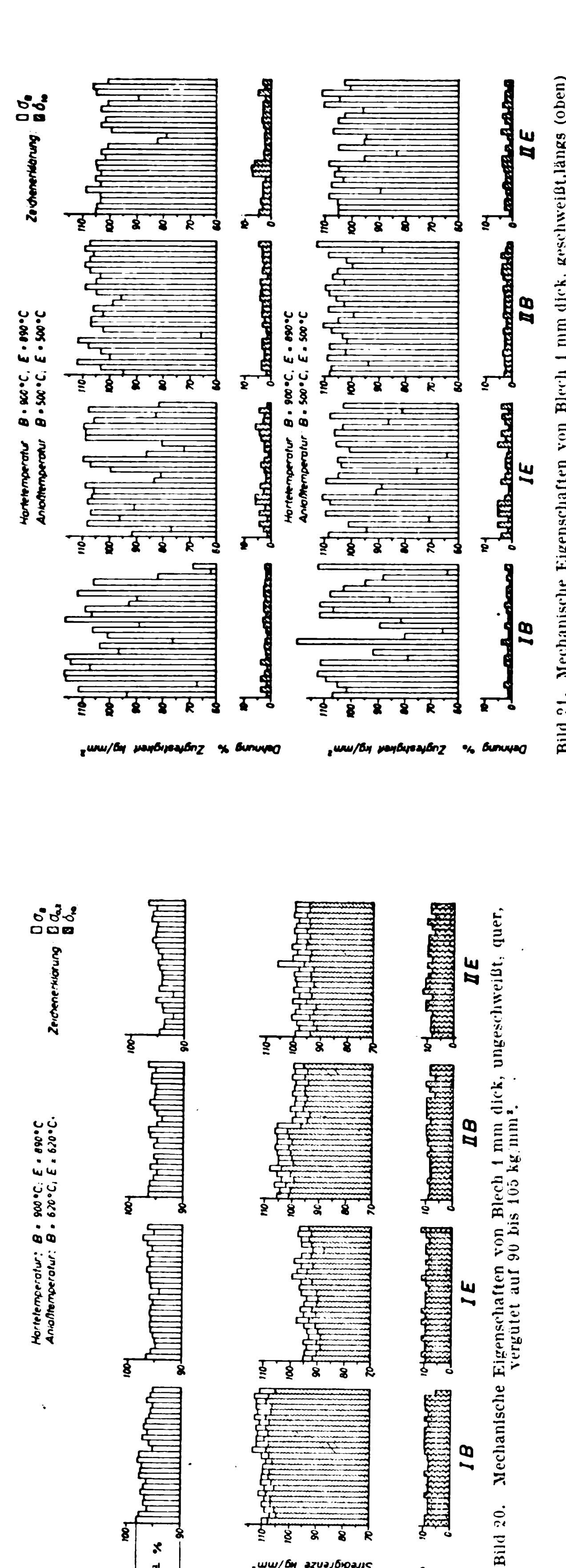


Bild 20. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, ungeschweißt, quer, vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

Bild 22. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, ungeschweißt, längs, vergütet auf 110 bis 125 kg/mm².

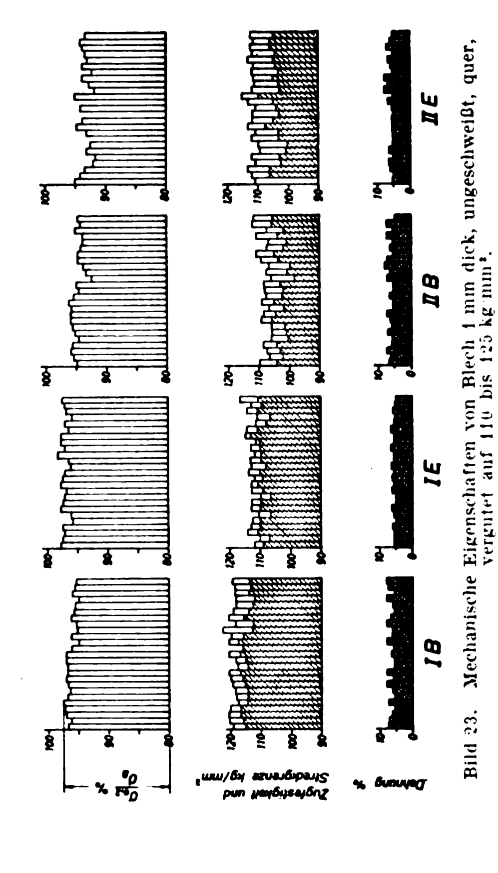


Bild 21. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, geschweißt, längs (oben) und quer (unten), vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

Bild 23. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, ungeschweißt, quer, vergütet auf 110 bis 125 kg/mm².

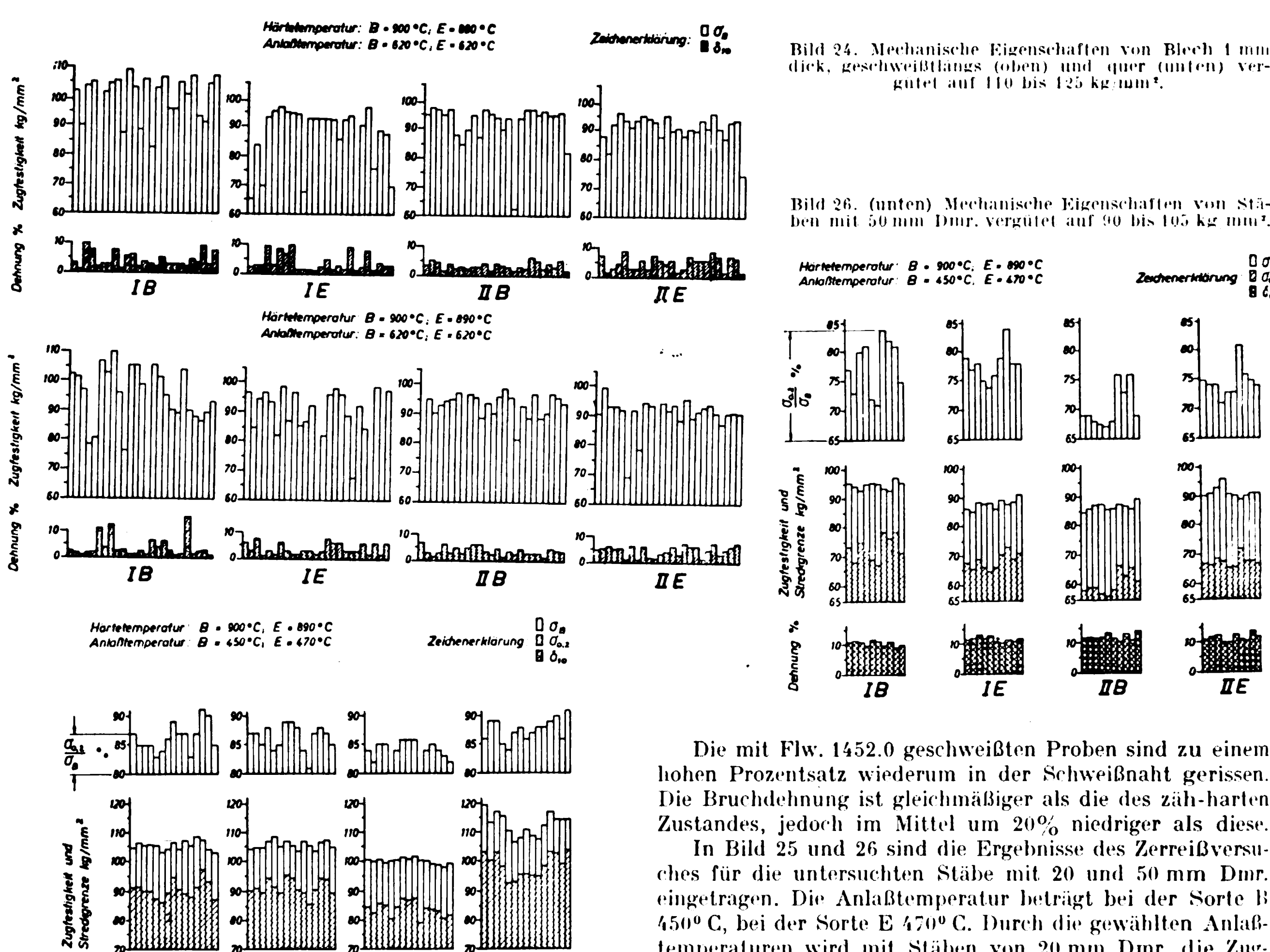


Bild 24. Mechanische Eigenschaften von Blech 1 mm dick, geschweißt längs (oben) und quer (unten) vergütet auf 110 bis 125 kg/mm².

Bild 26. (unten) Mechanische Eigenschaften von Stäben mit 50 mm Dmr. vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

Bild 25. Mechanische Eigenschaften von Stäben mit 20 mm Dmr. vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

(δ_{10}), die bis auf 2 am Übergang gerissene Bleche in allen Fällen größer als 8% ist.

Die geschweißten Proben (Bild 21) zeigen viele Ausfälle, die auf Brüche in der Schweißnaht zurückzuführen sind. Bei den mit Schweißdraht Flw. 1452.0 geschweißten Sorten B und E des Lieferwerkes I liegen quer zur Walzrichtung 40% der Proben unter 90 kg/mm². Entsprechend ungünstig verhält sich auch die Bruchdehnung, die teilweise nur 1 bis 2% beträgt.

Obwohl die Anlaßtemperaturen, die mit den 2 mm dicken Blechen aufgestellt wurden, erwarten ließen, daß mit einer 500° C betragenden Anlaßtemperatur die bei 900 bzw. 890° C gehärteten 1 mm starken Bleche den Zugfestigkeitsbereich 110 bis 125 kg/mm² erreichen, zeigt Bild 22 bis 24, daß die gewählte Anlaßtemperatur teilweise zu hoch liegt. Die Anlaßtemperatur für die Sorte B des Lieferwerkes II muß mindestens um 20° C unterhalb 500° C, die für die Sorte E des Lieferwerkes I ebenfalls unterhalb 500° C liegen. Trotz dieser der Festigkeitsstufe 110 bis 125 kg/mm² nicht restlos entsprechenden Werte, die die Beurteilung etwas stören, ist einwandfrei zu erkennen, daß die Dehnungswerte des Stahles E beider Lieferwerke vor allem quer zur Walzrichtung teilweise unter 6% liegen, während der Stahl B eine durchschnittlich bessere, jedoch nicht über 7% liegende Dehnung aufweist.

Das Streckgrenzenverhältnis ist ebenso wie bei den zähhart vergüteten Proben sehr hoch. Es liegt in allen Fällen über 90, meist sogar über 95%.

Die mit Flw. 1452.0 geschweißten Proben sind zu einem hohen Prozentsatz wiederum in der Schweißnaht gerissen. Die Bruchdehnung ist gleichmäßiger als die des zäh-harten Zustandes, jedoch im Mittel um 20% niedriger als diese.

In Bild 25 und 26 sind die Ergebnisse des Zerreißversuches für die untersuchten Stäbe mit 20 und 50 mm Dmr. eingetragen. Die Anlaßtemperatur beträgt bei der Sorte B 450° C, bei der Sorte E 470° C. Durch die gewählten Anlaßtemperaturen wird mit Stäben von 20 mm Dmr. die Zugfestigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm² von allen Proben erreicht und teilweise um mehr als 5 kg/mm² (Sorte E, Lieferwerk II) überschritten. Die Streckgrenze liegt bei allen Proben so günstig, daß bei fast allen ein Verhältnis von Streckgrenze zu Zugfestigkeit von mehr als 80% zustande kommt. Die Dehnung erreicht bei der Sorte B des Lieferwerkes I im Mittel 7,3%, bei der Sorte E des Lieferwerkes I im Mittel 7,7%, bei der Sorte B des Lieferwerkes II im Mittel 8,0% und bei der Sorte E des Lieferwerkes II 7,0% im Mittel.

Mit den Stäben mit 50 mm Dmr. wird der zäh-harte Zustand, Zugfestigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm², durch die angewendeten Anlaßtemperaturen nur noch von der Sorte B des Lieferwerkes I einwandfrei und von der Sorte E des Lieferwerkes II mit 9 von 10 Proben erreicht. Die Sorten E des Lieferwerkes I und B des Lieferwerkes II bleiben teilweise um mehrere kg/mm² unterhalb 90 kg/mm². Entsprechend ungünstig liegt auch bei der Sorte B des Lieferwerkes II und vereinzelt bei den anderen Sorten die Streckgrenze. Der bisher verwendete Cr-Mo-Stahl hat im zähharten Zustand ein Streckgrenzenverhältnis, das höher als 78% ist. Dieses Streckgrenzenverhältnis wird nur von vereinzelten Proben erreicht oder überschritten.

Die Dehnung beträgt bei allen Stahlsorten im Durchschnitt mehr als 10%. Mit diesen Werten ist sie gegenüber den Stäben mit 20 mm Dmr. um mehr als 2% größer.

c) Kerbschlagprüfung.

In Bild 27 sind die Kerbzähigkeitswerte für das vergütete Stabmaterial eingetragen. Die Kerbzähigkeit für 20 mm Dmr. liegt mit Ausnahme des Stahles E des Lieferwerkes II, dessen Werte um 2 mkg/cm² geringer sind, bei ungefähr 10 mkg/cm². Das Bruchkorn ist bei allen Proben durchweg fein, vereinzelt fein bis körnig. Die geringere Kerbzähigkeit des Stahles E vom Lieferwerk II ist aus dem Bruchkorn nicht zu deuten, da die Gefügeunterschiede

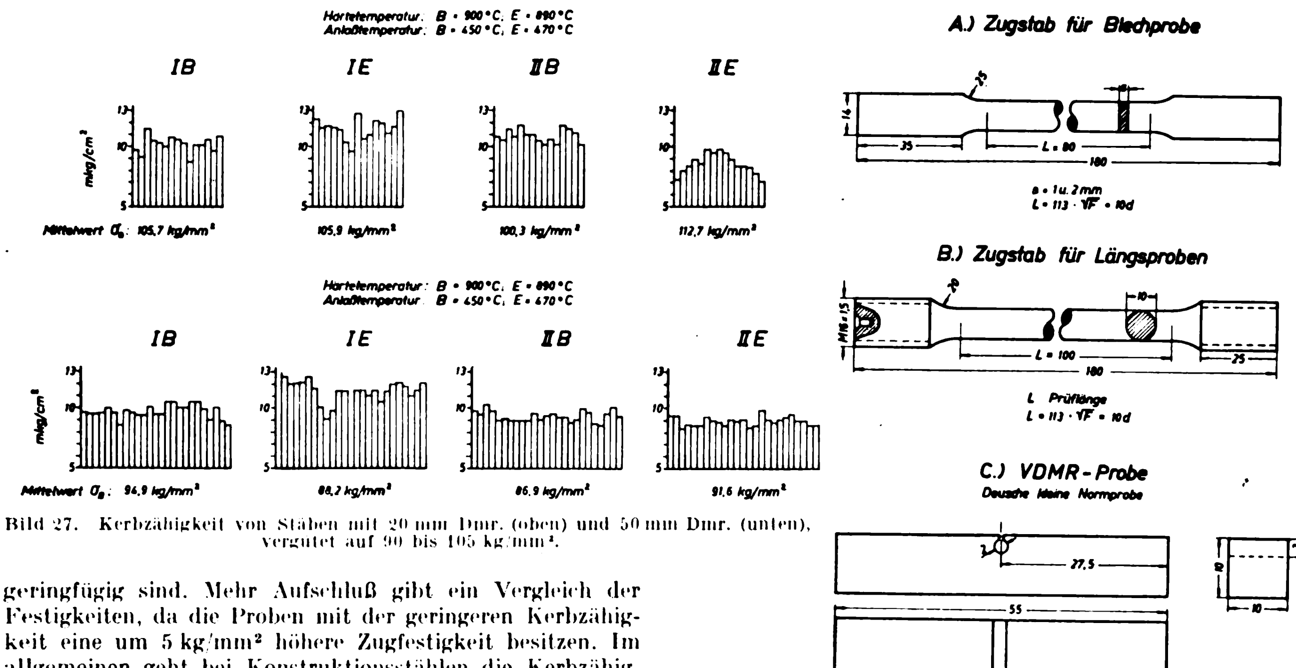


Bild 27. Kerbzähigkeit von Stäben mit 20 mm Dmr. (oben) und 50 mm Dmr. (unten), vergütet auf 90 bis 105 kg/mm².

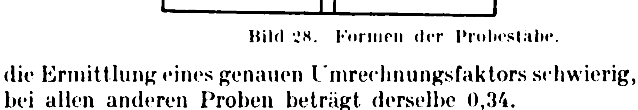


Bild 28. Formen der Probestäbe.

geringfügig sind. Mehr Aufschluß gibt ein Vergleich der Festigkeiten, da die Proben mit der geringeren Kerbzähigkeit eine um 5 kg/mm² höhere Zugfestigkeit besitzen. Im allgemeinen geht bei Konstruktionsstählen die Kerbzähigkeit, je höher die Festigkeit durch Vergütung getrieben wird, zurück. Dieser Fall dürfte auch hier vorliegen. Selbstverständlich sind die Festigkeitsunterschiede derart gering, daß immer noch die Wahrscheinlichkeit offen bleibt, die geringeren Kerbzähigkeitswerte auf die Vorbehandlung im Herstellerwerk zurückzuführen, zumal auch Stäbe mit 50 mm Dmr., die aus der gleichen Charge stammen, in der Kerbzähigkeit gegenüber den anderen Stählen etwas zurückbleiben.

Bei beiden Stählen des Lieferwerkes II ist das Bruchkorn sehnig bis grob, bei dem Stahl B des Lieferwerkes I fein bis sehnig und beim Stahl E fein mit teilweise körniger Ausbildung. Das Bruchkorn läßt auch hier keine Rückschlüsse auf die Vorbehandlung beim Hersteller zu. Größenordnungsmäßig liegt die Kerbzähigkeit in der gleichen Höhe wie bei den Stählen mit 20 mm Dmr. Dabei ist allerdings darauf hinzuweisen, daß die Zugfestigkeit der Stäbe mit 50 mm Dmr. durchschnittlich um mehr als 10 kg/mm² unter der der Stäbe mit 20 mm Dmr. liegt.

d) Brinellhärteprüfung.

Das feststehende Verhältnis der Brinellhärte zur Zugfestigkeit stempelt die Brinellhärte als einfaches, wichtiges Hilfsmittel zur Festigkeitsprüfung. Die durchgeführten Prüfungen gelten deshalb auch der Ermittlung des Umrechnungsfaktors von Brinellhärte auf Brinellfestigkeit. Bei der Prüfung der Proben, die Ausscheidungshärtung zeigen, ist die Ermittlung eines genauen Umrechnungsfaktors schwierig, bei allen anderen Proben beträgt derselbe 0,34.

e) Gefügeuntersuchung.

Bei allen Härtungstemperaturen wurde mit Stäben mit 20 mm Dmr. kein rein martensitisches Gefüge erzielt (Bild 29



Bild 30. Stäbe mit 20 mm Dmr. gehärtet von $Ac_3 + 60$ °C. Stahlsorte B. Lieferfirma II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

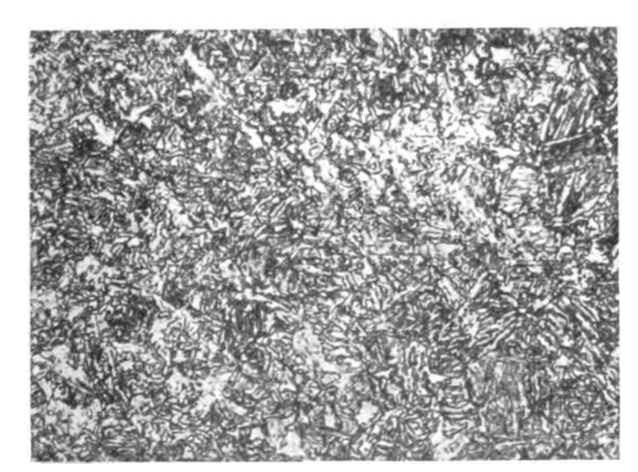


Bild 29. Stäbe mit 20 mm Dmr. gehärtet von $Ac_3 + 30$ °C. Stahlsorte B. Lieferfirma II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.



Bild 31. Stäbe mit 20 mm Dmr. gehärtet von $Ac_3 + 90$ °C. Stahlsorte B. Lieferfirma II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

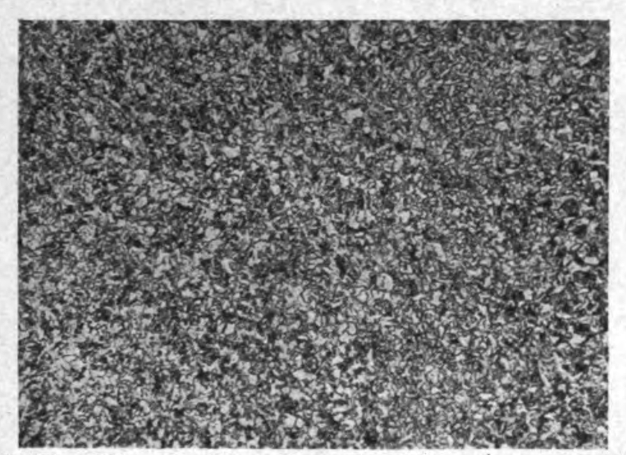


Bild 32. Stäbe mit 150 mm Dmr. Durchhärtungsversuch, Rand. Stahlsorte B. Lieferfirma I. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.



Bild 33. Stäbe mit 150 mm Dmr. Durchhärtungsversuch, Kern. Stahlsorte E, Lieferfirma I. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.

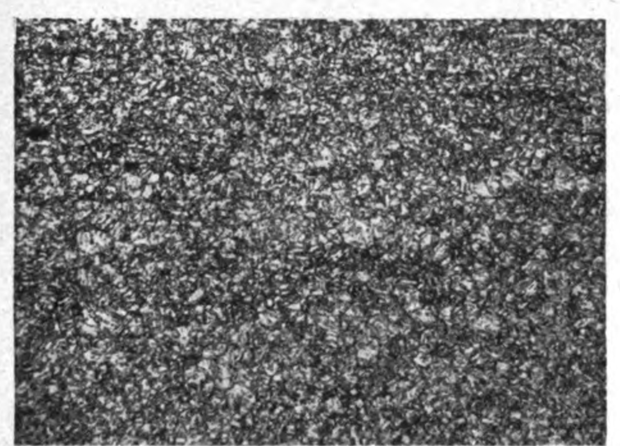


Bild 34. Blech 1 mm dick, vergütet auf 90 bis 105 kg/mm². Stahlsorte B, Lieferfirma I. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.



Bild 35. Blech 1 mm dick, geschweißt und vergütet auf 90 bis 105 kg/mm². Schweißnaht. Stahlsorte B, Lieferfirma II, Schweißdraht Sorte B/II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.

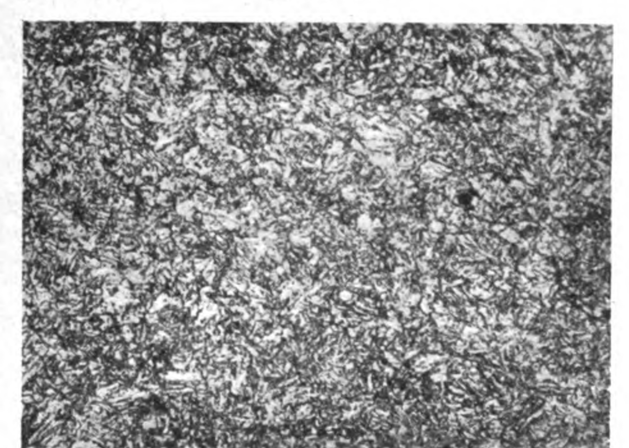


Bild 36. Blech 1 mm dick, geschweißt und vergütet auf 90 bis 105 kg/mm². Schweißnaht. Stahlsorte E, Lieferfirma I, Schweißdraht Flw. 1452.0. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.

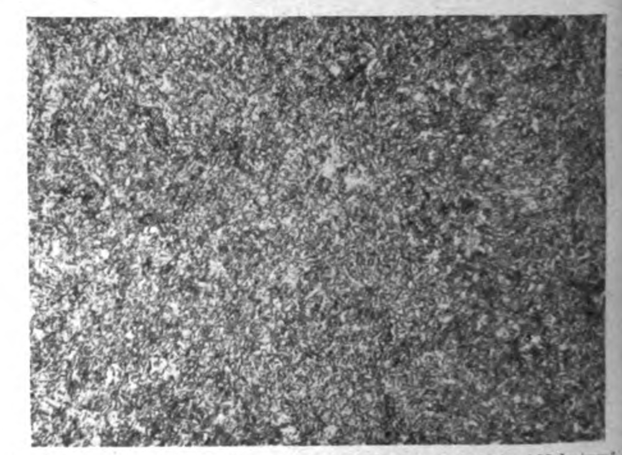


Bild 37. Stäbe mit 20 mm Dmr. vergütet auf 90 bis 105 kg/mm². Stahlsorte B, Lieferfirma II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.

bis 31), sondern neben den einzelnen Martensit-Nadeln sind bereits Ferritkörner ausgeschieden. Wie Bild 29 und 30 zeigt, ist durch Härtung von 30° und 60° C oberhalb Ac_3 das Korn noch sehr fein, während erst durch die Erwärmung auf 90° C über Ac_3 eine geringe Kornvergröberung eintritt (Bild 31). Dieser Mikroschliffbefund gilt in gleicher Weise auch für die anderen bei gleich hohen Härtetemperaturen behandelten Stähle mit 20 mm Dmr.

Beim Durchhärtungsversuch mit Stäben mit 150 mm Dmr. wird an der Oberfläche der Randzone ein rd. 4 bis 6 mm breiter Streifen Sorbit erhalten (Bild 32). Der Kern besteht aus teils feinsorbitischen, teils aus mit Ferrit und Troostit bzw. strukturlosem Perlit durchsetzten Zonen (Bild 33).

Durch die Vergütung der 1 mm dicken Bleche auf die Zugfestigkeitsstufe 90 bis 105 und 110 bis 125 kg/mm² wird ein feiner Sorbit erzielt. Bild 34 zeigt das Vergütungsgefüge des Stahles B, Lieferwerk I. Die geschweißten Bleche sind im unvergüteten Zustand in der Schweißnaht stark ferritisch und etwas grobkörnig. Auch der Übergang von der Schweißnaht zum Blech ist bei allen Schweißungen grob. Durch die Vergütung wird das Gefüge der Schweißstelle und des Überganges, wie Bild 35 und 36 zeigt, weitgehend rückgefeint. Diese Verbesserung der Schweißnaht und des Überganges durch Vergüten tritt sowohl bei den mit Flw. 1452.0 und den mit Stahl B und E geschweißten Blechen ein.

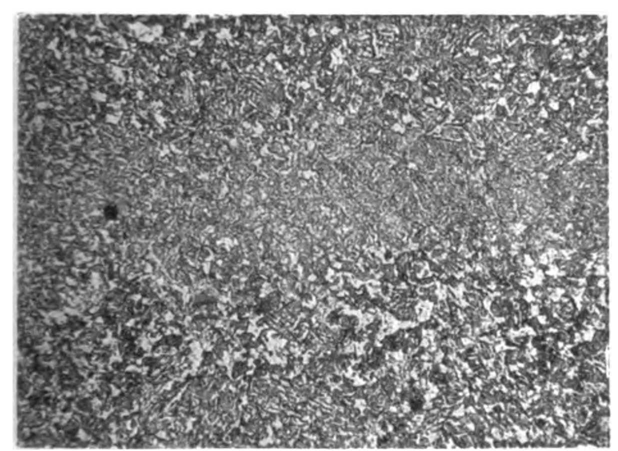


Bild 38. Stäbe mit 50 mm Dmr. vergütet auf 90 bis 105 kg/mm². Stahlsorte E, Lieferfirma I. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 300fach.

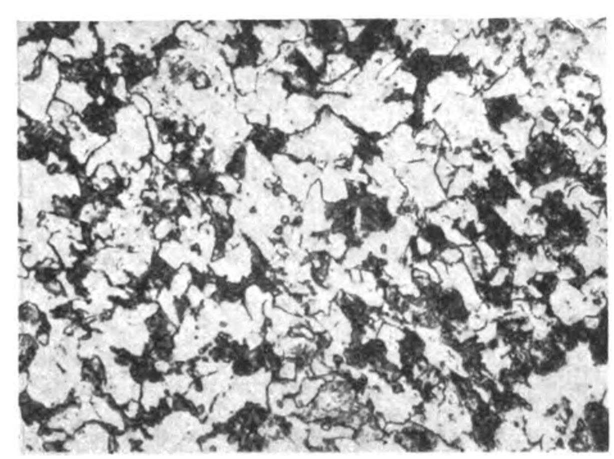


Bild 39. Stäbe mit 20 mm Dmr., luftgehärtet. Stahlsorte B, Lieferfirma II. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

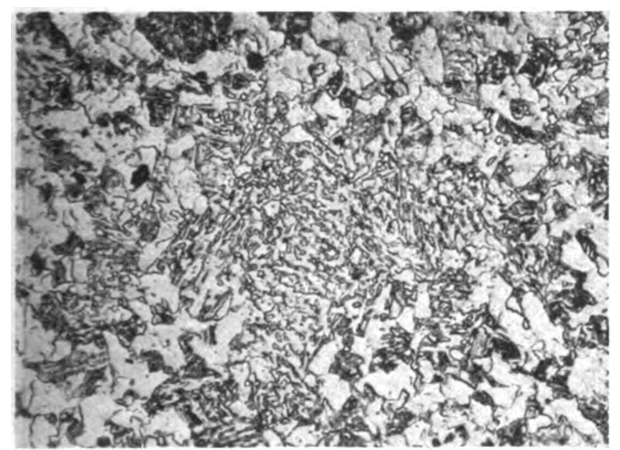


Bild 40. Stäbe mit 20 mm Dmr., luftgehärtet. Stahlsorte E, Lieferfirma I. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

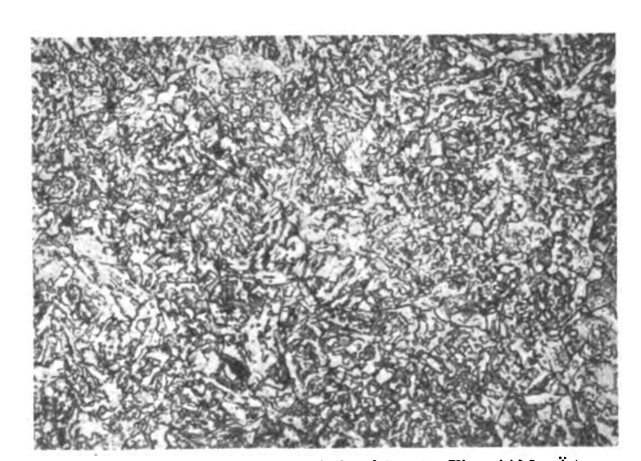


Bild 41. Stäbe mit 20 mm Dmr., luftgehärtet. Flw. 1452. Ätzung: 5proz. alk. Salpetersäure. Vergr. 500fach.

Stäbe von 20 mm Dmr. beider Sorten und Lieferwerke weisen nach der Vergütung über den gesamten Querschnitt ein gleichmäßig sorbitisches Gefüge auf (Bild 37). Stäbe von 50 mm Dmr. zeigen im Kern neben Sorbit noch Ferrit. Im Längsschliff sind bei den Stählen B und E des Lieferwerkes I neben rein sorbitischen Zeilen solche mit ferritisch-sorbitischer Struktur zu beobachten, wie es beispielsweise im Bild 38 wiedergegeben ist.

Durch Erwärmen auf die üblichen Härtetemperaturen und nachfolgendem Abkühlen in unbewegter Luft entsteht bei dem Stahl B (Bild 39) ein normalisiertes Gefüge aus Ferrit-Perlit, bei Stahl E (Bild 40) ein Gefüge, das teils als Ferrit-Perlit, teils als Vergütungsgefüge angesprochen werden muß. Im Vergleich zu diesen beiden Stählen zeigt Flw. 1452 nach der Lufthärtung das charakteristische strahlige Gefüge, das eine erhebliche Ähnlichkeit mit dem sorbitischen Vergütungsgefüge aufweist (Bild 41).

D. Auswertung der Versuchsergebnisse.

Aus den Versuchsergebnissen wurden folgende Erkenntnisse gewonnen. Die mit Vanadin legierten Cr-Mn-Stähle zeigen beim Anlassen zwischen 520° C und 640° C Ausscheidungshärtung (Bild 1 bis 8). Dadurch wird je nach der Menge des gelösten und sich wieder ausscheidenden Vanadinkarbids in diesen Temperaturbereichen der Härteabfall vermindert oder aufgehoben. Bei Härtetemperaturen, die 90° C oberhalb Ac_3 liegen, tritt sogar eine Härtesteigerung ein, die allerdings nicht bis zu den Werten der Abschreckhärte ansteigt. Durch die Bindung von Härtungskohlenstoff an Vanadin wird die Absoluthärte erniedrigt, so daß bei den in unseren Härtereibetrieben angewendeten Härtetemperaturen von 840° bis 860° C nur solche Abschreckhärten erhalten werden können, die beim nachfolgenden Anlassen nicht mehr genügen, um die mit dem bisher verwendeten Cr-Mo-Stahl erreichten Zugfestigkeiten zu erzielen.

Bei der Untersuchung auf Abschreckhärte und Durchhärtevermögen (Bild 14 bis 17) zeigen Stäbe mit 150 mm Dmr. in Kern und Randzone gleichniedrige Brinellfestigkeiten. Bild 32 und 33 beweist, daß in der Randzone nur ein geringer, in der Kernzone und im Kern fast kein Härtungseffekt mehr erzielt wird.

Die Entstehung der Vanadinkarbide setzt jedoch nicht nur die Härtefähigkeit und die Abschreckhärte herab, sondern verringert auch erheblich die Härtetiefe. Stäbe mit 50 mm Dmr. weisen je nach der Höhe der Härtetemperaturen unterschiedliche Brinellfestigkeiten zwischen Kern und Kernzone auf.

Der Einfluß des Vanadinkarbids auf die Härtefähigkeit der Stähle wird außerdem geklärt durch die Unterschiede in den Zugfestigkeiten, Streckgrenzen und Schliffbildern der verschieden starken Halbzeuge.

Die dem Vanadin zugesprochene Eigenschaft, die Anlaßsprödigkeit zu verhindern, wird durch den 30proz. Abfall des Stahles E des Lieferwerkes I widerlegt. Die kornverfeinernde Wirkung des Vanadins und die Verminderung der Überhitzungsempfindlichkeit wird durch Bild 29 bis 31 bestätigt. Die kornverfeinernde Wirkung des Vanadins zeigt sich bei allen untersuchten Schliffen. Den Einfluß des Vanadins auf die Verminderung der Überhitzungsempfindlichkeit beweisen die bei 90° C über Ac_3 gehärteten Proben. Das Mikrogefüge wird gegenüber den bei $Ac_3 + 30°$ C gehärteten Stählen nur unwesentlich vergröbert, Bild 29 bis 31. Für die Praxis ergibt sich aus der Bestimmung der Anlaßtemperaturkurven, daß die beiden

Stähle in über 2 mm dicken Abmessungen sich nicht mehr auf die Zugfestigkeitsstufe 110 bis 125 kg/mm² vergüten lassen. Als zweckmäßig erweisen sich nach den Ergebnissen der Zugversuche Härtetemperaturen, die für die Sorte B bei 900° C und für die Sorte E bei 890° C liegen. Mit diesen Härtetemperaturen und den entsprechend gewählten Anlaßtemperaturen lassen sich mit 1 und 2 mm dicken Blechen Zugfestigkeiten erreichen, die bei ausreichender Dehnung und sehr hoher Streckgrenze innerhalb des Zugfestigkeitsbereiches von 110 bis 125 kg/mm² liegen. Abmessungen bis 20 mm lassen sich noch einwandfrei auf die Zugfestigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm² bringen. Die angewendete Anlaßtemperatur von 450° C für den Stahl B und 470° C für den Stahl E liegt allerdings bereits an der Temperaturgrenze, die eben noch ausreicht, sperrige und unterschiedlich dicke Bauteile zu entspannen. Die Festigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm² wird von 50 mm starkem Material nicht mehr einwandfrei erreicht, was auf die geringe Abschreckhärte zurückzuführen ist. Auch die Durchvergütung ist bei diesen Abmessungen, wie der Schliffbefund (Bild 32 und 33) zeigt, nicht in Ordnung.

Die geringe Lufthärteempfindlichkeit der beiden Stähle gegenüber dem Flw. 1452 spricht dafür, daß beim Schweißen mit Schweißdrähten aus den beiden Stählen Schweißungen durchzuführen sind, die nicht die unangenehme Eigenschaft der Härteempfindlichkeit gegen Zugluft, wie sie der Flw. 1452 besitzt, aufweisen.

Bei der Verwendung von Stählen mit derartigen Unterschieden in der Abschreckhärte ergeben sich für die Praxis dadurch Schwierigkeiten, daß beim Verschweißen verschieden starker Abmessungen und nachfolgendem Vergüten damit zu rechnen ist, daß die Werkstücke in den einzelnen Abmessungen erhebliche Festigkeitsunterschiede erhalten. Solche Unterschiede müssen die Dauerfestigkeit beeinträchtigen und zu nachteiligen Spannungen im einzelnen Konstruktionsteil führen. Die Herstellung, Verschweißung und Vergütung von Bauteilen mit größeren Unterschieden in den einzelnen Abmessungen ist somit von vornherein in Frage gestellt.

Zusammenfassung.

Der Einfluß verschiedener Wärmebehandlungen auf die Eigenschaften zweier mit Vanadin legierter Chrom-Mangan-Stähle wurde an 1, 2 und 10 mm dicken Blechen, Stäben mit 20, 50 und 150 mm Dmr. geklärt. An Hand aufgestellter Anlaßtemperaturkurven wurden die günstigsten Vergütungstemperaturen ermittelt.

Das Gefüge bei den verschiedenen Warmbehandlungen wurde beurteilt und die mechanischen Eigenschaften für die günstigsten Vergütungstemperaturen durch eine Mehrzahl von Proben belegt. Bei der Warmbehandlung wurde neben der Untersuchung der Vergütungseigenschaften das Verhalten bei Lufthärtung, das Durchhärtevermögen und die Anlaßsprödigkeit mituntersucht.

Die Untersuchungen zeigten, daß keiner der beiden mit Vanadin legierten Chrom-Mangan-Stähle zum Austausch des bisher verwendeten Chrom-Molybdän-Stahles voll geeignet ist. Die beiden Stähle sind infolge ihres Vanadingehaltes in Abmessungen, die mehr als 2 mm auf die Festigkeitsstufe 110 bis 125 kg/mm² und in Abmessungen, die mehr als 20 mm betragen auf die Festigkeitsstufe 90 bis 105 kg/mm² nicht mehr vergütbar. Ein weiterer Nachteil besteht darin, daß bei verschieden starken Abmessungen unterschiedlich hohe Abschreckhärten erhalten werden. Die kornverfeinernde Wirkung des Vanadins, die Verminderung der Überhitzungsempfindlichkeit und die Erhöhung der Anlaßbeständigkeit wurden durch die Untersuchungen bestätigt.

Da die nachteiligen Eigenschaften gegenüber dem bisher verwendeten Cr-Mo-Stahl allein durch das Vanadin hervorgerufen werden, ist durch Herabsetzen des Vanadingehaltes zu erwarten, daß die mechanischen Eigenschaften der beiden Chrom-Mangan-Stähle denen des Cr-Mo-Stahles vollständig nahegebracht, die Härtetemperaturen erniedrigt werden können.

Graphisch-rechnerisches Verfahren zur schnellen Ermittlung von Trefferprozenten unter einfachen und erschwerten Bedingungen »Trefferspinne«.

Von Fritz Gabriel, Berlin-Wilmersdorf.

Die Arbeit gibt zunächst eine besondersartige graphische Darstellung der Trefferverteilung bei radialer Streuung an, die, wie weiterhin nachgewiesen wird, nicht nur unter Benutzung des Begriffes der Trefferprozentdichte und der Simpson'schen Regel bezüglich beliebiger Zielfiguren verwendbar ist, sondern darüber hinaus mittelst einer Art Entzerrungsrechnung auch in allen den Fällen eine sehr schnelle Ermittlung der Trefferprozente erlaubt, in denen statt radialer überhaupt eine elliptische Streuung beliebigen Charakters vorliegt.

Bekanntlich ist die Funktion, in der die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird, daß ein Geschoß bei gegebener Abweichungsrichtung lediglich bis zu einem bestimmten Grenzbetrage aus seiner theoretischen Flugbahn abirrt, nicht explizit integrabel, sondern nur in eine unendliche Reihe aufzulösen. Mit den in »Jordan, Handbuch der Vermessungskunde« benutzten Bezeichnungen (h = Genauigkeitszahl, Präzisionsmaß und ε = Fehler, Abweichung) bekommt man

$$W\left(^{+a}_{0}\right) = W\left(^{-a}_{0}\right) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{a\cdot h} e^{-h^2\cdot\varepsilon^2}\cdot d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left\{a h - \frac{(a h)^3}{3\cdot 1!} + \frac{(a h)^5}{5\cdot 2!} - \frac{(a h)^7}{7\cdot 3!} + \frac{(a h)^9}{9\cdot 4!} - \dots\right\} \quad (1)$$

Unter erschwerten Bedingungen, daß das Geschoß nämlich in verschiedenen und nicht nur in einer bestimmten Richtung von der theoretischen Flugbahn abzuweichen vermag, was ja in der Praxis immer zutreffen wird, sind die betreffenden Wahrscheinlichkeitsausdrücke ebenfalls nur durch unendliche Reihen lösbar, ausgenommen lediglich der Fall einer radialen Streuung, also einer nach allen Richtungen gleichen Streuung oder, was dasselbe ist, einer in der Breiten- und Höhenrichtung übereinstimmenden Streuung. Obwohl dieser Fall unwahrscheinlich erscheinen mag, ist er doch, wie die Erfahrung lehrt, zum mindesten als eine erste Annäherungsannahme für die Praxis von erheblicher Bedeutung.

Bezeichnet man bei radialer Streuung den Radius der als Ziel angesehenen Kreisfläche mit r, so bekommt man für das wahrscheinliche Verhältnis der auf das Ziel entfallenden Treffer zur Zahl der überhaupt auf das Ziel abgefeuerten Geschoße

$$\tau = \int_0^r \frac{h^2}{\pi}\cdot e^{-h^2\cdot r^2}\cdot 2\pi r\cdot d r = 1 - e^{-h^2\cdot r^2} \quad . \; . \; (2)$$

und somit für die Trefferprozente

$$\tau_{\%} = 100\cdot\left(1 - e^{-h^2\cdot r^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ist dann das Maß der Streuung der betreffenden Waffe dadurch gekennzeichnet, daß die Hälfte, also 50% aller durch die Zielebene fliegenden Geschoße in ihr von einem Kreis mit dem Radius ϱ_{50} umschlossen wird, so ergibt sich aus dem Ansatz

$$0{,}5 = 1 - e^{-h^2\cdot\varrho_{50}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

zunächst für das Präzisionsmaß h der Waffe

$$h^2 = 0{,}69315\,\varrho_{50}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

und hieraus zur Berechnung der Trefferprozente

$$\tau_{\%} = 100\cdot\left(1 - e^{-0{,}69315\cdot\left(\frac{r}{\varrho_{50}}\right)^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Aus dieser Beziehung wurde Zahlentafel 1 berechnet.

Zahlentafel 1. (Radiale Streuung.)

r/ϱ_{50}	$\tau\%$	r/ϱ_{50}	$\tau\%$
0,015	0,0156	1,1	56,77
0,02	0,0277	1,2	63,14
0,025	0,0433	1,3	69,01
0,03	0,06235	1,4	74,30
0,035	0,0849	1,5	78,98
0,05	0,1731	1,6	83,04
0,075	0,3892	1,7	86,51
0,1	0,6907	1,8	89,42
0,125	1,0772	1,9	91,81
0,15	1,5475	2,0	93,75
0,2	2,7345	2,1	95,30
0,25	4,2397	2,3	97,44
0,3	6,0477	2,5	98,686
0,35	8,1406	2,7	99,36
0,4	10,4975	3,0	99,805
0,45	13,0957	3,5	99,979
0,5	15,9104	4,0	99,998
0,6	22,08	4,5	99,99992
0,7	28,80		
0,8	35,83		
0,9	42,96		
1,0	50,00		

Solange das Ziel, wie bisher angenommen, durch eine Kreisfläche ersetzt werden kann, und unter der Voraussetzung, daß die Achse des Streukegels, das ist die theoretische Geschoßflugbahn, durch den Mittelpunkt des Zielkreises verläuft, erhält man die Trefferprozente sehr bequem, indem man unter Benutzung der in obiger Zahlentafel aufgeführten Zahlenpaare die Funktion $\tau^0/_0 = f\,(r/\varrho_{50})$ mit passenden Maßstäben als Kurve aufzeichnet, an der dann alle Zwischenwerte zu entnehmen sind. In den meisten Fällen wird aber die Gestalt des Zieles beträchtlich oder sogar gänzlich von der Form eines Kreises abweichen und sehr oft sein Mittelpunkt eine beträchtliche Ablage von der Achse des Streukegels aufweisen. Bei diesen Sachlagen erweist sich eine andere Darstellung der Trefferverteilung als nützlich, um sehr schnell die auf die Zielfläche entfallenden Trefferprozente zu ermitteln: Die »Trefferspinne«. Bild 1 zeigt diese Spinne, deren hauptsächlichste Eigenart darin besteht, daß ihre Fläche in Felder unterteilt ist und daß jedem dieser Felder dieselbe Anzahl Trefferprozente, nämlich 0,5 Promille Treffer, zukommen. Sie wurde auf gegen Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen unempfindlichem Material (Kodak-Klarzell-Zeichenhaut), und zwar mit dem Maßstab ϱ_{50} = 100 mm, aufgezeichnet.

Zeichnet man in demselben Maßstab das Ziel, das beispielsweise in dem Umriß eines Kriegsschiffes bestehen mag, auf durchsichtiges Papier und deckt diese Zeichnung so über die Spinne, daß der die Streukegelachse der Ge-

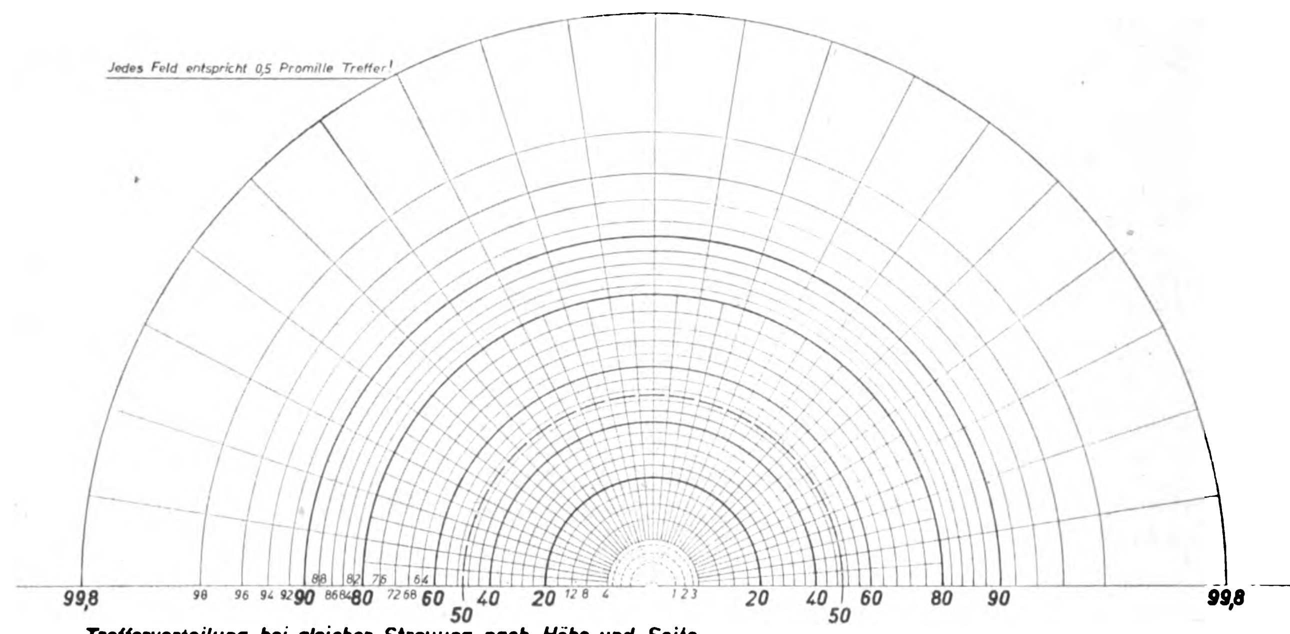


Bild 1. Netzwerk der »Trefferspinne«.

schoße repräsentierende Mittelpunkt der Spinne die unter Berücksichtigung des Maßstabes zutreffende Ablage von irgendeinem bestimmten Punkt des Zieles erhält, so kann man die auf das Ziel entfallenden Trefferprozente dadurch feststellen, daß man zunächst die Felder der Spinne abzählt, die völlig innerhalb des gezeichneten Umrisses liegen, dann für jedes Feld, das die Umrißlinie schneidet, den innerhalb der Umrißlinie liegenden Flächenanteil abschätzt oder ausmißt, die zugehörigen Trefferprozente ausrechnet und schließlich die Summe bildet. Da Treffern in bestimmten Räumen des Zieles immer eine erheblich größere Bedeutung zukommt als Treffern an andern Stellen des Zieles, so empfiehlt es sich, die Fläche des Zielumrisses zu unterteilen, die Trefferprozente für die Teilflächen gesondert zu ermitteln, sie darauf mit Bewertungszahlen, deren größte den Wert 1 hat, zu multiplizieren und erst hiernach zu addieren. In anderen Fällen ist es ratsamer, überhaupt nur die besonders verletzbaren Teile des Zieles zu berücksichtigen, beispielsweise in der Art, daß man jene Teile als einem kleineren innerhalb des Ziels liegenden Körper einfacherer Form, so etwa einem Ellipsoid, angehörend ansieht und dementsprechend die Projektion dieses Zielkörpers auf eine zur theoretischen Zielbahn der Geschoße senkrechte Zielebene als das eigentliche Ziel betrachtet.

Das Verfahren, an einer Stelle, an der die Umrißlinie des Zieles ein Feld der Spinne schneidet, von den auf dieses Feld entfallenden 0,5 Promille Treffern dem Ziel einen der Flächenteilung entsprechenden Anteil zuzusprechen, ist natürlich ungenau, weil sich ja die Treffer auch über das einzelne Feld der Spinne nicht gleichmäßig verteilen. Es interessiert daher, diese Verteilung der Trefferprozente in der Fläche der Spinne näher zu kennen. Dazu sei der Begriff der den einzelnen Punkten der Spinne zukommenden Trefferprozentdichte eingeführt und darunter die Zahl der Trefferprozente verstanden, die auf 1 cm² der den fraglichen Punkt umgebenden Spinnenfläche entfallen würde, wenn die Verteilung innerhalb dieses Quadratzentimeters eine gleichmäßige wäre. Die Trefferprozentdichte beträgt

$$\vartheta = \frac{d\tau/dr}{2\pi r}\,; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

darin ist

$$\frac{d\tau}{dr} = h^2 \cdot 2r \cdot e^{-h^2 \cdot r^2} = \frac{0{,}69315}{\varrho_{50}^2} \cdot 2r \cdot (1 - \tau), \quad \ldots \quad (8)$$

so daß sich mit $\varrho_{50} = 10$ cm, sofern auch r in cm gemessen wird,

$$\vartheta = \frac{0{,}0069315}{\pi} \cdot (1 - \tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

ergibt, woraus schließlich

$$\vartheta_{\%} = 0{,}0022064 \cdot (100 - \tau_{\%}) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

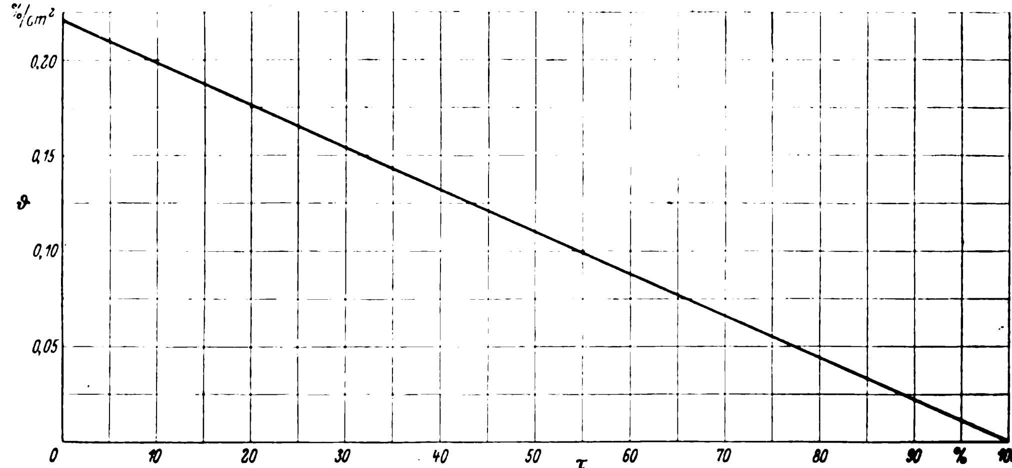


Bild 2. Trefferprozentdichte ϑ in Abhängigkeit von der Lage des betreffenden Punktes, gekennzeichnet durch die Trefferprozente τ, die ein durch den Punkt zu ziehender Kreis des Spinnennetzes umschließen würde.

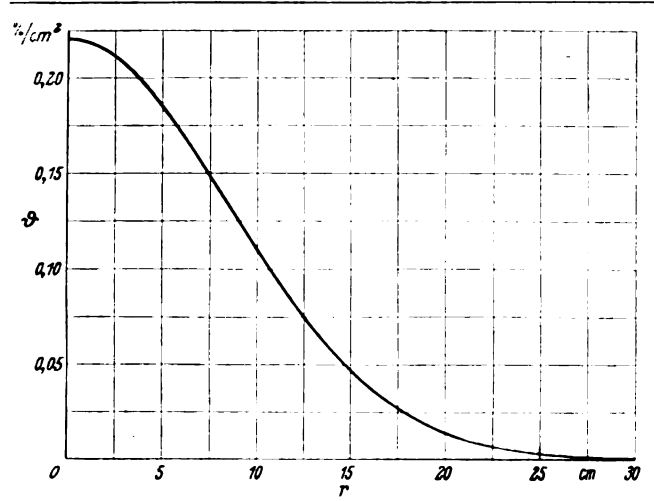


Bild 3. Trefferprozentdichte ϑ in Abhängigkeit von der Lage des betreffenden Punktes, gekennzeichnet durch seinen Abstand r vom Mittelpunkt des Spinnennetzes.

und mit Hilfe von Gleichung (6)

$$\vartheta_{\%} = 0{,}22064 \cdot e^{-0{,}0069315 \cdot r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

folgt. Die erste dieser Gleichungen bezieht sich auf die Unterteilung der Spinne durch ihre mit $\tau_{\%}$ bezifferten Kreisbögen: An einem Punkt, der z. B. so zwischen den mit 68% und 72% bezifferten Kreisbögen liegt, daß ein Kreis mit dem bis zu diesem Punkt gezogenen Radius 70,3 Trefferprozente umschließen muß, beträgt die Dichte der Trefferprozente $\vartheta_{\%} = 0{,}0022064 \cdot (100 - 70{,}3) = 0{,}06553\%$ je cm². Die $\vartheta_{\%}$ hängen, wie das auch Bild 2 zeigt, linear von den $\tau_{\%}$ ab; dem Mittelpunkt der Spinne entspricht die Trefferprozentdichte 0,22064% je cm². Gleichung (11), in Bild 3 dargestellt, gibt den Abfall des Trefferberges wieder; sie führt zu genaueren Resultaten als Gleichung (10), ist aber auch unbequemer zu benutzen, weil man bei ihrer Verwendung zuvor die Abstände r der betrachteten Punkte vom Mittelpunkt der Spinne abmessen muß. Die zur Aufzeichnung der Trefferbergkurve notwendigen Werte wurden Zahlentafel 2 entnommen.

Zahlentafel 2. (Trefferprozentdichte.)

r cm	ϑ %/cm²	r %	r cm	ϑ %/cm²	r %
0,25	0,22054	0,0433	11,00	0,09538	56,77
0,50	0,22026	0,1731	12,00	0,08133	63,14
1,00	0,21912	0,6907	13,00	0,06838	69,01
1,50	0,21723	1,5475	14,00	0,05670	74,30
2,00	0,21461	2,7345	15,00	0,04638	78,98
2,50	0,21129	4,2397	16,00	0,03742	83,04
3,00	0,20730	6,0477	17,00	0,02976	86,51
3,50	0,20268	8,1406	18,00	0,02334	89,42
4,00	0,19748	10,4975	19,00	0,01807	91,81
4,50	0,19175	13,0957	20,00	0,01379	93,75
5,00	0,18554	15,9104	21,00	0,01037	95,30
6,00	0,17192	22,08	23,00	0,00565	97,44
7,00	0,15710	28,80	25,00	0,00290	98,686
8,00	0,14158	35,83	27,00	0,00141	99,36
9,00	0,12585	42,96	30,00	0,00043	99,805
10,00	0,11032	50,00	35,00	0,000046	99,979
			40,00	0,000004	99,998

Unterteilt man die Zielfigur in Rechtecke, Parallelogramme oder Dreiecke, so kann man mit den vorstehend angegebenen Hilfsmitteln für jede dieser Teilflächen, wie im folgenden beschrieben wird, die mittlere Trefferprozentdichte bestimmen, aus der sich dann durch Multiplikation mit der Fläche in cm² die auf sie entfallende Anzahl Trefferprozente ergibt. Zu dieser Bestimmung wird zweckmäßigerweise von der Simpsonschen Regel Gebrauch gemacht, die im vorliegenden Falle besagt: Beträgt die Trefferprozentdichte an drei durch eine Gerade verbundenen oder zu verbindenden und gleich weit voneinander entfernten Punkten $\vartheta_{a\,1\%}$, $\vartheta_{a\,2\%}$ und $\vartheta_{a\,3\%}$, so ist die dem Mittelpunkt $a\,2$ der ganzen Strecke zuzusprechende mittlere Trefferprozentdichte

$$\vartheta_{a\,m\%} = \frac{\vartheta_{a\,1\%} + 4 \cdot \vartheta_{a\,2\%} + \vartheta_{a\,3\%}}{6} \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

Wendet man das gleiche Vorgehen auf drei gleich lange und in gleichen Abständen einander parallele Geraden an, so muß die mittlere Dichte in dem von den beiden äußeren Geraden begrenzten Flächenstück, Rechteck oder Parallelogramm, den Wert

$$\vartheta_{m\%} = \frac{\vartheta_{a\,m\%} + 4 \cdot \vartheta_{b\,m\%} + \vartheta_{c\,m\%}}{6} \quad . \; . \; . \; . \; (13)$$

haben. Dies Verfahren erscheint ziemlich umständlich, erfordert aber tatsächlich bei großer Genauigkeit wesentlich weniger Zeichen- und Rechenaufwand als jedes andere Vorgehen und bleibt obendrein in seinem Verlauf stets übersichtlich. Es kommt hinzu, daß dies Verfahren, wie noch gezeigt werden wird, auch dann anwendbar ist, wenn der Aufgabe an Stelle der einfachen Bedingung radialer Streuung ungleiche und zusammengesetzte Streubedingungen zugrunde liegen.

Wie die Mittelwertbildung der Trefferprozentdichte praktisch durchzuführen ist, sei an einem Beispiel besonderer Art, nämlich an dem Fall gezeigt, daß der Zielumriß die Form einer Ellipse hat, deren eine Achse mit der einen Achse der Spinne zusammenfällt. Man kann, wie Bild 4 zeigt, die Ellipse unter Beibehaltung des Mittelpunktes durch eine der beiden rechts herausgezeichneten Figuren, ein Rechteck oder ein Parallelogramm, ersetzen, die beide denselben Flächeninhalt wie die Ellipse haben; beim Rechteck erscheinen beide Achsen der Ellipse im Verhältnis $1 : 0{,}886_{227}$ verkürzt und beim Parallelogramm im Verhältnis $1 : 1{,}253_{314}$ verlängert. Es ist sofort zu übersehen und bedarf keines besonderen Beweises, daß die Zahl Trefferprozente, die auf die Ellipse entfallen, zwischen den Zahlen der Trefferprozente liegen muß, die einerseits auf das Rechteck und andererseits auf das Parallelogramm kommen. An neun Punkten beider Figuren, die entsprechend den Voraussetzungen für die Anwendung der Simpsonschen Regel gewählt wurden, sind die Abstände r vom Nullpunkt der Spinne und die diesen Abständen nach der Kurve Bild 3, bzw. Gleichung (11) zugehörenden Werte der Trefferprozentdichte $\vartheta_{\%}$ angeschrieben. Zur Feststellung der mittleren Trefferprozentdichte hat man dann beim Rechteck folgende Rechnung anzustellen:

$$\begin{array}{llll}
 & 0{,}0324 & & 0{,}0461 & & 0{,}0324 \\
4 \cdot 0{,}0692 = & 0{,}2768 & 4 \cdot 0{,}0983 = & 0{,}3932 & 4 \cdot 0{,}0692 = & 0{,}2768 \\
 & \underline{0{,}1153} & & \underline{0{,}1637} & & \underline{0{,}1153} \\
 & 0{,}4245 : 6 & & 0{,}6030 : 6 & & 0{,}4245 : 6 \\
 & 0{,}07075 & & 0{,}1005 & & 0{,}07075
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & 0{,}07075 \\
4 \cdot 0{,}1005 = & 0{,}4020 \\
 & \underline{0{,}07075} \\
 & 0{,}5435 : 6
\end{array}$$

$$\vartheta\, m_{\%} = \mathbf{0{,}0906}$$

Man kann die neun Punkte des Rechtecks aber auch einander in nachstehender Weise zuordnen:

$$\begin{array}{llllll}
 & 0{,}0324 & & 0{,}0692 & & 0{,}1153 \\
4 \cdot 0{,}0461 = & 0{,}1844 & 4 \cdot 0{,}0983 = & 0{,}3932 & 4 \cdot 0{,}1637 = & 0{,}6548 \\
 & \underline{0{,}0324} & & \underline{0{,}0692} & & \underline{0{,}1153} \\
 & 0{,}2492 : 6 & & 0{,}5316 : 6 & & 0{,}8854 : 6 \\
 & 0{,}04153 & & 0{,}0886 & & 0{,}14757
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & 0{,}04153 \\
4 \cdot 0{,}0886 = & 0{,}3544 \\
 & \underline{0{,}14757} \\
 & 0{,}54350 : 6
\end{array}$$

$$\vartheta\, m_{\%} = \mathbf{0{,}0906}$$

Der auf diesem anderen Wege erhaltene Wert stimmt, wie man sieht, mit dem zuvor erlangten genau überein. Beim Parallelogramm nimmt die Rechnung folgenden Verlauf:

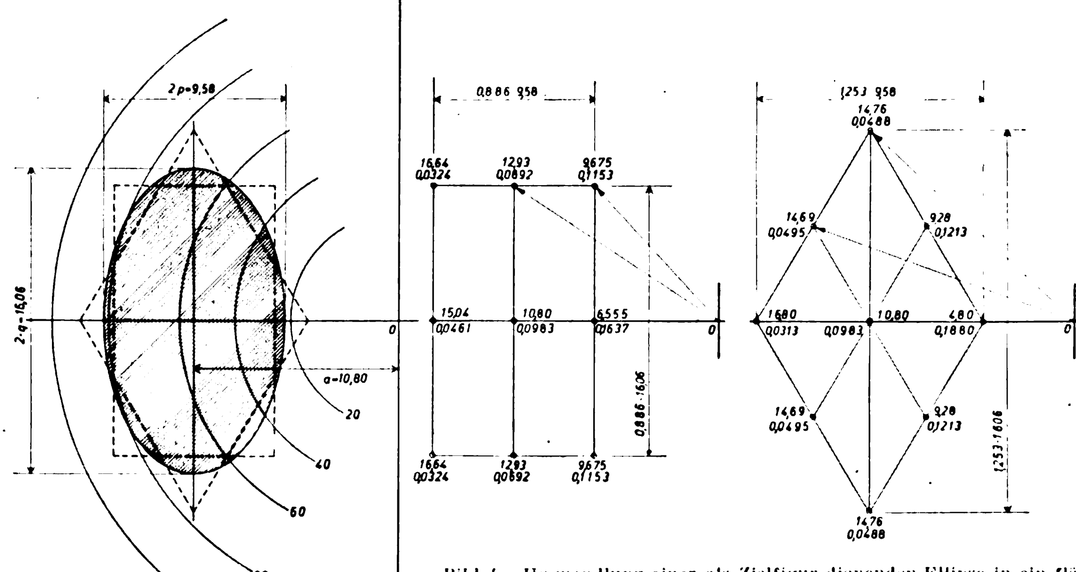


Bild 4. Umwandlung einer als Zielfigur dienenden Ellipse in ein flächengleiches Rechteck oder Parallelogramm; Daten zur Berechnung der mittleren Trefferprozentdichte ϑ_m.

$$
\begin{array}{rl}
 & 0{,}0488 \\
4 \cdot 0{,}0495 = & 0{,}1980 \\
 & \underline{0{,}0313} \\
 & 0{,}2781 : 6 \\
 & 0{,}04635
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 0{,}1213 \\
4 \cdot 0{,}0983 = & 0{,}3932 \\
 & \underline{0{,}0495} \\
 & 0{,}5640 : 6 \\
 & 0{,}0940
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 0{,}1880 \\
4 \cdot 0{,}1213 = & 0{,}4852 \\
 & \underline{0{,}0488} \\
 & 0{,}7220 : 6 \\
 & 0{,}12033
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 0{,}04635 \\
4 \cdot 0{,}0940 = & 0{,}3760 \\
 & \underline{0{,}12033} \\
 & 0{,}54268 : 6 \\
\vartheta\, m_{\text{‰}} = & \mathbf{0{,}09045}
\end{array}
$$

Da der Flächeninhalt des Rechtecks und ebenso des Parallelogramms wie auch der Flächeninhalt der Ellipse 120,84 cm² betragen, müssen auf das Rechteck 120,84 · 0,0906 = 10,948% und auf das Parallelogramm 120,84 · 0,09045 = 10,930% Treffer kommen. Auf die Ellipse entfallen dann offenbar 10,94% Treffer, nämlich der Mittelwert der beiden vorstehenden Werte. Würde man der Ellipse dieselbe Trefferzahl wie dem Rechteck oder dieselbe Trefferzahl wie dem Parallelogramm zuschreiben, so betrüge der Fehler nur 1 Promille, was sicher immer hinzunehmen ist.

Bei radialer Streuung, die bisher ausschließlich behandelt wurde, sind die Linien gleicher Treffwahrscheinlichkeit konzentrische Kreise; dementsprechend besteht die Spinne, von ihrer Strahlenunterteilung abgesehen, aus solchen konzentrischen Kreisen. Bei verschiedener Streuung in zwei zueinander senkrechten Richtungen und auch bei allen Kombinationen einer solchen Streuung mit noch zusätzlichen Streuungen sind die Linien gleicher Treffwahrscheinlichkeit immer einander ähnliche Ellipsen, deren Achsen sich im Durchstoßpunkt der theoretischen Geschoßbahn durch die Zielebene schneiden. Man könnte daher im einzelnen Falle statt der Kreisspinne eine Ellipsenspinne aufzeichnen und zur Anwendung bringen; dabei wäre diese Ellipsenspinne aber jedesmal den besonderen gerade vorliegenden Streubedingungen anzupassen, neu zu berechnen und neu aufzuzeichnen, was wohl möglich, aber doch recht umständlich ist. Es gibt einen sehr viel einfacheren und bequemeren Weg, nämlich den, daß man statt die Kreise der Spinne zu Ellipsen zu verzerren lieber die Zielfigur in der umgekehrten Richtung bzw. im umgekehrten Sinne verzerrt.

Angenommen, die Kreisspinne wäre auf einem Gummituch aufgezeichnet, so könnte man ihre Kreise durch einen an den Querseiten des Gummituches ausgeübten Zug zu Ellipsen deformieren, deren längere Achsen in Richtung des Zuges lägen und deren kürzere mit den ursprünglichen Kreisradien übereinstimmende Achsen dazu, d. h. zur Grundlinie der früheren Kreisspinne, senkrecht ständen. Denken wir uns nun auf dieses gedehnte Gummituch einen Zielkreis aufgezeichnet, und zwar mit Ablage, also so, daß sein Mittelpunkt außerhalb des Mittelpunktes der Spinne liegt. An den mitverzerrten Feldern der Spinne, auf deren jede, wie man sich überlegen mag, nach wie vor je 0,5 Promille Treffer kommen, ist abzulesen, wieviel Trefferprozente auf das aufgezeichnete kreisförmige Ziel entfallen. Wird das Gummituch darauf wieder langsam entspannt und schließlich ganz freigegeben, so daß die Ellipsenspinne zur Gestalt der Kreisspinne zurückkehrt, so wird jetzt der Zielkreis zu einer Ellipse deformiert, und zwar zu einer solchen, deren längere Achse senkrecht zu der Richtung liegt, in der die zur Ellipsenspinne gehörenden Ellipsen ihre längeren Achsen besaßen. Die Umrißlinie der Zielellipse schneidet aber genau dieselben Felder wie zuvor der Zielkreis und teilt sie auch in demselben Verhältnis; liest man an der Zielellipse ab, wieviel Felder und Felderabschnitte sie in der Kreisspinne bedeckt, so stimmt das Ergebnis völlig mit dem überein, das zuvor für den Zielkreis in der Ellipsenspinne erhalten wurde.

Zu beachten ist, daß sich beim Verzerren der Kreisspinne in eine Ellipsenspinne wie beim Entzerren der Ellipsenspinne zur Kreisspinne alle Maße der Verzerrungs- bzw. Entzerrungsrichtung im gleichen Verhältnis ändern. In demselben Grade, in dem der Durchmesser einer Zielfigur in der Zug- bzw. Entspannungsrichtung geändert wird, ändert sich beispielsweise auch der Abstand des Mittelpunktes der Zielfigur von der zur Zugrichtung senkrechten Achse der Spinne. Besitzt die Zielfigur eine nicht zur Zugrichtung senkrechte, sondern zu ihr geneigte Achse oder Begrenzungslinie, so ändert sich deren Neigung beim Übergang von der Kreis- zur Ellipsenspinne oder umgekehrt.

In Bild 5 ist dargestellt, wie sich der Vorgang der Entzerrung einer elliptischen in eine radiale Streuung hinsichtlich einer rechteckigen Zielfläche auswirkt. Als gegeben ist die im linken Teil des Bildes gezeichnete Sachlage anzusehen; es liegt tatsächlich elliptische Streuung vor und das Ziel hat tatsächlich die Ausmaße, mit denen es in die Ellipsenspinne eingetragen ist. Um zu ermitteln, wieviel Trefferprozente auf das Ziel entfallen, denkt man sich nun, damit die Berechnung und wirkliche Aufzeichnung der Ellipsenspinne erspart wird, diese gemäß dem rechten Teil des Bildes zur Kreisspinne entzerrt; dabei schrumpft das Zielrechteck wie gezeichnet in der Entzerrungsrichtung zusammen. Es kommen aber, wie das Bild übersichtlich nachweist, auf die entzerrte Zielfigur — man spricht hier besser von einer verzerrten Zielfigur, da das Ziel ja tat-

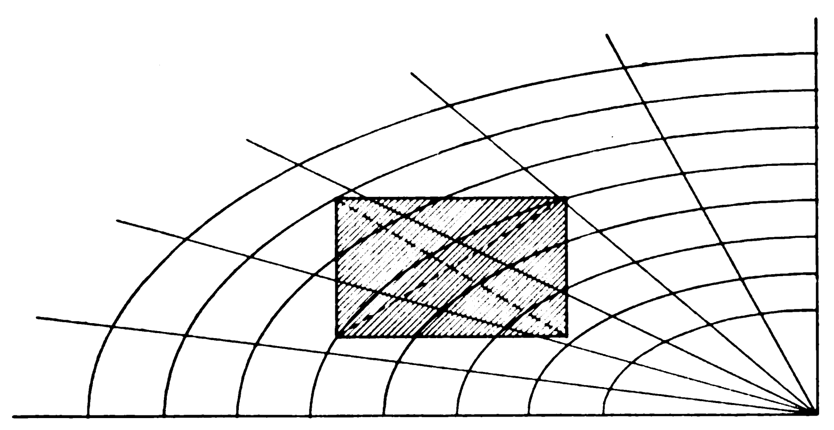
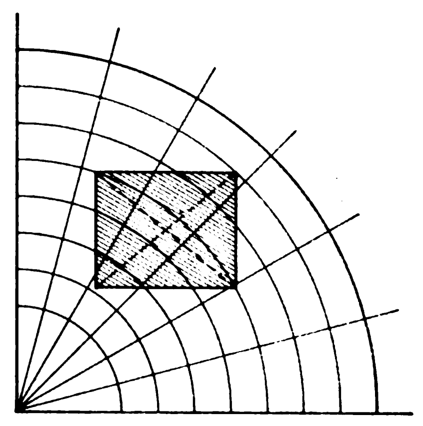



Bild 5. Verzerrung einer gegebenen elliptischen in eine radiale Streuung; dadurch bewirkte Mitverzerrung der rechteckigen Zielfläche.

sächlich gerade die andere Gestalt hat — ebenso viele Felder der Unterteilung der Kreisspinne wie auf die ursprüngliche und tatsächliche Zielfigur in der Ellipsenspinne. Man kann daher, was zu beweisen war, auch bei elliptischer Streuung die Kreisspinne zur Ermittlung der auf das Ziel entfallenden Trefferprozente benutzen, sofern man nur die Form und die Lage der Zielfigur entsprechend ändert. Nachstehend einige Beispiele, wie hierbei zu verfahren ist.

Bedeuten a, b, c usw. die in m (Meter) gemessenen Maße der Zielfigur, also der Projektion des Zieles auf die zur theoretischen Flugbahn der Geschosse senkrechte Zielebene, wobei sich unter diesen Maßen auch die Ablagen des Zielmittelpunktes oder der Eckpunkte des Zieles von dem Durchstoßpunkt der theoretischen Geschoßflugbahn durch die Zielebene befinden, wird ferner der Radius ϱ_{50} des in der Zielebene 50% aller Treffer umschließenden Kreises ebenfalls in m gemessen, so müssen, weil der ϱ_{50} in der Trefferspinne zugeordnete Kreis mit einem Radius von 10 cm gezeichnet ist, die Aufzeichnung der auf die Spinne aufzulegenden Bildes der Zielfigur bzw. deren Ablagen vom Mittelpunkt der Spinne die Maße $10 \cdot a/\varrho_{50}$, $10 \cdot b/\varrho_{50}$, $10 \cdot c/\varrho_{50}$ usw. in cm aufweisen. Dies gilt für eine allein durch ϱ_{50} charakterisierte radiale Streuung. Tritt nun zu einer ersten radialen Streuung gleichberechtigt noch eine zweite radiale Streuung hinzu, bei der, falls sie alleine vorliegen würde, der Radius des die Hälfte aller Treffer umschließenden Kreises $\varrho_{1\,2}$ (wieder in m) beträgt, so hat man an Stelle von Gleichung (6) jetzt

$$\tau_{r_1} = 100 \cdot \left(1 - e^{-0{,}69315 \cdot \frac{r^2}{\varrho_{50}^2 + \varrho_{1\,2}^2}}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

zu schreiben. Somit kann die Kombination zweier radialer Streuungen in der Weise mit der Trefferspinne behandelt werden, daß man die Zielfigur und ihre Ablagen mit den Maßen

$$10 \cdot a/\sqrt{\varrho_{50}^2 + \varrho_{1\,2}^2},\; 10 \cdot b/\sqrt{\varrho_{50}^2 + \varrho_{1\,2}^2},\; 10 \cdot c/\sqrt{\varrho_{50}^2 + \varrho_{1\,2}^2}$$

usw. in cm aufzeichnet.

Es ist hiernach leicht zu übersehen, daß die Kreisspinne ohne jede Änderung ebenfalls Benutzung finden kann, wenn z. B. zu einer durch ϱ_{50} gekennzeichneten radialen Streuung eine reine Richtungsstreuung hinzutritt, die dadurch charakterisiert sein mag, daß beim alleinigen Vorhandensein dieser Richtungsstreuung 50% aller Treffer auf den Raum zwischen zwei einander parallelen Geraden entfallen, deren jede in der Zielebene um die Strecke s_{50} vom Durchstoßpunkt der theoretischen Geschoßbahn entfernt ist. Die Zielfigur muß dann offenbar verzerrt aufgezeichnet werden, und zwar parallel zur Richtungsstreuung, das ist senkrecht zu den beiden vorstehend erwähnten Parallelen, mit den Maßen

$$10 \cdot a/\sqrt{\varrho_{50}^2 + s_{50}^2},\; 10 \cdot b/\sqrt{\varrho_{50}^2 + s_{50}^2},\; 10 \cdot c/\sqrt{\varrho_{50}^2 + s_{50}^2}$$

usw. und senkrecht dazu, also in Richtung jener beiden Parallelen, mit den Maßen $10 \cdot o/\varrho_{50}$, $10 \cdot p/\varrho_{50}$, $10 \cdot q/\varrho_{50}$ usw., alle Maße in cm.

Auf diese Weise ergibt sich schließlich auch, wie die Trefferspinne zu verwenden ist, wenn Trefferprozente für den Fall zu ermitteln sind, daß statt einer radialen Streuung zwei zueinander senkrechte Richtungsstreuungen mit den 50% bzw. die Hälfte aller Treffer begrenzenden (halben) Streubreiten s_{50} und $s_{1\,2}$ vorliegen, die beide in m angegeben sind. Die Zielfigur muß bei dieser Streubedingung zum Vergleich mit der Trefferspinne in Richtung der ersten Richtungsstreuung mit den Maßen $10 \cdot a/s_{50}$, $10 \cdot b/s_{50}$, $10 \cdot c/s_{50}$ usw. und in Richtung der andern Richtungsstreuung mit den Maßen $10 \cdot o/s_{1\,2}$, $10 \cdot p/s_{1\,2}$, $10 \cdot q/s_{1\,2}$ usw. aufgezeichnet werden, alle diese Maße wieder in cm.

Sind zwei Richtungsstreuungen gegeben, die nicht aufeinander senkrecht stehen, so müssen die sie ersetzenden zueinander senkrechten Richtungsstreuungen ermittelt werden. Man findet die Richtungen dieser Ersatzstreuungen, indem man in das Parallelogramm, das sich aus den 50% Treffern entsprechenden Grenzparallelen der einen und der andern Richtungsstreuung ergibt, eine die Seiten berührende Ellipse einzeichnet. Die gegebenen Richtungsstreuungen sind nach den Achsrichtungen dieser Ellipse zu zerlegen und die erhaltenen Komponenten dann zu den Ersatzstreuungen zusammenzusetzen. Die Achslängen der Ellipse geben im Vergleich zu den Abständen der Grenzparallelen unmittelbar die Längen s_{50} und $s_{1\,2}$ der Ersatzstreuungen an.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß eine als Trefferspinne bezeichnete Darstellung der bei radialer Geschoßstreuung sich ergebenden Trefferverteilung mit verhältnismäßig wenig Aufwand an Arbeit und Zeit die auf eine Zielfigur beliebiger Form entfallenden Trefferprozente nicht nur dann zu ermitteln gestattet, wenn der Mittelpunkt (oder Schwerpunkt) der Zielfigur nicht mit dem Durchstoßpunkt der theoretischen Flugbahn der Geschoße durch die Zielebene zusammenfällt, sondern auch in allen Fällen, in denen statt einer radialen eine elliptische Streuung vorliegt, die auch aus reinen Richtungsstreuungen bestehen oder mit ihnen verbunden sein kann.

Da die mathematischen Grundlagen der Ermittlung von Trefferprozenten mit den Rechenmethoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Fehlerbestimmung identisch sind, lassen sich die vorgelegten Verfahren nach zweckmäßiger Umformung auch zu Fehlerberechnungen verwenden.

Nomographische Verfahren zur Berechnung und Konstruktion von Kreiselkörpern. — Der günstigste Kreiselkörper, für den Material, Trägheitsmomentenverhältnis und Durchmesser vorgeschrieben sind.

Von Hellmut H. G. Seyfarth.

Bericht der Mathematisch-wissenschaftlichen Abteilung der Anschütz & Co. G. m. b. H., Kreiselgeräte, Kiel.

Zwecks schneller Gewinnung quantitativer Unterlagen für die Berechnung und Konstruktion von geradzylindrisch-kreisringförmigen Kreiselkörpern werden zwei Nomogramme angegeben und beschrieben. — Das günstigste Durchmesserverhältnis solcher Kreiselkörper ist 0,4472. — Da das Trägheitsmoment eines Kreiselkörpers mit der fünften Potenz seines Durchmessers ansteigt, aber dem spezifischen Gewicht seines Materials nur proportional ist, wird empfohlen, möglichst große Kreisel zu bauen, während von der Verwendung von Wolfram als Material für Kreiselkörper abgeraten wird.

Gliederung.

I. Einleitung.

Nomographische Verfahren gestatten, schnell quantitative Unterlagen für Berechnung und Konstruktion zu gewinnen, und insbesondere auch Beziehungen zwischen den jeweils auftretenden Größen bequemer zu überblicken, als es im allgemeinen an Hand der Formeln möglich ist.

Für die technisch so wichtigen Kreisel werden heute wegen der werkstattmäßig einfacheren Herstellung in steigendem Maß Kreiselkörper gewählt, die im Fall von luftangetriebenen Kreiseln im wesentlichen aus einem geradzylindrischen Kreisring und im Fall von elektrisch angetriebenen Kreiseln aus dem eigentlichen Kreiselkörper außen und aus dem Lamellenpaket innen, also im wesentlichen aus zwei koaxialen geradzylindrischen Kreisringen bestehen. Es sei daher gestattet, in dieser Note einige nomographische Verfahren zur Ermittlung der folgenden Größen, die technisch an solchen geradzylindrisch-kreisringförmigen Kreiselkörpern interessieren, mitzuteilen:

1. $\frac{\text{Innerer Durchmesser}}{\text{Äußerer Durchmesser}}$,
2. $\frac{\text{Doppelte Breite}}{\text{Äußerer Durchmesser}}$,
3. $\frac{\text{Nebenträgheitsmoment}}{\text{Hauptträgheitsmoment}}$,
4. Äußerer Durchmesser,
5. Hauptträgheitsmoment,
6. Absolutes oder spezifisches Gewicht.

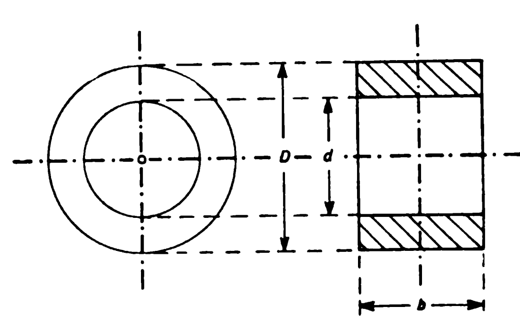


Bild 1. Die Maßbezeichnungen am geradzylindrisch-kreisringförmigen Kreiselkörper. Maße in mm.

Die im folgenden, insbesondere im Abschnitt V gemachten Aussagen gelten cum grano salis auch für solche Kreiselkörper, die nicht streng geradzylindrisch sind.

II. Bezeichnungen.

Wir bezeichnen für den geradzylindrischen Kreisring:

1. mit D bzw. d bzw. b die auf 1 mm bezogene Maßzahl seines äußeren Durchmessers bzw. seines inneren Durchmessers bzw. seiner Breite (Bild 1),
   mit $\sinh q$ das Verhältnis seines inneren Durchmessers zu seinem äußeren Durchmesser:
$$\sinh q = \frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
2. mit A sein Hauptträgheitsmoment (um seine Symmetrieachse),
   mit B sein Nebenträgheitsmoment (um eine zu seiner Symmetrieachse senkrechte Achse),
   mit p das Verhältnis seines Nebenträgheitsmoments zu seinem Hauptträgheitsmoment:
$$p = \frac{B}{A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
3. mit G die auf 1 kgr bezogene Maßzahl seines Gewichts,
   mit s die auf 1 gr cm^{-3} bezogene Maßzahl seines spezifischen Gewichts.

III. Ermittlung einer der Verhältniszahlen d/D, $2\,b/D$, B/A, wenn die zwei anderen vorgegeben sind.

1. Das Nomogramm.

Unter Berücksichtigung der Substitutionen (1) und (2) erhalten wir für das Verhältnis der doppelten Breite zum äußeren Durchmesser:

$$2\,\frac{b}{D} = \sqrt{3\,(2\,p - 1)}\,\cosh q \quad \ldots\ldots (I)$$

Wählen wir nun die Verhältniszahlen $2\,b/D$ als Abszissen und die Verhältniszahlen d/D als Ordinaten der Punkte einer Koordinatenebene, so sehen wir unter Berücksichtigung der Substitution (1), daß durch die Gl. (I) mit p als Parameter eine Schar von Hyperbeln beschrieben wird. Vermittels dieser in dem Bild 2 und in dem Nomogramm 1 gezeichneten Kurvenschar können wir unter Berücksichtigung der Substitution (2), wenn zwei der drei Verhältniszahlen d/D, $2\,b/D$, B/A vorgegeben sind, die dritte dieser Verhältniszahlen ohne weitere Rechnung ablesen, wie wir in den folgenden Unterabschnitten 2 und 3 dieses Abschnitts III zeigen.

2. Ermittlung des Verhältnisses B/A.

Will man für einen Kreiselkörper vorgegebener Dimensionierung das Verhältnis B/A ermitteln, so geht man (vgl. hierzu das in das Bild 2 eingezeichnete Beispiel) von dem Punkt d/D der Ordinatenachse waagrecht nach rechts bis zum Schnittpunkt mit dem im Punkt $2\,b/D$ der Abszissenachse errichteten Lot. Durch diesen Schnittpunkt geht die Kurve (I), die den gesuchten Parameter $p = B/A$ trägt.

3. Konstruktion eines Kreiselkörpers.

a. Ermittlung des Verhältnisses $2\,b/D$.

Für die Konstruktion eines Kreiselkörpers seien das Verhältnis d/D (Platzfrage: z. B. Stator innen und beschränkter Platz außen) und das Verhältnis B/A (etwa auf Grund kreiseltheoretischer Überlegungen) vorgeschrieben. Geht man von dem Punkt d/D der Ordinatenachse waagrecht nach rechts bis zum Schnittpunkt mit der Kurve (I), die den Parameter $p = B/A$ trägt, so liefert die Abszisse dieses Schnittpunkts das für die Konstruktion benötigte Verhältnis $2\,b/D$.

b. Ermittlung des Verhältnisses d/D.

Für die Konstruktion eines Kreiselkörpers seien das Verhältnis $2\,b/D$ und das Verhältnis B/A vorgeschrieben. Geht man von dem Punkt $2\,b/D$ der Abszissenachse senkrecht nach oben bis zum Schnittpunkt mit der Kurve (I), die den Parameter $p = B/A$ trägt, so liefert die Ordinate dieses Schnittpunkts das für die Konstruktion benötigte Verhältnis d/D.

c. Die Schnittfigur des Kreiselkörpers.

Wir bemerken, daß das in dem Bild 2 schraffierte Rechteck zwischen den Parallelen zur Abszissenachse durch die Punkte d/D und 1 der Ordinatenachse sowie zwischen der Ordinatenachse selbst und der Parallelen zu ihr durch den Punkt $2\,b/D$ der Abszissenachse maßstäblich den Querschnitt des gesuchten geradzylindrischen Kreisrings liefert, und zwar ist die Abszissenachse die Symmetrieachse des gesuchten Kreiselkörpers: Man erhält also unmittelbar maßstäblich die obere Hälfte der Schnittfigur in dem Bild 1.

4. Die Genauigkeit des Verfahrens.

Technisch interessieren vor allem die Werte $p = B/A < 1$. Nun lehrt ein Blick auf das Bild 2, daß gerade in diesem Bereich die für äquidistante p-Werte ($\Delta p = 0{,}1$) gezeichneten Kurven (I) sehr weit voneinander abstehen, so daß sich diese Kurvenschar durch eine sehr viel feinere Unterteilung der p-Werte zeichnerisch mühelos verdichten läßt, ohne unübersichtlich zu werden. So gestattet die in dem Nomogramm 1 zwischen $p = B/A = 0{,}5$ und $0{,}6$ vorgenommene zwanzigfach feinere Unterteilung, das Trägheitsmomentenverhältnis auf etwa $1^0/_{00}$ genau abzulesen, wenn wir eine lineare Schätzgenauigkeit von $^1/_5$ des Kurvenabstandes annehmen.

Wir bemerken ferner zu 3. a dieses Abschnitts III, daß für alle Parameter $p = B/A$ zwischen 0,5 und 1,5 der Neigungswinkel der Kurven (I) gegen die Abszissenachse größer als 30° ist, so daß die Schnittpunkte der Geraden in waagrechter Richtung mit den Kurven (I) sehr genau gefunden werden können. — Hingegen ist zu 3. b dieses Abschnitts III zu bemerken, daß die Schnittpunkte der Geraden in senkrechter Richtung mit den Kurven (I) hinreichend genau nur etwa rechts-oberhalb der in das Bild 2 punktiert eingezeichneten Kurve (Kurve des gleichen Neigungswinkels 80°) gefunden werden können.

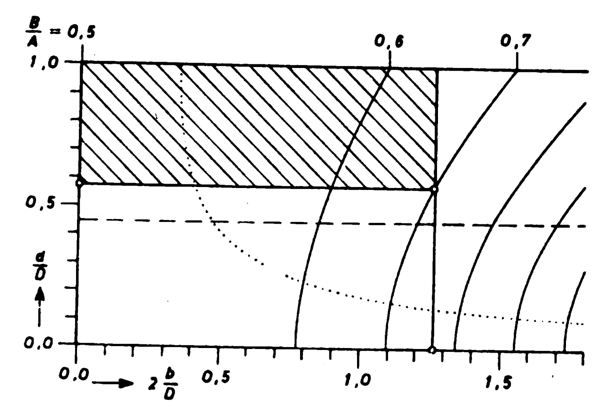


Bild 2. Beispiel zur Ermittlung einer der Verhältniszahlen d/D, $2\,b/D$, B/A, wenn die zwei anderen vorgegeben sind.

IV. Ermittlung des Hauptträgheitsmoments.

1. Gemessen sind D, d und G.

Unter Berücksichtigung der Substitution (1) erhalten wir für das Hauptträgheitsmoment:

$$A = u\,G\,D^2 \cdot 10^{-8} \text{ kgr m sec}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei u folgende Funktion der Zahl q ist:

$$u = 1{,}274 \cosh^2 q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II})$$

In dem Nomogramm 2 ist unter Berücksichtigung der Substitution (1) die Kurve $u\,(d/D)$ gezeichnet.

Sind also für einen vorgegebenen Kreiselkörper der Außendurchmesser, der Innendurchmesser und das Gewicht gemessen, so erhält man sein Hauptträgheitsmoment vermittels der Kurve (II) durch Rechnung gemäß Gl. (3).

2. Vorgeschrieben sind D, d, B/A und s.

Unter Berücksichtigung der Substitutionen (1) und (2) sowie der Gl. (I) erhalten wir für das Hauptträgheitsmoment:

$$A = v\,s\,D^5 \cdot 10^{-14} \text{ kgr m sec}^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wobei v folgende Funktion der Zahlen p und q ist:

$$v = 0{,}2741 \sqrt{10\,(2\,p - 1)}\;(1 - \sinh^2 q)\cosh^3 q \quad . \quad (\text{III})$$

In dem Nomogramm 2 ist unter Berücksichtigung der Substitution (1) mit p als Parameter die Kurvenschar $v\,(d/D,\,p)$ gezeichnet.

Sind also für einen Kreiselkörper aus konstruktiven Gründen der Außendurchmesser, der Innendurchmesser und das Material (d. h. das spezifische Gewicht s gr cm^{-3}) sowie auf Grund kreiseltheoretischer Überlegungen das Trägheitsmomentenverhältnis vorgeschrieben, so erhält man sein Hauptträgheitsmoment vermittels der Kurvenschar (III) durch Rechnung gemäß Gl. (4).

Zusatz: Aus den Gln. (3) und (4) erhalten wir unter Berücksichtigung der Gln. (II) und (III) für die auf ein Kilogramm bezogene Gewichtszahl:

$$G = w\,s\,D^3 \cdot 10^{-6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wobei w folgende Funktion der Zahlen p und q ist:

$$w = \frac{v}{u} = 0{,}2151 \sqrt{10\,(2\,p - 1)}\;(1 - \sinh^2 q)\cosh q \quad . \; . \quad (\text{IV})$$

V. Der günstigste Kreiselkörper.

1. Der Kreiselkörper größten Hauptträgheitsmoments.

Die Funktion v, Gl. (III), hat für jeden Wert des Parameters $p = B/A$ an der Stelle:

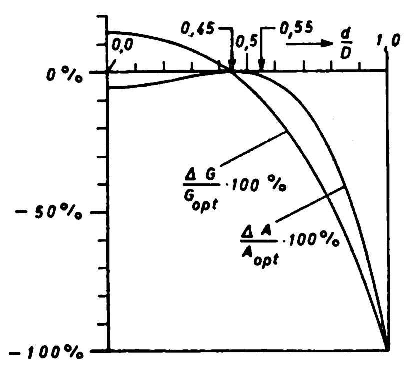


Bild 3. Die prozentualen Änderungen des Hauptträgheitsmoments und des Gewichts in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis.

$$\left(\frac{d}{D}\right)_{opt} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}4472 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

ein Maximum. In dem Bild 2 und in den Nomogrammen 1 und 2 ist die Stelle $(d/D)_{opt}$ durch eine gestrichelte Gerade gekennzeichnet.

Da man praktisch stets Kreiselkörper mit möglichst großem Hauptträgheitsmoment anstrebt, ist unter allen Kreiselkörpern, für die Material, Trägheitsmomentenverhältnis und äußerer Durchmesser vorgeschrieben sind, der mit dem Durchmesserverhältnis 0,4472 der günstigste.

Mit $(d/D)_{opt}$ wird:

$$\left(2\frac{b}{D}\right)_{opt} = 0{,}6\sqrt{10\,(2p-1)} \quad \ldots\ldots \quad (1\,a)$$

$$A_{opt} = 1{,}529\, G\, D^2 \cdot 10^{-8} \text{ kgr m sec}^2 \quad \ldots\ldots \quad (3\,a)$$

$$A_{opt} = 2{,}882\, s\, D^5 \sqrt{10\,(2p-1)} \cdot 10^{-15} \text{ kgr m sec}^2 \quad (4\,a)$$

$$G_{opt} = 1{,}885\, s\, D^3 \sqrt{10\,(2p-1)} \cdot 10^{-7} \quad \ldots\ldots \quad (5\,a)$$

In dem Bild 3 sind die prozentualen Änderungen des Hauptträgheitsmoments, $(\Delta A/A_{opt}) \cdot 100\%$, und des Gewichts, $(\Delta G/G_{opt}) \cdot 100\%$, in Abhängigkeit von dem Verhältnis d/D aufgetragen. Hiernach empfehlen wir, das Verhältnis $(d/D)_{opt}$ keinesfalls zu unterschreiten. Ein nicht allzu großes Überschreiten bringt zwar einerseits einen Verlust an Hauptträgheitsmoment, der jedoch zunächst nur sehr langsam anwächst, andererseits aber eine verhältnismäßig große Gewichtsersparnis. Als rationell zulässig entnehmen wir dem Bild 3 das Intervall:

$$0{,}45 < \frac{d}{D} < 0{,}55 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

2. Das Hauptträgheitsmoment eines Kreiselkörpers wächst mit der fünften Potenz seines Durchmessers.

Es dürfte nicht überflüssig sein, auch bei dieser Gelegenheit eindringlich darauf hinzuweisen, daß nach Ausweis der Gl. (4) das Hauptträgheitsmoment mit der fünften Potenz des Kreiseldurchmessers ansteigt, wenn Material, Trägheitsmomentenverhältnis und Durchmesserverhältnis vorgegeben sind, während eine Änderung des Materials lediglich eine dem spezifischen Gewicht proportionale Änderung des Hauptträgheitsmoments zur Folge hat.

Ein Kreiselkörper vom 4fachen Durchmesser hat also ceteris paribus ein 1024faches Hauptträgheitsmoment.

Zusatz: Da der Drall bzw. die Wucht eines Kreisels linear bzw. quadratisch mit der Kreiseldrehgeschwindigkeit ansteigt, hat ein Kreisel vom doppelten Durchmesser bei halber Drehzahl (Schonung der Kreisellager!) ceteris paribus den sechzehnfachen Drall und die achtfache Wucht (Englische Kompaßkreisel!).

3. Vergleich von Kreiselkörpern aus Aluminium, Eisen und Wolfram.

Ein Kreiselkörper aus Aluminium bzw. Wolfram ($s =$ 2,69 bzw. 19,1) hat mit $D = 1{,}237\, D_0$ bzw. $0{,}836\, D_0$ ceteris paribus das gleiche Hauptträgheitsmoment wie ein Kreiselkörper aus Eisen ($s = 7{,}8$) mit $D = D_0$. In der folgenden Zahlentafel sind die Verhältnisse der Hauptträgheitsmomente für einige weitere D/D_0-Werte zusammengestellt.

D/D_0	Al	Fe	W
0,5	0,011	0,031	0,077
0,836	0,14	0,41	1
1	0,34	1	2,4
1,237	1	2,9	7,1
2	11	32	78

Für drei Kreiselkörper aus Aluminium, aus Eisen und aus Wolfram mit gleichem Hauptträgheitsmoment, gleichem Nebenträgheitsmoment und gleichem Durchmesserverhältnis haben wir folgende Verhältnisse ihrer äußeren Durchmesser und ihrer Breiten:

$$D_{Al} : D_{Fe} : D_W = b_{Al} : b_{Fe} : b_W = s_{Al}^{-0,2} : s_{Fe}^{-0,2} : s_W^{-0,2} = 1{,}237 : 1 : 0{,}836$$

sowie ihrer Gewichte:

$$G_{Al} : G_{Fe} : G_W = s_{Al}^{0,4} : s_{Fe}^{0,4} : s_W^{0,4} = 0{,}653 : 1 : 1{,}431\,.$$

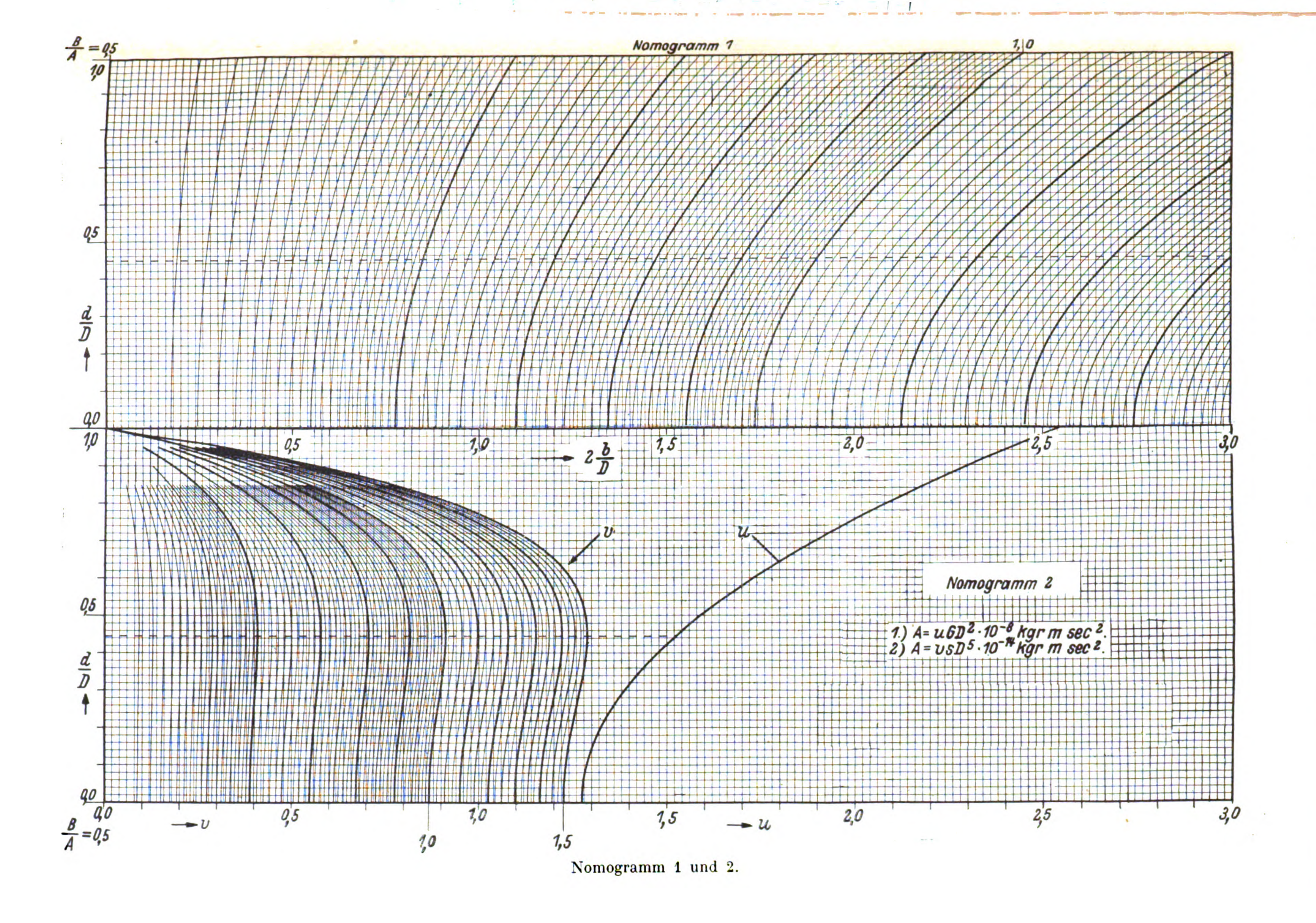
Also verhalten sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der äußeren Durchmesser:

Verglichen mit dem Kreiselkörper aus Eisen haben wir:

1. für den Kreiselkörper aus Aluminium bei je 23,7% Durchmesser- und Breitenvergrößerung eine Gewichtserniedrigung um 34,7%,
2. für den Kreiselkörper aus Wolfram bei je 16,4% Durchmesser- und Breitenverkleinerung eine Gewichtserhöhung um 43,1%.

Wir empfehlen natürlich nicht, Aluminium als Material für Kreiselkörper zu verwenden: Aluminium scheidet aus Festigkeitsgründen aus (Fließen des Materials und somit dauernde Deformation des Kreiselkörpers infolge der Fliehkräfte bei den üblich hohen Kreiseldrehzahlen).

Es ist aber insbesondere auch nicht zu empfehlen, Wolfram (Sparmetall!) als Material für Kreiselkörper zu verwenden, weil die Platzersparnis nur gering und die Gewichtszunahme unverhältnismäßig groß ist.



Nomogramm 1 und 2.

Beitrag zur Berechnung gedrückter, dünnwandiger Profile oberhalb der Beulgrenze*).

Von F. Reinitzhuber.

Bericht der Henschel Flugzeug-Werke A. G., Schönefeld Krs. Teltow.

Für ein gedrücktes, aus abgekanteten dünnen Blechen gebildetes Profil mit quadratischem Querschnitt wird der Spannungsverlauf in den Blechwandungen und die Spannungs-Dehnungskurve nach dem Überschreiten der kritischen Beullast angenähert berechnet.

Gliederung.

1. Einleitung.

Werden dünnwandige, aus abgekanteten Blechen entstandene Profile, wie sie im Flugzeugbau verwendet werden, gedrückt, so ist ihr Bruchverhalten je nach der Schlankheit verschieden.

Bei großer Schlankheit weicht die Stabachse unter Beibehaltung der Querschnittsform seitlich aus — der Stab knickt. Die zugehörige Bruchlast läßt sich nach Euler im elastischen Bereich und nach Engesser-Kármán im plastischen Bereich berechnen. Ihre Größe ist wesentlich von der Stablänge abhängig. Bei mittlerer Schlankheit, besonders bei offenen Profilen, verdreht sich der Stabquerschnitt unter Beibehaltung der Querschnittsform — der Stab drillt weg. Die Drillknicklast läßt sich nach Wagner und Kappus[1]) ermitteln. Bei kleiner Schlankheit weichen die das Profil bildenden ebenen wenig biegesteifen Wandungen bei gleichzeitiger Veränderung der Querschnittsform aus — der Stab beult, ohne daß der Bruch gleich eintritt. Die aus den Beullasten der Profilwandungen berechenbare Beullast des gesamten Profils ist dann nicht die Bruchlast; diese liegt oft, besonders bei dünnwandigen Profilen, um ein vielfaches höher und wird aus Versuchen gefunden. Beide Lasten, die Beul- und die Bruchlast, sind nur in geringem Maße von der Stablänge abhängig. Der Spannungs- und Verformungszustand solcher gedrungenen Stäbe nach dem Überschreiten der Beullast wurde bisher nicht durch Rechnung zu klären versucht.

Die vorliegende Arbeit stellt sich daher die Aufgabe, an Hand des quadratischen Hohlquerschnittes das Verhalten dünnwandiger Profile von kleiner Schlankheit nach dem Überschreiten der Beullast mit den derzeit bekannten Rechenmethoden auf theoretischem Wege zu untersuchen. Als Profilquerschnitt wurde ein Quadrat gewählt, da dieses infolge seiner Symmetrie-Eigenschaften am ehesten einer rechnerischen Behandlung zugänglich ist. Die auf theoretischem Wege gewonnenen Ergebnisse werden durch Versuche überprüft.

2. Theoretische Untersuchung.

Ein geschlossenes Profil (Hohlzylinder) aus elastischem Material (Elastizitätsmodul E, Querzahl ν), dessen Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge b und der Blechdicke s ist, wird in der Längsrichtung (Zylinderachsenrichtung) auf Druck mit der Kraft P zentrisch belastet. Wird durch die Mittelebene einer der vier gleichen Seitenwände ein Koordinatensystem x, y, z gelegt, Bild 1, so treten in Richtung der Koordinaten die drei Deformationen u, v, w auf, und in der Mittelebene entstehen die Spannungen σ_x, σ_y und τ.

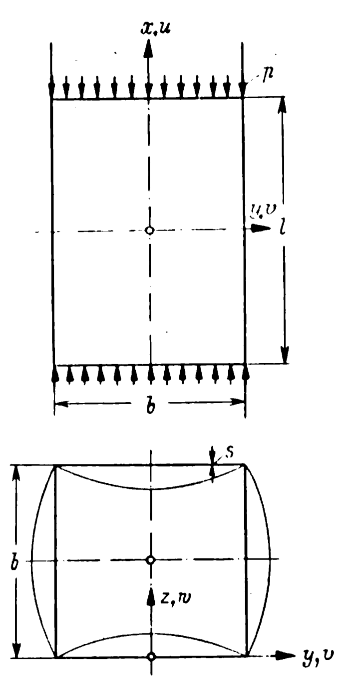


Bild 1. Quadratisches Profil unter gleichmäßigem Druck.

Ist die mittlere Druckspannung $p = \frac{P}{4\,s\,b}$ kleiner als die kritische Beulspannung p^*, so werden die Spannungen $\sigma_x = -p$, $\sigma_y = 0$, $\tau = 0$ und die Verschiebungen $u = -\frac{p}{E}x$, $v = +\nu\frac{p}{E}y$, $w = +\nu\frac{p}{E}\frac{b}{2}$. Zwischen der Stauchung ε und der Druckspannung p herrscht dann Proportionalität nach der Gleichung $p = E\varepsilon$ bis zur Beulgrenze; dort ist $p^* = E\varepsilon^*$, wenn mit ε^* die kritische Zusammendrückung bezeichnet wird.

Überschreitet die mittlere Druckspannung p die kritische Beulspannung p^*, so beulen die Seitenwände wellenförmig in der Längsrichtung aus und der Querschnitt nimmt die in Bild 1 dargestellte Form an, bei der, da die rechten Winkel an den Kanten erhalten bleiben, einer Ausbeulung in der einen Seitenfläche, eine Einbeulung in der benachbarten entspricht und die Kanten gerade bleiben. Die Beulen in Längsrichtung haben bei

*) A 2222.

[1]) H. Wagner, Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25 Jahre T. H. Danzig. Verlag A. W. Kaufmann. Danzig 1929. — R. Kappus, Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich. Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 444.



genügender Länge des gedrückten Profiles im Bereich, der von den gestörten Endflächen nicht beeinflußt ist, die konstante Länge l. Bei großer Länge des Profiles wird $l = b$. Das Verhalten des Profiles ist also mit der Länge l periodisch. Es genügt daher für die folgende Betrachtung eine der vier gleichen rechteckigen Seitenflächen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenlinien als Platte (Abmessungen $b \times l$) zu untersuchen.

Nach der Theorie der dünnen elastischen Platten mit großen Ausbiegungen[2]) gelten für die Spannungen σ_x, σ_y, τ in der Plattenebene die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1\,a)$$

die durch den Spannungsfunktionsansatz

$$\sigma_x = \Phi_{yy}, \; \sigma_y = \Phi_{xx}, \; \tau = -\Phi_{xy} \quad \ldots\ldots \quad (1\,b)$$

befriedigt werden, wobei die Spannungsfunktion Φ und die Durchsenkung w durch die beiden Grundgleichungen

$$\Delta\Delta\Phi = E\,(w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy}) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{E\,s^2}{12\,(1-\nu^2)}\,\Delta\Delta w - \Phi_{yy} w_{xx} - \Phi_{xx} w_{yy} + 2\,\Phi_{xy} w_{xy} = 0 \quad (3)$$

verknüpft sind. Die Verschiebungen u, v in der Plattenebene ergeben sich aus

$$E\,u_x = \Phi_{yy} - \nu\,\Phi_{xx} - \frac{E}{2}\,w_x^2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$E\,v_y = \Phi_{xx} - \nu\,\Phi_{yy} - \frac{E}{2}\,w_y^2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

(Die Indexe bei u, v, w und Φ bedeuten die partiellen Ableitungen nach den entsprechenden Variablen).

Das Zusammenwirken zwischen den vier Seitenwänden an den Kanten $y = \pm \frac{b}{2}$ verlangt die Erfüllung der Randbedingungen

$$w_y\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = -\,w_y\left(x \pm l, \pm\frac{b}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (6\,a)$$

$$w\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = v\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\,b)$$

$$\sigma_y\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\,c)$$

$$\tau\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\,d)$$

$$s \int\limits_{-b/2}^{+b/2} \sigma_x\,d\,y = -\,p\,b\,s = -\,\frac{P}{4} \quad \ldots\ldots \quad (6\,e)$$

Eine exakte Integration der Grundgleichungen (2) und (3) ist bisher nicht bekannt geworden. Daher wird einer von K. Marguerre angegebenen Näherungsmethode[2]) gefolgt und für die Ausbiegung der Ritzansatz

$$w = \eta + f\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

mit dem Freiwert f gewählt, der der Beulform, die kurz nach dem Überschreiten der kritischen Last auftritt, nahe kommen dürfte und die Randbedingung (6a) erfüllt. Der Ansatz (7) in die rechte Seite von Gleichung (2) eingesetzt, ergibt

$$\Delta\Delta\Phi = -\,\frac{E\,\pi^4 f^2}{2\,b^2 l^2}\left(\cos\frac{2\pi x}{l} + \cos\frac{2\pi y}{b}\right),$$

von der sich das partikuläre Integral

$$\Phi^{(p)} = -\,E\,\frac{f^2}{32}\left[\left(\frac{l}{b}\right)^2\cos\frac{2\pi x}{l} + \left(\frac{b}{l}\right)^2\cos\frac{2\pi y}{b}\right] \quad (8\,a)$$

---

[2]) K. Marguerre, Die mittragende Breite der gedrückten Platte, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 121 und A. Kromm u. K. Marguerre, Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 627.

anschreiben läßt. Zur Befriedigung der Randbedingungen (6b) bis (6d) werden noch bezüglich der x- und y-Achse symmetrische und in x-Richtung periodische Lösungen

$$\Phi^{(h)} = -\left(\frac{p\,y^2}{2} + A\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l}\cos\frac{2\pi x}{l} + B\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}\right) \quad (8\,b)$$

der zu (2) gehörigen homogenen Gleichung $\Delta\Delta\Phi = 0$, zu $\Phi^{(p)}$ hinzugefügt, so daß die vollständige Lösung für Φ lautet

$$\Phi = \Phi^{(p)} + \Phi^{(h)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die Gleichung (8) für Φ in (1b), (4) und (5) eingesetzt, ergibt

$$\sigma_x = E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2\cos\frac{2\pi y}{b} - \frac{4\pi^2}{l^2}\cos\frac{2\pi x}{l}\left[(A + 2B)\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l} + B\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l}\right] - p \quad \ldots\ldots \quad (9\,a)$$

$$\sigma_y = \left[E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{b}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{l^2}\left(A\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l} + \frac{2\pi y}{l}\,B\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l}\right)\right]\cos\frac{2\pi x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (9\,b)$$

$$\tau = \frac{4\pi^2}{l^2}\left[(A + B)\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l} + B\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l}\right]\sin\frac{2\pi x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (9\,c)$$

$$\begin{aligned} E\,u = &-\nu\,E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{b}\right)^2\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l} \\ &- E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2\left(x - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l} - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi y}{b}\right) \\ &- \frac{2\pi}{l}\left[(A\,(1+\nu) + 2\,B)\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l}\right. \\ &\left. + (1+\nu)\,B\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l}\right]\sin\frac{2\pi x}{l} - p\,x \quad \ldots \quad (9\,d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\,v = &-\nu\,E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2\frac{b}{2\pi}\sin\frac{2\pi y}{b} \\ &- E\,\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{b}\right)^2\left(y - \frac{b}{2\pi}\sin\frac{2\pi y}{b} - \frac{b}{2\pi}\cos\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{b}\right) \\ &+ \frac{2\pi}{l}\left[(A\,(1+\nu) - B\,(1-\nu))\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{l}\right. \\ &\left. + (1+\nu)\,B\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{l}\right]\cos\frac{2\pi x}{l} + \nu\,p\,y \quad \ldots \quad (9\,e) \end{aligned}$$

Die Randbedingung (6a) ist durch den Ansatz (7) befriedigt; für die Erfüllung der Randbedingung (6b), die mit dem Ansatz (7) in

$$v\left(x, \pm\frac{b}{2}\right) = \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\,b)'$$

übergeht, und der Randbedingungen (6c), (6d), (6e), also von noch insgesamt vier Randbedingungen stehen nur drei Integrationskonstante A, B und p zur Verfügung. Eine Randbedingung kann demnach nicht erfüllt werden. Es ist daher eine geeignete Auswahl unter den Randbedingungen zu treffen, von der man erwarten kann, daß sie gute Näherungslösungen liefern wird.

Von den vier Möglichkeiten

(6b)′ (6c), (6d) . . . . . . (10a)

(6b)′ (6c), (6e) . . . . . . (10b)

(6b)′ (6d), (6e) . . . . . . (10c)

(6c), (6d), (6e), ... (10d)

die zur Bestimmung von A, B, p bestehen, scheiden (10a) und (10b) aus, da bei diesen für den Längsrand der Platte gleichzeitig die Bedingungen $\sigma_y = 0$ in (6c) und $v =$ konst. in (6b)′ gefordert werden, die sich gegenseitig ausschließen und deshalb in Gleichung (13) die Randintegrale nicht verschwinden lassen. Mit (10c) und (10d) findet man aus (6e) durch Integration des Ausdruckes (9a) für σ_x über die Plattenbreite unter Beachtung der Randbedingung (6d), daß die In-

tegrationskonstante p unmittelbar gleich dem Mittelwert der Druckspannung

$$p = \frac{P}{4\,b\,s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(11 a)}$$

ist. Die zwei noch unbekannten Integrationskonstanten A, B können nun entsprechend (10c) und (10d) aus (6b), (6d) oder (6c), (6d) ermittelt werden. Aus (6b) und (6d) ergibt sich $A = B = 0$; dieser Fall wurde bereits von K. Marguerre[3] bei der mittragenden Breite der mit Versteifungen versehenen gedrückten Platte untersucht und ist hier nicht so gut als Näherungslösung geeignet, wie die aus (6c) und (6d) errechenbaren Lösungen (siehe Abschnitt 3). Es werden daher die Integrationskonstanten A und B aus den Randbedingungen (6c) und (6d) bestimmt.

Aus (9b) und (9c) ergeben sich für $y = \pm \frac{b}{2}$ entsprechend (6c) und (6d) die beiden Gleichungen

$$A \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \operatorname{Cof} \pi \frac{b}{l} + B \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \pi \frac{b}{l} \operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l} + E \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{f}{b}\right)^2 = 0$$

$$A \operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l} + B \left(\operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l} + \pi \frac{b}{l} \operatorname{Cof} \pi \frac{b}{l}\right) = 0$$

aus denen

$$A = -\frac{E f^2}{16} \left(\frac{l}{b}\right)^2 \frac{\operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l} + \pi \frac{b}{l} \operatorname{Cof} \pi \frac{b}{l}}{\operatorname{Sin} 2\pi \frac{b}{l} + 2\pi \frac{b}{l}} \qquad \text{(11 b)}$$

$$B = + \frac{E f^2}{16} \left(\frac{l}{b}\right)^2 \frac{\operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l}}{\operatorname{Sin} 2\pi \frac{b}{l} + 2\pi \frac{b}{l}} \quad . \; . \; . \quad \text{(11 c)}$$

folgt.

Die durch die Gleichungen (11) gegebenen Integrationskonstanten A, B, p erfüllen die Randbedingungen (10d), nicht aber die Randbedingung (6b)', die besagt, daß die Verschiebung v am Plattenlängsrand konstant und gleich η sein soll. Für die Verschiebung v am Plattenlängsrand findet man aus (9e)

$$v\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{b}\right)^2 + \nu \frac{p}{E}\right)\frac{b}{2}$$
$$+ \frac{2\pi}{l E}\left\{\left[A\,(1+\nu) - B\,(1-\nu)\right] \operatorname{Sin} \pi \frac{b}{l} + (1+\nu)\, B \pi \frac{b}{l} \operatorname{Cof} \pi \frac{b}{l}\right\} \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Setzt man hierin für A und B die Werte (11b) und (11c) ein, so verschwindet in der Tat der zweite, mit x veränderliche Summand nicht, so daß $v\left(x, \pm \frac{b}{2}\right)$ nicht konstant wird. Um nun einen von x unabhängigen Wert für η zu erhalten, der möglichst kleine Abweichungen von der Gleichung (6b)' hat, wird

$$\eta = \left(-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{b}\right)^2 + \nu \frac{p}{E}\right)\frac{b}{2}$$

dem Mittelwert der Verschiebung v am Plattenlängsrande gesetzt.

Die Gleichung (3) läßt sich zufolge des Ritzansatzes für w nicht mehr befriedigen. An ihre Stelle tritt nach dem Ritzschen Verfahren die Forderung, den Freiwert f so zu wählen, daß die in der Platte aufgespeicherte Formänderungsenergie

$$\bar{A} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left\{ \frac{s}{2E}\left[(\Delta \Phi)^2 - 2\,(1+\nu)\,(\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2)\right] + \frac{E s^3}{24\,(1-\nu^2)}\left[(\Delta w)^2 - 2\,(1-\nu)\,(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)\right]\right\} dx\, dy \quad (12)$$

ein Minimum wird. Aus $\frac{\partial \bar{A}}{\partial f} = 0$ kann die Unbekannte f ermittelt werden. Führt man die Differentiation der Gleichung (12) nach f noch vor der Integration aus (Galerkinsches Verfahren), so erhält man bei Berücksichtigung von Gleichung (1a) statt Gleichung (3)

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial f} = -s \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\,\Phi_{xy} w_{xy} - \frac{E s^2}{12\,(1-\nu^2)}\, \Delta\Delta w\right) \frac{\partial w}{\partial f}\, dx\, dy$$
$$+ s \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[\Phi_{yy}\left(\frac{\partial u}{\partial f} + w_x \frac{\partial w}{\partial f}\right) - \Phi_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial f} + w_y \frac{\partial w}{\partial f}\right)\right]_{x=+\frac{l}{2}} dy$$
$$+ s \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[\Phi_{xx}\left(\frac{\partial v}{\partial f} + w_y \frac{\partial w}{\partial f}\right) - \Phi_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial f} + w_x \frac{\partial w}{\partial f}\right)\right]_{y=+\frac{b}{2}} dx$$
$$+ \frac{E s^3}{12\,(1-\nu^2)} \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[(\nu\, w_{xyy} - 2\, w_{xyy} - w_{xxx}) \frac{\partial w}{\partial f}\right]_{x=\pm\frac{l}{2}} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[(\nu\, w_{xxy} - 2\, w_{xxy} - w_{yyy}) \frac{\partial w}{\partial f}\right]_{y=+\frac{b}{2}} dx \right.$$
$$\left. + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left[(w_{xx} + \nu\, w_{yy}) \frac{\partial w_x}{\partial f}\right]_{x=\pm\frac{l}{2}} dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[(w_{yy} + \nu\, w_{xx}) \frac{\partial w_y}{\partial f}\right]_{y=\pm\frac{b}{2}} dx + 2\,(1-\nu) \left[w_{xy} \frac{\partial w}{\partial f}\right]_{\substack{x=\pm\frac{l}{2} \\ y=\pm\frac{b}{2}}} \right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

[3]) Siehe 2) S. 124, Sonderfall: Frei verschiebliche Längsränder ($p_2 = 0$).

In Gleichung (13) verschwinden mit dem Ansatz (7) und den Randbedingungen (6c) und (6d) die Randglieder und Randintegrale.

Mit der Bestimmung von f aus (13) ist der Spannungs- und Verformungszustand des Profiles aus den Gleichungen (7) und (9) berechenbar.

Die weitere Untersuchung wird für den Fall quadratischer Beulen ($b = l$), wie sie bei genügend langem Zylinder im ungestörten Bereiche auftreten, durchgeführt. Aus Gleichung (13) erhält man durch Einsetzen des Ausdruckes (8) für Φ und der Ausdrücke (11) für A und B die Gleichung

$$\varepsilon - \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{s}{l}\right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2 (2-\varkappa) = 0 \qquad (14)$$

wobei für p, der aus $u\left(\pm\frac{l}{2}, y\right) = \mp\,\varepsilon\,\frac{l}{2}$ (siehe Gleichung (9d)) folgende Ausdruck

$$p = E\left(\varepsilon - \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

eingeführt wurde und

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{Cof}\,2\pi - 1}{\pi\,(2\pi + \mathfrak{Sin}\,2\pi)} = 0{,}30985$$

ist. Setzt man in (14) $f = 0$, so erhält man den bekannten kritischen Wert für die Stauchung

$$\varepsilon\,(f = 0) = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{s}{l}\right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} = \varepsilon^*$$

Aus (14) ergibt sich dann

$$\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{f}{l}\right)^2 = k\,(\varepsilon - \varepsilon^*) \qquad \left(k = \frac{1}{2-\varkappa} = 0{,}5917\right) \qquad (16)$$

Der Zusammenhang zwischen mittlerer Spannung p und mittlerer Stauchung ε folgt aus Gleichung (15) mit

$$p - p^* = E_{\text{red}}\,(\varepsilon - \varepsilon^*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

wobei

$$E_{\text{red}} = (1-k)\,E = \frac{1-\varkappa}{2-\varkappa}\,E = 0{,}4083\,E.$$

In Bild 2 ist die Spannungsdehnungsgleichung (17) eingetragen. Die scheinbare Steifigkeit oberhalb der Beulgrenze ist also nur rund 0,4fach so groß wie unterhalb der kritischen Beullast.

Setzt man den Ausdruck (16) und (17) in Gleichung (7) und (9) ein, so erhält man

$$\frac{\sigma_x}{p^*} = -\frac{p}{p^*} + \frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{p}{p^*} - 1\right)\left\{\cos\frac{2\pi y}{l} - \cos\frac{2\pi x}{l}\left[(\alpha + 2\beta)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l} + \beta\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{l}\right]\right\}$$

$$\frac{\sigma_y}{p^*} = \frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{p}{p^*} - 1\right)\cos\frac{2\pi x}{l}\left\{1 + \alpha\,\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l} + \beta\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{l}\right\}$$

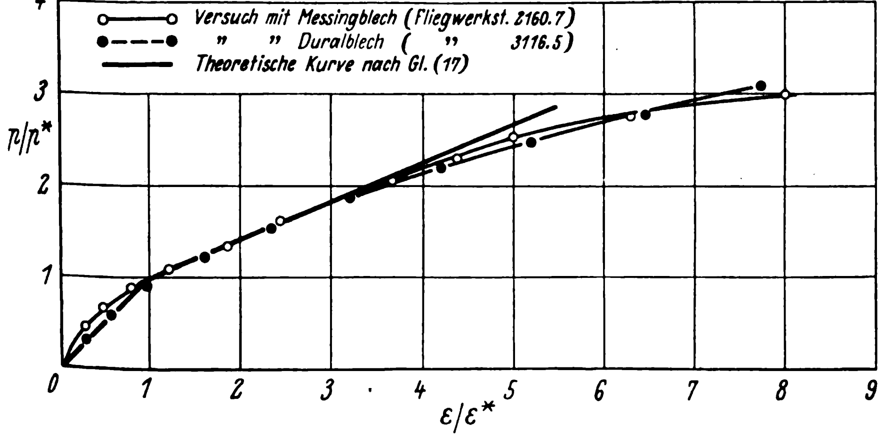


Bild 2. Spannungs-Dehnungskurven

$p^* = \frac{\pi^2}{3}\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{s}{l}\right)^2$ Krit. Druckspannung; $\varepsilon^* = \frac{p^*}{E}$ Kritische Stauchung.

$$\frac{\tau}{p^*} = -\frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{p}{p^*} - 1\right)\sin\frac{2\pi x}{l}\left\{(\alpha + \beta)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{l} + \beta\,\frac{2\pi y}{l}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{l}\right\}$$

$$\left(\alpha = -0{,}35008,\ \beta = +0{,}08429,\ \frac{1}{1-\varkappa} = 1{,}44896\right).$$

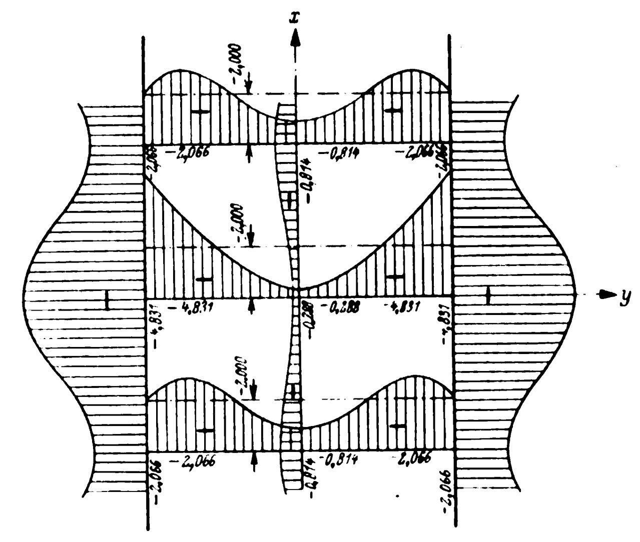


Bild 3a. Normalspannungen $\frac{\sigma_x}{p^*}$.

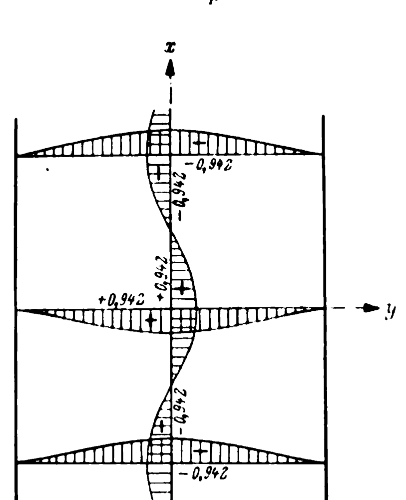


Bild 3b. Normalspannungen $\frac{\sigma_y}{p^*}$.

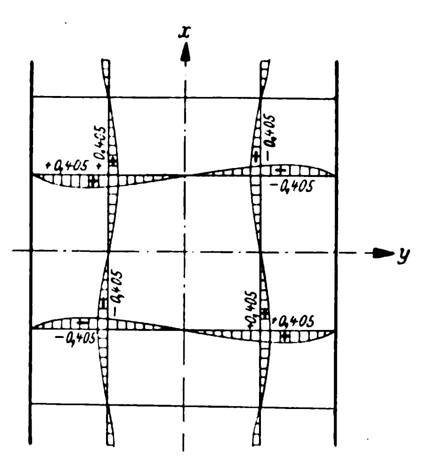


Bild 3c. Schubspannungen $\frac{\tau}{p^*}$.

Bild 3a—c. Spannungsverlauf in der Seitenwand eines dünnwandigen gedrückten Profiles mit quadratischem Querschnitt bei einfacher Überschreitung der kritischen Beullast $\left(\frac{p}{p^*} = 2\right)$.

Aus Bild 3 ist die zahlenmäßige Auswertung dieser Gleichungen bei einfacher Überschreitung der Knicklast $\left(\frac{P}{P^*} = 2\right)$ zu ersehen.

Der in Bild 3 dargestellte Spannungsverlauf gibt nur ein ungefähres Bild des tatsächlichen Zustandes, da die Verschiebung v an der Profilkante nicht konstant und von x unabhängig ist, wie dies die Randbedingung (6b)′ fordert. Trotzdem kann man sich an Hand von Bild 3 den Spannungsverlauf klar machen:

Die wellenförmigen Ausbiegungen, die nach dem Überschreiten der kritischen Beullast in den Seitenwänden auftreten, versuchen die Profilkanten im Bereich der größten Ausbiegungen einzuziehen. Dadurch entstehen in der Mitte der Beulen Zugspannungen in y-Richtung, die sich mit den Druckspannungen, die im Wendepunkt der Wellen auftreten, ausgleichen. Dieser Ausgleich läßt sich nur mit Hilfe von Schubspannungen herstellen. Die Druckspannungen in x-Richtung verteilen sich nach Überschreiten der kritischen Beullast ungleichmäßig, und zwar erfolgt ähnlich wie bei der mit Aussteifungen versehenen gedrückten Platte infolge des Ausweichens des Plattenmittelteiles in wellenförmigen Beulen eine Abwanderung der Druckspannungen an die Plattenränder, also an die Profilkanten. Die Schubspannungen bewirken je nach der Lage des Querschnittes eine verschiedene Art der Spannungsverteilung über die Plattenbreite, so daß die Abwanderung der Druckspannung an die Plattenränder im Querschnitt mit der größten Ausbiegung größer ist, als im Querschnitt am Wendepunkt der Wellen.

Die Ursache, warum die im vorstehenden durchgeführte Untersuchung nur angenähert gilt, liegt an der mit Ansatz (7) festgelegten Beulenform, bei der die Profilkanten gerade angenommen wurden. Mit zunehmender Überschreitung der kritischen Beullast bleiben die Profilkanten aber nicht mehr gerade, sondern ziehen sich in den Querschnitten ein, in denen die Seitenwände die größten Deformationen erleiden. Eine Erweiterung des Ansatzes (7) durch Hinzunahme eines zweiten Freiwertes in der Art

$$w = \eta + f_1 \cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi y}{b} + f_2 \cos\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi y}{b}$$

und weitere Glieder dieser Reihe würde sicher bessere Resultate liefern. Will man mit nur einem Freiwert auskommen und eine Verbesserung erzielen, so könnte man unter Beibehaltung des Ansatzes (7) noch weitere Lösungen der homogenen Gleichung $\Delta\Delta\Phi = 0$ mit neuen Integrationskonstanten in (8b) hinzunehmen und diese durch punktweises Erfüllen der Randbedingungen bestimmen. Der Rechenaufwand ist aber bei beiden angedeuteten Wegen einer Verbesserung so groß, daß von ihrer Anwendung abgesehen wurde.

3. Versuche.

Der Zweck der Versuche war, die im vorhergehenden Abschnitt auf theoretischem Wege gewonnenen Resultate versuchsmäßig zu überprüfen. Vor allem sollte der Ansatz (7) und die Spannungsdehnungsgleichung (17) kontrolliert werden.

Als Versuchskörper wurde der in Bild 4 dargestellte quadratische Zylinder gewählt, der aus mittelhartem Messingblech durch Abkanten und Vernieten hergestellt wurde. Der Nietstoß wurde in die Mitte einer Seitenfläche gelegt. Die Kennwerte des Messingbleches (Fliegerwerkstoff-Kennzahl 2160.7) wurden wie folgt festgestellt:

Blechdicke s	$= 0{,}61$ bis $0{,}62$ mm, i. M. $0{,}615$ mm,
Elastizitätsmodul E	$= 10000$ bis 11000 kg/mm², i. M. 10500 kg/mm²,
Streckgrenze $\sigma_{0,2}$	$= 24{,}4$ kg/mm²,
Zugfestigkeit σ_B	$= 35{,}2$ bis $38{,}6$ kg/mm²,
Bruchdehnung δ	$= 50\%$.

Die Messungen der Ausbeulungen wurden an zwei Seitenwänden mit Hilfe einer Meßuhr und eines bearbeiteten Winkelprofiles durchgeführt, dessen Winkelschenkel parallel zu zwei Seitenflächen des Zylinders eingestellt waren (Bild 4).

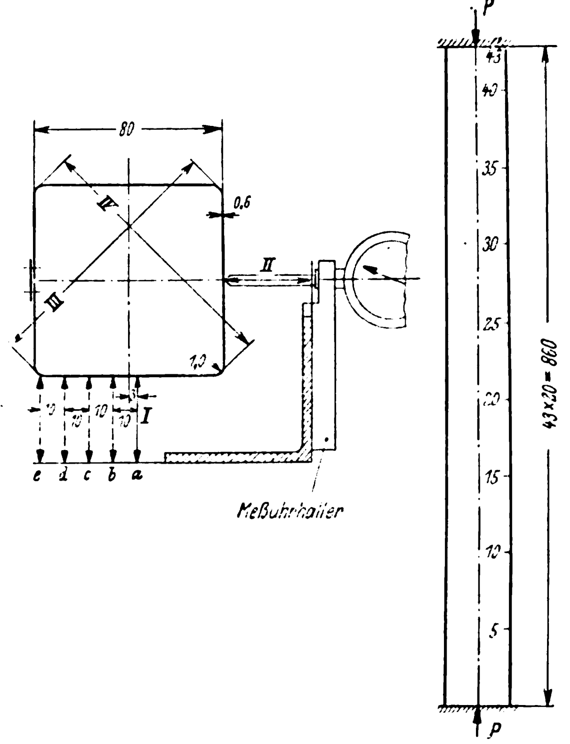


Bild 4. Abmessungen des Versuchskörpers aus Messingblech (Fliegerwerkstoff 2160.7). (Maße in mm).

Durch Verschieben der Meßuhr an dem Winkelschenkel konnten die zwei zu den Winkelschenkeln parallelen Seitenflächen abgetastet werden. Die Deformationen wurden in der Mitte der beiden Seitenwände über die gesamte Länge und an zwei Querschnitten (Meßstelle 18 und 25) normal zur Druckrichtung gemessen. Die Änderung der Länge der Diagonalen bei zunehmender Belastung wurde mit Hilfe einer Mikrometerlehre und die Zusammendrückung des Versuchsstückes mittels einer Meßuhr bestimmt. Die Grundablesungen wurden bei einer Belastung von 30 kg gemacht; die weiteren Belastungsstufen, bei denen gemessen wurde, waren 200 kg, 500 kg, 700 kg, 1000 kg und 1200 kg.

Das Ergebnis der Messungen an den Seitenwänden ist aus Bild 5 zu ersehen. Aus Bild 5a und 5b erkennt man, daß sich in der Längsrichtung annähernd gleiche Wellen ausbildeten, soweit nicht durch Vorbeulen und Randeinflüsse die Regelmäßigkeit gestört wurde. Eine Veränderung der Wellenlänge mit zunehmender Belastung trat in geringem Maße ein. Erleidet eine Seitenfläche eine Ausbeulung, so zeigt die benachbarte Seitenfläche eine Einbeulung und umgekehrt.

Die Änderung der Länge der Diagonalen ist in Bild 6 dargestellt. Die absolute Größe dieser Deformationen ist im Vergleich zu den Ausbeulungen der Seitenwände gering. Brauchbare Meßwerte ergaben sich erst bei 1300 kg Belastung, knapp vor Erreichen der Bruchlast. An den Stellen, an denen die Wellen in den Seitenflächen ihre Extremwerte haben, trat eine Verringerung der Diagonallängen ein, während an den Knotenlinien der Wellen eine geringe Vergrößerung des Kantenabstandes festzustellen war.

Das Ergebnis der Messung der Zusammendrückung des Versuchskörpers mit steigender Belastung ist in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Der Bruch des Versuchsstückes erfolgte bei $P = 1330$ kg durch Verformen der Kanten an den Meßstellen 33 und 34, an der die Wellen der Seitenflächen ihre Knotenlinien haben. Das Verformungsbild (s. Bild 7) läßt einen Stabilitätsbruch vermuten.

Auf Grund der Messungen an den Seitenwänden des Versuchsstückes kann man den Ansatz (7) als einen der Verformungsfläche ähnlichen ansprechen, solange die kritische Last nicht allzuviel überschritten wird. Bei größeren

Bild 5a. Meßstelle I.

Bild 5b. Meßstelle II.

Bild 5c. Meßstelle 18.

Bild 5d. Meßstelle 25.

Bild 5a—d. Messungen an den Seitenwänden des Versuchskörpers aus Messingblech (Fliegwerkstoff 2160.7).



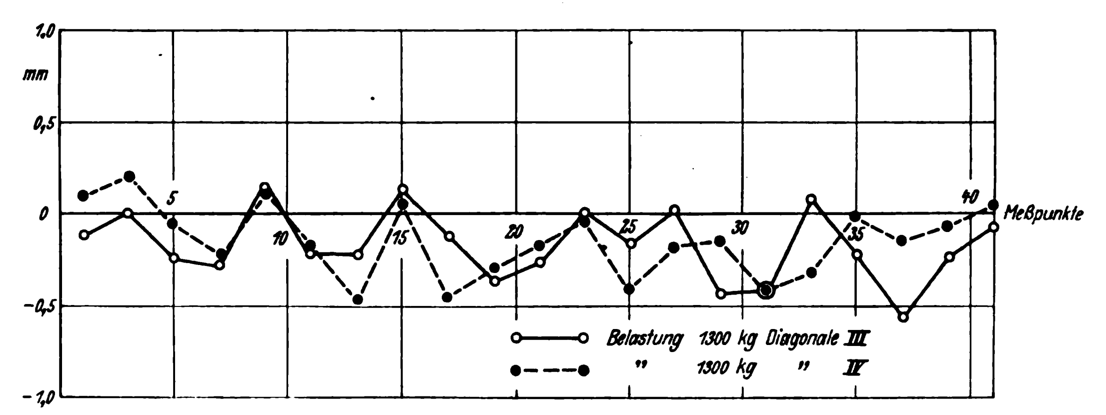


Bild 6. Längenänderung der Diagonalen (Meßstelle III und IV) des Versuchskörpers aus Messingblech (Fliegwerkstoff 2160,7).

Zahlentafel 1.

P kg	$p = \frac{P}{F}$ kg/cm²	Δl mm	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
0	0	0	0
200	102	0,05	$0{,}58 \cdot 10^{-4}$
300	152	0,09	$1{,}05 \cdot 10^{-4}$
400	203	0,14	$1{,}63 \cdot 10^{-4}$
500	254	0,22	$2{,}56 \cdot 10^{-4}$
600	305	0,34	$3{,}95 \cdot 10^{-4}$
700	355	0,44	$5{,}11 \cdot 10^{-4}$
800	406	0,55	$6{,}39 \cdot 10^{-4}$
900	457	0,67	$7{,}79 \cdot 10^{-4}$
1000	508	0,80	$9{,}30 \cdot 10^{-4}$
1100	558	0,92	$10{,}69 \cdot 10^{-4}$
1200	609	1,16	$13{,}48 \cdot 10^{-4}$
1300	660	1,47	$17{,}08 \cdot 10^{-4}$

Überschreitungen bleiben die Kanten nicht mehr gerade, so daß der Ansatz (7) schlechte Näherungslösungen liefert, worauf bereits im Abschnitt 2 hingewiesen wurde.

Um einen Vergleich der Versuchswerte für die Zusammendrückung mit der theoretisch gewonnenen Spannungsdehnungsgleichung zu ermöglichen, wurden die Werte der Zahlentafel 1 in Bild 2 eingetragen, wobei für

$$\varepsilon^* = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{1-0{,}3^2} \left(\frac{0{,}0615}{8{,}0}\right)^2 = 0{,}000213,$$

$$p^* = 0{,}000213 \cdot 1050000 = 224 \text{ kg/cm}^2$$

gesetzt wurde. Es ergibt sich gute Übereinstimmung bis zu einer einfachen Überschreitung der kritischen Beullast $\left(\frac{p}{p^*} = 2\right)$. Der Bruch trat bei einer 2,3fachen Überschreitung der kritischen Beullast ein $\left(\frac{p}{p^*} = 3{,}3\right)$. Im elastischen Bereich, vor dem Erreichen der theoretischen kritischen Beullast liegen die Versuchspunkte nicht auf der theoretischen Geraden; dies dürfte wohl auf die bei dünnen Blechen unvermeidlichen Vorbeulen zurückzuführen sein. Auf Grund der guten Übereinstimmung der theoretischen Spannungsdehnungskurve oberhalb der kritischen Beullast mit den Versuchswerten erscheint es auch gerechtfertigt, daß in Abschnitt 2 die Integrationskonstanten A, B aus (10d) ermittelt wurden. Hätte man dort die Randbedingungen (10c) der Untersuchung zugrunde gelegt, so bekäme man einen Abfall der scheinbaren Steifigkeit oberhalb der Beulgrenze auf den 0,5fachen Betrag des im elastischen Bereich gültigen Wertes, ein Ergebnis, das offenbar mit den Versuchswerten von Bild 2 schlechter übereinstimmt, wie das aus den Randbedingungen (10d) mit $E_{red} = 0{,}408\,E$ (Gleichung (17)) ermittelte Resultat.

Ein Kontrollversuch mit einem Versuchskörper, der denselben Querschnitt wie der des Bildes 4 hat, von der Länge $l = 800$ mm aus Duralblech (Fliegwerkstoff 3116,5), durch Abkanten herstellt, wurde zwecks Überprüfung der Spannungsdehnungskurve durchgeführt. Die Kennwerte des Duralbleches wurden wie folgt festgestellt:

Blechdicke s = 0,61 bis 0,67 mm i. M. 0,64 mm,
Elastizitätsmodul E = 6540 bis 7320 kg/mm² i. M. 6830 kg/mm²,
Streckgrenze $\sigma_{0,2}$ = 29,1 kg/mm²,
Zugfestigkeit σ_B = 41,6 bis 42,2 kg/mm²,
Bruchdehnung δ = 20%.

Es wurde die Zusammendrückung des Versuchsstückes mit steigender Belastung gemessen; das Ergebnis dieser Beobachtungen ist in Zahlentafel 2 zusammengestellt. Setzt man die Meßwerte der Zahlentafel 2 ins Verhältnis zu den kritischen Werten

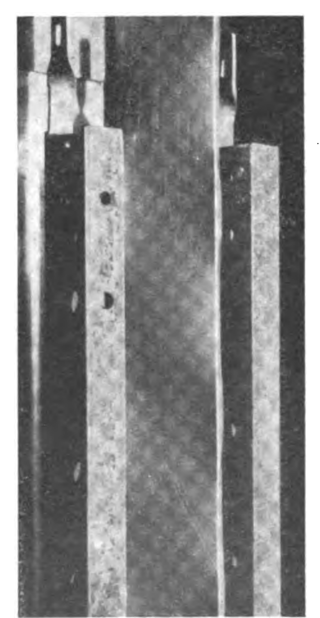
$$\varepsilon^* = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{1-0{,}3^2} \left(\frac{0{,}064}{8{,}0}\right)^2 = 0{,}000232,$$

$$p^* = 0{,}000232 \cdot 683000 = 158 \text{ kg/cm}^2$$

und trägt sie dann in Bild 2 ein, so erkennt man, daß auch hier die theoretisch gefundene Spannungsdehnungskurve bis



Bild 7. Versuchskörper aus Messingblech nach dem Versuch.



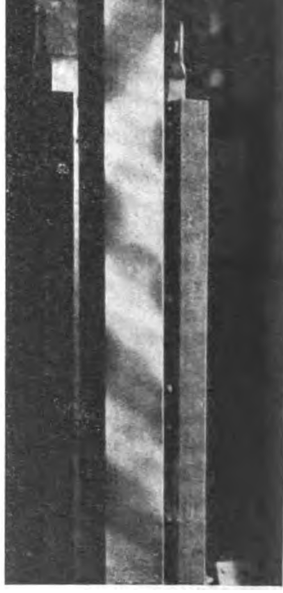


Bild 8a—b. Versuchskörper aus Dural (Fliegwerkstoff 3116,5) bei einer Druckbelastung von 1200 kg.

Zahlentafel 2.

P kg	$p = \frac{P}{F}$ kg/cm²	Δl mm	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$
0	0	0	0
100	49	0,053	$0{,}66 \cdot 10^{-4}$
200	97	0,108	$1{,}35 \cdot 10^{-4}$
300	146	0,175	$2{,}19 \cdot 10^{-4}$
400	195	0,298	$3{,}73 \cdot 10^{-4}$
500	244	0,440	$5{,}50 \cdot 10^{-4}$
600	293	0,590	$7{,}38 \cdot 10^{-4}$
700	341	0,780	$9{,}75 \cdot 10^{-4}$
800	390	0,968	$12{,}10 \cdot 10^{-4}$
900	439	1,195	$14{,}95 \cdot 10^{-4}$
1000	488	1,433	$17{,}90 \cdot 10^{-4}$

zu einer einfachen Überschreitung der kritischen Beullast gut mit den Versuchspunkten übereinstimmt. Der Bruch trat bei $P = 1350$ kg ein, das entspricht einer 3,1fachen Überschreitung der kritischen Beullast.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Versuche ihren Zweck, nämlich den Ansatz (7) und die Spannungsdehnungsgleichung (17) zu überprüfen, erfüllt haben. Es kann daher die auf theoretischem Wege mit dem Ansatz (7) gewonnene Spannungsdehnungsgleichung (17) bis zu einer einfachen Überschreitung der kritischen Beullast als brauchbar angesprochen werden.

4. Schlußbemerkung.

Auf Grund der vorliegenden Arbeit ist es möglich, sich ein Bild über den Spannungsverlauf und den Verformungszustand in einem dünnwandigen gedrückten Profil mit quadratischem Querschnitt nach dem Überschreiten der kritischen Beullast zu machen, und einen Einblick in die zwischen Spannung und Dehnung herrschende Abhängigkeit zu gewinnen. Die Spannungsdehnungsgleichung ist nach dem Überschreiten der kritischen Beullast entsprechend dem Ansatz (7) beim quadratischen Profil ebenso wie bei der gedrückten mit Aussteifungen versehenen Platte in erster Näherung linear, nur ist der Bereich, in dem diese Gleichung gilt, im Vergleich zur Bruchlast viel größer als bei der gedrückten Platte. Während bei den im Abschnitt 3 beschriebenen Versuchskörpern der Bruch bereits bei einer 2,3- bzw. 3,1fachen Überschreitung der kritischen Beullast eintrat, können bei der gedrückten Platte mit Aussteifungen Überschreitungen vorkommen, die mehrere 100mal größer sind als die kritische Beullast, ehe die Platte zu Bruch geht. Die Kenntnis der Spannungsdehnungsgleichung ist von Bedeutung, wenn man diese Profile als Aussteifungen bei gedrückten Platten verwendet. Es ist dann der Abfall der Steifigkeit des Profiles nach Überschreiten der kritischen Beullast bei der mittragenden Breite zu berücksichtigen.

Der Bestimmung des Bruchwertes von gedrückten dünnwandigen abgekanteten Profilen auf theoretischem Wege stellen sich große Schwierigkeiten entgegen, da, außer den in dieser Arbeit aufgezeigten, bereits im elastischen Bereiche auftretenden Schwierigkeiten, die Spannungsspitzen in den Profilkanten vor dem Erreichen des Bruchwertes die Elastizitätsgrenze überschreiten und dann die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr zutreffen. Wird jedoch das Erreichen der Elastizitätsgrenze durch die Spannungsspitzen als Maßstab für die Tragfähigkeit der Profile betrachtet, so ist es mit den hier angewandten Methoden möglich, auf theoretischem Wege Näherungswerte für die zulässigen Traglasten zu ermitteln.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 20. August 1942 | Lfg. 8

Untersuchungen über die Vorreaktionen im Ottomotor*).

Von E. Mühlner.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

In dem von einem Ottomotor verdichteten Kraftstoffdampf-Luftgemisch lassen sich schon vor der Entzündung durch die von der Zündkerze ausgehende Flammenfront chemische Reaktionen nachweisen, die sog. Vorreaktionen. Die Kenntnis ihres Ablaufs ist für das Verständnis und damit für eine Vermeidung des Klopfens von großer Bedeutung. Die Untersuchung dieser Reaktionen kann am mit eigener Kraft laufenden Motor geschehen oder an Verbrennungsbomben. Während ersteres Verfahren versuchstechnisch sehr schwierig ist, hat das letztere den Nachteil, daß jeweils nur ein einzelner Vorgang untersucht werden kann. Es wird deswegen zu neuen Versuchen der fremd angetriebene, gemischverdichtende Motor ohne Zündung gewählt, in dem die auftretenden Vorreaktionen durch ihre Wärmewirkung der Messung zugänglich sind.

Gliederung.

I. Bedeutung der Vorreaktionen für das Klopfen.

Nach Erkenntnissen, die man als gesichert ansehen darf, gilt für das Klopfen im Ottomotor folgende Erklärung[1]):

Nach Einleitung der Verbrennung durch den Zündfunken läuft von der Zündkerze aus eine Flammenfront durch den Verbrennungsraum, die nacheinander alle Teile des Gemisches entzündet. Bei normaler, nichtklopfender Verbrennung treten dabei keine merklichen Druckunterschiede auf und die Verbrennung der letzten Teile geschieht nicht wesentlich anders als der ersten.

In jedem Falle werden durch die Ausdehnung des Verbrannten dienoch nicht verbrannten Gemischteile verdichtet. Im Falle klopfender Verbrennung nun werden diese Teile durch die Verdichtung zur plötzlichen Selbstzündung gebracht, bevor die Flammenfront über sie hinwegläuft. Diese Selbstzündung erfaßt so plötzlich den ganzen unverbrannten Gemischrest, daß der Druck sich nicht ausgleichen kann. Es entsteht also eine Störung der Druckverteilung, die sich über Stoßwellen und Gasschwingungen ausgleicht. Diese Stoßwellen verursachen das Klopfgeräusch und infolge des erhöhten Wärmeüberganges den am klopfenden Motor beobachteten Leistungsverlust[2][2]).

Ob ein Motor klopft oder nicht, hängt also lediglich davon ab, ob der noch nicht von der Flammenfront erreichte Gemischteil zur Selbstzündung gebracht wird. Dies ist nicht nur eine Frage der Motorbetriebsbedingungen, die über den Wärmeaustausch Einfluß auf den Gaszustand im Zylinder haben, sondern hängt vor allem auch von den Eigenschaften des Kraftstoffes ab. Die Selbstzündung ist aber, wie das Auftreten eines Zündverzuges oder — wie der Chemiker sagt — einer endlichen Induktionszeit beweist, kein einfacher Vorgang. Sie wird vielmehr vorbereitet durch Vorreaktionen, bei denen die komplizierten Kohlenwasserstoffmoleküle teilweise in Radikale zerfallen, die leichter zu oxydieren sind als die unveränderten Moleküle. Diese Oxydation vollzieht sich auf dem Wege von Kettenreaktionen [3]. Durch Verzweigung der Ketten, d. h. dadurch, daß bei einer Teilreaktion, also einem Gliede der Reaktionskette, sich die Zahl der aktiven Teilchen erhöht, kann die Reaktion stark beschleunigt werden. Durch Bindung der Radikale kann die Kette abgebrochen werden. Das geschieht durch die klopfhindernden Mittel wie Bleitetraäthyl usw. In den klopffesten Brennstoffen vollziehen sich die Vorreaktionen nicht in dem Umfang, daß es zur Selbstzündung kommt.

Nach diesem Bild des Klopfvorganges ist der Ablauf der Vorreaktionen im von der Flammenfront noch nicht erreichten Gemischteil, dem Unverbrannten, von entscheidender Bedeutung. Nun ist die Untersuchung solcher Reaktionen schon in Verbrennungsbomben und den Glas- oder Quarzgefäßen des Chemikers außerordentlich schwierig, weil sie über eine große Zahl von kurzlebigen Zwischenprodukten laufen, die gleichzeitig vorhanden sind und deren Trennung schwierig ist. Selbst die Reaktionen einfacher Ausgangsstoffe sind überraschend mannigfaltig [4]. Noch schwieriger sind Untersuchungen am laufenden Motor mit technischen Kraftstoffen, da diese Gemische einer großen Zahl verschiedener Kohlenwasserstoffe sind, und da sich die Betriebsbedingungen eines Motors nicht so eindeutig festlegen lassen wie bei einem Laboratoriumsversuch. Trotzdem ist der Anreiz, unmittelbar am Motor zu messen, groß, weil man hoffen

*) M 11—11.

[1]) Vgl. z. B. »Phys. und chem. Vorgänge b. d. Verbrenng. i. Motor«, Vorträge und Aussprachebeiträge erstattet auf der 5. Öff. Sitzg. der Deutsch. Akad. d. Luftf.-Forschg. 10./11. Mai 1939, Schriften d. Deutsch. Akad. d. Luftf.-Forschg. Heft 9.

[2]) Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Schluß der Arbeit.

kann, rascher als mit reinen Laboratoriumsmethoden auf die motorische Praxis anwendbare Erkenntnisse zu finden. Denn gerade bei der Klopfforschung spielen bei der Übertragung gewonnener Ergebnisse auf den Motor Zufälligkeiten und konstruktive und betriebliche Besonderheiten des einzelnen Motors eine außerordentliche Rolle.

Versuche über Vorreaktionen am laufenden Motor wurden mit Hilfe eines gesteuerten Gasentnahmeventils [5, 6, 7 u. a.] und durch spektroskopische Messungen [6, 8] unternommen. Diese Versuche zeigten, daß sich im unverbrannten Gemisch zum Teil schon während der Verdichtungsperiode Aldehyde und Peroxyde bilden. Eine Zugabe von Peroxyden zum Kraftstoff in außerordentlich geringer Menge fördert das Klopfen.

Die Entnahme von Gasproben aus dem Verbrennungsraum des Motors ist mechanisch schwierig und ihr Ergebnis für den Chemiker nicht immer befriedigend.

Auf ein anderes Verfahren weisen Broeze, van Driel und Peletier hin [9]. Es wird von Peletier und Mitarbeitern [10] angewendet und besteht in der Messung des Druckverlaufes sowie der Auslaßtemperatur an einem ohne Zündung fremd angetriebenen Motor.

II. Die Versuche von Peletier und seinen Mitarbeitern.

Bei den Versuchen Peletiers [10], die sich an ältere Untersuchungen von Mondain-Monval [11, 12] anschließen, wurde ein CFR-Klopfprüfmotor bei einer Drehzahl von 900 U/min durch einen elektrischen Pendelmotor fremd angetrieben. Man ließ den Motor auf 150° C vorgeheiztes Kraftstoff-Luft-Gemisch ansaugen, das er, ohne zu zünden, nach Verdichtung und Entspannungstakt wieder ausstieß. Die Temperatur des Motorkühlmittels betrug 125° C. Der Druckverlauf im Zylinder wurde mit einem optischen Indikator untersucht. Außerdem wurde das zum Antrieb des Motors nötige Drehmoment gemessen.

Die aufgenommenen Diagramme zeigen eine Ausweitung auf der Expansionslinie infolge des Druckanstieges durch den Energieumsatz der Vorreaktionen. Diese Druckzunahme wuchs bis zu einem Kraftstoffüberschuß von 80% über das stöchiometrisch richtige Mischungsverhältnis. Bei noch reicheren Gemischen konnte dagegen keine Wirkung erkannt werden. Das Drehmoment des treibenden Pendelmotors nahm mit wachsendem Mischungsverhältnis ab und zeigte bei dem Brennstoffverhältnis[3]) 1,8 ein Minimum von 29 cmkg gegen 72 cmkg beim Ansaugen von reiner Luft, d. h. die Abnahme betrug 60%. Bei der Drehzahl von 900 U/min entspricht das einer von den Vorreaktionen ohne eigentliche Entzündung abgegebenen Leistung von 0,54 PS. Da der CFR-Motor eine Leistung von etwa 6 PS hat, wurden also bei dem angewendeten Mischungsverhältnis rund 9% der gesamten Kraftstoffenergie umgesetzt.

Bei größeren Brennstoffverhältnissen als 1,8 ging das Drehmoment nicht wieder ganz auf den Wert von reiner Luft hinauf. Peletier führt das auf die Änderung der spezifischen Wärme des Gemisches durch den hohen Kraftstoffanteil zurück.

Die Vorreaktionen waren bei genügender Stärke meistens von einem bläulichen Leuchten im Zylinder begleitet.

Damit war bewiesen, daß im Motorenzylinder chemische Reaktionen im unverbrannten Gemisch schon vor der Zündung in bemerkenswertem Umfang auftreten. Dabei hat der gesamte »Zündverzug«, d. h. die Zeit vom Beginn der ersten Reaktionen bis zur völligen Entflammung etwa die gleiche Größe wie die für die motorische Verbrennung überhaupt zur Verfügung stehende Zeit. Die Vorreaktionen können also durch den der Verdichtung folgenden Ausdehnungstakt d. h. durch Abkühlung gestoppt und ihre Produkte nahezu in dem gerade erreichten Zustand erhalten werden. Das folgt aus der Beobachtung, daß die Drucksteigerung im Zylinder während des Ausdehnungstaktes auftrat[4]), obwohl natürlich die Vorreaktionen durch die adiabatische Erhitzung während der Verdichtung, spätestens also im oberen Totpunkt eingeleitet werden.

Weitere Versuche Peletiers zeigen den Einfluß des Kompressionsverhältnisses. Wie zu erwarten, wächst die Ausweitung des Diagramms, d. h. also der Umfang der Vorreaktionen, mit steigendem Verdichtungsverhältnis. Gleichzeitig rückt der Hauptbuckel im Diagramm näher an den oberen Totpunkt heran.

Während bei diesen Versuchen einheitlich ein aus 70% Iso-Oktan und 30% n-Heptan bestehender Kraftstoff verwendet worden war, wurde nun der Einfluß der Kraftstoffzusammensetzung untersucht. Mit wachsendem Iso-Oktan-Anteil zeigen die Indikatordiagramme immer weniger Druckgewinn in der Ausdehnungslinie, die Vorreaktionen vermindern sich also, wie man erwartet, mit wachsender Oktanzahl. Bleitetraäthyl verminderte ebenfalls die Vorreaktionen.

Leuchterscheinungen wurden in der Auspuffleitung nicht beobachtet, dagegen war der scharfe und kennzeichnende Geruch des Auspuffs bemerkenswert. Die Auspuffleitung war von einer braunen, zähen Schmiere überzogen.

Bei anderen Versuchen benutzte Peletier einen luftgekühlten Zweitaktmotor von 150 ccm, zwischen dessen Kühlrippen eine elektrische Heizung angebracht wurde. Das Verdichtungsverhältnis war 6, das angesaugte Gemisch wurde auf 150° C vorgewärmt. Die Temperatur des ausgestoßenen Gemisches in Abhängigkeit von der Zylindertemperatur ergab eine Kurve mit wechselnder Steigung, während bei einem Gas ohne chemischen Umsatz eine Gerade oder doch eine recht glatte Kurve zu erwarten wäre. Chemische Reaktionen wurden also auch auf diese Weise nachgewiesen. Hierbei zeigten sich Leuchterscheinungen bei Auslaßtemperaturen von etwa 240 bis 250° C und oberhalb etwa 490° C.

Das ausgestoßene Gemisch wurde chemisch untersucht. Sein Kondensat trennte sich leicht in zwei Teile, von denen der erste hauptsächlich aus unverändertem Kraftstoff bestand und nur eine geringe Menge Peroxyde enthielt, während der zweite wasserlöslich war mit etwa 5 Gewichtsprozenten Peroxyden. Da der Anteil der wasserlöslichen Flüssigkeit etwa 10% des verbrauchten Kraftstoffes betrug, wurden also etwa 0,5% des Kraftstoffgewichtes Peroxyde gefunden.

III. Neue Versuche über Vorreaktionen im Motor.

a) Gesichtspunkte für das Versuchsprogramm.

Mit ihren Versuchen hatten Peletier und Mitarbeiter eine anschauliche und einfache Methode wieder aufgegriffen. Trotzdem in jedem warmen Motor, der Gemisch bei abgestellter Zündung ansaugt — wie es im Kraftwagen beim Bergabfahren oft genug vorkommt — die Vorreaktionen in dieser Weise auftreten und mit einem Indikator, durch chemische Untersuchung des Auspuffs, am einfachsten aber mit einem Thermometer in der Auspuffleitung nachgewiesen und untersucht werden können, hat man bisher praktisch ausschließlich Versuche entweder an reinen Laboratoriumsgeräten oder am klopfenden Motor unternommen. Während die ersteren nur sehr beschränkt auf motorische Verhältnisse übertragen werden können, muß bei den Klopfversuchen am Motor das Mischungsverhältnis in den engen Grenzen liegen, die durch die Notwendigkeit der ordnungsgemäßen Zündung gegeben sind. Gerade die Versuche, über die im folgenden berichtet wird, zeigen aber, daß auch bei Mischungsverhältnissen weit ab vom stöchiometrischen Vorreaktionen auftreten, und daß der Überblick über einen größeren Bereich von Mischungsverhältnissen neue und interessante Ergebnisse liefert. Die Möglichkeit, das Mischungsverhältnis weitgehend zu verändern, ist aber nur gegeben, wenn man auf eine Zündung wie im Motor verzichtet.

Peletier und Mitarbeiter griffen nur wenige Versuchswerte aus der Fülle der möglichen heraus. Sie untersuchten zwar den Einfluß des Verdichtungsverhältnisses, aber nur

[3]) Brennstoffverhältnis = Verhältnis der tatsächlichen Brennstoffmenge zu der bei stöchiometrischer Verbrennung erforderlichen.

[4]) Vgl. die in dieser Arbeit gebrachten Diagramme (Bild 18 bis 21).



qualitativ mit dem Indikator und nur bei einem einzigen Mischungsverhältnis. Als Kraftstoffe wurden, von einer Ausnahme abgesehen, lediglich Mischungen aus Iso-Oktan und Heptan verwendet.

Auf Veranlassung von E. Schmidt wurden deswegen im Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring neue Versuche unternommen, die an die Versuche von Peletier anschließen, aber das Gesamtgebiet ausführlicher bearbeiten und die Abhängigkeit der Vorreaktionen vom Kraftstoff, vom Mischungsverhältnis, von der Drehzahl, vom Verdichtungsverhältnis und von der Temperatur des Motors und des angesaugten Gemisches in weiterem Bereich erkennen lassen sollen.

Als Maß des Umsatzes der Vorreaktionen diente die mit einem Thermometer gemessene Temperatursteigerung des Gemisches, sie ist auch für das Auftreten des Klopfens die wesentliche Veränderliche. Um den Einfluß der wechselnden Kolbenreibung oder sonstiger nicht genau zu beherrschender Betriebsbedingungen auszuschließen, wurden neben Versuchen mit Kraftstoffdampf-Luft-Gemisch stets solche mit reiner Luft ausgeführt und die Temperatursteigerung des Gemisches von der Austrittstemperatur der reinen Luft an gezählt. Die Eintrittstemperatur wurde bei Gemisch und reiner Luft gleichgehalten. Zur Veranschaulichung wurden auch einige Indikatordiagramme aufgenommen.

b) Die Versuchsanordnung.

Als Versuchsmotor wurde der vom Forschungsinstitut für Kraftfahrzeuge und Fahrzeugmotoren a. d. Techn. Hochschule Stuttgart zur Untersuchung von Dieselkraftstoffen nach dem Zündverzugsverfahren [13] entwickelte Kraftstoffprüfmotor [14] verwendet. Sein Verdichtungsverhältnis läßt sich in den weiten Grenzen von etwa 4,5 bis 25 verstellen. Am Zylinder und Zylinderkopf befinden sich insgesamt 4 Bohrungen, in denen Quarzdruckmeßdosen für das Indizieren, Thermoelemente, Quarzfenster und andere Geräte befestigt werden können. Der Motor ist zusammen mit einem Gleichstrom-Pendeldynamo bzw. -motor und allem Zubehör wie Schmier- und Kühleinrichtung, Bremswiderständen, Tanks und Kraftstoffmeßeinrichtung usw. auf einem gemeinsamen Sockel montiert.

Die Daten des Motors sind:

Bohrung	101 mm
Hub	130 mm
Hubraum	1041 cm³
Verdichtungsverhältnis	veränderlich
Betriebsdrehzahl	bis 2500 U/min
Steuerzeiten	veränderlich

Die für die Versuche einheitlich gewählten Steuerzeiten sind:

Auslaß öffnet:	47° v. u. Tpkt.
Auslaß schließt:	7° n. o. Tpkt.
Einlaß öffnet:	7° v. o. Tpkt.
Einlaß schließt:	47° n. u. Tpkt.

Ein- und Auslaßnocken sind gleich.

Vergaser	Sum-Vergaser mit Verstelldüsen
Pendelmotor	Siemens-Schuckert-Werke, Typ A G 87
Fremderregung	220 V
Ankerspannung bei den Versuchen	400 V
Hebelarm der Drehmomentwägung	716,2 cm
Schmieröl	Aeroshell Mittel
Öldruck	2,4 atü

Die Schmierölmenge wurde während der Versuche auf 6 l konstant gehalten.

Der Zylinderkopf mit dem Verbrennungsraum ist auf Bild 1 dargestellt. Zylinder und Zylinderkopf bestehen aus Gußeisen mit eingegossenen Kühlkanälen. Der Kolben ist aus Leichtmetall geschmiedet mit flachem Boden. Die Form des Verbrennungsraumes ist, von unwesentlichen Vertiefungen abgesehen, ein flacher Kreiszylinder. Ein- und Aus-

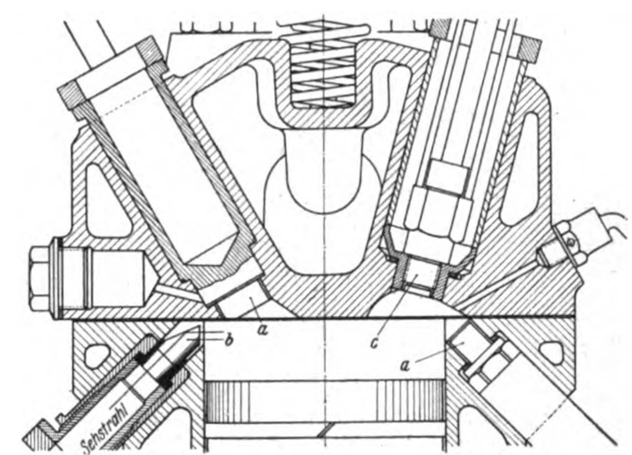


Bild 1. Zylinderkopf des Versuchsmotors.
a) Blindstopfen,
b) Quarzfenster,
c) Quarzdruckmeßdose.

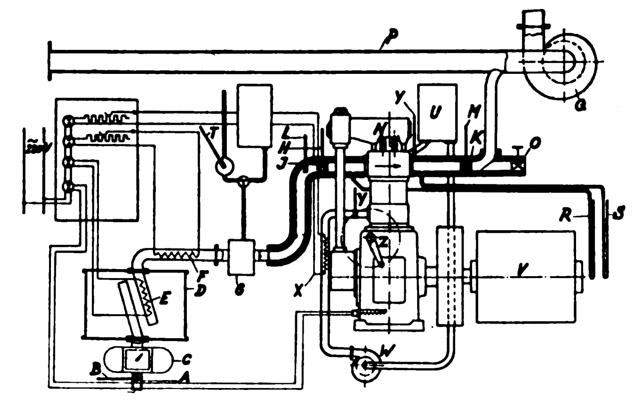


Bild 2. Die Versuchsanlage. Erläuterung s. Text.

laßventil sind gleich. Die Gaskanäle im Zylinderkopf haben die übliche Form eines Krümmers von etwa 90° Umlenkung.

Für die Versuche mußte der Motor umgebaut werden. Insbesondere wurden Ansauge- und Auspuffleitung geändert und sorgfältig durchgebildete Temperaturmeßgeräte in ihnen angeordnet. Die gesamte Anlage ist auf Bild 2 dargestellt.

1. Saugleitung und Gemischbildung.

Die Luft wird aus unter der Versuchshalle liegenden Kanälen mit recht gleichmäßiger Temperatur bei A angesaugt, wobei ihre Temperatur durch das Thermometer B gemessen wird. Sie passiert den nach dem Prinzip des Roots-Gebläses arbeitenden Kammerluftmengenmesser C und tritt in den Druckausgleichskessel D von 0,1 m³ ein. Durch eine 0,7 m lange Leitung von 65 mm l. W., in die eine an die Lichtleitung angeschlossene Heizwicklung von 2 kW (E) und eine zweite durch Vorschaltwiderstand regelbare Heizung (F) eingebaut sind, wird sie zum Vergaser (G) geführt. Dieser ist ein Sum-Vergaser mit verstellbaren Düsen, dessen Drehschieberdrossel im allgemeinen voll offen stand. Hinter dem Vergaser hat die Leitung zwei Umlenkungen von 90°, um mitgerissene Kraftstofftröpfchen auszuschleudern und nicht auf das 0,85 m hinter dem Vergaser angeordnete Thermometer H treffen zu lassen. Vom Vergaser bis zum Motor war die Leitung sehr reichlich mit Aluminium-Folie und Asbest isoliert.

Zur Messung der Gemisch-Ein- und -Austrittstemperatur wurden Glasthermometer der Normalqualität mit ½°-Teilung gewählt, die sich bei der Eichung in den Grenzen der Ablesbarkeit als völlig genau zeigten. Es wurde darauf geachtet, daß die Ablesungsstelle nur wenig über den Wärmeschutz des Rohres hinausragte, so daß auf die Fadenkorrektur verzichtet werden konnte. Zudem wurden die Angaben der Thermometer nur zur Differenzbildung verwertet.

Um mit dem Ansaug- und entsprechend mit dem Auspuff-Thermometer zeitlich und über den Rohrquerschnitt

gut zu mitteln und gleichzeitig den Einfluß der Wärmestrahlung zu unterdrücken, steckten diese Thermometer in Rippenfühlern (J, K), Bild 3, aus Leichtmetall, die gegen das Rohr durch Luftspalt bzw. an der Befestigungsstelle durch etwas Fiber isoliert waren. Da auch das Rohr gegen die Umgebung und gegen den Zylinderkopf (der übrigens ansaugseitig meist die gleiche Temperatur hatte) gut isoliert war, hatte es praktisch die gleiche Temperatur wie das Gemisch. Die Temperaturmessung kann daher als so genau angesehen werden wie die Ablesbarkeit des Thermometers, d. h. auf sicher $\pm 0{,}2^{\circ}$.

In Strömungsrichtung, 6 cm vor dem Rippenfühler, war in dem Rohrknie ein einfaches zweites Thermometer (L) nackt im Luftstrom angeordnet. Dieses Thermometer zeigte fast stets dasselbe an wie das im Rippenfühler. Der Zweck des vorgeschalteten Thermometers war, das Einregeln der richtigen Einlaßtemperatur nach diesem schnellen Temperaturänderungen rascher folgenden Instrument zu beschleunigen.

In die Ansaugleitung war ein elastisches Stück Bunaschlauch eingeschaltet, um die Höhenverschiebung des Zylinders bei der Änderung der Verdichtung auszugleichen. Der Gummi hat die ganze Zeit (etwa 625 Betriebsstunden) bei 140° C und mehr ausgehalten.

2. Auspuffleitung.

Die Auspuffleitung hatte wie die Saugleitung ebenfalls 65 mm Dmr. Sie war auf 90 cm Länge isoliert. Das Auslaßthermometer M war von gleicher Ausführung wie das Einlaßthermometer und saß in einem gleichen Rippenfühler K. In die Auspuffleitung war an einer Abzweigung ein Ventil O eingeschaltet, so daß zur Beobachtung etwas Abgas ins Freie treten konnte. Ferner enthielt die Auslaßleitung ein elastisches Federrohrstück zum Ausgleich der Verdichtungsverstellung. Die Leitung mündete in ein Rohr von 200 mm Dmr. P, durch das mit Hilfe eines Gebläses Q Luft angesaugt wurde. Dadurch vermischten sich die Abgase mit einer so großen Menge Luft, daß sie bis auf etwa 30° C abgekühlt und stark verdünnt werden. So wurde die Ansammlung großer Mengen heißer und wegen der Vorreaktionen an Radikalen reichen und daher zündfähigen Gemisches vermieden. Zugleich sollte das Gebläse in der Auslaßleitung einen gewissen Unterdruck herstellen. Da nämlich infolge der Widerstände in der Saugleitung vor dem Motor stets ein Unterdruck von etwa 180 mm Wassersäule herrschte, erschien es zweckmäßig, zur Vermeidung einer Beeinflussung der Spülung den Druck in der Auspuffleitung dem in der Saugleitung möglichst anzugleichen. Dazu hätte allerdings das Gebläse regelbar eingerichtet werden müssen, auch hätte das verwendete, das erst bei ziemlicher Drosselung einen Maximalunterdruck von 320 mm W.-S. erreichte, nicht ausgereicht. Da Kontrollversuche aber zeigten, daß bei der geringen Überschneidung der Ventilöffnungszeiten von nur 2 mal 7° Kurbelwinkel der Einfluß einer mäßigen Druckdifferenz zwischen Ein- und Auslaß vernachlässigt werden konnte, wurde auf diese Komplizierung der Anlage verzichtet. Der Druck in der Ein- und Auslaßleitung wurde unmittelbar vor bzw. hinter dem Zylinderkopf mit je einem wassergefüllten U-Rohr R, S gemessen.

Es wurde darauf verzichtet, den Druck in der Ansaugleitung bei allen Versuchen konstant zu halten, obwohl an sich der Druck bei Kompressionsbeginn durchaus von Einfluß auf die Vorreaktionen ist, wie die Versuche zeigen. Der Barometerstand sowie die beobachtete kleine Änderung des Ansaugdruckes mit wachsenden Vorreaktionen beeinflussen also die Versuchsergebnisse etwas. Da aber die Änderung der Vorreaktionen bei Veränderung der Ansaugtemperatur oder des Verdichtungsverhältnisses wesentlich größer waren als diese Einflüsse, stören sie das Bild praktisch nicht.

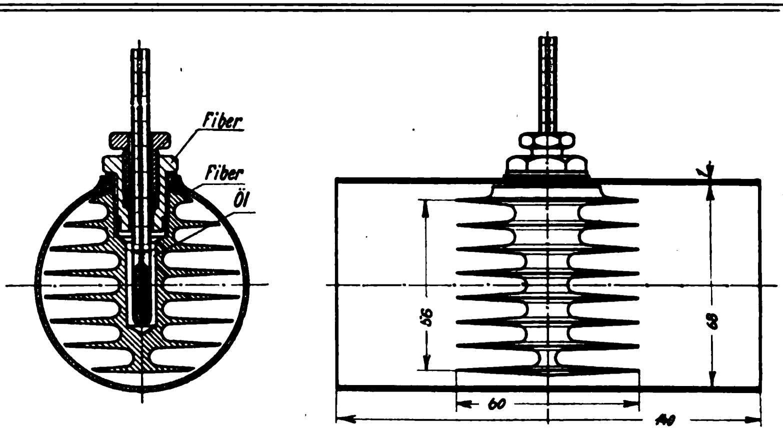


Bild 3. Rippenfühler für Quecksilberthermometer.

3. Anlagen für Kraftstoff, Schmieröl, Kühlmittel.

Der Kraftstoffverbrauch wurde in üblicher Weise mit einem geeichten Glasgefäß, also volumetrisch, gemessen. Da sich dieses Meßgefäß aus Platzgründen über dem heißen Motor befinden mußte, erwärmte sich der Kraftstoff darin auf 25 bis 35° C. Deswegen wurde in das Meßgefäß ein Thermometer T eingeschmolzen und in die Berechnung des verbrauchten Kraftstoffgewichtes das der abgelesenen Temperatur entsprechende spezifische Gewicht eingesetzt. Die Kraftstoffwichte wurde mit Aräometern bestimmt.

Das Schmieröl, Aeroshell Mittel, wurde durch Frischwasser mit Hilfe einer im Kurbelgehäuse liegenden wasserdurchflossenen Rohrschlange rückgekühlt. Der Öldruck wurde auf 2,4 atü konstant gehalten, die Öltemperatur, im Kurbelgehäuse mit einem Quecksilberfernthermometer gemessen, auf 75° C. Der Einfluß dieser Betriebsgrößen auf die Versuchswerte dürfte verschwindend sein, da das Kraftstoff-Luftgemisch nur mit solchen Ölteilchen in Berührung kommt, die am Zylinder und am Kopf haften und infolgedessen deren Temperatur angenommen haben. Wichtiger war dagegen das Konstanthalten der Öltemperatur mit Rücksicht auf die merkliche Beeinflussung des Drehmomentes.

Als Kühlmittel wurde technisches Äthylenglykol verwendet, da bei den mit Wasser erreichbaren Temperaturen noch keine genügenden Vorreaktionen entstanden. Das Glykol wurde durch eine kleine Kreiselpumpe W, die von einem besonderen Elektromotor angetrieben wurde, umgewälzt. Um das Kühlmittel und damit den ganzen Motor auf der gewünschten Temperatur zu halten, war eine ziemlich kräftige elektrische Heizung X von 2 kW notwendig, die beim Anheizen auf etwa 6 kW verstärkt werden konnte. Für diese Heizung waren die Kühlmittelleitungsrohre zunächst mit Asbestpappe umwickelt, auf die Chromnickelwiderstandsdraht gewickelt war. Darüber folgten Aluminiumfolien mit losen Asbestschnüren als Abstandshalter. Die Isolation in dieser Weise erschien recht gut.

Am Ein- und Austritt des Glykols in den bzw. aus dem Zylinder wurde die Temperatur mit in $^{1}/_{10}$ C geteilten Normalthermometern Y gemessen. Die Anzeigen unterschieden sich fast nie um mehr als 0,2° C, so daß man die Temperatur von Zylinder und Zylinderkopf als hinreichend gleichmäßig annehmen kann. Hierbei war die umgewälzte Glykolmenge etwa 0,2 kg/s.

4. Antriebsanlage.

Der Pendelmotor V, der nur zum Anwerfen des Motors gedacht war, mußte mit einer erhöhten Ankerspannung von 400 V betrieben werden, da mit 220 V höhere Drehzahlen nicht erreicht werden konnten. Hierzu mußten 2 Gleichstromgeneratoren hintereinander geschaltet werden. Die Ankerspannung von 400 V wurde durch Regelung der Felderregung des zweiten Generators stets konstant gehalten. Auf diese Weise war der von der Pendelmaschine aufgenommene Ankerstrom ein Anhalt für das Drehmoment.



Das Drehmoment wurde durch Auswiegen mit Gewichten gemessen. Da die Drehzahl in den meisten Fällen 1800 U/min war, wurde die Lüfterleistung nicht abgezogen, da es nur auf Vergleiche ankam. Die gemessenen Drehmomentwerte haben also nur relative Bedeutung.

5. Angaben über die Betriebsbedingungen und Bezeichnungen.

Bei den Versuchen kam es darauf an, den Motor unter möglichst gleichbleibenden Bedingungen zu fahren. Es wurden daher bei allen Versuchen folgende Werte konstant gehalten:

Öltemperatur . . . . 75° C,
Öldruck . . . . 2,4 atü,
Kühlmittelumlaufmenge . . . . . etwa 0,2 kg/s,
Ankerspannung . . . . 400 V,
Ventilzeiten (vgl. S. 251).

Die meisten Versuche betreffen die Abhängigkeit der Vorreaktionen vom Kraftstoff und dem Mischungsverhältnis. Hierfür wurden konstant gehalten:

Drehzahl . . . . 1800 U/min,
Ansaugtemperatur von Luft und Gemisch . . . . 140° C,
Kühlmitteltemperatur . . . . 140° C,
der Unterdruck in Saug- und Auspuffleitung . . . . Saugdrossel voll offen, Absaugegebläse konstante Drehzahl.

Bei der Auswertung der Versuche und in den Kurvendarstellungen sind folgende Bezeichnungen benutzt:

ε	Verdichtungsverhältnis $= \frac{\text{Gesamtvolumen}}{\text{Verbrennungsraumvolumen}}$	
ε_w	Verdichtungsverhältnis unter Berücksichtigung des nicht im Totpunkt erfolgenden Ventilschlusses	
$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_w$		
Md	Drehmoment zum Antrieb des Motors, gemessen durch das Gewicht am Hebelarm der Pendelmaschine	kg
ΔMd	Abnahme des Drehmomentes durch Vorreaktionen	kg
n	Drehzahl	U/min
t_{La}	Luftaustrittstemperatur	°C
t_{Le}	Lufteintrittstemperatur	°C
t_{Ga}	Gemischaustrittstemperatur	°C
t_{Ge}	Gemischeintrittstemperatur	°C
Δt_{GL}	$= t_{Ga} - t_{La}$ Temperaturdifferenz infolge Vorreaktionen	°C
t_K	Kühlmitteltemperatur	°C
G_B	Gewichtsmenge des Brennstoffes . .	kg/s
G_L	Gewichtsmenge der Luft	kg/s
m	Mischungsverhältnis $= \frac{G_L}{G_B}$	kg/kg
m_{th}	stöchiometrisches Mischungsverhältnis	kg/kg
λ	Luftverhältnis $= \frac{G_L}{G_B} \cdot \frac{1}{m_{th}}$	
β	Brennstoffverhältnis	
t_v	Verdichtungsendtemperatur	°C
X	Kolbenweg	mm
b_{ein}	Differenzdruck im Einlaß gegen die Atmosphäre	mm H_2O
OZ	Oktanzahl	
t	Temperatur . . . . . °C	laufende Veränderliche
p	Druck . . . . kg/cm²	laufende Veränderliche

c) Durchführung der Versuche.

Durch Vorversuche wurde zunächst das Gebiet abgegrenzt, in dem überhaupt in der geplanten Weise mit dem Thermometer meßbare Vorreaktionen auftraten. Auf Grund dieser Versuche wurden die obengenannten Betriebsbedingungen festgelegt.

Vor jeder Versuchsreihe wurde nach genügendem Einlaufen und nach Erreichen des Temperaturgleichgewichts ein Versuch mit Ansaugen von reiner Luft gefahren. War als Lufteintrittstemperatur $t_{Le} = 140°$ C gewählt, so betrug die Luftaustrittstemperatur bei 1800 U/min und $t_K = 140°$ C bei Verdichtungsverhältnissen um 6 etwa $t_{La} = 145°$ C. Dieser Wert schwankte von Tag zu Tag etwas, vermutlich infolge kleiner Veränderungen am Motor und mußte jeweils neu bestimmt werden. Bei Beginn der Versuche lag er wesentlich niedriger, etwa bei $t_{La} = 137°$ C. Es ist denkbar, daß durch die zunehmende Abnutzung des Kolbens und der Kolbenringe der Wärmeübergang vom Kolben an den Zylinder erschwert wurde, so daß der Kolben später heißer blieb. Messungen ergaben allerdings nach rd. 250 h nur eine Abnutzung des Kolbens von $^1/_{100}$ mm im Durchmesser.

Der Beharrungszustand stellte sich nur recht langsam ein. Vom ersten Anheizen bis zum Ablesen des Meßpunktes mit reiner Luft vergingen gewöhnlich 2 h. Jeder einzelne Versuch mit einem bestimmten Betriebszustand brauchte durchschnittlich etwa 45 min.

Nachdem die Austrittstemperatur bei Betrieb mit Luft gemessen war, wurde durch Öffnen der Vergaserdüsen mehr und mehr Kraftstoff zugegeben. Dabei wurde die Eintrittstemperatur t_{Ge} konstant (meistens 140° C) gehalten. Infolge der Vorreaktionen stieg nun die Anlaßtemperatur t_{Ga}. Als Ergebnis eines Einzelversuchs galt die Temperaturdifferenz

$$\Delta t_{GL} = t_{Ga} - t_{La}.$$

Die Kurvenblätter zeigen diese Temperaturdifferenz meistens dargestellt über dem Mischungsverhältnis.

Es wurde davon abgesehen, mit der »Luftüberschußzahl« λ zu arbeiten, nicht nur, weil dieser Ausdruck an sich schlecht gewählt ist [15], sondern weil ein Luftüberschuß ein ungeeigneter Begriff ist, wenn überhaupt keine richtige Verbrennung stattfindet. Dem Verfahren, einer in erster Annäherung konstanten Luftmenge mehr und mehr Brennstoff zuzusetzen, entsprach es am meisten, mit dem Brennstoffverhältnis $\beta = \frac{G_B}{G_L} \cdot m_{th}$ zu arbeiten.

β wächst mit steigendem Brennstoffanteil und ist gleich 1 im Falle stöchiometrischen Gemisches. Im übrigen gilt

$$\beta = \frac{1}{\lambda}.$$

Der Mindestsauerstoffbedarf, d. h. das stöchiometrisch richtige Mischungsverhältnis mit Luft m_{th} wurde aus chemischen Analysen bestimmt, die die Anteile der Kraftstoffe an Alkoholen, Olefinen, Aromaten und Bleitetraäthyl gaben. Für die Aromaten wurde angenommen, daß es sich um Benzol handele, was das wahrscheinlichste ist. Für den nach Abzug der Aromaten und des Alkohols übrigbleibenden Rest des Kraftstoffes (Paraffine, Olefine und sonstige) wurde das in der Hütte 26. Aufl. Bd. I S. 575 für »Benzin« angegebene stöchiometrische Mischungsverhältnis m_{th} zu 15,0 kg Luft/kg Kraftstoff angenommen. Bekanntlich ist der Einfluß des Molekulargewichtes auf das stöchiometrische Mischungsverhältnis gering, so daß diese Methode für genügend gehalten wurde. Das Mischungsverhältnis für einen Kraftstoff wurde dann entsprechend der durch die chemische Analyse gefundenen Anteile an Alkohol und Aromaten bestimmt.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist Zahlentafel 1. Hierin bedeutet —, daß der betreffende Wert nicht ermittelt wurde, während 0 angibt, daß kein solcher Bestandteil vorhanden ist. Die Analysenwerte des I.G.-Eichbenzins stammen von der I.G. Farbenindustrie A.G., die auch dankenswerterweise die wirklichen Oktanzahlen einiger Brennstoffe bestimmte (in Zahlentafel 1: Oktanzahl nach I.G.), die sich z. T. von den »Nennoktanzahlen«, mit denen sie im Handel geführt werden, erheblich unterscheiden.



Zahlentafel 1. Zahlentafel der untersuchten Kraftstoffe.

Kraftstoff-Nr.	Art des Kraftstoffes	Oktanzahl		Anteile Volumenprozent						Theoretisches Mischgasverhältnis m_{th} kg Luft/kg Kraftstoff
		Nenn-O. Z. (Motormethode)	nach I. G.[8]) (Motormethode)	Alkohol	Olefine	Paraffine	Aromaten	Naphtene	Bleitetraäthyl	
1	handelsübliches »Grund«benzin	58	56,4	0	8	—	7,3	—	0	14,88
2	ungebleites Fliegerbenzin	74	72,0	0	5	—	4,1	—	0	14,94
3	Fliegerkraftstoff I	87	—	—	3	—	17,0	—	0,07	14,71
4	Fliegerkraftstoff II	87	88,1	—	4	—	9,0	43,7	0,08	14,85
5	Fliegerkraftstoff III	87	90,6	—	3,5	—	8,5	44,2	0,09	14,86
6	Sonderkraftstoff	100	—	0	2	—	40,0	—	0,08	14,32
7	Isooktan rein	100	—	0	0	100	0	0	0	15,18
8	Äthylalkohol	99,5[4])	—	99,9	0	0	0	0	0	9,04
9	Benzol, technisch rein	108[5])	—	0	0	0	100,0	0	0	13,33[7])
10	Eichbenzin[6]) der I. G. (I. G. 7)	44,6	44,6	0	0,6	77	2,4	20,0	0	15,0
11	I. G.-Eichbenzin[1]) + 1 cm^3/l Pb (Ä)$_4$	74,5[2])	73,1	0	0,6	77	2,4	20,0	0,1	15,0
12	I. G.-Eichbenzin + 1,53 cm^3/l Eth.[1])	74,5[2])	73,2	0	0,6	77	2,4	20,0	0,1	15,0
13	Kraftstoff Nr. 2 + 1,3 cm^3/l Eth.[3])	87	87,8	0	5	—	4,1	—	0,085	14,94

[1]) 1 cm^3 $Pb(C_2H_5)_4$ sind enthalten in $\frac{1}{1,53}$ $cm^3 = 0,655$ cm^3 Ethylfluid.
[2]) Nach I. G.-Kurve TPr S 883a.
[3]) 1,3 cm^3 Ethylfluid enthalten 0,85 cm^3 $Pb(C_2H_5)_4$. Dies ist die im Fliegerkraftstoff meist enthaltene Menge.
[4]) Nach W. Jost: »Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen«, Berlin, Springer, 1939, S. 550.
[5]) Extrapoliert aus Angaben der I. G.
[6]) Nach Angaben der I. G.
[7]) Für Technisches Benzol (mit etwas Toluol).
[8]) Am I. G.-Motor bestimmt.

Das Verdichtungsverhältnis, das in den Ergebnissen meistens als Parameter auftritt, wurde in der üblichen Weise angegeben, d. h. als Verhältnis der Zylinderinhalte an den beiden Totpunkten. In Wirklichkeit allerdings findet während des ersten Teiles des Kolbenhubes keine Kompression statt, da das Einlaßventil erst 47 Grad Kurbelwinkel nach dem unteren Totpunkt geschlossen ist. Obwohl infolgedessen rechnerisch von Verdichtungsverhältnissen um 6 bei den gewählten Steuerzeiten etwas mehr als eine halbe Einheit abzuziehen wäre, wurde als Verdichtungsverhältnis jeweils das übliche angegeben. Soweit thermodynamische Rechnungen angeschlossen wurden, mußte aber auf das in Wirklichkeit andere Verdichtungsverhältnis geachtet werden, und es wurde mit ε_w gerechnet. In Zahlentafel 2 sind das übliche Verdichtungsverhältnis ε und das einem Schließen des Auslaßventils 47° nach dem unteren Totpunkt entsprechende wahre Verdichtungsverhältnis ε_w einander gegenübergestellt.

Zahlentafel 2.

ε übliche Angabe	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	9,0	10,0
$\Delta\varepsilon$	0,478	0,538	0,598	0,658	0,717	0,777	0,837	0,956	1,076
ε_w	4,522	4,962	5,402	5,842	6,283	6,723	7,163	8,044	8,924

Wenn durch die Vorreaktionen Temperaturen von etwa 200 bis 210° C im Auslaß überschritten wurden, traten mehr oder weniger heftige Explosionen auf, und zwar im allgemeinen zunächst im Auspuffrohr, bei weiterer Steigerung der dem Gemisch zugeführten Wärme (durch Heizung oder Verdichtungssteigerung) aber unmittelbar anschließend auch im Zylinder. Im Auspuffrohr bestanden diese Explosionen nur in einem harmlosen Knallen. Im Zylinder waren sie dagegen teilweise recht heftig und entsprachen durchaus harten Klopfstößen. Der Vorgang ist chemisch-physikalisch zweifellos von der gleichen Art wie die klopfende Verbrennung im Motor. Ein Unterschied besteht nur insofern, als im klopfenden Motor nur ein Gemischrest unter Selbstzündung durch adiabatische Verdichtung verbrennt, während bei diesen Fremdantriebversuchen praktisch der ganze Zylinderinhalt gleichzeitig zündet.

Nach solchen Explosionen — sei es im Auspuffrohr oder im Zylinder — mußten die Messungen jedesmal abgebrochen werden, da die freiwerdende Wärme die Auspuffleitung mit dem Thermometer sowie den Motor selbst aufheizte und infolgedessen weiterhin erst recht Selbstzündungen auftraten.

Hiergegen half auch sofortiges Abstellen des Brennstoffes nicht, da der Motor erst den Inhalt der Vergaserschwimmerkammer verbrauchen mußte. Meistens verstärkte sich das Knallen im Zylinder sehr rasch und der Motor begann knallend selbst zu laufen. Die einzige, meist auch sehr wirksame Abhilfe bestand darin, ihn vom Antrieb her schneller laufen zu lassen. Eine Drehzahlerhöhung von 200 U/min beseitigte die Selbstzündungen meist sofort, was ebenfalls für denselben reaktionskinetischen Mechanismus sowohl der Selbstzündung wie des Klopfens spricht, denn auch das Klopfen kann durch Schnellerlaufenlassen des Motors beseitigt werden, soweit damit nicht eine merkliche Erhöhung der Last und damit der Erwärmung verbunden ist.

Gelegentlich lief der Motor von selbst, mit abgestelltem Antrieb, ohne jedes Geräusch im Leerlauf, also lediglich mit Hilfe der Vorreaktionen.

Leuchterscheinungen im Zylinder konnten mit Hilfe des am Motor vorgesehenen Quarzfensters nicht beobachtet werden[5]). Es mag sein, daß sehr schwaches Leuchten auftrat — nach den Arbeiten Peletiers muß man es erwarten —, aber das Quarzfenster war nach kurzer Zeit völlig verölt. Wollte man es erst einsetzen, nachdem Beharrungszustand erreicht war, so mußte der Motor angehalten werden. Das bedeutete eine Unterbrechung von mindestens einer halben Stunde. Hatte man nach dieser Zeit den Beharrungszustand abermals erreicht, so war das Quarzfenster von neuem verölt.

Entsprechend dem Zweck der Versuche, das Gesamtgebiet quantitativ zu umgrenzen, wurde auf weitere Bemühungen in dieser Richtung verzichtet.

Um den Einfluß einer Druckdifferenz zwischen Ein- und Auslaßrohr möglichst auszuschalten, war die Ventilzeitenüberschneidung auf 2mal 7° Kurbelwinkel beschränkt

[5]) Eine Ausnahme vgl. Abschnitt III e 8.



worden. Um zu prüfen, ob höherer Gegendruck in der Auspuffleitung die Anlaßtemperatur änderte, wurde die Auslaßleitung etwas gedrosselt. Der so gemessene Wert fiel befriedigend in die entsprechende Kurve mit normalem Auslaßdruck hinein. Die Vorreaktionen wurden also durch verschiedene Spülverhältnisse nicht merklich beeinflußt.

Es wäre denkbar, daß die Vorreaktionen nicht erst durch die Temperatursteigerung bei der Verdichtung, sondern schon durch die Erwärmung auf die Einlaßtemperatur angeregt werden. Da bei der Strömung vom Einlaßthermometer bis zum Auslaßthermometer eine wesentlich größere Zeit zur Verfügung steht als für den Verdichtungsakt allein, könnte ein Energieumsatz und damit eine Temperaturerhöhung auch schon ohne Verdichtung eintreten. Dies würde etwa der Versuchseinrichtung von Peletier (Quarzrohrversuche [10]) oder auch den Vorversuchen von Mondain-Monval (vgl. [11] und [12]) entsprechen, der im heißen Auspuffrohr eines warmgefahrenen Automobilmotors, aber meist noch nicht unmittelbar hinter dem Zylinder, Vorreaktionen festgestellt hatte. Um diese Verhältnisse zu prüfen, wurden zwei besondere Nocken eingebaut, die die Ventile in gleicher Weise wie sonst, aber bei jeder Umdrehung statt bei jeder zweiten Umdrehung, öffneten, so daß also der Motor wie eine Kolbenpumpe wirkte. Dabei ergab sich keine Temperaturdifferenz zwischen dem Betrieb mit Luft und mit Gemisch. Die Vorreaktionen werden also durch die Erhitzung auf 140° C in der Saugleitung und im Zylinder auch bei Berücksichtigung der verhältnismäßig langen Verweilzeit noch nicht angeregt.

d) Die Genauigkeit der Meßwerte.

Das Bestreben, möglichste Genauigkeit zu erzielen, fand an den nie vollkommen definierbaren motorischen Verhältnissen eine Grenze. Es muß zugegeben werden, daß für die beobachteten Differenzen einiger Meßwerte von einem Versuch zum anderen zweifelsfreie Erklärungen nicht immer gegeben werden konnten. Besonders gilt das für die Austrittstemperaturen bei den Versuchen mit reiner Luft, die an verschiedenen Tagen und zunehmend mit der Versuchsdauer stets etwas anders ausfiel. Man muß aber dabei bedenken, daß auf diese Temperatur fast alle Betriebsbedingungen irgendwie von Einfluß sind. Das Konstanthalten sämtlicher Werte nicht nur innerhalb einer Versuchsreihe, sondern über Hunderte von Betriebsstunden ist aber sehr schwer. Dadurch, daß die Luftaustrittstemperatur jedesmal neu bestimmt wurde, ist aber der Fehler so weit wie möglich verkleinert. Die etwas ungenügende Reproduzierbarkeit — vor allem über längere Zeiträume gesehen — gilt auch für die Messung des Drehmomentes bei Betrieb mit Luft. Glücklicherweise war aber die Reproduzierbarkeit erheblich besser für die Temperaturdifferenz Δt_{GL}, ebenso wie für die Differenz zwischen dem Drehmoment bei Luftbetrieb und bei Gemischbetrieb. Bei der Differenzbildung fallen also die unkontrollierbaren Fehler weitgehend heraus.

Die Gemisch- bzw. Lufteintrittstemperatur konnte auf ± 0,2° C genau eingestellt und wiederholt werden. Alle anderen Werte ließen sich so genau einstellen, daß eine merkliche Beeinflussung der Vorreaktionen durch Ungenauigkeit nicht festgestellt werden konnte.

Unter diesen Umständen gilt für die Genauigkeit der Messungen etwa folgendes:

1. Ablesbarkeit der Ein- und Auslaßthermometer für einen einzelnen Versuch . . . . ± 0,2° C.
2. Demnach möglicher Fehler für Δt_{GL} während eines Versuches . . . . . . 0,4° C.
3. Mögliche Abweichung von Δt_{GL} von einem Versuch zum anderen, d. h. die beim Auftragen einer Kurve sichtbaren Fehler . . . . 0,6 bis 0,8° C.
   In einzelnen Fällen ist der Fehler größer gewesen. Dann lag jedesmal eine auffindbare Ursache vor. Wenn jedoch der Kurvenverlauf an sich klar war, wurde gelegentlich auf Wiederholung verzichtet.
4. Mögliche Abweichung von Δt_{GL} nach mehreren Versuchsreihen infolge Veränderung des Motorzustandes . . . . 1 bis 2° C.
   Nach sehr langer Zeit war die Reproduzierbarkeit in einigen Fällen auch schlechter. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß Veränderungen des aufbewahrten Brennstoffes daran Schuld tragen. Im allgemeinen konnten alle Versuchspunkte auf 2° C, meist sogar auf weniger als 1° C reproduziert werden.
5. Genauigkeit der Bestimmung des Brennstoffverhältnisses . . . . ± ½%.
6. Genauigkeit der Drehmomentmessung ± 0,02 kg (Gewicht am Hebelarm).
7. Die Reproduzierbarkeit der Drehmomentmessung betrug nur etwa ± 0,1 kg, da der Zustand des Schmieröles von starkem Einfluß war. Doch ist dies für die Versuchswerte nicht von Belang.

Im ganzen ist aber die Genauigkeit bemerkenswert, mit der die Kurven wiederholt werden konnten. Auch der Abfall vom Maximum bei hohen Verdichtungsverhältnissen bis auf fast Null ließ sich in beiden Richtungen stets wiederholen und ergab immer dasselbe Resultat. Am besten war die Reproduktionsgenauigkeit auf dem ansteigenden Ast, wo sich die Punkte auch ruhig und bequem einstellen ließen.

e) Ergebnisse.

1. Verdichtungshöchsttemperatur.

Die Ergebnisse sind in den Kurvenblättern Bild 5 bis 17 dargestellt. Damit zu jedem Kurvenpunkt leicht die im Motor erreichte höchste Temperatur abgeschätzt werden kann, ist eine Kurventafel beigegeben, Bild 4, die für verschiedene Verdichtungsverhältnisse[6]) die höchsten bei Annahme adiabatischer Verdichtung im oberen Totpunkt auftretenden Temperaturen in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis angibt. Diese Kurven sind für Oktan als für die Versuche typischen Kraftstoff unter Vernachlässigung der Wärmeverluste berechnet, mit Werten für das Verhältnis der spezifischen Wärmen, die nach G. Damköhler [18] für eine Temperatur von 500° C ermittelt und in Zahlentafel 3 für verschiedene Brennstoffverhältnisse angegeben sind.

Zahlentafel 3. Zahlentafel der Verdichtungsexponenten $\varkappa$ für ein Gemisch mit dem Brennstoffverhältnis β.

β	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\varkappa$	1,360	1,322	1,298	1,274	1,252	1,239	1,225	1,211	1,200

Die Kurven zeigen eine recht beträchtliche Änderung der Verdichtungsendtemperatur mit dem Mischungsverhältnis. Die wirklichen Höchsttemperaturen im Zylinder sind wegen der Wärmeverluste etwas geringer.

2. Typisches Verhalten von Fliegerkraftstoffen.

Einen typischen Verlauf der Vorreaktionen zeigen die Versuche mit dem Kraftstoff Nr. 3[7]), einem handelsüblichen verbleiten Fliegerkraftstoff der Nennoktanzahl 87, Bild 5[8]). Bild 6 zeigt die gleichen Versuchsergebnisse[9]) in auseinandergezogener Darstellung, so daß sich die Zuordnung der Meß-

[6]) In die Rechnung wurden die wahren Verdichtungsverhältnisse nach Zahlentafel 2 eingesetzt, aber das übliche angeschrieben.
[7]) Die Kraftstoffnummern beziehen sich auf Zahlentafel 1.
[8]) Auf die an die Kurven angeschriebenen Zahlen (Temperaturen in ° C) wird später eingegangen.
[9]) Bild 6 enthält die Meßpunkte, während sie in Bild 5 der Übersichtlichkeit wegen weggelassen sind.

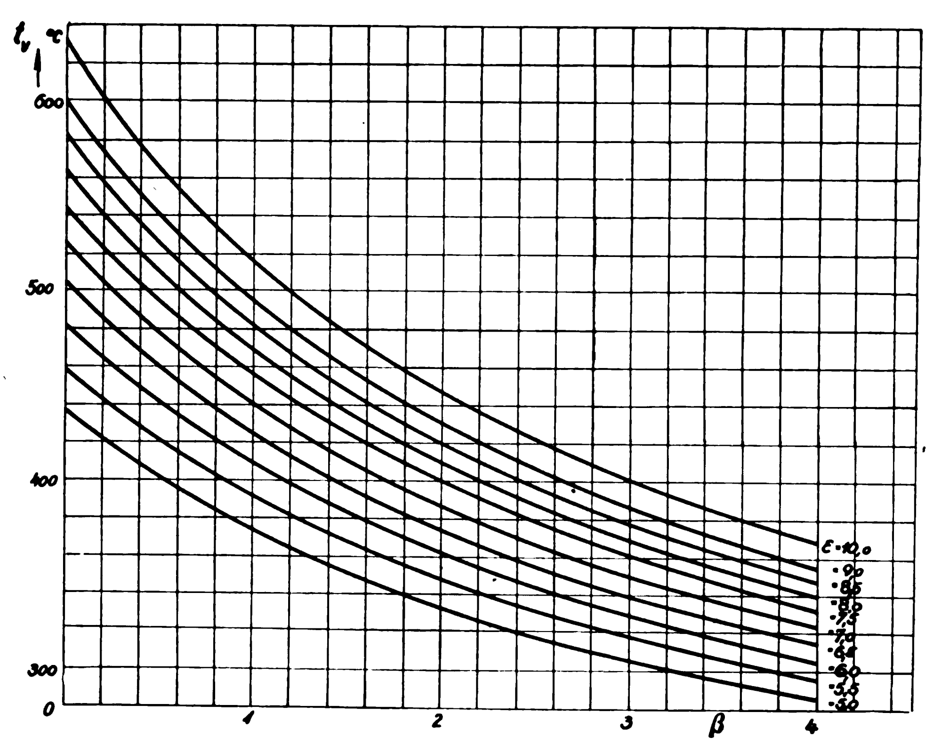


Bild 4. Verdichtungsendtemperatur. Bei der Verdichtung erreichte Endtemperatur t_v bei 140° Anfangstemperatur in Abhängigkeit vom Brennstoffverhältnis β für $\varepsilon = 5{,}0$ bis $\varepsilon = 10{,}0$. Wahres Verd.-Verh. s. Text.

punkte zu den einzelnen Kurven erkennen läßt. Die Ordinatenbeschriftung gilt für den Kurvenbeginn im Nullpunkt.

Mit wachsendem Brennstoffverhältnis β steigen die Kurven der Temperatursteigerung Δt_{GL} durch Vorreaktionen an, erreichen ein Maximum und fallen dann wieder ab, und zwar bei höheren Verdichtungsverhältnissen immer steiler, bis schließlich der Abbruch der Vorreaktionen praktisch völlig plötzlich ist.

Die Meßpunkte bei hohen und bei verschwundenen Vorreaktionen liegen indessen stets ein gewisses Stück der Abszisse auseinander. Zwischenpunkte ließen sich nicht einstellen, da die Strömungsverhältnisse im Motor infolge der Volumenvergrößerung durch die Vorreaktionen beeinflußt wurden, so daß sich nach Abwarten des Beharrungszustandes immer entweder der obere etwas links der Sprungstelle oder der untere Punkt etwas rechts davon ergab.

Die Stelle des Maximums wandert mit steigenden Verdichtungsverhältnissen weiter nach dem Gebiet größerer Brennstoffverhältnisse, also reicheren Mischungen. Die Kurven zeigen weiter in Übereinstimmung mit den Ergebnissen entsprechender Versuche mit anderen Kraftstoffen im Gebiet der ansteigenden Kurvenäste eine Unterschneidung der Kurven mit niederen Verdichtungsverhältnissen durch die mit höheren, so daß in diesem Gebiet bei wachsendem Verdichtungsgrad, d. h. wachsender Temperatur, geringere Vorreaktionen auftreten.

Bei hohen Mischungsverhältnissen gehen die Kurven nicht auf Null zurück. Ob diese Erscheinung auf Vorreaktionen besonderer Art oder auf Unterschiede der Wärmeübergangsverhältnisse des Gemisches und die reiner Luft zurückzuführen ist, hat sich bisher nicht entscheiden lassen.

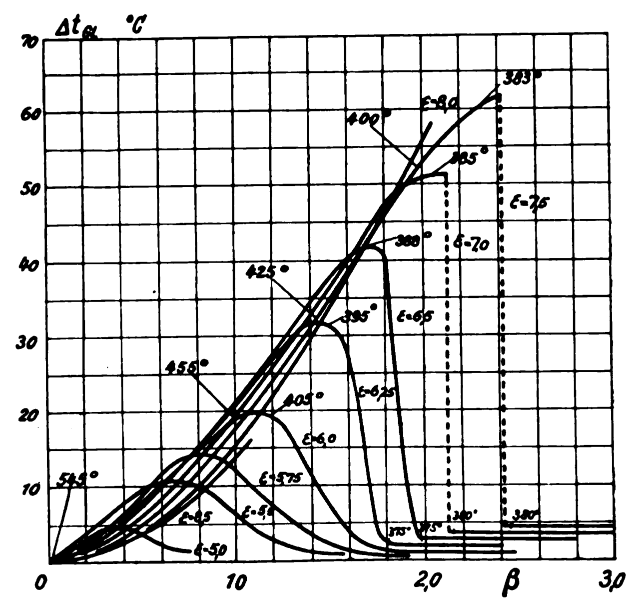


Bild 5. Verhalten von Kraftstoff 3 (Fliegerbenzin Nenn-OZ 87).
OZ ~ 87.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$n = 1800$ U/min,
$t_G = 140$° C,
$t_K = 140$° C.

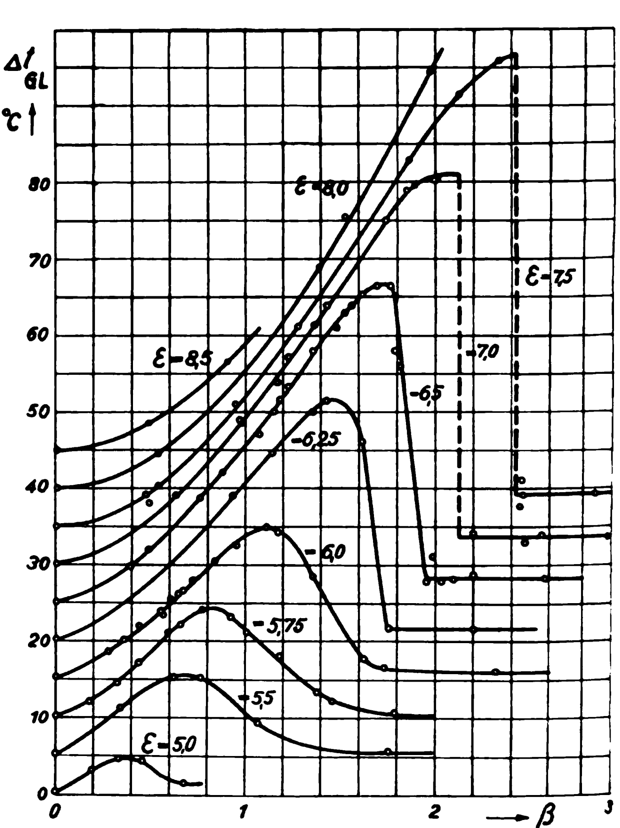


Bild 6. Verhalten von Kraftstoff 3. Auseinandergezogene Darstellung. Die Kurven sind der Deutlichkeit halber durch paralleles Verschieben nach oben auseinander gerückt, in Wirklichkeit beginnen sie alle im Koordinatenursprung.
OZ ~ 87.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$n = 1800$ U/min,
$t_G = 140$°C,
$t_K = 140$°C.



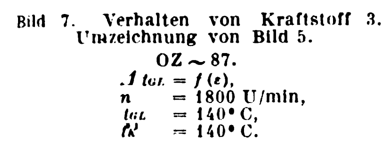
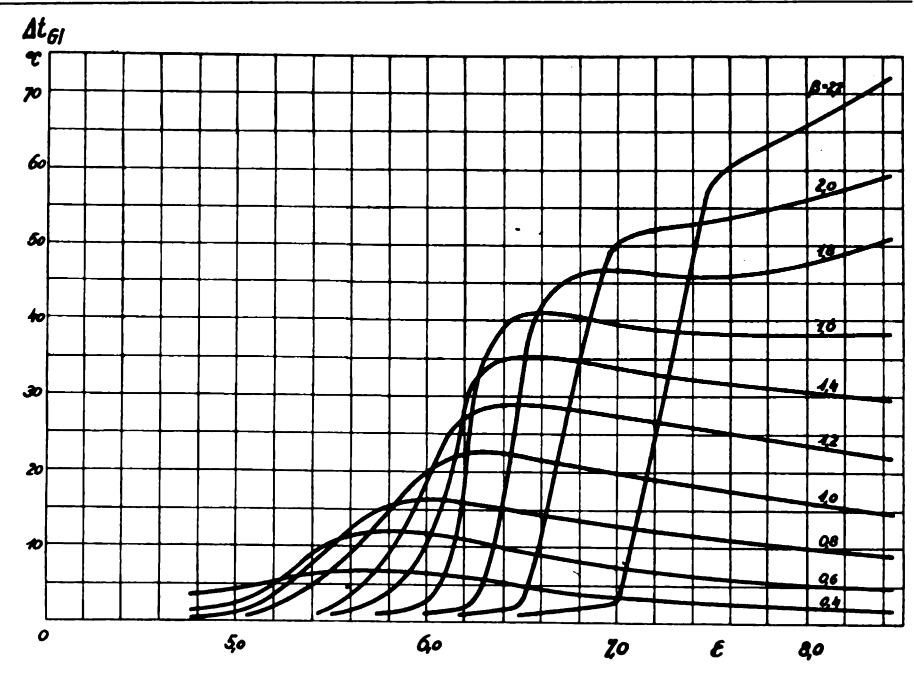


Bild 7. Verhalten von Kraftstoff 3. Umzeichnung von Bild 5.
OZ ~ 87.
$\Delta t_{GL} = f(\varepsilon)$,
n = 1800 U/min,
t_{GL} = 140° C,
t_K = 140° C.



Das anwendbare Verdichtungsverhältnis wurde durch das Auftreten von Zündungen begrenzt. In diesem Falle konnte mit $\varepsilon = 7{,}5$ die vollständige Kurve gefahren werden, während bei $\varepsilon = 8$ Knallen auftrat, sobald die Auslaßtemperatur etwa 200° C überstieg, entsprechend einem Δt_{GL} von etwa 60° C. Bei zunehmenden Verdichtungsverhältnissen tritt das Knallen dann sehr rasch auch schon bei ärmeren Mischungsverhältnissen und bei niedrigeren Auslaßtemperaturen auf, wobei aber die allgemeine Kurvenform stets erhalten bleibt. Die Kurve $\varepsilon = 8{,}5$ konnte deswegen nur bis zu einem Brennstoffverhältnis von etwa 1,0 gefahren werden. Auch das Wandern der Knallgrenze wiederholte sich bei allen anderen untersuchten Kraftstoffen.

Man erkennt aus den Kurven, daß das stöchiometrische Gemisch keine irgendwie bevorzugte Rolle spielt. Dies war zu erwarten, da es unter der Voraussetzung völliger Verbrennung definiert ist, während hier Sauerstoff stets, auch bei Gemischen, die reicher sind als das stöchiometrische, im Überschuß vorhanden ist. Man erkennt gleichzeitig, daß Versuche wie die von Peletier [10] mit konstant gehaltenem Mischungsverhältnis oder allein mit stöchiometrischem Gemisch die Zusammenhänge nur unvollkommen erkennen lassen.

Um anschaulich zu zeigen, wie sehr die Form der Kurven sich ändert, wenn man von einem Mischungsverhältnis zu einem anderen übergeht, wurde Bild 5 zu Bild 7 umgezeichnet. Diese Darstellung zeigt besonders, daß Einzelergebnisse bei einem bestimmten Mischungsverhältnis nur mit größter Vorsicht verallgemeinert werden dürfen, ja nicht einmal dem untersuchten Stoff eigentümlich sein können. Dagegen gilt das wahrscheinlich weniger für Selbstzündungsversuche, wie sie Jost und Teichmann [16, 17] durchgeführt haben.

Die Versuche mit anderen Brennstoffen ergeben, daß auf die Lage des Maximums auch der Kraftstoff von entscheidendem Einfluß ist. Der bei Kraftstoff 3, Bild 5 und 6, erst bei reichen Gemischen beobachtete Sprung der Kurven tritt bei Kraftstoff 10, Bild 13, bereits bei Brennstoffverhältnis $\beta = 1$ auf. Es ist interessant, sich zu erinnern, daß bei Betrieb am laufenden Ottomotor überhaupt nur ein eng um das Brennstoffverhältnis 1,0 liegendes Gebiet verwirklicht wird. Wenn also ein Motor klopft, so handelt es sich um Selbstzündungen eines Gemisches, dessen Reaktionsbedingungen — im Sinne von Bild 5 — rechts oder auch links von dem hier beobachteten Maximum liegen.

Ein Blick auf die mit weiteren Kraftstoffen gewonnenen Ergebnisse zeigt, daß, wie zu erwarten war, ein enger Zusammenhang zwischen den Vorreaktionen und der Oktanzahl besteht. Je höher die Oktanzahl, desto geringer die Vorreaktionen. Man könnte Kurven zeichnen, die für konstante Werte des Brennstoff- und des Verdichtungsverhältnisses die Temperaturdifferenz Δt_{GL} als Funktion der Oktanzahl darstellen. Für diese Kurven müßten aber Werte aus den Darstellungen $\Delta t_{GL} = f(\beta)$ entnommen werden, die bald links, bald rechts vom Maximum der Kurven bzw. der Unstetigkeitsstelle liegen, was wenig sinnvoll erscheint. Außerdem überzeugt man sich rasch, daß trotz des allgemeinen Zusammenhanges manche Brennstoffe bei Berücksichtigung ihrer Oktanzahl verhältnismäßig viel oder wenig Vorreaktionen ergeben und deshalb aus diesen Kurven stark herausfallen würden. Ein Beispiel hierfür sind die drei Kraftstoffe Nr. 3, 4, 5, die alle als Flugkraftstoff Oktanzahl 87 bezogen wurden. Zunächst wurden ausführliche Kurven mit Kraftstoff Nr. 3[10]) (Fliegerkraftstoff I) aufgenommen, Bild 5, 6, 7. Als der Vorrat an Kraftstoff 3 verbraucht war, stellte sich heraus, daß nachgelieferter Kraftstoff der gleichen Bezeichnung (Fliegerkraftstoff B 4) eine geringere Oktanzahl haben müsse, da sich merklich höhere Vorreaktionen ergaben. Dieser neue Kraftstoff wurde für die weiteren Versuche mit Kraftstoff Nr. 4 (Fliegerkraftstoff II) bezeichnet und später von der I.G. Farbenindustrie A.G. im Klopfprüfmotor untersucht. Es ergab sich die über 87 liegende Oktanzahl 88,1. Leider war bei Beginn der Versuche versäumt worden, eine Probe des Kraftstoffes 3 zurückzuhalten, so daß dessen genaue Oktanzahl nicht bekannt ist. Die Versuche mit Kraftstoff 4 (Fliegerkraftstoff II) wurden in der Hoffnung, daß ein dritter wieder die Werte des Kraftstoffes 3 ergeben würde, abgebrochen. Ergebnisse liegen nicht vor. Der nun gelieferte dritte Fliegerkraftstoff, Kraftstoff 5 (Fliegerkraftstoff III auf Zahlentafel 1) zeigte weniger Vorreaktionen als Kraftstoff 3, Bild 8[11]). Die spätere Untersuchung im I. G. Klopfprüfmotor durch die I. G. Farbenindustrie A.G. ergab die verhältnismäßig hohe Oktanzahl von 90,6, so daß das sich einstellende geringere Maß der Vorreaktionen verständlich ist. Wie ein Vergleich der Bilder 5 und 8 zeigt, ist aber der Unterschied für eine Oktanzahldifferenz von wahrscheinlich nicht mehr als 1 (die Oktanzahl des Kraftstoffes Nr. 3 muß nach den Vorreaktionen zwischen 88,1 und 90,6, den Oktanzahlen der Kraftstoffe Nr. 4 und 5 liegen) recht beträchtlich, vor allem im Vergleich mit den Kraftstoffen 1 (OZ 58) (Bild 11) und 2 (OZ 74), Bild 12. Wie auch schon die verschiedenartige Gestalt der Kurven vermuten läßt, wird also der allgemeine Zusammenhang: hohe Oktanzahl — kleine Vorreaktionen durch besondere Eigentümlichkeiten des einzelnen Kraftstoffes stark überlagert. Im allgemeinen gilt dieses Gesetz aber, auch zwischen verbleiten und unverbleiten Kraftstoffen (Kraftstoff 2 und 13, Bild 12). Von Ausnahmen wird noch zu sprechen sein.

---

[10]) Die Bezifferung der Kraftstoffe bezieht sich auf Zahlentafel 1. Die drei benutzten Fliegerkraftstoffe wurden außerdem mit I, II, III in der Reihenfolge ihrer Verwendung bezeichnet.

[11]) Bild 8 enthält gestrichelt das Ergebnis eines Versuches mit Beigabe von Sauerstoff. Hierüber s. S. 262. Die an die Kurven, Bild 8, geschriebenen Zahlen bedeuten °C. Hierzu s. den nächsten Abschnitt.

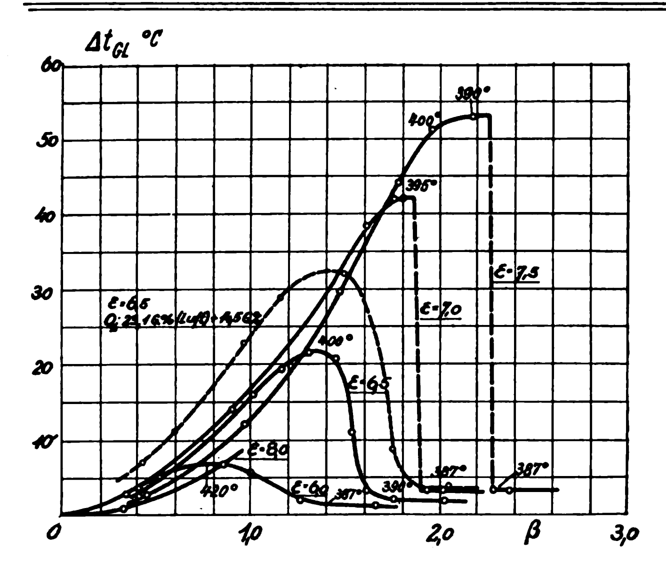


Bild 8. Verhalten von Kraftstoff 5.
OZ 90,6.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
n = 1800 U/min,
t_{G_e} = 140° C,
t_K = 140° C.

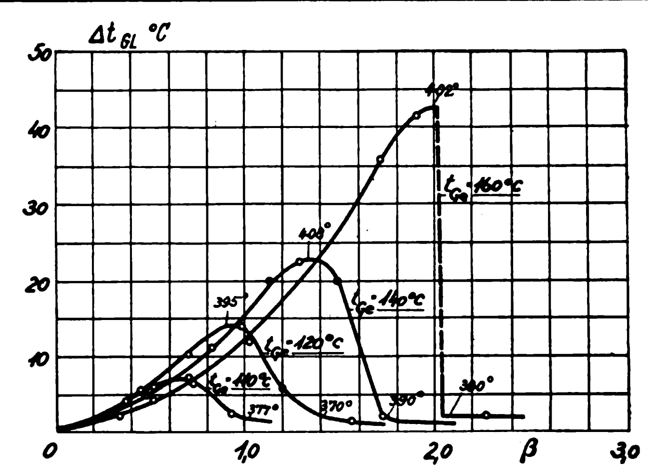


Bild 9. Verhalten von Kraftstoff 5 bei Änderung der Gemischeinlaßtemperatur.
OZ 90,6.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
n = 1800 U/min,
t_K = 140° C,
ε = 6,5.

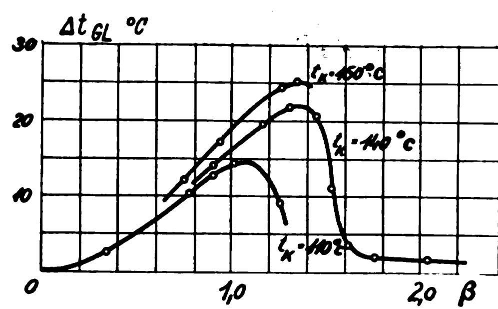


Bild 10. Verhalten von Kraftstoff 5 bei Änderung der Kühlmitteltemperatur.
OZ 90,6.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
n = 1800 U/min,
ε = 6,5,
t_{Ge} = 140° C.

3. Besprechung der allgemeinen Kurvenform.

Zur Deutung der gewonnenen Kurven kann nicht viel gesagt werden. Erst recht erscheint ein Versuch der Vorausberechnung oder der Vorhersage vorläufig völlig aussichtslos. Man muß sich darauf beschränken, allgemeine Zusammenhänge aufzudecken und Beziehungen zu Ergebnissen früherer Forschungsarbeiten zu finden.

Zu erwarten war das Ansteigen der Kurven mit wachsendem Brennstoffverhältnis. Es ist auch klar, daß das stöchiometrische Mischungsverhältnis in den Kurven nicht besonders hervortreten kann, da, solange nur Vorreaktionen ablaufen, Sauerstoff stets reichlich im Überschuß vorhanden ist.

Bemerkenswert ist dagegen der negative Temperaturkoeffizient, wie ihn besonders Bild 7 ($\Delta t_{GL} = f(\varepsilon)$) zeigt. Die meisten Kurven fallen nach Überschreiten ihres Maximums mit wachsendem ε, d. h. also doch mit wachsender Höchsttemperatur, der die Gemische ausgesetzt wurden, ab. Diese Erscheinung ist allen untersuchten Kraftstoffen eigen, wenn auch bei kleinerer Oktanzahl in geringerem Maße, vgl. Bild 11. Aber bei der Oxydation von Kohlenwasserstoffen, bei der zweifelsfrei Kettenreaktionen eine bedeutende Rolle spielen, wäre es schon bemerkenswert, wenn die Reaktion temperaturunabhängig sein sollte.

Negative Temperaturkoeffizienten sind bei der Oxydation von Kohlenwasserstoffen auch sonst schon gefunden worden (vgl. z. B. Jost [4] S. 362, 422, 430 ff.).

Auch bei den Versuchen, Bild 9, mit geänderter Gemischeintrittstemperatur liegen die Kurven höherer Gemischeintrittstemperatur anfänglich unter den Kurven niederer Eintrittstemperatur. Wenn im Gegensatz dazu bei Versuchen, Bild 10, bei denen die Wirkung einer Änderung der Kühlmitteltemperatur untersucht wurde, diese Erscheinung nicht auftrat, so dürfte der Grund sein, daß das Gemisch, das mit 140° C eintritt, noch nach dem Verdichtungstakt Wärme vom Zylinder aufnimmt (bzw. an ihn abgibt), wobei keine Wirkung mehr auf die Vorreaktionen eintritt. Im übrigen liegen aber auch hier die ansteigenden Äste dieser Kurven immerhin nahe zusammen.

Vergegenwärtigt man sich den starken Einfluß der Temperatur auf die Vorreaktionen und die beträchtliche Änderung der erreichten Verdichtungsendtemperatur bei Änderung des Mischungsverhältnisses, Bild 4, so scheint die Form der Kurven, vor allem der Abbruch bei wachsendem Brennstoffverhältnis, überwiegend ein Temperatureinfluß und weniger ein Einfluß des Mischungsverhältnisses zu sein. Entnimmt man einmal für eine Anzahl von Punkten, Bild 5, die erreichte Verdichtungsendtemperatur den Kurven des Bildes 4 und trägt diese Temperaturen, wie in Bild 5 geschehen, in das Bild ein, so erkennt man, daß die Kurvenmaxima fast genau die gleiche Temperatur von etwa 385 bis 405° C haben. Auch die Temperaturen nach Abbruch der Vorreaktionen sind untereinander praktisch gleich und liegen bei etwa 380° C. Geht man auf einer Kurve ε = const in das Gebiet ärmerer Mischungsverhältnisse, steigt die Temperatur natürlich an.

Die erreichten Verdichtungsendtemperaturen sind in gleicher Weise für einige andere Kraftstoffe in Bild 8, 11, 13, 14 angeschrieben. Es zeigt sich, daß die Temperaturen für die Maxima unabhängig vom Kraftstoff stets etwa 390 bis 400° C betragen, nach Abbruch der Vorreaktionen aber nur etwa 10 bis 20° C geringer sind. Das gilt auch für Bild 9. Hier werden die gleichen Endtemperaturen bei geänderter Einlaßtemperatur erreicht. Lediglich Kraftstoff 10, Bild 13, weicht von dieser Regel etwas ab. So gering dieser Temperaturabfall von 10 bis 20° C ist, so scheint doch die Abnahme der Verdichtungsendtemperatur bei Steigerung des Brennstoffanteils im Gemisch für die mehr oder weniger rasche Verminderung der Vorreaktionen verantwortlich zu sein. Es bleibt allerdings offen, warum diese Verminderung bei hohen Verdichtungsverhältnissen fast plötzlich ist, und ferner gilt diese Überlegung nicht für die Erklärung der links vom Maximum liegenden Kurventeile.

Aus der Betrachtung der erreichten Verdichtungsendtemperaturen ergibt sich, daß die Maxima bei höheren Verdichtungsverhältnissen weiter rechts liegen müssen, da bei reicherem Mischungsverhältnis die gleiche Temperatur erst bei höherem Verdichtungsverhältnis erreicht wird. Die

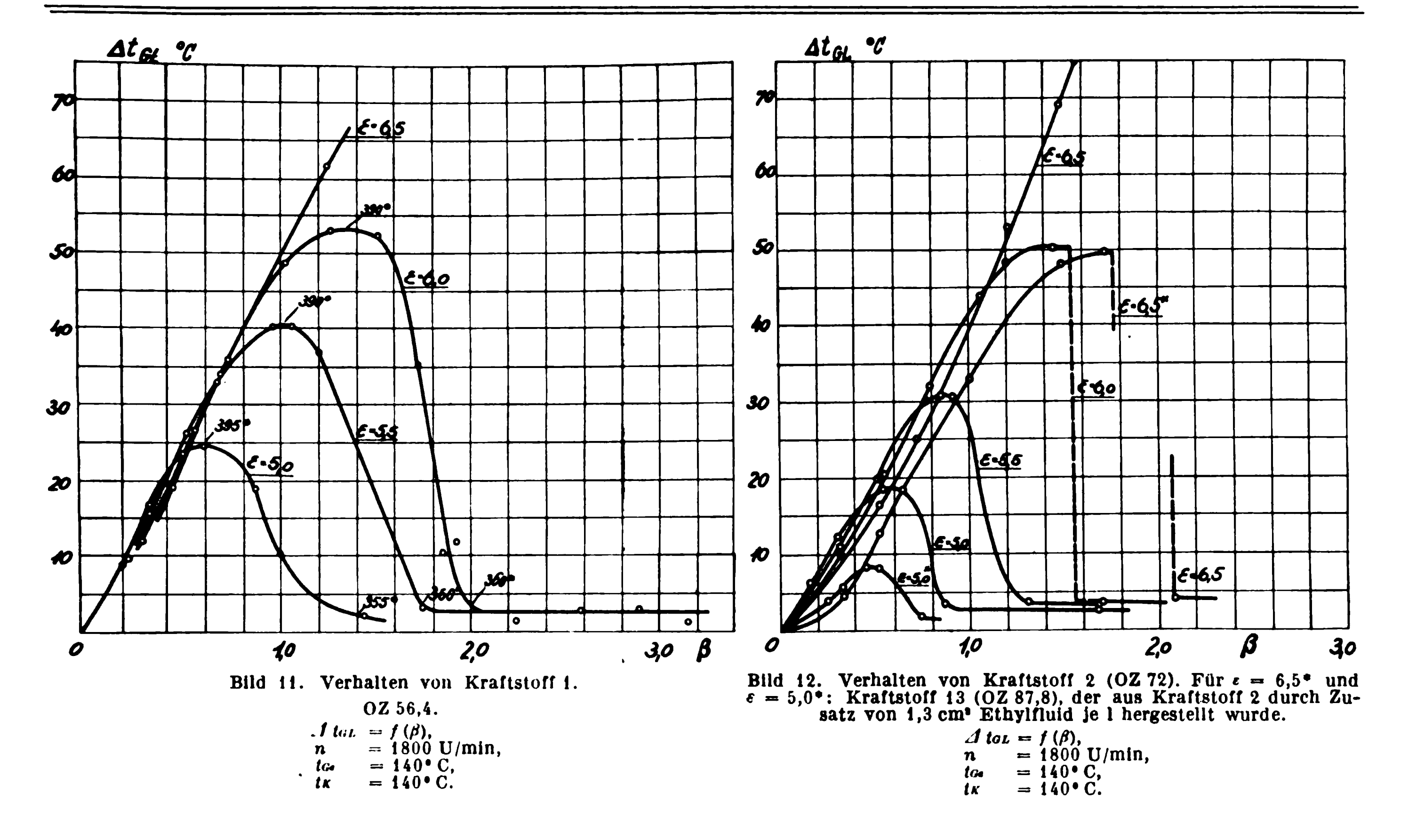


Bild 11. Verhalten von Kraftstoff 1. OZ 56,4.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$n = 1800$ U/min,
$t_{G} = 140°$ C,
$t_{K} = 140°$ C.

Bild 12. Verhalten von Kraftstoff 2 (OZ 72). Für $\varepsilon = 6{,}5$* und $\varepsilon = 5{,}0$*: Kraftstoff 13 (OZ 87,8), der aus Kraftstoff 2 durch Zusatz von 1,3 cm³ Ethylfluid je l hergestellt wurde.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$n = 1800$ U/min,
$t_{G} = 140°$ C,
$t_{K} = 140°$ C.

Übereinstimmung der Maximatemperatur ist so gut, daß sich die Lage der Maxima vorhersagen ließe. Gleichzeitig ist es verständlich, daß die Höhe der Maxima mit β ansteigen muß, da bei reicherem Mischungsverhältnis mehr Brennstoff für die Reaktionen zur Verfügung steht.

4. Versuche mit verschiedenen Kraftstoffen. Einfluß von Bleitetraäthyl.

Bild 11 zeigt die Ergebnisse mit Kraftstoff Nr. 1, einem handelsüblichen »Grund«-Benzin der Nennoktanzahl 58. Entsprechend der verhältnismäßig kleinen Oktanzahl sind die Vorreaktionen ziemlich bedeutend. Beim Vergleich mit den Bildern 5 und 8, denen Versuche mit Kraftstoffen der Oktanzahl etwa 87 zugrunde liegen, ergibt sich folgende allgemeine, bisher bei allen Versuchen bestätigte Regel:

Je geringer die Oktanzahl ist, um so steiler und gleichzeitig um so geradliniger ist der ansteigende Ast der Kurven, und um so geringer ist die Unterschneidung der Kurven niederen durch solche höheren Verdichtungsverhältnisses.

Die Kurve für $\varepsilon = 6{,}5$, Bild 11, konnte wegen auftretender Selbstentzündungen nicht zu Ende gefahren werden. Der letzte Punkt liegt bei $\beta = 1{,}25$. Das entspricht nach Bild 4 einer höchsten Verdichtungsendtemperatur t_v von 410° C. Bei dieser Temperatur also hat dieser Kraftstoff eine Induktionszeit von weniger als der Zeit einer achtel Kurbelumdrehung, da anzunehmen ist, daß Selbstzündung nur eintritt, solange sich der Kolben in der Nähe des oberen Totpunktes befindet und das Gemisch sich noch nicht infolge Ausdehnung abgekühlt hat. Da bei $n = 1800$ U/min eine halbe Umdrehung 0,0167 s dauert (vgl. hierzu auch Bild 22), so ergibt sich die Induktionszeit, wenn man dafür etwa 45° Kurbelwinkel annimmt, zu etwa 0,0042 s. Damit besteht größenordnungsmäßig Übereinstimmung mit Teichmann [17], der für n-Heptan bei $\varepsilon = 6$ und einer absoluten Kompressionsendtemperatur von 677° K = 404° C ($\lambda = 0{,}8$, was etwa $\beta = 1{,}2$ entspricht) einen Zündverzug von 0,005 s fand. Nun ist allerdings n-Heptan, das definitionsgemäß die Oktanzahl 0 hat, reaktionsfreudiger als der Kraftstoff 1 mit der Oktanzahl 56,4. Man hätte also bei unseren Versuchen einen längeren Zündverzug erwarten sollen, aber dieser Unterschied kann damit erklärt werden, daß bei dem betrachteten Versuchspunkt die Zündungen im Zylinder ja noch nicht auftraten und daß die Festlegung der für den Zündverzug zur Verfügung stehenden Zeit auf 45° Kurbelwinkel willkürlich ist.

Die Ergebnisse der Versuche mit Kraftstoff Nr. 2, einem handelsüblichen, unverbleiten Fliegerkraftstoff der Oktanzahl 74, aus dem durch Bleizusatz der Fliegerkraftstoff OZ 87 hergestellt wird, zeigt Bild 12. In Übereinstimmung mit den bisher gezeigten Ergebnissen sind die Vorreaktionen geringer als auf Bild 11, der ansteigende Ast ist weniger steil und die Unterschneidung ist etwas ausgeprägter. Die höchste Temperaturdifferenz Δt_{GL} erreichte den Wert von 75° C. Rechnet man ganz rund den Energiegehalt des Kraftstoffes zu 10000 kcal/kg, die 15 kg Gemisch bei einer spez. Wärme von 0,25 kcal/kg° C auf rund 2650° C erwärmen, so ist also die durch die Vorreaktionen erreichte Temperaturerhöhung etwa 3,5% des gesamten Energieinhaltes (eines stöchiometrischen Gemisches). Das Ausmaß der Vorreaktionen ist also durchaus beträchtlich.

In Bild 12 ist das Ergebnis eines Versuches mit Kraftstoff Nr. 13 eingezeichnet, der aus Kraftstoff Nr. 2 durch Beimischen von 1,3 cm³ je Liter Ethylfluid blau der Ethylgesellschaft hergestellt wurde. (1,3 cm³ Ethylfluid enthalten 0,85 cm³ Bleitetraäthyl.) Das ist, wie aus der Analyse der Kraftstoffe Nr. 2, 3, 4 hervorgeht, etwa die Zusatzmenge, mit der üblicherweise der Fliegerkraftstoff OZ 87 aus dem Kraftstoff OZ 74 hergestellt wird. Tatsächlich ergab die Untersuchung des so gewonnenen Kraftstoffes im I. G.-Klopfprüfmotor eine Oktanzahl von 87,8, die sehr befriedigend in die Reihe der Oktanzahlen von Fliegerkraftstoffen mit der Nennoktanzahl 87 hineinpaßt. Die Kurve für diesen Kraftstoff Nr. 13 müßte demnach übereinstimmen mit den Kurven der Kraftstoffe mit der Nennoktanzahl 87 für $\varepsilon = 6{,}5$ auf Bild 5 oder Bild 8. Da Kraftstoff Nr. 3, wie auf Seite 257 bereits festgestellt, eine Oktanzahl hat, die zwischen den Oktanzahlen der Kraftstoffe Nr. 4 und 5 liegt, d. h. zwischen 88,1 und 90,6 (also wenig mehr als Kraftstoff Nr. 13) und Kraftstoff Nr. 5 die Oktanzahl 90,6 hat (also wesentlich mehr als Kraftstoff Nr. 13), so müßten sich für Kraftstoff Nr. 13 etwas mehr Vorreaktionen ergeben als in Bild 7 (Kraftstoff 3) und wesentlich mehr als in Bild 9 (Kraftstoff 5). Dies ist tatsächlich der Fall: Kraftstoff 13 erreicht bei $\varepsilon = 6{,}5$ ein Δt_{GL} von 50° C, Kraftstoff 3: 42° C und Kraftstoff 5: 22° C. Die Wirkung der Oktanzahl auf die Vorreaktionen ist also bei ähnlichen Kraft-

stoffen (die sich in diesem Falle durch verschiedenen Bleigehalt, auch durch verschiedenen Aromatengehalt unterscheiden) recht bedeutend.

Der Vergleich der Kurve für Kraftstoff 13 auf Bild 12 mit den Kurven für Kraftstoff Nr. 2 zeigt, daß das Blei offenbar keine besondere Wirkung auf die Kurvenform hat. Wenn die Vorreaktionen geringer werden, so daß die Kurve für $\varepsilon = 6{,}5$, die ohne Blei wegen Selbstzündungen nicht ausgefahren werden konnte, jetzt ganz gemessen werden kann, so war das zu erwarten, auch daß der ansteigende Ast etwas flacher liegt. Das Maximum verschiebt sich dabei etwas nach rechts. Die Kurven für $\varepsilon = 5{,}0$ zeigen, daß der Bleizusatz die Vorreaktionen etwa auf die Hälfte vermindert hat.

Vergleiche zwischen verbleitem und unverbleitem Kraftstoff wurden auch mit I.-G.-Eichbenzin unternommen (Bezeichnung der I. G. »I. G. 7«, Kraftstoff Nr. 10), das die Oktanzahl 44,6 hat. Das Ergebnis der Versuche zeigt Bild 13. Der Anstieg der Kurve für reines Eichbenzin ist entsprechend der niedrigen Oktanzahl sehr steil und gestreckt. Schon bei $\varepsilon = 5{,}0$ werden Temperaturdifferenzen von 66° C erreicht, so daß, da sich geringere Verdichtungsverhältnisse nicht einstellen lassen, keine weiteren Kurven gefahren werden konnten. Der Abbruch der Vorreaktionen ist, ohne daß das Maximum eine runde Kuppe zeigt, außerordentlich plötzlich bei einem Brennstoffverhältnis noch unter 1,0, so daß ein Klopfprüfmotor, der wie üblich mit etwa stöchiometrischem Mischungsverhältnis gefahren wird, gar nicht in dem Gebiet der auf diese Weise nachzuweisenden Vorreaktionen arbeitet.

Der Brennstoff Nr. 10 wurde sodann, um den Einfluß von Bleitetraäthyl zu untersuchen, mit 1,35 cm³ Ethylfluid je Liter versetzt. Das Ergebnis der mit diesem Kraftstoff (Kraftstoff Nr. 12) durchgeführten Versuche ist in Bild 13 eingezeichnet. Es zeigte sich überraschenderweise im Gegensatz zu den bisher gewonnenen Ergebnissen, daß das Blei offenbar keine oder nur eine sehr geringe Wirkung hat. Während auf dem ansteigenden Ast fast keine Wirkung festzustellen ist, wird lediglich das Maximum etwas herabgedrückt. Um festzustellen, ob diese überraschende Wirkungslosigkeit etwa an dem verwendeten Ethylfluid lag, wurde der Kraftstoff Nr. 10 mit der entsprechenden (1 cm³/l) Menge reinem Bleitetraäthyl (Kraftstoff Nr. 11) versetzt. Die Meßergebnisse (vgl. Bild 13) unterscheiden sich aber kaum von denen mit Kraftstoff 12.

Nach einer Eichkurve der I. G. müßte Eichbenzin mit 1 cm³ Bleitetraäthyl je Liter die Oktanzahl 74,5 haben. Um nachzuprüfen, ob durch die Bleibeimischung tatsächlich die Oktanzahl von etwa 74,5 erreicht wurde, wurden die durch Bleizusatz aus Eichbenzin gewonnenen Kraftstoffe im I.-G.-Klopfprüfmotor von der I. G. selbst untersucht. Es ergaben sich Oktanzahlen von 73,1 und 73,2[12]), so daß also bewiesen ist, daß das zugesetzte Bleitetraäthyl bzw. Ethylfluid in Ordnung war. Da diese Bleiunempfindlichkeit des I.-G.-Eichbenzins im Gegensatz zu anderen Kraftstoffen steht, muß man also eine Besonderheit gerade dieses Kraftstoffes, etwa gegeben durch den hohen Gehalt an Paraffinen dafür verantwortlich machen. Dabei ist aber I.-G.-Eichbenzin für die Verhältnisse am Klopfprüfmotor hervorragend bleiempfindlich. So überraschend dieses Ergebnis ist, findet es doch eine Parallele in den Versuchen von Jost und Rögener [20], die bei Versuchen über die Selbstzündung keinen Einfluß des Bleies bei Mischung mit n-Heptan (paraffinisch) finden konnten. Da durch unsere Versuche, Bild 12, bewiesen ist, daß die Wirkung des Bleies durchaus und in dem an sich zu erwartenden Maße bei Versuchen über Vorreaktionen und Selbstzündungen festgestellt werden kann, dürfte es sich hier um eine Besonderheit der Paraffine handeln, die sich im Motor (vielleicht bei höheren Temperaturen?) anders verhalten

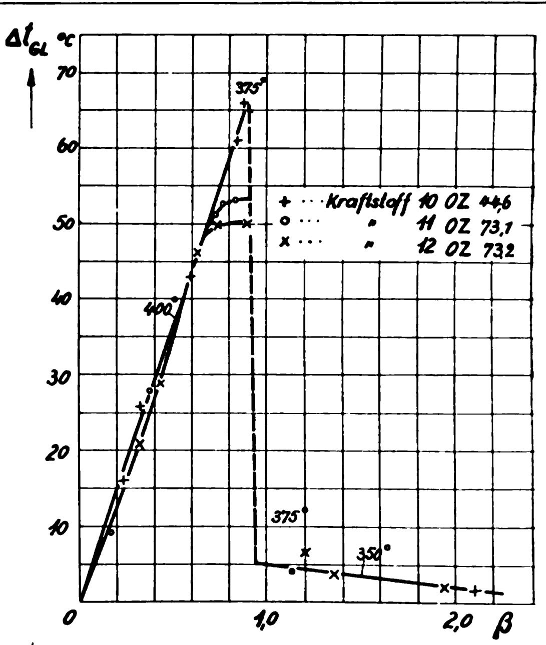


Bild 13. Verhalten von Kraftstoff 10 (OZ 44,6 I.G.-Eichbenzin) und von Kraftstoff 10 mit Zusatz von Bleitetraäthyl (Kraftstoff 11 (OZ 73,1) und 12 (OZ 73,2)).

$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$n = 1800$ U/min,
$t_{Ge} = 140°$ C,
$t_K = 140°$ C,
$\varepsilon = 5{,}0$.

als bei Versuchen, deren Bedingungen von denen des laufenden Motors abweichen. Übrigens ist n-Heptan sehr gut bleiempfindlich im Sinne der Motoroktanzahl.

Die Versuche mit handelsüblichen Kraftstoffen zeigten ziemlich übereinstimmende Ergebnisse. Trotzdem war zu erwarten, daß die einzelnen Bestandteile entsprechend ihrer verschiedenen chemischen Struktur unterschiedliches Verhalten zeigen würden. Um darüber Aufschluß zu erhalten, wurden Versuche mit reinem Iso-Oktan, Äthylalkohol und Benzol unternommen. Die Oktanzahlen dieser Stoffe sind recht hoch. Iso-Oktan hat definitionsgemäß die Oktanzahl 100, Alkohol hat nach Schätzungen (vgl. Zahlentafel 1) die Oktanzahl 99,5, während die Oktanzahl von Benzol bei 108 liegen dürfte.

Es war nicht möglich, bei Benzol Vorreaktionen in der hier angewendeten Art zu messen. Steigerte man die Verdichtung, so zeigten sich niemals, auch nicht unter veränderten Versuchsbedingungen, Vorreaktionen. Wohl aber traten plötzlich übergangslos die ersten Zündungen auf, und zwar bei 140° C Gemischeinlaßtemperatur und einer Drehzahl von 1800 U/min etwa bei $\varepsilon = 11$. Benzol zeigte damit ein ähnliches Verhalten wie die bereits genannten Kraftstoffe, soweit sie ohne erkennbare Vorreaktionen bei hohen Verdichtungsverhältnissen und entweder sehr kleinem oder sehr hohem Brennstoffverhältnis zündeten.

Daß Benzol keine Vorreaktionen ergibt, ist auch von anderer Seite bereits gefunden worden. Insbesondere ist bekannt, daß Benzol vor der Verbrennung keine Peroxyde entwickelt (vgl. [21] bzw. [4] S. 530 und S. 458, ferner [22], [24]).

Alkohol, der wegen seiner hohen Verdampfungswärme in Verbindung mit dem niedrigen Mischungsverhältnis einen außerordentlichen Wärmebedarf hatte, weswegen eine Heizung von 2 kW zusätzlich eingebaut werden mußte, verhielt sich ebenso wie Benzol. Es ließen sich vor der Selbstzündung keine Vorreaktionen messen. Dieses Verhalten des Alkohols ist indessen überraschend.

Die Ergebnisse der Versuche mit Iso-Oktan (Kraftstoff 7) sind auf Bild 14 dargestellt. Beim Vergleich mit den bereits besprochenen Kurven fällt vor allem die starke Verlagerung der Kurven in das Gebiet sehr reicher Mischungen auf. Noch bei einem Gemisch, das dreieinhalbmal so reich ist

[12]) Übrigens liegt die Kurve für Kraftstoff 12, dessen Oktanzahl nur um 0,1 höher ist als die des Kraftstoffes Nr. 11, um den leicht feststellbaren Betrag von 4° C tiefer.

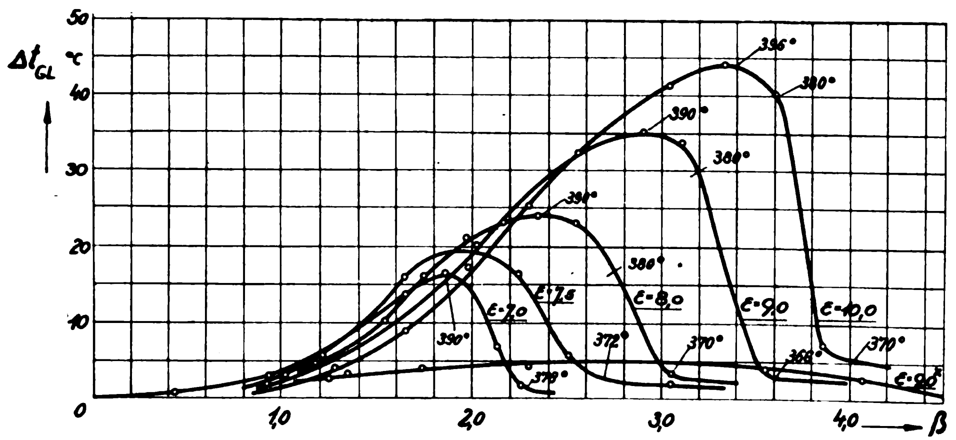


Bild 14 (links). Verhalten von Kraftstoff 7 (Isooktan). Bei $\varepsilon = 9{,}0°$: Sonderkraftstoff OZ 100 (Nr. 6).
OZ 100.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
n = 1800 U/min,
t_G = 140° C,
t_K = 140° C.

Bild 15 (unten). Abhängigkeit der Vorreaktionen vom Druck im Einlaßrohr (Kraftstoff 2).
b_{ein} = Unterdruck im Einlaßrohr in mm H_2O.
OZ 72.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
n = 1800 U/min,
t_G = 140° C,
t_K = 140° C,
ε = 6,0.

wie das stöchiometrische, lassen sich Temperaturerhöhungen von etwa 45° C messen. Entsprechend der hohen Oktanzahl sind die Verdichtungsverhältnisse hoch. Die Neigung des ansteigenden Astes ist gering und die Krümmung und Unterschneidung der Kurven ist ausgeprägt. Bemerkenswert sind auch die breiten Maxima. Zum Vergleich sind in Bild 14 die Versuchsergebnisse des Kraftstoffes Nr. 6 eingetragen, eines Sonderkraftstoffes der Oktanzahl 100, dessen Aromatenanteil von 40% aus Benzol bestehen dürfte. Die Kurve wurde mit $\varepsilon = 9{,}0$ gefahren und ist also mit der Iso-Oktankurve zu vergleichen, die eine Temperaturdifferenz von 35° C erreicht. Da die beiden Stoffe gleiche Oktanzahl haben, müßte man gleiche Vorreaktionen erwarten. Daß dies nicht der Fall ist, dürfte auf den Anteil an Benzol zurückzuführen sein, das seine Eigenschaften offensichtlich auch in Mischung beibehält.

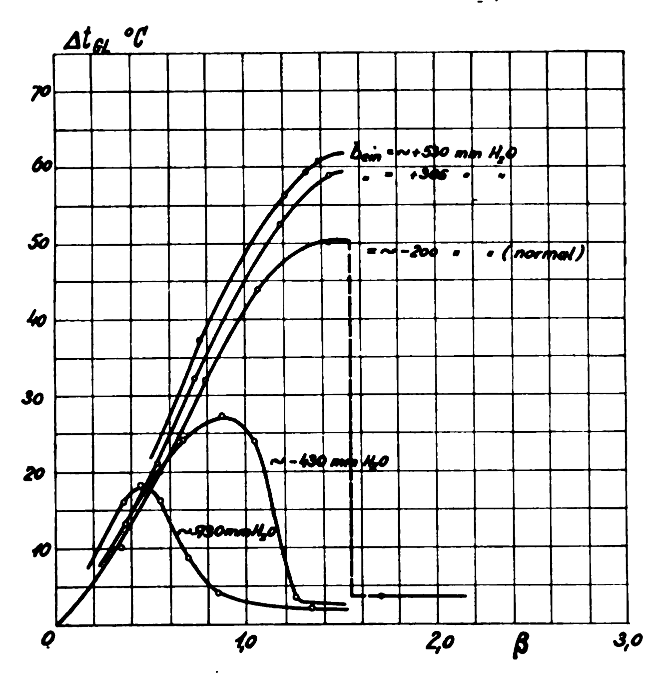
5. Abhängigkeit der Vorreaktionen von den Motorbetriebsbedingungen.

Weitere Versuche betrafen den Einfluß von Abweichungen von den für die bisherigen Versuche festgehaltenen Werten für die Ansaugetemperatur, Kühlmitteltemperatur, Drehzahl und die Drücke im Ansaugrohr auf die Vorreaktionen.

Bild 15 zeigt für Kraftstoff Nr. 2 die Abhängigkeit vom Ansaugdruck. Die Zahlen an den Kurven bedeuten mm Wassersäule Unterdruck bzw. Überdruck im Ansaugrohr. Wie man sieht, ist die Wirkung die gleiche, wie eine Verringerung bzw. Erhöhung des Verdichtungsverhältnisses. Auch die Unterschneidung der Kurven tritt auf. Die Wirkung ist allerdings bei Überdruck nicht so hoch wie bei Unterdruck, was teilweise durch Beeinflussung der Spülung erklärt werden könnte. Im ganzen scheint aber doch eine Druckänderung durchaus wesentlichen Einfluß zu haben. Diese Beobachtung widerspricht allerdings teilweise den Ergebnissen von Teichmann [17], der einen nur geringen Einfluß eines Überdruckes von 1 atü bei Selbstzündungsversuchen mit n-Heptan fand.

Bild 10 zeigt den Einfluß der Kühlmitteltemperatur, d. h. den Einfluß der Zylinderwandtemperatur. Wie zu erwarten, steigen die Vorreaktionen mit wachsender Kühlmitteltemperatur. Gerade diese Kurven zeigen den starken Einfluß der gesamten Motortemperatur und machen die starke Abhängigkeit des Klopfens von Zylinder- und Kolbentemperatur verständlich.

Bild 16 zeigt den Einfluß der Drehzahl. Es ist zu erwarten, daß eine Verringerung der Drehzahl, d. h. eine Vergrößerung der für die Reaktionen zur Verfügung stehenden Zeit, größere Temperaturdifferenzen ergibt. Überraschend ist aber das Ausmaß des Einflusses. Eine Verringerung der Drehzahl um $^1/_6$ erhöhte die Temperaturdifferenzen bereits von 22 auf 38°, d. h. um mehr als $^2/_3$. Eine Kurve mit der um $^1/_3$ verringerten Drehzahl (1200 U/min statt 1800 U/min) ließ sich bereits wegen auftretender Zündungen nicht mehr zu Ende fahren. Eine Erhöhung der Drehzahl wirkt dementsprechend stark hemmend. Interessant ist, daß



auch hier gleichzeitig eine Verschiebung der Maxima eintritt, aber keine Unterschneidung der Kurven.

Die Wärmeverluste während des Verdichtungstaktes wirken den beobachteten Erscheinungen entgegen. Bei höherer Drehzahl wird weniger Wärme an den Zylinder abgegeben, die Ladung bleibt also wärmer. Wenn der Temperatureinfluß den Zeiteinfluß überwöge, müßten, umgekehrt

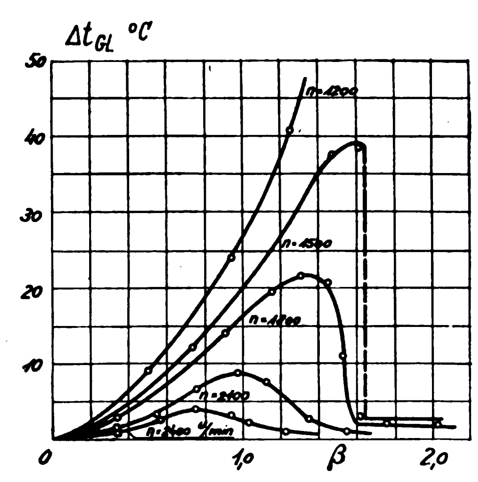


Bild 16. Einfluß der Drehzahl auf die Vorreaktionen (Kraftstoff 5).
OZ 90,6.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
ε = 6,5,
t_G = 140° C,
t_K = 140° C.

als gemessen, die Kurven für höhere Drehzahl über den Kurven für niedere Drehzahl liegen.

Bild 17 veranschaulicht, in wie starkem Maße die Vorreaktionen von den Betriebsbedingungen des Motors im gesamten abhängen. Hier sind mit der Normalkurve für Brennstoff Nr. 5 ($n = 1800$ U/min, $t_K = 140^\circ$ C, $t_{Ge} = 140^\circ$ C Versuchsergebnisse mit gleichzeitiger Änderung von Drehzahl, Kühlmitteltemperatur und Gemischeinlaßtemperatur verglichen. Geringe Änderungen haben außerordentlich bedeutende Wirkung auf die Vorreaktionen. Es ist also notwendig, das Gebiet, in dem man die Vorreaktionen messen kann, sorgfältig zu umgrenzen. Es bleibt nach den bisherigen Versuchen allerdings die Frage offen, ob man die Reaktionen nicht in gleicher Weise bei wesentlich niedrigeren Temperaturen, aber dafür erhöhten Verdichtungsverhältnissen messen kann.

Bild 9 zeigt den Einfluß der Gemischeintrittstemperatur für Kraftstoff Nr. 5. Wie an sich zu erwarten, ist der Einfluß recht bedeutend. Er wäre noch größer, wenn nicht infolge der von der Zylinderwandtemperatur abweichenden Gemischeintrittstemperatur Wärme an den Zylinder flöße, also eine Angleichung stattfände. Scharf ist die einem negativen Temperaturkoeffizienten entsprechende Unterschneidung der Kurven. Auch hier zeigt sich wieder die Verschiebung der Maxima, die hier sicher gleiche Gründe hat wie bei einer Erhöhung der Verdichtungsverhältnisse: d. h. gleiche Verdichtungsendtemperatur wird bei größerer Temperaturerhöhung des Gemisches (verglichen mit den Normalwerten für t_{Ge} und ε) bei reicheren Gemischen erzielt.

Mit Kraftstoff Nr. 5 wurde ein Versuch gemacht, der den Einfluß des Sauerstoffanteils des Gemisches zeigen sollte. Das Ergebnis ist in Bild 8 eingetragen. (Gestrichelte Kurve.) Ein erster Versuch wurde mit einer Erhöhung der Sauerstoffmenge der Atmosphäre auf das Doppelte, also auf insgesamt 46 Gew.-% Sauerstoff durchgeführt. Hierbei traten so heftige Zündungen auf, daß die Sauerstoffzufuhr auf einen Zusatz von 14,5 Gew.-% gedrosselt werden mußte. Der Gesamtsauerstoffgehalt des Gemisches (ohne Kraftstoffanteil) betrug also dann 37,6 Gew.-% O_2. Das Maximum der gemessenen Kurve liegt bei 33° C, gegen 22° C beim gleichen Verdichtungsverhältnis von 6,5. Die Erhöhung beträgt also 50%, während die Sauerstoffzugabe $\frac{37,6 - 23,1}{23,1} \cdot 100 = 63\%$ beträgt. Eine besondere Wirkung des Stickstoffes

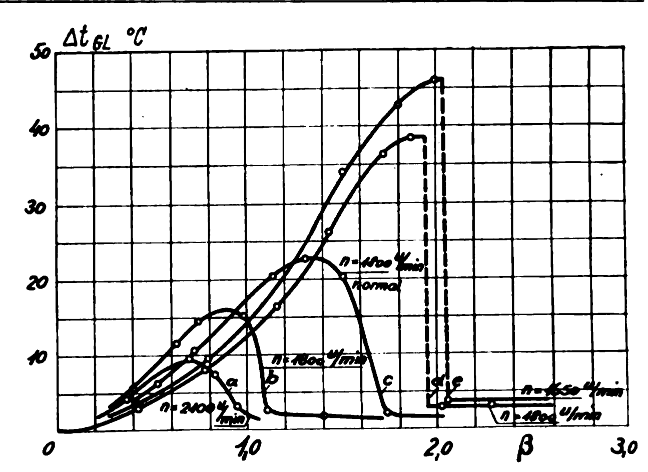


Bild 17. Einfluß der Motorbetriebsbedingungen auf die Vorreaktionen (Kraftstoff 5).
OZ 90,6.
$\Delta t_{GL} = f(\beta)$,
$\varepsilon = 6,5$.
a: $t_{Ge} = 120°$, $t_K = 120°$;
b: $t_{Ge} = 120°$, $t_K = 120°$;
c: $t_{Ge} = 140°$, $t_K = 140°$; normal
d: $t_{Ge} = 150°$, $t_K = 150°$;
e: $t_{Ge} = 150°$, $t_K = 150°$.

unmittelbar auf die Reaktionen scheint danach nicht vorzuliegen.

Dieser Versuch ist übrigens der einzige, bei dem eine Erhöhung des Maximums ohne gleichzeitige Verschiebung gefunden wurde. Das Brennstoffverhältnis β wurde dabei auf den wahren Sauerstoffanteil des Gemisches bezogen.

6. Indikatordiagramme.

Bei einigen Versuchen wurde der Verlauf der Vorreaktionen mit dem Indikator verfolgt. Als Druckgeber wurde ein Quarzdruckgeber Bauart Gohlke-LFA verwendet, der über einen Verstärker die Schleife eines Siemens-Schleifenoszillographen steuerte. Eine Zeitmarke gab 500 Hz. Der obere Totpunkt wurde mit Hilfe eines Unterbrechers mit einer dritten Schleife in das Diagramm geschrieben. Die Auslenkung der Schleife geschah bei 30° Kurbelwinkel vor dem oberen Totpunkt.

Diagramme zeigen die Bilder 18 bis 21. Von diesen zeigen Bild 18 und 19 den unverbleiten Kraftstoff Nr. 2

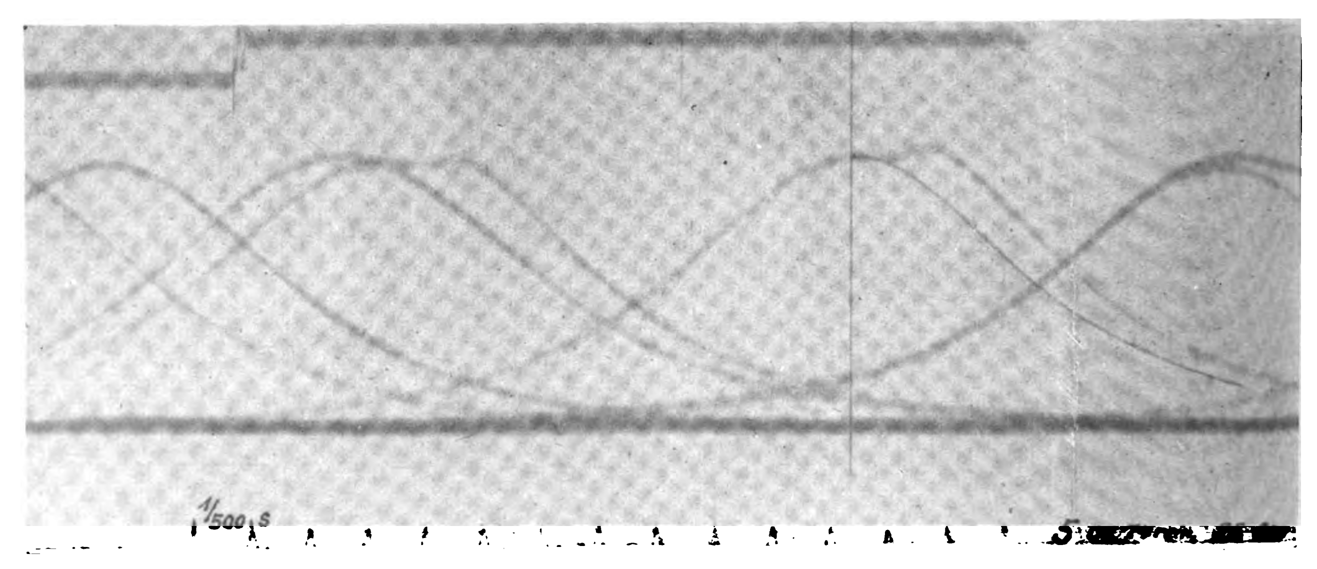


Bild 18. Druck-Zeit-Diagramm für Kraftstoff Nr. 2 (ungebleit, OZ 72).
Drehzahl $n = 900$ U/min,
Verdichtungsverh. $\varepsilon = 5,5$
Brennstoffverh. $\beta = 1,0$
$\Delta t_{GL} = 27°$ C.
In ein Diagramm ist eine Senkrechte durch den ob. Tpkt. gelegt und das Spiegelbild der Kompressionslinie neben die Expansionslinie gezeichnet, so daß man die druckerhöhende Wirkung der Vorreaktionen erkennen kann.

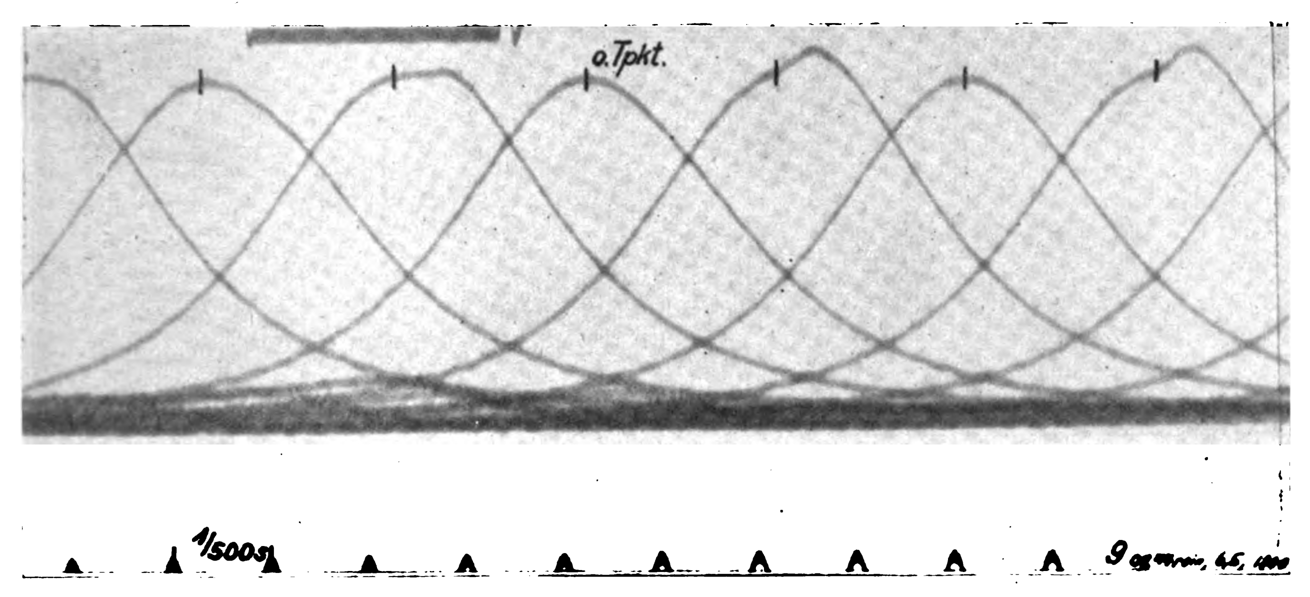


Bild 19. Druck-Zeit-Diagramm für Kraftstoff Nr. 2 (ungebleit, OZ 72).
Drehzahl $n = 1800$ U/min,
Verdichtungsverh. $\varepsilon = 6{,}5$,
Brennstoffverh. $\beta = 1{,}59$,
$\Delta t_L = 50{,}5°$ C.

(OZ 74), und zwar einmal bei $\varepsilon = 5{,}5$ und 900 U/min, Bild 18, und einmal bei $\varepsilon = 6{,}5$ und 1800 U/min, Bild 19. Ein unmittelbarer Einfluß der Drehzahl, d. h. der Zeit auf die Diagrammform läßt sich nicht erkennen. Es wäre denkbar gewesen, daß bei der geringen Drehzahl der sich in den Linien zeigende Buckel schärfer an den oberen Totpunkt herangerückt wäre.

In Bild 18 ist in eine Kurve eine Senkrechte durch die Stelle des oberen Totpunktes gelegt. Diese Gerade müßte die Symmetrieachse der Kurve sein, wenn keine Reaktionen stattfänden. Der durchaus beträchtliche Umfang der Vorreaktionen läßt sich daran gut erkennen.

Das hervorstechendste Ergebnis der Diagramme ist die Erkenntnis, daß sich die einzelnen Arbeitsspiele des Motors in bezug auf den Umfang der Vorreaktionen außerordentlich unterscheiden. Im Durchschnitt finden sich höchstens bei jedem zweiten Arbeitstakt merkliche Vorreaktionen. Bild 19 zeigt mindestens zwei Kurven, bei denen offensichtlich überhaupt keine Vorreaktionen auftreten und eine, bei der sie anscheinend erst auf etwa halbem Kolbenhub auftreten.

Die Verschiedenheiten lassen sich verhältnismäßig zwanglos aus der Annahme erklären, daß von Takt zu Takt verschiedene Mengen (die man sich wahrscheinlich überhaupt als recht klein vorzustellen hat) aktiver Teilchen mit dem Restgas im Zylinder zurückbleiben. Diese beeinflussen und erregen dann mehr oder weniger die Reaktionen im nächsten Spiel. Interessant ist dabei, daß, wenn in einzelnen Fällen eine Temperaturerhöhung des Gemisches von 75° C gemessen wurde, diese Temperaturerhöhung demnach also nur annähernd der Hälfte aller Arbeitsspiele zu verdanken ist. Das bedeutet, daß die Arbeitsspiele, die wesent-

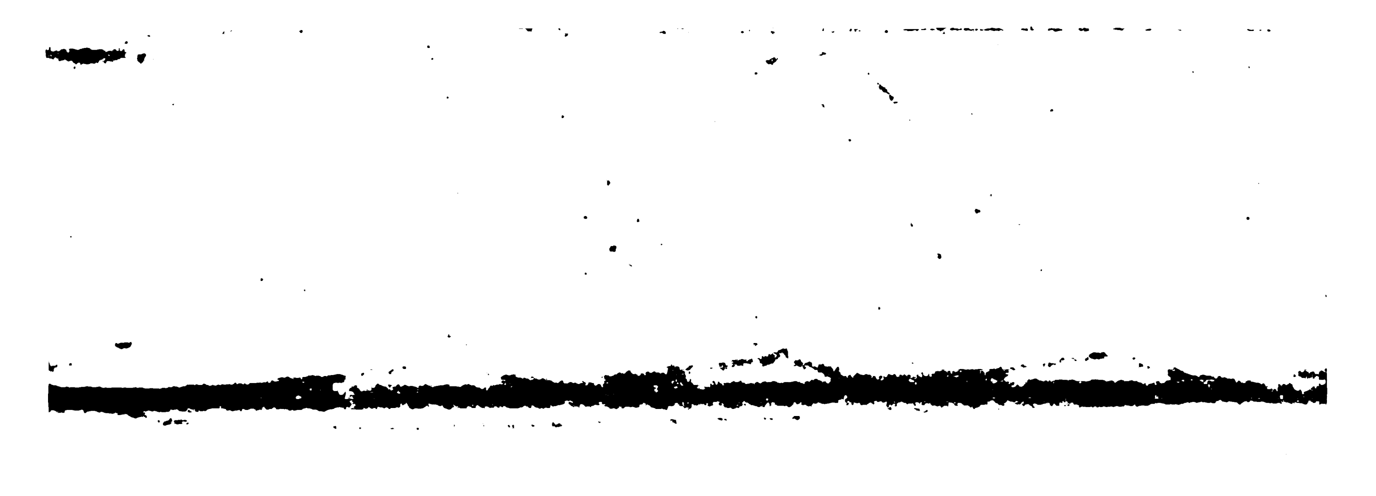


Bild 20. Druck-Zeit-Diagramm für Kraftstoff Nr. 13 (durch Bleizusatz aus Kraftstoff 2 hergestellt, OZ 87,8).
Drehzahl $n = 1800$ U/min,
Verdichtungsverh. $\varepsilon = 6{,}5$,
Brennstoffverh. $\beta = 1{,}4$,
$\Delta t_L = 50°$ C.
Die charakteristischen Buckel in den Expansionslinien der Bilder 18 und 19 sind durch den Bleizusatz verschwunden

Bild 21. Druck-Zeit-Diagramm für Kraftstoff Nr. 3 (gebleit, OZ 87).
Drehzahl . $n = 900$ U/min,
Verdichtungsverh. $\varepsilon = 7{,}5$,
Brennstoffverh. $\beta = 1{,}93$,
$\Delta t_{GL} = 59°$ C.

liche Vorreaktionen ergeben, isoliert sogar Temperaturerhöhungen von etwa 150° C liefern müßten, und auch das ohne Selbstzündungen!

Im allgemeinen zeigen die Bilder übereinstimmend, daß der Energieumsatz der Vorreaktionen sich unmittelbar an den oberen Totpunkt anschließt, d. h. sehr kurz nach dem Augenblick beginnt, in dem die höchste beim Verdichtungstakt auftretende Temperatur erreicht wird. Auch diese Tatsache weist, was ja durch die Versuche insgesamt bestätigt wird, auf eine beträchtliche Temperaturabhängigkeit der Reaktionen hin. Da aber andererseits die Reaktionen durch Expansion abgestoppt werden können, ist der Energieumsatz nach Erreichen der wirksamen Temperatur keineswegs sogleich sehr groß. Verlängerung der Verweilzeit bei der wirksamen Temperatur ergibt aber sehr rasche Zündung. Mit Drehzahl und Verdichtungsverhältnis (d. h. Temperatur) hat man also die Reaktionen recht gut in der Hand und die Gefahr von Selbstzündungen während des Verdichtungstaktes scheint nicht zu bestehen. »Rückschläge« dieser Art sind während der ganzen Versuche auch nicht aufgetreten.

Bild 20 zeigt Diagramme des Kraftstoffes Nr. 13, d. h. denselben Kraftstoff wie Bild 18 und 19, aber versetzt mit Bleitetraäthyl. Bemerkenswerterweise sind die charakteristischen Buckel verschwunden. Die Kompressionslinie geht glatt in die Expansionslinie über.

In Übereinstimmung mit diesem Ergebnis zeigt auch das mit Kraftstoff Nr. 3 (verbleit) aufgenommene Diagramm Bild 21 keine Buckel, obwohl 59° C Temperaturerhöhung gemessen wurden. Während bei bleifreien Kraftstoffen rechts vom oberen Totpunkt unaufhörlich eine kleine runde Spitze auf- und abzuckte, wenn man das Mattscheibenbild betrachtete, war der Linienzug bei gebleiten Benzinen fast völlig ruhig. Nur die Expansionslinie bewegte sich etwas. Bei der unmittelbaren Beobachtung auf der Mattscheibe konnte dieser Unterschied zwischen bleilosen und bleihaltigen Benzinen einwandfrei immer wieder gefunden werden. Trotzdem lassen sich aber mit bleihaltigen Kraftstoffen bei entsprechenden Temperaturen und Verdichtungsverhältnissen völlig die gleichen Temperaturerhöhungen erzielen wie mit bleilosen. Auch beim Versuch, der Bild 20 zugrunde liegt, wurde bei $\beta = 1{,}4$ ein $\Delta t_{GL} = 50°$ C gemessen, also ein durchaus bedeutender Wert, der gut in die Kurve, Bild 12, hineinpaßt.

Diese eigenartige Wirkung des Bleies ist also lediglich mit dem Indikator feststellbar. Das sonstige Verhalten der bleihaltigen Benzine unterschied sich bei den entsprechenden Verdichtungsverhältnissen (die im ganzen höher liegen) vor allem bezüglich Temperaturerhöhung und Selbstzündungsverhalten in keiner Weise von dem ungebleiter Benzine.

Selbstverständlich müssen die Diagramme der gebleiten Benzine an sich eine Ausweitung der Expansionslinie zeigen. Das Gegenteil wäre unmöglich, da Gase bei gleichem Volumen nur bei Temperaturerhöhung einen größeren Druck ausüben können. Leider reicht die Genauigkeit der Diagramme und auch die der Totpunktmarke nicht aus, um diese Ausweitung rechnerisch zu verfolgen.

Für Bild 19 wurde mit $\beta = 1{,}60$, $\varepsilon = 6{,}5$ und den allgemein angewendeten Ventilsteuerzeiten (d. h. mit ε_w) der Druck- und der Temperaturverlauf ohne Berücksichtigung der Wärmeverluste rechnerisch ermittelt. Das Ergebnis zeigt Bild 22. Man erkennt hieraus, daß die Maximaltemperatur rasch erreicht wird und ziemlich schnell wieder absinkt. Jedenfalls bleibt die Höchsttemperatur mit einer Annäherung, wie sie für die Betrachtung chemischer Reaktionen notwendig ist, nur etwa auf 15° Kurbelwinkel oder bei einer Drehzahl von 1800 U/min, wie sie Bild 22 und dem daran angebrachten Zeitmaßstab zugrunde liegt, auf etwa $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ s erhalten. Man kann annehmen, daß die Reaktionen, die etwa bereits vor Erreichen des oberen Totpunkts beginnen, zu vernachlässigen sind.

Bild 23 zeigt eine Umzeichnung des dritten Diagramms von rechts, Bild 19, in Druck-Kolbenwegdarstellung. Es zeigt sich, daß die Druckzunahme durch die Vorreaktionen auch in dieser Darstellung durchaus wesentlich ist. Sie entspricht etwa dem Druck-Kolbenwegdiagramm eines Motors, der mit sehr kleiner Last läuft. Besonders anschaulich zeigt diese Darstellung, daß die Druckzunahme keineswegs, etwa wie es bei einer ausgesprochenen Spätzündung im Motor der Fall zu sein pflegt, erst wesentlich nach dem oberen Totpunkt einsetzt.

7. Messung des Drehmomentes.

Diese Indikatordiagramme machen die Tatsache verständlich, daß beim Betrieb des Motors das Freiwerden merklicher Energie auch durch die Verminderung des Drehmomentes festgestellt werden konnte, das zum Antrieb des Motors notwendig ist. Bezeichnet ΔMd das Differenzdrehmoment zwischen dem Betrieb mit reiner Luft und dem Drehmoment bei Gemischantrieb, so kann man feststellen, daß diese Differenz im allgemeinen durchaus der beobachteten Temperaturdifferenz Δt_{GL} proportional war. Bild 24 zeigt das Differenzdrehmoment (in kg des am Hebelarm des Pendelmotors angehängten Gewichtes) für Verhältnisse des Bildes 5. Für $\varepsilon = 6{,}5$ ist die Ordinate auch im absoluten Drehmoment Md geteilt. Diese Teilung gilt genau nur für die Kurve mit $\varepsilon = 6{,}5$.

Beim Vergleich von Bild 24 und 5 sieht man, daß die Darstellung des Differenzdrehmomentes im wesentlichen ein Spiegelbild der Temperaturdifferenzen ist. Insbesondere zeigt

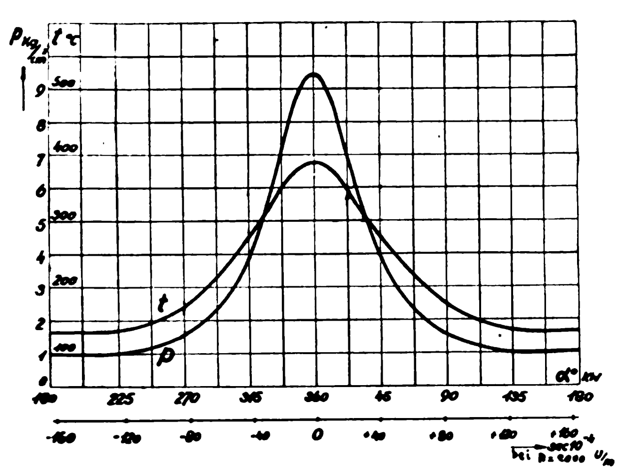


Bild 22. Druck und Temperatur für die Verhältnisse des Bildes 19 (3. Diagr. v. r.) rechn. ermittelt bei $n = 1800$ U/min. Druck-Zeit-, Temp.-Zeit-Diagramm, Steuerzeiten s. Text. $\varepsilon = 6{,}5$, $\beta = 1{,}59 \sim 1{,}60$.

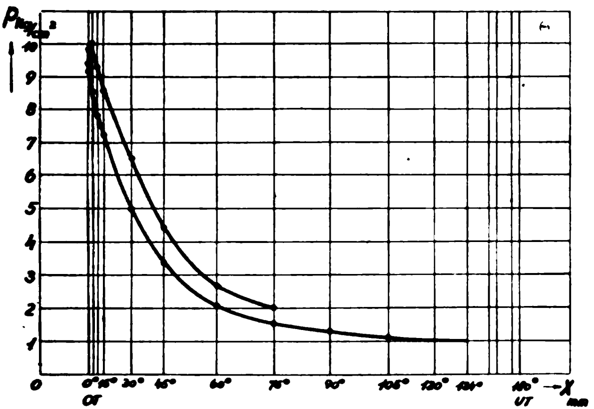


Bild 23. Druck-Kolbenwegdarstellung des 3. Diagramms v. r. des Bildes 19.

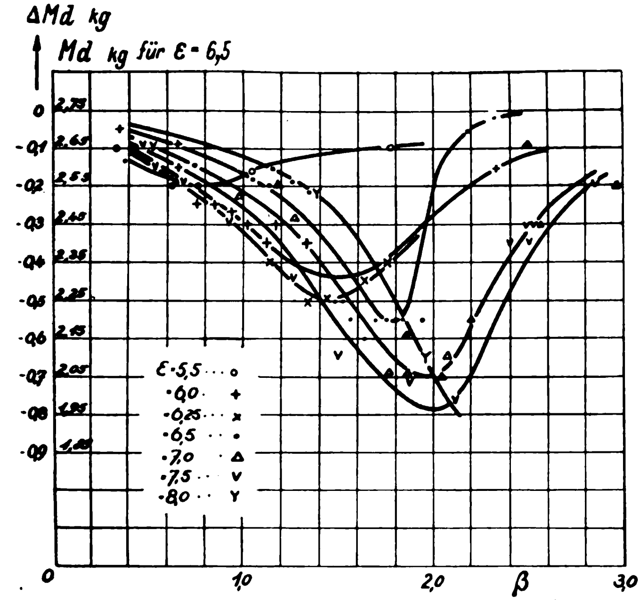


Bild 24. Darstellung des freiwerdenden Drehmomentes (ΔMd) über β für die Verhältnisse des Bildes 5.
Kraftstoff 3 (OZ 87).
$\Delta Md = f(\beta)$
$n = 1800$ U/min,
$t_{0*} = 140°$ C,
$t_K = 140°$ C.

das Drehmoment an derselben Stelle ein Minimum, wo die Temperaturdifferenz ein Maximum hat. Auch hier ist zu sagen, daß Peletier [10], der eine derartige Drehmomentskurve bei einem Verdichtungsverhältnis für einen Brennstoff gemessen hat, keineswegs ein allgemeingültiges Resultat gefunden hat.

8. Chemische Analyse, Leuchterscheinungen.

Bei einem Versuch (Verwendung von Kraftstoff Nr. 3) wurde ein Teil des Auslasses abgesaugt und in mit flüssiger Luft gekühlte Fallen geleitet. Die von G. Damköhler und W. Eggersglüß durchgeführte chemische Analyse des aufgefangenen Gemisches ergab je mol Kraftstoff (als n-Heptan gerechnet) etwa 0,141 mol Aldehyde, 0,024 mol Säuren, 0,05 mol Alkohole, 0,001 mol Peroxyde. An Kohlensäure wurden 0,045 mol, an Wasser 1,1 mol gefunden. Von den Aldehyden bestanden 0,084 mol aus Formaldehyd. Ein ausführlicher Bericht findet sich in [25].

Bei sämtlichen Versuchen war der scharfe, kennzeichnende Geruch der Auspuffgase bemerkenswert. Die Auspuffleitung bedeckte sich innen rasch mit einer braunen, ölartigen Schmiere, doch ist durch Kontrollversuche nachgewiesen, daß dies nicht einfache Ablagerungen von Schmieröl waren. Es wurde auch untersucht, ob das Schmieröl selbst einen direkten Einfluß auf die Vorreaktionen hat, da es denkbar wäre, daß das Öl eine größere Reaktionsfreudigkeit als der Kraftstoff hat. Versuche, bei denen der Motor bald mit sehr wenig Öl, bald mit außergewöhnlich viel Öl gefahren wurde, zeigten aber keinen Einfluß.

Leuchterscheinungen konnten durch das eingebaute Quarzfenster nur ein einziges Mal festgestellt werden.

Ein Sonderkraftstoff[13]), der als Zündbeschleuniger für Dieselkraftstoffe verwendet wird und eine Oktanzahl von weit unter Null hat, ließ als einziger bei $\varepsilon = 5{,}0$, Einlaßtemperatur $t_{0_e} = 110°$ C[14]) und sehr starken Vorreaktionen ein bläuliches Leuchten im Zylinder erkennen, wie es schon Peletier beobachtet hat [10]. Gleichzeitig war der Auspuffgeruch bei diesem Kraftstoff so scharf riechend wie sonst nicht.

IV. Folgerungen aus den Motorversuchen.

Die Versuche sollten einen Überblick geben über den Umfang der Vorreaktionen im Ottomotor, insbesondere über ihre Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis und den Motorbetriebsbedingungen. Allerdings sind sie nicht vollständig. Es fehlen Versuche insbesondere bei niederen Ausgangstemperaturen und dafür höheren Verdichtungsverhältnissen sowie mit anderen Kraftstoffen. Zunächst scheint es fruchtbar zu sein, besonders auch Kraftstoffe von sehr niedriger Oktanzahl zu untersuchen, worauf das besondere Verhalten des Zündbeschleunigers hinweist.

Darüber hinaus dürfte es zweckmäßig sein, besonders chemisch reine Stoffe zu untersuchen, da nur damit wirklich einwandfreie Ergebnisse erzielt werden können. Die Isolierung der einzelnen Einflüsse von Aromaten, Olefinen, Paraffinen usw. dürfte jedenfalls nur auf diese Weise möglich sein.

Im ganzen gibt es noch eine Fülle von Möglichkeiten, die mit dem hier angewendeten Verfahren untersucht werden könnten. Nun werden aber besonders reine Stoffe oft sehr teuer sein und nicht in den Mengen zur Verfügung stehen, die bei dem hier angewendeten Versuchsmotor notwendig sind (etwa 20 l je Kurve, etwa 150 l für ein vollständiges Kurvenblatt). Es soll deswegen ein kleiner Motor besonders für solche Versuche gebaut werden.

Das Hauptgewicht weiterer Untersuchungen sollte vor allem auf chemischen Untersuchungen der Reaktionsprodukte reiner Stoffe liegen, wozu Versuche in der hier durchgeführten Art im Gegensatz zu Verbrennungsbomben besonders geeignet sind, da sich die Oxydationsprodukte anreichern lassen. Voraussetzung dürften aber genaue Analysenmethoden sein.

Ursprünglich bestand, wenn auch von vornherein in zweiter Linie, die Absicht, das Verfahren zur Bestimmung der Oktanzahlen von Kraftstoffen zu verwenden. Das über-

[13]) Überwiegend paraffinisch mit langen, unverzweigten Ketten.
[14]) Also 30° C weniger als bei den sonstigen Versuchen.

raschende Verhalten einzelner Kraftstoffe, anscheinend besonders der Aromaten und Paraffine, erschwert das. Andererseits hat sich gezeigt, daß die Temperaturerhöhung des Gemisches infolge der Vorreaktionen im ganzen gesehen sehr stark von der Oktanzahl abhängt. Insbesondere trifft das auf Kraftstoffe mit sehr niedriger Oktanzahl zu sowie für einzelne Bereiche, wie beispielsweise das Gebiet der handelsüblichen Fliegerkraftstoffe, wo sehr geringe Oktanzahlunterschiede sehr merklich andere Temperaturdifferenzen ergaben. Es ist deswegen nicht ausgeschlossen, daß das Verfahren doch einmal unter gewissen, noch festzustellenden Voraussetzungen unmittelbar zur Bestimmung der Oktanzahl verwendet werden kann. Es würde sich dann, verglichen mit dem bisherigen Verfahren am Klopfprüfmotor, der Vorteil ergeben, daß der Springstiftindikator, der stets eine Quelle der Unsicherheit ist, vermieden wird und die Oktanzahl gewissermaßen direkt mit dem Thermometer gemessen werden kann. Soweit störende Einflüsse vermieden wären, könnte die Genauigkeit hervorragend sein.

V. Zusammenfassung.

Es wird ein Verfahren zur Untersuchung der Vorreaktionen im Ottomotor beschrieben, bei dem Kraftstoff-Luftgemisch durch einen fremd angetriebenen Motor gesaugt wird. Infolge von Reaktionen im Verbrennungsraum, die ohne Entzündung vor sich gehen, entsteht eine Temperatursteigerung des Gemisches, die neben anderen Wirkungen gemessen wird. Diese Temperatursteigerung ist stark abhängig vom Mischungsverhältnis, von der Kraftstoffart — insbesondere von deren Oktanzahl — sowie von den Betriebsbedingungen, insbesondere den Temperaturverhältnissen. Die Ergebnisse werden in Kurvenblättern dargestellt. Die mögliche Weiterentwicklung des Prüfverfahrens wird untersucht.

VI. Schrifttumsverzeichnis.

[1] Physikalische und chemische Vorgänge bei der Verbrennung im Motor. Vorträge 5. öff. Sitzg. Dtsch. Akad. Luftf.-Forschg. 10./11. Mai 1939. — Schr. Dtsch. Akad. Luftf.-Forschg. H. 9.

[2] E. Schmidt, Über das Klopfen und die damit verbundene Verminderung des Wirkungsgrades von Ottomotoren. Schr. Dtsch. Akad. Luftf.-Forschg. H. 9, S. 215/230.

[3] A. Eucken, Grundsätzliches über den Zerfallmechanismus einfacher Kohlenwasserstoffe. Schr. Dtsch. Akad. Luftf.-Forschg. H. 9, S. 93/112.

[4] W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen. Berlin, Springer, 1939.

[5] C. G. Egerton, Das Klopfen und die Kohlenwasserstoffverbrennung. Schr. Akad. Luftf.-Forschg. H. 9, S. 173/182.

[6] T. A. Boyd, Untersuchungen über die Flamme im Motor. Autom. techn. Z. Bd. 43 (1940) H. 3 S. 51/62.

[7] C. G. Egerton, Smith und Ubbelohde, Phil. Trans. Roy. Lond. A 234. (1935) S. 433.

[8] Withrow und Raßweiler, Ind. Engin. Chem. Bd. 25 (1933) S. 1359, Bd. 26 (1934) S. 1256, Bd. 27 (1935) S. 872 (Ind. Edit.).

[9] I. I. Broeze, H. van Driel und L. A. Peletier, Betrachtungen über den Klopfvorgang im Ottomotor. Schr. Dtsch. Akad. Luftf.-Forschg. H. 9, S. 187/208.

[10] L. A. Peletier, S. G. van Hoogstraten, I. Smittenberg, L. P. Kooymann, Reactions chimiques préalables dans un moteur à essence. Chal. et Ind. Bd. 20 (1939) S. 120/125.

[11] K. O. Müller, Stand der experimentellen und wissenschaftlichen Kenntnisse der Oxydation von Kohlenwasserstoffen und des Phänomens des Klopfens in den Verbrennungsmotoren. Autom. techn. Z. Bd. 35 (1932) S. 597/600.

[12] C. R. Mondain-Monval, Akad. Sci. Bd. 189 (1929) S. 1195 und Bd. 191 (1930) S. 299.

[13] H. Ernst, Über die Prüfung von Dieselkraftstoffen. Autom. techn. Z. Bd. 42 (1939) Nr. 8, S. 213/221.

[14] P. Schmidt, FKFS-Kraftstoff-Versuchsanlage. Neue Kraftf.-Z. Bd. 13 (1938) H. 4, S. 79/80.

[15] E. Mühlner, Luftverhältnis,Brennstoffverhältnis, Verdichtungszahl. Autom. techn. Z. Bd. 44 (1941) H. 3, S. 52/53.

[16] W. Jost, Reaktionskinetische Untersuchungen zum Klopfvorgang. Z. Elektrochem. Bd. 47 (1941) Nr. 3, S. 262.

[17] H. Teichmann, Reaktionskinetische Untersuchungen zum Klopfvorgang II. Z. Elektrochem. Bd. 47 (1941) Nr. 4, S. 297.

[18] G. Damköhler, Gasbewegung in einem geschlossenen Verbrennungsraum bei einseitiger Zündung. Jb. 1938, dtsch. Luftf.-Forschg. S. II 62/75.

[19] W. Jost und v. Müffling, Reaktionskinetische Betrachtungen zum Klopfvorgang im Motor. Z. Elektrochem. Bd. 45 (1939) Nr. 1, S. 93/100.

[20] W. Jost und Rögener, Reaktionskinetische Untersuchungen zum Klopfvorgang III. Z. Elektrochem. Bd. 47 (1941) Nr. 4, S. 307.

[21] Egerton, Smith und Ubbelohde, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Bd. 234 (1935) S. 433/521.

[22] Ubbelohde, A. R. Drinkwater, A. Egerton, Proc. Roy. Soc. Lond. A. Bd. 153 (1936) S. 103.

[23] W. Jost, Die physikalisch-chemischen Grundlagen der Verbrennung im Motor. Motor und Kraftstoff, VDI-Verlag, Berlin 1939, S. 50/58.

[24] Pye, Die Brennkraftmaschinen. Berlin, Springer, 1933.

[25] G. Damköhler und W. Eggerglüss, Reaktionsprodukte eines im Motor kurzseitig komprimierten aber nicht gezündeten Benzin-Luft-Gemisches. Z. phys. Chem. (B) Bd. 51 (1942) S. 157/186.

Die Reibungswärme in Strömungsmaschinen*).

Von O. Pabst, Bremen.

Das Verhalten der Reibungswärme in Strömungsmaschinen ist schon Gegenstand vieler Untersuchungen gewesen. Meist beschränken sich solche Bearbeitungen auf einzelne Maschinenarten, ohne daß es beabsichtigt wäre, außer einigen Koeffizienten zur Angleichung theoretischer Untersuchungen an die Wirklichkeit unmittelbar allgemeingültige Beziehungen aufzudecken. Es ist jedoch für die Beurteilung von konstruktiven und auslegungsmäßigen Maßnahmen sehr wünschenswert, allgemeine Maßstäbe zu besitzen. Im folgenden wird durch Überlegungen zur physikalischen Natur der Reibung in der Strömung versucht, einige Beurteilungsgrundlagen zu ermitteln.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Ermittlung von Zuständsänderungen, der Leistung und der Wirkungsgrade von Strömungsmaschinen geschieht im allgemeinen auf Grund von Erfahrungen und Versuchen, die stark auf die jeweils betrachtete Maschine zugeschnitten sind. Der hauptsächliche Faktor, der diese Erfahrungen nötig macht, sind die in den Maschinen auftretenden Verluste infolge der inneren Reibung des Strömungsmittels. Die Vielfalt der Form, unter der Reibungseinflüsse auftreten, bedeutet für eine Übertragung der Erfahrung auf andere Maschinenformen immer einen Schritt ins Ungewisse. Um die Erfahrung nutzbringend verwerten zu können, ist ein Eingehen auf die genauen physikalischen Vorgänge bei der reibenden Strömung notwendig. Bei Zustandsänderungen strömender Gase ist bekannt, daß Vorgänge, bei denen sich die Gasdichte nur wenig ändert, behandelt werden können, als wenn es sich um die Strömung einer tropfbaren Flüssigkeit handelte. Man spricht dann von inkompressibler Strömung im Gegensatz zur kompressiblen Strömung von Gasen, bei denen eine beachtliche Änderung der Dichte vorhanden ist. Die inkompressible Strömung ist wesentlich einfacher zu untersuchen. Außerdem sind schon sehr viele Ergebnisse solcher Untersuchungen vorhanden. In den Strömungsmaschinen lassen sich nun häufig die an sich stark kompressiblen Gesamterscheinungen aufteilen in eine Summe nicht oder nur wenig kompressibler Vorgänge, die einzeln unseren Berechnungen zugänglich sind. Bei geschickter Zusammenfügung solcher sicher zu erfassender Einzelvorgänge läßt sich dann der stark kompressible Gesamtvorgang gut wiedergeben. Dieses Summieren wird aber dadurch erschwert, daß die Reibung infolge ihrer Eigenschaft in Wärme überzugehen von dem Einzelteil noch einen Einfluß auf die Gesamtanlage mitbringt. Bei der inkompressiblen Flüssigkeit findet man eine solche Eigenschaft nur insofern, als gelegentlich die Durchflußmenge infolge starker Abweichungen von der besten Strömungsform, wie Abreißerscheinungen und ähnlichem, beeinflußt wird. Ähnlich starke Abweichungen im kompressiblen Gebiet finden wir im Auftreten von stoßartiger Verdichtung, nach dem in der Maschine irgendwo die örtliche im Gas herrschende Schallgeschwindigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit überschritten wurde. Dieser Vorgang läßt sich durch Aufteilen auf nicht kompressible Summanden nicht behandeln, da hier eine andere Strömungsform auftritt. Im folgenden denken wir also immer an Vorgänge, die mit inkompressiblen Strömungen in ihren Einzelheiten noch mechanisch ähnlich verlaufen. Denn nur dann können wir erwarten, daß die Reibungsgrößen sich ebenfalls ähnlich verhalten. Es ist also wesentlich, für eine bestimmte Maschine festzustellen, ob keine überkritischen, d. h. in diesem Falle Überschallgeschwindigkeiten auftreten. Diese Aufgabe kann durch Ermittlung der inkompressiblen Geschwindigkeiten in einem der angeführten Teilstücke meist gelöst werden.

II. Die Energieformen bei reibender Strömung.

Mechanische Energie kann unter den Formen potentieller, kinetischer und Wärme-Energie auftreten. Bei den Gasen lehrt uns die kinetische Gastheorie, daß auch der Druck als potentielle Energieform und die Wärme genau genommen eine Form der kinetischen oder Bewegungsenergie darstellen. Trotzdem sehen wir beide als eine besondere Energieform an. Nun teilt sich aber vom Strömungsstandpunkt gesehen auch die eigentliche kinetische Energie auf in eine geordnete Bewegung translatorischer oder drehender Art und in eine chaotische Schwingungs- und Drehbewegung, die Turbulenz. Diese letzte hat mit der Wärme eine gewisse Ähnlichkeit insofern, als sie wie die regellose Bewegung der Molekel bei der Wärme eine regellose Bewegung größerer Materialballen darstellt. Es sind auch grundsätzliche Unterschiede vorhanden. Während bei der Wärmebewegung der Moleküle das Molekül an sich vollkommen in freier Bewegung ist und nur durch Zusammenprall mit anderen Molekülen nach Zurücklegen der freien Weglänge in seiner Bahn und Geschwindigkeit beeinflußt wird, unterliegt die Turbulenz noch der Kontinuitätsbedingung und der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichung. Das bedeutet eine wesentlich stärkere Kopplung der Materialballen als dies bei den Molekeln der Fall ist. Die rechnerische Behandlung der Turbulenz ist nur mit Mitteln der Statistik möglich, ebenso wie bei der kinetischen Gastheorie. Die Kopplung durch die schon angeführten Bedingungen kompliziert aber die Rechnung sehr. Bisher ist noch keine einwandfreie Ermittlung des Überganges von Turbulenz in Wärme möglich. Es fehlt noch an einem physikalischen Prinzip, das die letzte Verbindung der inzwischen bekannten Beziehungen vermittelt [1]. Für die einfache isotrope Form der Turbulenz, die dadurch gekennzeichnet ist, daß im Mittel die turbulente Geschwindigkeitsschwankung in allen Punkten nach allen Richtungen den gleichen Wert hat, sind mittels plausibler Annahmen Rechnungen über das Abklingen der Turbulenz möglich [1; 2].

Die Verluste in Strömungsmaschinen treten in den verschiedenen Formen der Energie auf. Häufig bestehen alle Formen gleichzeitig nebeneinander. Betrachtet man z. B. die Strömung mit Reibung hinter einem Kreiszylinder, so hat man in einem Schnitt dicht hinter dem Zylinder die Verlustenergie fast ganz in Form von Unterdruck. Geht man etwas weiter stromabwärts, so hat sich ein Teil in kinetische geordnete Energie, ein Teil durch den Mischvorgang mit der verlustfreien Strömung in Turbulenz und wohl zum Teil schon in Wärme verwandelt. Noch weiter stromabwärts ist die Druckenergie gänzlich verschwunden

*) A 35 5.

und nur noch geordnete kinetische Energie, Turbulenz und Wärme vorhanden, schließlich finden wir nur noch Turbulenz, die nun schon als isotrop angesehen werden kann, und Wärme. Ganz weit hinten ist dann die Turbulenz auch abgeklungen und nur noch fühlbare Wärme vorhanden. Die Trennung der einzelnen Bestandteile ist nicht immer einfach. Druckenergie und kinetische geordnete Energie können wir mittels der Bernoullischen Gleichung trennen. Die Trennung beider von der Turbulenz und Wärme gelingt durch den Vergleich des Impuls- und des Energiegehaltes. Die Aufteilung der beiden letzten, Turbulenz und Wärme ist, wie schon angeführt, bisher nur bei der isotropen Form gelungen. Dabei ist festgestellt, daß die Neigung, aus Turbulenz in Wärme überzugehen um so größer ist, je kleiner die Turbulenzballen sind [1]. Es liegt vorläufig kein Grund vor, diese Tendenz für andere Turbulenzformen zu verneinen. Je kleiner also die Turbulenzballen bei ihrer Entstehung sind, um so rascher wird die Umwandlung in Wärme vollzogen sein. Bei einem Widerstandskörper, wie er z. B. der Zylinder darstellt, müssen zuerst die verschiedenen Energieformen durchlaufen werden; die entstehenden Turbulenzballen sind zuerst in Abmessungen vorhanden, die dem Zylinderdurchmesser vergleichbar sind. Die Auflösung in feinere Turbulenz bedarf der Zeit, deren Maßstab in diesem Fall die Entfernung hinter dem Zylinder ist. Beim Kreiszylinder ist erst nach etwa 4 Zylinderdurchmessern der größte Teil der Verlustenergie in Turbulenz überführt. Der Übergang in Wärme liegt also noch weiter stromabwärts. Anders bei Körpern und Wänden mit nicht abgerissener Strömung. Hier wird die Verlustenergie schon an der Körperberandung großenteils in Turbulenz sehr feiner Struktur umgesetzt, die rasch in Wärme übergeht. Man kann daher annehmen, daß bei solchen Widerstandskörpern die Verlustleistung schon kurz hinter dem Körper in Wärme umgesetzt ist, so daß bei lang gestreckten Körpern schon in der Grenzschicht selbst ein großer Teil Wärme entsteht. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Brandungen dicht beieinander liegen, da dann die Grenzschicht sich über den ganzen Querschnitt erstreckt. Die noch verbleibende Turbulenz ist geeignet, die Wärme schnellstens über den ganzen Querschnitt auszubreiten. Es ist nun wesentlich zu untersuchen, welchen Einfluß thermodynamisch die so entstehende Reibungswärme auf die Zustandsänderungen in den Strömungsmaschinen hat.

III. Die Zustandsänderungen unter dem Einfluß der Reibung.

Eine rasche Entscheidung über die Natur der Zustandsänderung mit Reibung erlaubt der erste Hauptsatz der Thermodynamik, den wir hier in seiner differentialen Form verwenden.

$$dQ = di - \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Darin ist Q die zugeführte Wärme, i der Wärmeinhalt des Gases, P der absolute Druck und ϱ die Dichte des Gases. A ist das reziproke mechanische Wärmeäquivalent und $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, die Erdbeschleunigung. Wir setzen in unserer betrachteten Maschine stationären Zustand voraus. Greifen wir nun ein Element mitten in der Maschine heraus, so können wir auf Grund unserer früheren Überlegung annehmen, daß die Reibungswärme der mechanischen Arbeit des Gases verhältig ist. Im reibungslosen Fall ohne Wärmezufuhr ist

$$di = \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Also die Änderung des Wärmeinhalts ist gerade gleich der mechanischen Arbeit. Bei Strömungsvorgängen drückt sich die mechanische Arbeit immer in der Geschwindigkeit des Strömungsmittels aus. Aus der erweiterten Bernoullischen Gleichung

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dP}{\varrho} = \text{konst.}$$

ersehen wir, daß die in (2) gefundene Größe mit dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit w verbunden ist. Nun sind aber bekanntlich die Reibungsverluste ebenfalls dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit verhältig. Nach den Überlegungen in Abschnitt II können wir also bei Strömungsvorgängen, die in mehreren gleichartigen Folgen hintereinander liegen, bei einem mitten herausgegriffenen Teil erwarten, daß die Wärmezufuhr durch die auftretende Reibung die gleiche Abhängigkeit zeigt wie die Strömungsverluste selbst. Wir können daher, unter der Voraussetzung, daß unsere Zustandsänderung sich von der Adiabate nicht zu weit entfernt, was bei guten Wirkungsgraden immer zutrifft, die Reibungsleistung der umgesetzten Leistung[1]) proportional setzen (Proportionalitätskonstante Θ):

$$L_v = \Theta \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} = |dQ| \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Bei der Einführung dieser Größe in den I. Hauptsatz ist zu bedenken, daß die Reibungswärme immer als zugeführte Wärme anzusehen ist, während di und dP je nachdem, ob es sich um einen Entspannungs- oder Verdichtungsvorgang handelt, negativ bzw. positiv ist. Unter Beachtung dieses Umstandes erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &\text{Entspanner} \quad -\Theta \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} = di - \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \\ &\text{Verdichter} \quad \Theta \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} = di - \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Es wird also

$$di = (1 \mp \Theta)\frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Das Differential des Wärmeinhaltes ist aber bekannt zu

$$di = c_p\, dT$$

mit c_p, der spezifischen Wärme bei festgehaltenem Druck, und T, der absoluten Temperatur. Nehmen wir noch die Gasgleichung hinzu

$$\frac{P}{\varrho} = g R T$$

mit der Gaskonstanten R und bilden uns die differentiale Form

$$\frac{dP}{\varrho} - \frac{P}{\varrho^2}d\varrho = g R\, dT$$

so finden wir

$$di = \frac{c_p}{gR}\left(\frac{dP}{\varrho} - \frac{P}{\varrho^2}d\varrho\right) = (1 \mp \Theta)\frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} \quad \ldots (6)$$

Wir entnehmen noch der Thermodynamik die Beziehung

$$A R = c_p - c_v \qquad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}$$

mit c_v der spezifischen Wärme bei festgehaltener Dichte. Führen wir dies in (6) ein, so ergibt sich

$$\left[(1 \mp \Theta)\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} - 1\right]\frac{dP}{P} = -\frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Die Integration ergibt

$$P \varrho^{-\frac{\varkappa}{\varkappa - (1 \mp \Theta)(\varkappa - 1)}} = \frac{P}{\varrho^n} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots (8)$$

mit

$$n = \frac{\varkappa}{\varkappa - (1 \mp \Theta)(\varkappa - 1)} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Wir erhalten also eine Zustandsänderung entlang einer Polytropen, deren Exponent uns nun bereits weitgehend bekannt ist.

Der Wirkungsgrad einer Turbine gibt uns an, wieviel von der im Gas oder Dampf vorhandenen Leistung mechanisch nutzbar wird. Die Differenz $1 - \eta$ gibt also den Verlust an Gasleistung an, der infolge der Reibungserscheinungen entstanden ist. Voraussetzung ist dabei, daß die

[1]) Da die Arbeit bei Strömungsvorgängen immer auf die Sekunde bezogen ist, entspricht sie einer Leistung.

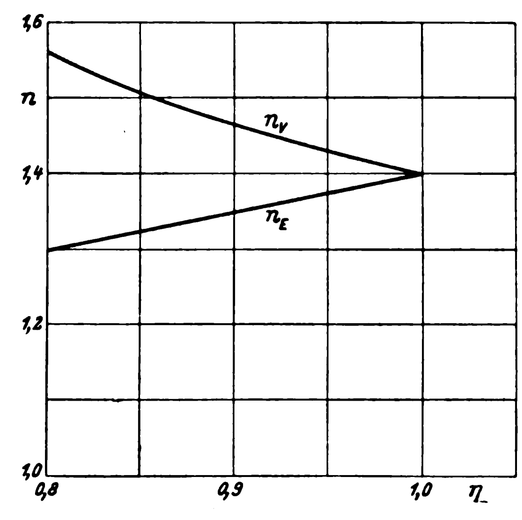


Bild 1. Exponent der Polytropen ($\varkappa = 1{,}40$).

Berandungen der Strömungsräume nicht gekühlt sind. Bei der Turbine ist also

$$\Theta_E = 1 - \eta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

Beim Verdichter wird die verlustlose Gasarbeit gegeben sein durch $\frac{1}{\eta}$. Setzen wir davon 1 ab, so erhalten wir die infolge Reibung entstandenen Verluste. Man kann auch sagen: Da die Definitionen der Wirkungsgrade von Entspanner und Verdichter reziprok sind, ergibt sich entsprechend (10)

$$\Theta_V = \frac{1}{\eta} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

Mit diesen Werten gehen wir in den Exponenten (9) der Polytrope und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \text{Entspanner} \quad n_E &= \frac{\varkappa}{\varkappa - \eta(\varkappa - 1)} \\ \text{Verdichter} \quad n_V &= \frac{\varkappa}{\varkappa - \frac{1}{\eta}(\varkappa - 1)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (12)$$

In Bild 1 ist die Abhängigkeit von n_E und n_V von dem örtlichen Wirkungsgrad η für Luft ($\varkappa = 1{,}40$) dargestellt. Der Exponent für die Turbine nähert sich mit fallendem η langsam der Isotherme, die er mit $\eta = 0$ erreicht. Anders der Verdichterexponent. Er wächst über den adiabatischen hinaus, um bei $\eta = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 0{,}286$ den Wert ∞ zu erreichen. In diesem Falle ist ϱ unveränderlich. Es ist aber zu bedenken, daß wir bei der Ableitung vorausgesetzt haben, daß die Vorgänge sich fast adiabatisch abspielen sollen. Dies ist jedoch nur erfüllt, wenn η nicht zu stark von 1 abweicht. Die Kurven sind daher nur bis $\eta = 0{,}8$ gezeichnet.

Wir erhalten für die Berechnungen ein brauchbares Ergebnis, wenn wir noch den II. Hauptsatz der Thermodynamik heranziehen

$$dQ = T\,ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Darin ist s die Entropie

$$\left.\begin{aligned} \mp \Theta \frac{A}{g}\frac{dP}{\varrho} &= T\,ds = \frac{P}{\varrho}\frac{ds}{gR} \\ \mp \Theta A R \frac{dP}{P} &= ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots (14)$$

Integrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \Delta s &= \mp \Theta (c_p - c_v) \ln \frac{P_2}{P_1} \\ &= \mp \Theta \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} c_p \ln \frac{P}{P_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (15)$$

Mit

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

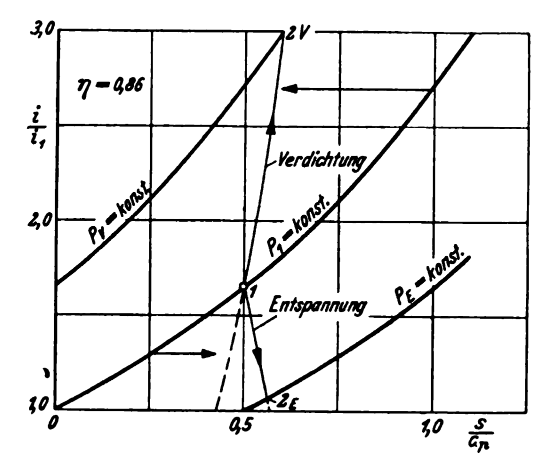


Bild 2. Zustandsänderungen im i-s-Diagramm.

und $\Theta = f(\eta)$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \text{Entspanner} \quad \Delta s_E &= -\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \\ \text{Verdichter} \quad \Delta s_V &= (1 - \eta)\, c_p \ln \frac{T}{T_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

Die Zustandskurve für Verdichtung entspricht also im T—s- oder auch im i—s-Diagramm dem Verlauf einer Linie p = konst., bei der alle Abszissen um den Faktor $(1 - \eta)$ verkürzt sind. Bei der Entspannung wird eine Verkürzung um $\frac{1}{\eta} - 1$ vorgenommen. Außerdem bedeutet das negative Vorzeichen, daß die versteilerte Linie p = konst. an der Adiabate durch den Ausgangspunkt 1 zu spiegeln ist. In Bild 2 sind Beispiele der Darstellung im i-s-Diagramm gegeben. Der Verlauf der Zustandskurven für Dämpfe im Mollier-Diagramm kann in ähnlicher Weise gefunden werden, indem für $\varkappa$ geeignete Mittelwerte von $\frac{c_p}{c_v}$ eingesetzt werden.

IV. Einfluß des Stufenwirkungsgrades auf den Gesamtwirkungsgrad.

Mit der Gewinnung des Exponenten n läßt sich in einfacher Weise der Gesamtwirkungsgrad einer Strömungsmaschine bestimmen. Aus den Überlegungen in Abschnitt II über den Übergangsmechanismus der Verluste in Wärme können wir einige Folgerungen für den Gesamtwirkungsgrad ziehen. Teilt man die Förderhöhe bzw. das Gefälle einer Strömungsmaschine in Stufen etwa gleicher Leistung ein, so ist im mittleren Bereich der Zusatz von Wärme nach Gleichung (3) gesichert. Dieser gültige Bereich erstreckt sich bis zum Ende der Maschine, da hier überall ein stationärer Übergang der Verluste in Wärme vorhanden ist. Denn der fehlende Betrag an Verlustwärme der Stufe selbst wird ja durch die Restturbulenz davorliegender Stufen gedeckt. So läuft durch die Maschine das Strömungsmittel mit einem bestimmten Turbulenzspiegel. Lediglich die ersten Stufen enthalten geringere Turbulenzen und damit innerhalb der Stufe geringere Wärmezufuhr. Damit wird aber in diesen Stufen der Wirkungsgrad etwas näher an η liegen. Das bedeutet, daß bei der Turbine die ersten Stufen etwas ungünstiger und beim Gebläse etwas günstiger arbeiten. Rechnen wir also mit dem gleichen Exponenten wie im übrigen Teil, so stellt η_{ges}[2]) bei der Turbine eine obere, beim Gebläse eine untere Grenze des Gesamtwirkungsgrades dar. Diese Grenzen liegen jedoch so nahe am wirklichen Wert, daß es fraglich ist, ob man noch genauer rechnen soll. Sind versuchsmäßig Werte über das Abklingen der Turbulenz bekannt, so kann man für die ersten Stufen n entsprechend abändern.

[2]) η_{ges} enthält in diesem Falle also nicht η_{mech} usw.

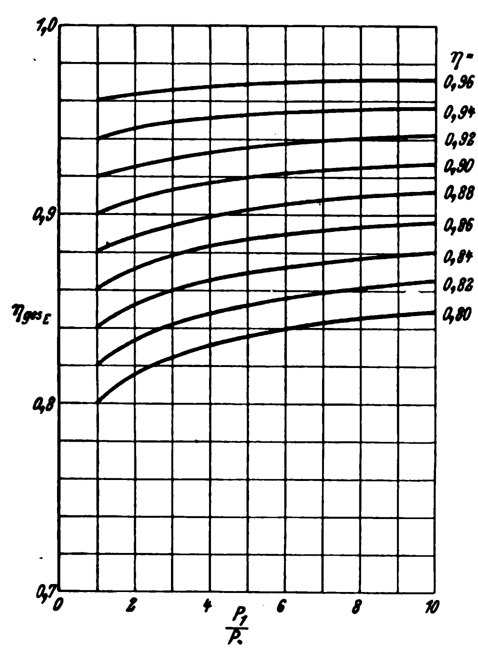


Bild 3. Gesamtwirkungsgrad bei Entspannung ($\varkappa$ = 1,40).

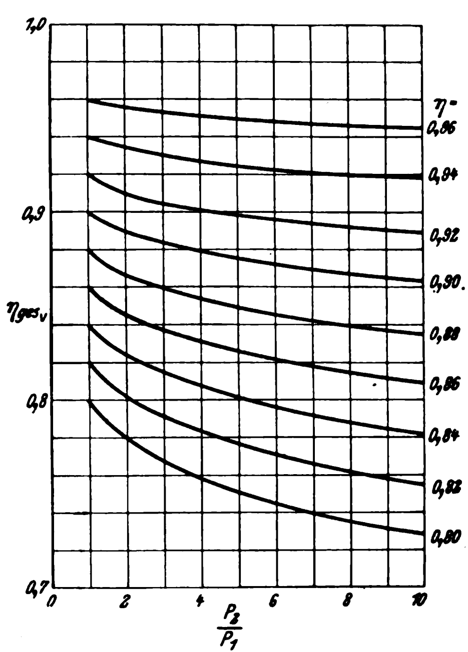


Bild 4. Gesamtwirkungsgrad bei Verdichtung ($\varkappa$ = 1,40).

Den Gesamtwirkungsgrad erhalten wir durch den Quotienten der polytropischen und der adiabatischen Leistung

$$\text{Entspanner} \quad \eta_{ges_E} = \frac{L_{pol}}{L_{ad}} = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}$$

$$\text{Verdichter} \quad \eta_{ges_V} = \frac{L_{ad}}{L_{pol}} = \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}.$$

Nach Einführung von n_E und n_V (12) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \eta_{ges_E} &= \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\eta}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \\ \eta_{ges_V} &= \frac{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\eta\varkappa}} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

Die Beziehung für $\eta_{ges\,V}$ wurde schon von Pfleiderer [3] in etwas anderer Form angegeben, wobei der polytropische Charakter der Zustandskurven angenommen wurde. Der Verlauf von η_{ges} ist in Bild 3 und 4 dargestellt. Man erkennt das Anwachsen des Gesamtwirkungsgrades mit wachsendem $\frac{P_2}{P_1}$ beim Entspanner und die starke Abnahme beim Verdichter. Es ist nun noch die Frage offen, welcher Wert für η einzuführen ist. Darüber gibt uns eine Grenzbetrachtung Aufschluß. Wir lassen die Druckänderung klein werden, so daß die Größe $\frac{P_2 - P_1}{P_1}$ eine gegen 1 kleine Zahl ist. Wir können dann η_{ges} in Potenzen davon entwickeln und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \eta_{ges_E} &= \eta\left(1 + \frac{1-\eta}{2}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1}\ldots\right) \\ \eta_{ges_V} &= \eta\left(1 - \frac{1-\eta}{2\,\eta}\,\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{P_2 - P_1}{P_1}\ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (19)$$

Man sieht, daß bei kleinem $\frac{P_2 - P_1}{P_1}$ $\eta_{ges} = \eta$ wird. Dies geht auch aus Bild 3 und 4 hervor. Kleines $\frac{P_2 - P_1}{P_1}$ bedeutet aber inkompressible Zustandsänderung. Wir setzen also für η die Werte ein, die mittels inkompressibler Rechnung oder durch Versuche mit Flüssigkeiten oder geringen Luftgeschwindigkeiten gewonnen wurden. Hier sind aber genügend Methoden bekannt, wie die Wirkungsgrade zu bestimmen sind. Anderseits läßt sich mit Bild 3 und 4 das zugehörige η bestimmen, wenn η_{ges} gemessen wurde. Weiter ist eine einfache Umrechnung der Wirkungsgrade für verschiedene Drehzahlen der gleichen Maschine möglich, natürlich immer unter den in der Einleitung besprochenen Voraussetzungen. Die Bilder gestatten auch einen sachlichen Vergleich der Wirkungsgrade axialer und radialer Maschinen.

V. Zusammenfassung.

An Hand physikalischer Betrachtungen über den Mechanismus der Umwandlung von Reibungsverlusten bei Strömungsmaschinen in Wärme wird die Natur der Zustandsänderung des Gases als vorwiegend polytropisch ermittelt. Die Einführung des Exponenten der Polytrope in die Zustandsänderung im $i\,s$-Diagramm zeigt, daß die Expansions- und Verdichtungslinien verzerrte Linien p = konst. sind, die im Falle einer Entspannung noch an den Adiabaten zu spiegeln sind. Die Anwendung der Polytrope auf die Ermittlung des Gesamtwirkungsgrades ergibt ein sehr brauchbares Diagramm zur Bestimmung des Gesamtwirkungsgrades aus dem leichter zu ermittelnden Wirkungsgrad inkompressibler Strömungsvorgänge. Auch für sonstige Fragen stellt das Diagramm ein gutes Hilfsmittel dar.

VI. Schrifttum.

[1] K. Wieghardt, Zusammenfassender Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. Luftf.-Forsch. Bd. 18 (1941), S. 1.

[2] Dryden, Schubauer, Mock, Skramstad, Messungen der Stärke und Reichweite der Windkanalturbulenz und ihre Beziehung zur kritischen Reynoldszahl der Kugeln. NACA-Technical Report 581.

[3] C. Pfleiderer, Die Tafel der Beiwerte für Gasreibung bei Verdichtern. Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 13.

Zur Berechnung der statischen Längsstabilität im Motorflug*).

Von R. Schubert.

Bericht von Blohm & Voß, Flugzeugbau, Hamburg-Finkenwärder.

In der vorliegenden Arbeit wird ein im praktischen Gebrauch entstandenes Näherungsverfahren zur Berechnung der statischen Längsstabilität im Motorflug mitgeteilt. Es beruht im wesentlichen darauf, den komplizierten Einfluß der Luftschraube auf den Momentenhaushalt des Flugzeuges so weit zu zergliedern, daß eine Reihe von Einzeleinflüssen übrigbleibt, deren Auswirkung auf den Längsmomentenverlauf elementar berechnet werden kann. Man erkennt auf diese Weise, daß die in der Schraubenebene angreifenden Kräfte und die am Flügel im Bereich des Schraubenstrahls hinzutretenden Kräfte im allgemeinen zwar nicht vernachlässigbar, aber doch von untergeordneter Bedeutung für den Momentenhaushalt sind. Der Haupteinfluß der Schraube auf die statische Längsstabilität ist also — wie bereits bekannt — darin zu suchen, daß der am Höhenleitwerk wirkende Abwindwinkel so schnell mit dem Flügelanstellwinkel wächst, daß die Änderung des Höhenleitwerkanstellwinkels nur noch einen kleinen Bruchteil der Änderung des Flügelanstellwinkels beträgt. Die Einzeleinflüsse werden in der vorliegenden Arbeit unter stark vereinfachenden, aber immer physikalisch begründeten Annahmen bestimmt und bausteinartig zu einer Berechnung der statischen Längsstabilität zusammengefügt.

Es wird nicht erwartet, daß das Verfahren in jedem Fall zum Ziele führt; in einem Einzelfall, der durch einen Windkanalversuch nachgeprüft werden konnte, ist aber die Übereinstimmung mit dem Versuch so gut, daß eine weitere Überprüfung des Verfahrens lohnend erscheint.

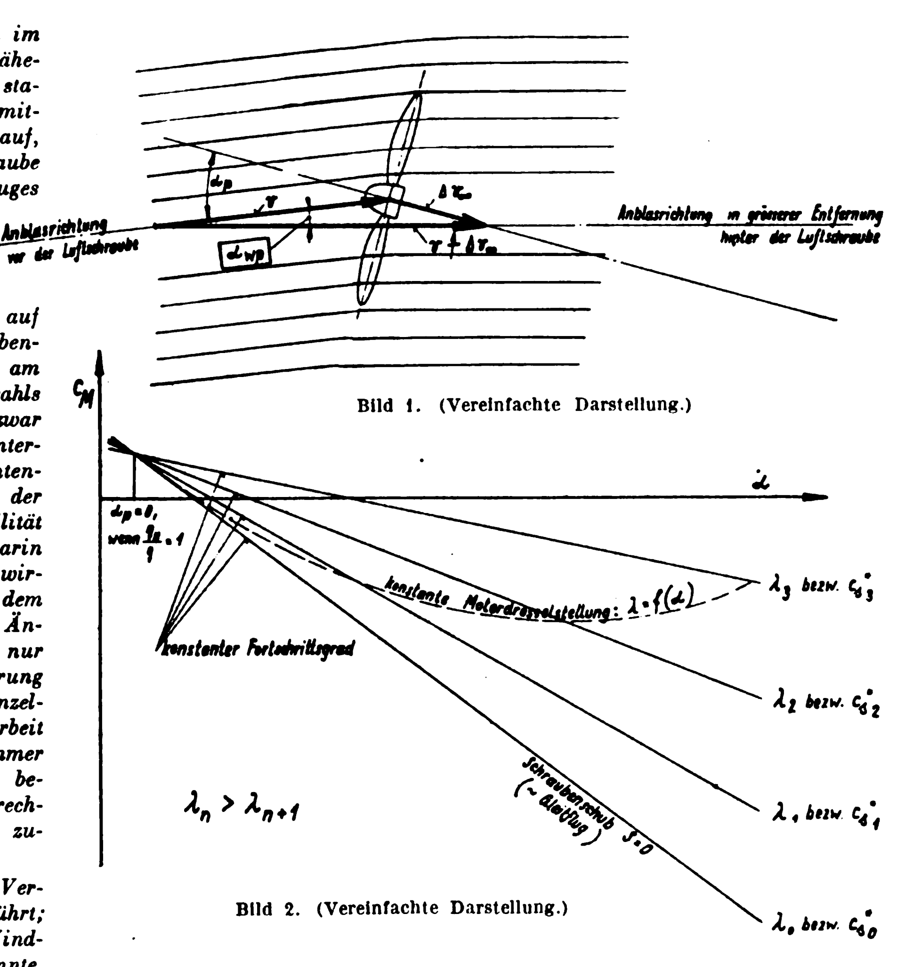


Bild 1. (Vereinfachte Darstellung.)

Bild 2. (Vereinfachte Darstellung.)



Gliederung.

I. Zusammenfassende Darstellung der Einzeleinflüsse der Luftschraube.

Die Längsstabilität der Flugzeuge ist im allgemeinen im Motorflug geringer als im Gleitflug. Die Erklärung dieser Erscheinung ist im Wirkungsbereich der Luftschraube zu suchen, die im einzelnen folgende Einflüsse auf den Verlauf der Längsmomente ausübt:

1. Die Zusatzgeschwindigkeit Δv_∞ im Schraubenstrahl addiert sich vektoriell zur Anblasgeschwindigkeit v, Bild 1. Hieraus entsteht ein Abwindwinkel α_{wp}, der mit wachsendem Anstellwinkel α_p der Schraube wächst [1, 2, 3, 4.], und zwar aus zwei Gründen:

a) Bei konstantem Fortschrittsgrad λ, d. h. bei konstantem Verhältnis: Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl/Anblasgeschwindigkeit $= \frac{\Delta v_\infty}{v}$, vergrößert sich der Abwindwinkel α_{wp} durch die mit dem Anstellwinkel der Schraube zunehmende, zur Anblasgeschwindigkeit senkrechte Komponente $\Delta v_\infty \cdot \sin \alpha_p$. Bei Windkanalversuchen wird das Längsmoment im allgemeinen als Funktion vom Anstellwinkel α mit dem Fortschrittsgrad λ als Parameter gemessen; wenn man von Nebeneinflüssen absieht, ist das Ergebnis im wesentlichen ein Längsmomentenverlauf, wie ihn beispielsweise Bild 2 zeigt: der Anstieg der Längsmomentenkurven $c_M = f(\alpha;\ \lambda = \text{const.})$ wird mit fallendem Fortschrittsgrad $(\lambda_n > \lambda_{n+1})$ immer weniger stabil.

Wenn das Höhenleitwerk nicht direkt vom Schraubenstrahl getroffen wird, schneiden sich die Längsmomentenkurven etwa bei dem Anstellwinkel α, für den der Anstellwinkel α_p der Schraubenachse gleich Null ist.

*) P 31 71.

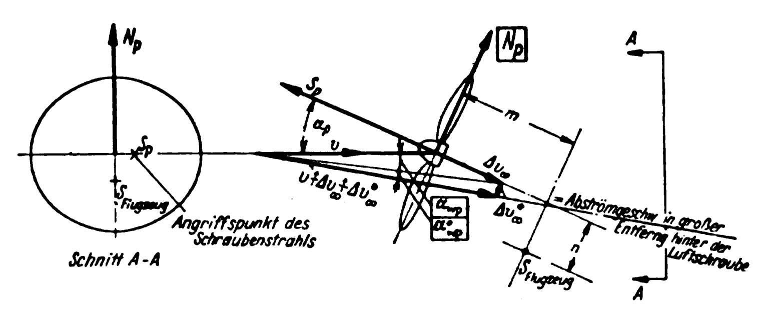


Bild 3. (Vereinfachte Darstellung.)

Wenn der Schraubenstrahl durch das Höhenleitwerk hindurchgeht, schneiden sich die Längsmomentenkurven im allgemeinen nicht mehr in einem Punkt.

b) Die Längsmomentenänderung findet jedoch im Fluge, der in jedem betrachteten Punkt als unbeschleunigt gelten soll, nicht bei konstantem Fortschrittsgrad statt sondern längs einer Kurve $\lambda = f\,(c_a$ bzw. $\alpha)$, die durch die Drosselstellung des Motors gegeben ist. Längs dieser Drosselkurve $\lambda = f\,(\alpha)$, die in Bild 2 gestrichelt eingezeichnet ist, vergrößert sich die Zusatzgeschwindigkeit Δv_∞ mit kleiner werdender Geschwindigkeit, d. h. mit fallendem Fortschrittsgrad. Die Abwindwinkeländerung längs einer Kurve für konstante Drosselstellung ist also bedeutend größer als für konstanten Fortschrittsgrad, da sich mit dem Anstellwinkel jetzt auch die Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl vergrößert.

Man kann in erster Näherung annehmen, daß der Abwindwinkel α_{wp} auch außerhalb des Schraubenstrahls (s. Bild 1) vorhanden ist. Das Abklingen dieses Abwindwinkels ober- bzw. unterhalb des Schraubenstrahls wird in ähnlicher Weise stattfinden wie bei der Tragflügelströmung, wo auch in der Wirbelfläche selbst der größte Abwind herrscht, der dann ober- bzw. unterhalb derselben langsam schwächer wird; diese Änderung des Abwindwinkels mit der Höhenlage des Höhenleitwerkes soll bei den vereinfachenden Annahmen, die dieser Rechnung zugrundeliegen, vernachlässigt werden.

2. An der zur Anblasegeschwindigkeit angestellten Schraube entsteht eine in der Schraubenebene wirkende Normalkraft N_p, die normal zur Schraubenachse wirkt und sich nach der Rechnung von Glauert nur noch der Angriffsvon Glauert [5] berechnet worden ist, s. Bild 3. (Außerdem ändert sich nach der Rechnung von Glauert nur noch der Angriffspunkt des Schraubenschubs, der nach rechts horizontal verschoben wird, wodurch die Längsstabilität direkt nicht beeinflußt wird. Nach Versuchen von Flachsbarth und Kröber [14] kann sich der Angriffspunkt auch um einen kleinen Betrag abwärts verlagern, der hier nicht beachtet werden soll.) — Durch die Auftriebskraft N_p wird eine Abwindgeschwindigkeit Δv_∞^* erzeugt, die den Abwindwinkel α_{wp}^* hervorruft.

3. Der Schraubenschub S_p wirkt bei über der Schraubenachse liegendem Schwerpunkt instabilisierend und bei darunter liegendem Schwerpunkt stabilisierend, da der Schraubenschub mit wachsendem Anstellwinkel zunimmt, s. Bild 3.

4. Durch die Staudruckerhöhung im Schraubenstrahl wird der Flügelauftrieb erhöht. Die Berechnung dieser Auftriebserhöhung kann in einfacher Weise auf Grund R. u. M. 1788 [6] erfolgen. In dieser Arbeit sind durch Einführung gedanklich einfacher Grenzfälle Formeln für die c_a-Erhöhung durch den Schraubenstrahl gefunden, die sehr gute Übereinstimmung mit aus Windkanalmessungen erhaltenen Ergebnissen zeigen. Die Formeln berücksichtigen — in ähnlicher Weise wie unter 1. beschrieben — die Verformung des Schraubenstrahls bis zur tragenden Linie des Flügels und erlauben die Berechnung einer c_a-Erhöhung Δc_a für die zwei Grenzfälle, daß

a) Flügeltiefe $l \ll$ Schraubendurchmesser D und
b) Flügeltiefe $l \gg$ Schraubendurchmesser D.

Die c_a-Erhöhung für zwischen diesen Grenzfällen liegende Zustände wird durch Einführen einer auf empirischem Wege von Smelt/Davies gewonnenen Konstanten bestimmt. — Die c_a-Erhöhung am Flügel im Bereich des Schraubenstrahls hat einen Abwindwinkel zur Folge, der für den Grenzfall a) gleich Null und für den Grenzfall b) in erster Näherung gleich $2 \cdot \alpha_{eff} \cdot \frac{s}{1+s}$ gesetzt werden kann.

5. Schließlich werden die Längsmomente noch dadurch beeinflußt, daß ein mehr oder weniger großer Teil des Höhenleitwerks direkt im Schraubenstrahl liegt und unter dem Einfluß des hier herrschenden Staudruckes steht. Bei sehr großen Flugzeugen, wo die Antriebsleistung auf mehrere Schrauben mit verhältnismäßig kleinem Durchmesser verteilt ist, die einen großen Teil der Spannweite beeinflussen, kann allerdings dieser Einfluß fehlen, da sich das Leitwerk im allgemeinen über dem Schraubenstrahl befindet. Bei kleineren Flugzeugen kann aber die Staudruckerhöhung die aus 1. bis 4. herrührenden Stabilitätsverluste sehr wohl wettmachen. Dies gilt im besonderen Maß, wenn das Leitwerk so zum Schraubenstrahl liegt, daß die Strahldrehung [7] im stabilisierenden Sinne wirkt, wobei eine auf Beeinflussung des Abwindes beruhende Wirkung anscheinend auch bei außerhalb des Schraubenstrahles befindlichem Leitwerk erzielt werden kann. Der Einfluß des Schraubenstrahls auf die Momentenänderung des Flügels kann entsprechend Gl. 37b angesetzt werden.

Im wesentlichen wird also die Längsstabilität im Motorflug beeinflußt durch

die an der Schraube wirkenden Kräfte S_p und N_p,
die Staudruckerhöhung und Drehung im Schraubenstrahl am Ort des Flügels und des Höhenleitwerkes,
die Abwindwinkeländerung infolge der Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl,
die Abwindwinkeländerung infolge der in der Schraubenkreisebene entstehenden Kraft N_p und
die Abwindwinkeländerung infolge der durch den Schraubenstrahl hervorgerufenen Auftriebserhöhung am Flügel.

Wie schon aus der Erläuterung der Einzeleinflüsse hervorgegangen ist, läßt das im folgenden beschriebene Verfahren zur Berechnung der Längsstabilität im Motorflug den Einfluß der Feinstruktur des Nachlaufs unberücksichtigt. Es ist z. B. auch nicht berücksichtigt, wie der rotierende, schräg angeblasene Schraubenstrahl unter dem Einfluß des Tragflügels und eventuell von Querkräften (Magnuseffekt) seine Lage zum Höhenleitwerk ändert, und der Einfluß von Reibungskräften auf den Schraubenstrahl wird nur durch Einführung eines halb empirisch gefundenen Ausdruckes berücksichtigt. Diese der Rechnung schwer zugänglichen Einflüsse auf die Längsstabilität im Motorflug abzuschätzen, wird wohl einstweilen ohne eine auf viele Windkanalversuche gestützte Erfahrung nicht lohnen, da das im folgenden beschriebene Verfahren für die Vorberechnung besonders mehrmotoriger Flugzeuge ausreichend erscheint.

II. Berechnung der Einzeleinflüsse.

Luftschraubenschub S_p:

Für den Schraubenschub S_p kann man schreiben:

$$S_p = c_s \cdot q \cdot F_p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wenn man den Schraubenschub auf F bezieht, erhält man die Schubzahl des ganzen Flugzeugs

$$c_s^* = \frac{z \cdot S_p}{q \cdot F} \cdot \eta_{st} = z \cdot c_s \cdot \frac{F_p}{F} \cdot \eta_{st} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wobei η_{st} den Zusatzwiderstand der im Schraubenstrahl liegenden Bauteile berücksichtigt. Im Horizontalflug ist $c_s^* = c_w =$ Widerstandsbeizahl des ganzen Flugzeugs.

Luftschraubennormalkraft N_p:

Glauert [5] hat abgeleitet:

$$N_p = k \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot D^2 \cdot \frac{c_p}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{c_p} \cdot \frac{d\,c_p}{d\,\lambda}\right] \cdot \alpha_p, \text{ s. Bild 4} \quad (3)$$

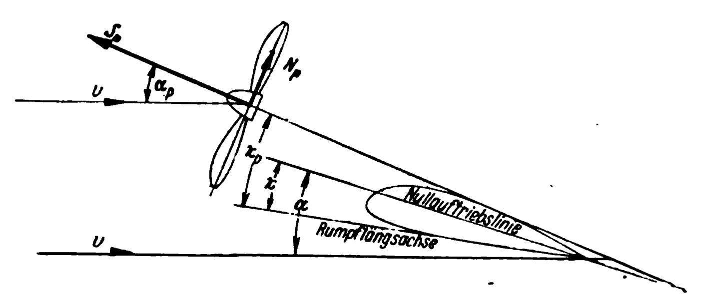


Bild 4. $\alpha_p = \alpha + \varkappa_p - \varkappa$.

Nach Division durch $q \cdot F$ erhält man in dimensionsloser Schreibweise

$$c_{n\,p} = 2 \cdot k \cdot \frac{D^2}{F} \cdot \frac{c_p}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{c_p} \cdot \frac{d\,c_p}{d\,\lambda}\right] \cdot (\alpha + \varkappa_p - \varkappa) \quad (4)$$

Bei Verstelluftschrauben, die auch bei Geschwindigkeitsänderung die Motordrehzahl und Motorleistung nicht ändern, erhält man

$$c_{n\,p} = 2 \cdot k \cdot \frac{D^2}{F} \cdot \frac{c_p}{\lambda} \cdot (\alpha + \varkappa_p - \varkappa) \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Die Größe k ist vom Fortschrittsgrad abhängig und wird Bild 5 entnommen.

Abwindwinkeländerung durch Luftschraubennormalkraft N_p:

Für den Ort des Höhenleitwerks kann man mit dem Impulssatz in erster Näherung den Abwindwinkel infolge der Schraubennormalkraft N_p bestimmen, s. Bild 3. Es ist

$$N_p = \varrho \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot v^2 \cdot (1 + s_0) \cdot (1 + s) \cdot \alpha_{w\,p}^*$$

und daraus

$$\alpha_{w\,p}^* = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{N_p}{v^2\,(1 + s_0) \cdot (1 + s) \cdot D^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$= \frac{8}{\pi \cdot \varrho} \cdot \frac{N_p}{\left(1 + c_s + \sqrt{1 + c_s}\right) \cdot v^2 \cdot D^2}$$

Zusatzgeschwindigkeit Δv im Schraubenstrahl: Es ist aus der — allerdings nur für die reibungsfreie Strömung geltenden — Strahltheorie der Schraube bekannt, daß in großer Entfernung hinter der Schraube die Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl aus dem Schubbelastungsgrad c_s zu errechnen ist.
Mit

$$S = c_s \cdot \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \frac{\pi\,D^2}{4} = \varrho \cdot \frac{\pi\,D^2}{4}\left(v + \frac{1}{2} \cdot \Delta\,v_\infty\right) \cdot \Delta\,v_\infty$$

erhält man

$$c_s = 2 \cdot \frac{\Delta\,v_\infty}{v} + \left(\frac{\Delta\,v_\infty}{v}\right)^2$$

$$c_s + 1 = \left[1 + \left(\frac{\Delta\,v_\infty}{v}\right)\right]^2$$

$$\frac{\Delta\,v_\infty}{v} = \sqrt{1 + c_s} - 1 \approx \frac{1}{2} \cdot c_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Mit den Bezeichnungen von Bild 1 erhält man für

$$v \ddagger \Delta\,v_\infty \approx v + \Delta\,v_\infty, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wobei $\sin\,\alpha_p \approx \operatorname{tg}\,\alpha_p \approx \alpha_p$ und $\cos\,\alpha_p \approx 1$ gesetzt ist. Der gesamte Staudruck im Schraubenstrahl in genügender Entfernung hinter der Schraube ist somit

$$\frac{q + \Delta\,q_\infty}{q} = 1 + c_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Für die Berechnung des Staudrucks q_H am Höhenleitwerk kann man annehmen, daß sich das Höhenleitwerk in genügender Entfernung hinter der Schraube befindet. Es ist also

$$\frac{q_H}{q} = 1 + c_s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Der Schraubenstrahldurchmesser am Ort des Höhenleitwerkes ist [6]:

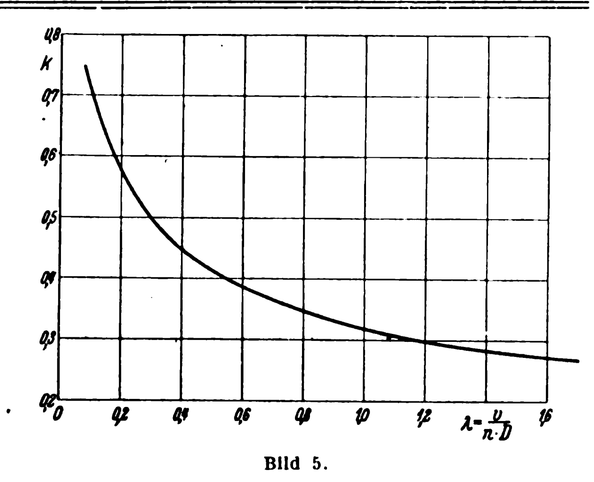


Bild 5.

$$D_H = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + c_s}}\right)} \cdot D$$

$$\approx \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + c_s}}\right) \cdot D \text{ für } c_s < 1 \quad (11)$$

Für kleine Entfernungen hinter der Schraubenebene erhält man für den Staudruck im Schraubenstrahl [6]

$$\frac{q_s}{q} = (1 + s)^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

wobei s im Abstand m_p von der Schraubenebene die Größe hat:

$$s = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + c_s} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{D}{m_p}\right)^2}}\right) \quad (13)$$

Der zugehörige Schraubenstrahldurchmesser D^* ist

$$D^* = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + c_s} - 1\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + c_s} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{D}{m_p}\right)^2}}\right)}}$$

$$\times D = \sqrt{\frac{1 + s_0}{1 + s}} \cdot D \quad . \; . \; . \quad (14)$$

q_s und D^* werden zur Berechnung der Auftriebserhöhung Δc_a gebraucht, wobei m_p gleich dem Abstand der tragenden Linie von der Schraube sein soll.

Es ist bekannt, daß infolge der nicht reibungsfreien Strömung die Staudruckerhöhung am Höhenleitwerk kleiner ist als sie sich nach (10) berechnet; Hoerner [12] gibt z. B. an

$$\frac{q_H}{q} = 1 + 0{,}5 \cdot c_s.$$

Der Schraubenstrahldurchmesser am Höhenleitwerk ist deshalb auch größer als nach Formel (11); hinzu kommt, daß der Schraubenstrahl durch den Tragflügel und durch den Drall verformt wird. Diese Einflüsse heben sich jedoch gegenseitig zum Teil wieder auf: der gegenüber (10) geringere Staudruck im Schraubenstrahl wirkt in größerer Breite als nach (11) berechnet auf das Höhenleitwerk ein.

Die gleichen Überlegungen gelten auch für die später berechneten Abwindwinkel α_{wp} (16), ΔR (28) und $\Delta\alpha_w$ (36). Es sind deshalb in dieser Arbeit die Näherungsformeln der reibungsfreien Strömung zur Berechnung des Schraubenstrahleinflusses auf die Höhenleitwerkskräfte für die Höhenleitwerksbreite angewandt, die sich aus dem Schraubenstrahldurchmesser nach (11) errechnet.

Abwindwinkel Δt durch Schraubenstrahldrehung: Stieß [7] gibt als Näherungsformel für die Strahl-

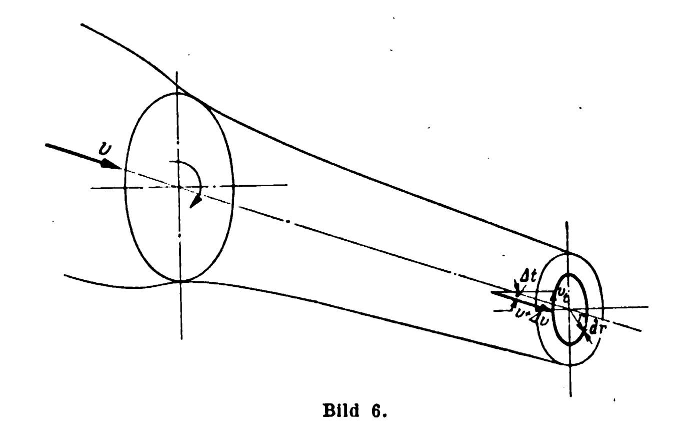


Bild 6.

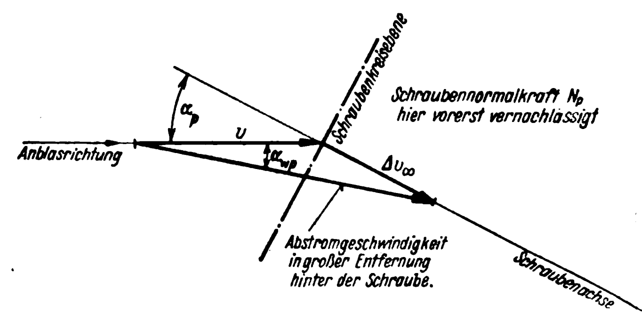


Bild 7. (Vereinfachte Darstellung für konstante Schubverteilung über die Schraubenkreisfläche.)

drehung folgende Anstellwinkeländerung im Bereich des Schraubenstrahls an, s. Bild 6:

$$\Delta t = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{c_s\cdot v}{\eta\cdot n_L}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+c_s}\cdot(1+\sqrt{1+c_s})} \qquad (15)$$

Diese Anstellwinkeländerung wird durch Reibungskräfte und durch den Flügel beeinflußt; Flugmessungen [7] haben im allgemeinen einen wesentlich kleineren Betrag für die Strahldrehung ergeben als Formel (15) angibt.

Abwindwinkel α_{wp} infolge Luftschraubenschub S_p.

Mit den Bezeichnungen von Bild 7 erhält man:

$$\operatorname{tg}\alpha_{wp} = \frac{\Delta v_\infty\cdot\sin(180^0-\alpha_p)}{v-\Delta v_\infty\cdot\cos(180^0-\alpha_p)}.$$

Man setzt $\sin\alpha_p = \alpha_p$, $\cos\alpha_p = 1$ und $\operatorname{tg}\alpha_{wp} = \alpha_{wp}$ und erhält:

$$\alpha_{wp} = \frac{1}{1+\frac{v}{\Delta v_\infty}}\cdot\alpha_p$$

oder

$$\alpha_{wp} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+c_s}}\right)\cdot\alpha_p \quad \ldots\ldots (16)$$

Wenn man in der Formel (16) für $\frac{v}{\Delta v_\infty}$ angenähert $\frac{2}{c_s}$ setzt (Formel (7)), erhält man:

$$\alpha_{wp} = \frac{1}{1+\frac{2}{c_s}}\cdot\alpha_p \quad \ldots\ldots (17)$$

$$\approx\frac{1}{2}\cdot c_s\cdot\alpha_p \quad \ldots\ldots (18)$$

Die Formeln (16) bis (18) sind von Misztal, Hopf, Gorski, Bryant und Millikan mit Windkanalergebnissen verglichen und mit empirischen Konstanten versehen, die im wesentlichen als Korrekturfaktor dem Schubbelastungsgrad beigegeben sind. Es geben an:

Hopf:

$$\alpha_{wp} = \frac{1}{1+\frac{2{,}85}{c_s}}\cdot\alpha_p \quad \ldots\ldots (19)$$

Gorski:

$$\alpha_{wp} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+1{,}66\cdot c_s}}\right)\cdot\alpha_p \quad \ldots (20)$$

Bryant:

$$\alpha_{wp} = 0{,}155\cdot\frac{\frac{F_{Hp}}{F_H}\cdot(1+c_s)\cdot c_s}{1+\frac{F_{Hp}}{F_H}\cdot c_s}\cdot\alpha_p$$

$$= 0{,}155\cdot c_s\cdot\alpha_p \text{ für } \frac{F_{Hp}}{F_H} = 1 \quad \ldots (21)$$

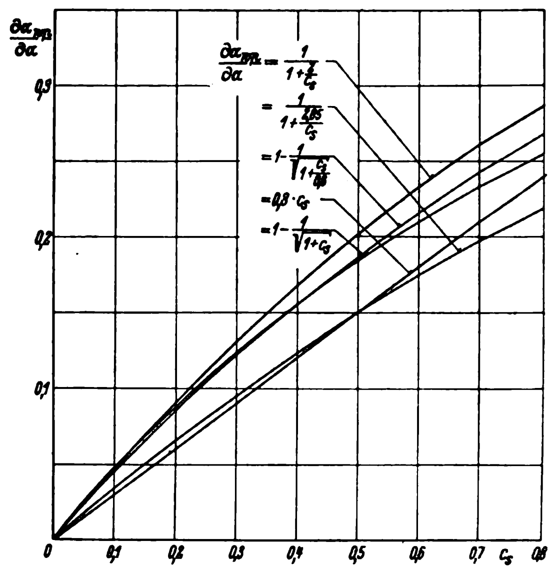


Bild 8. Zusammenstellung der bekannten Formeln zur Berechnung von α_{wp}.

Millikan:

$$\alpha_{wp} = 0{,}300\cdot\frac{\frac{F_{Hp}}{F_H}\cdot(1+c_s)\cdot c_s}{1+\frac{F_{Hp}}{F_H}\cdot c_s}\cdot\alpha_p$$

$$= 0{,}300\cdot c_s\cdot\alpha_p \text{ für } \frac{F_{Hp}}{F_H} = 1 \quad \ldots (22)$$

In Bild 8 sind die Formeln (16), (17), (19), (20) und (22) aufgetragen. Da die nicht korrigierte Formel im Streubereich der übrigen mehr oder weniger korrigierten liegt, soll deshalb im folgenden mit der Formel (16) weitergerechnet werden:

$$\alpha_{wp} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+c_s}}\right)\cdot(\alpha+\varkappa_p-\varkappa) \quad \ldots (16)$$

Dies erscheint um so eher berechtigt, als bei modernen mehrmotorigen Flugzeugen der Rumpf im allgemeinen keine bremsenden Wirkungen auf den Schraubenstrahl ausüben kann.

Smelt und Davies [6] haben untersucht, in welchem Maß die Reibungskräfte den Schraubenstrahl aus seiner Richtung abzulenken vermögen.

Wenn man annimmt, daß die Strömung um den geneigten Schraubenstrahl ähnlich der Strömung um einen Zylinder gleichen Durchmessers und gleicher Neigung ist, kann man mit der weiteren Annahme, daß die Zentrifugalkraft des durch Reibungskräfte gekrümmten Schraubenstrahls an jeder Stelle gleich den Luftkräften ist, den Ablenkungswinkel errechnen, den der Schraubenstrahl durch die Reibungskräfte der ihn umgebenden Luftströmung erfährt, Bild 9.

Nach Smelt/Davies erhält man

$$\frac{1}{(\alpha_{wp_0}-\Delta R_0)^{0,8}} = 0{,}016\cdot\frac{m_p}{D}+\frac{1}{\alpha_{wp_0}{}^{0,8}} = \frac{1}{\Delta\alpha^{0,8}}, \quad (23)$$

wobei der Beiwert, der normal zur Strahlachse auf die Längeneinheit wirkenden Luftkraft $N_s = c_{ns} \cdot q \cdot D$ gleich

$c_{ns} = 0{,}000552 \times \Delta\alpha^{0,8}$ ($\Delta\alpha$ in Grad) . (24)

gesetzt ist. Wenn man berücksichtigt, daß ΔR_0 klein gegen α_{wp_0} ist, erhält man nach kurzer Umformung

$$\Delta R_0 = \frac{\alpha_{wp_0}^{1,8}}{0{,}8 \cdot \alpha_{wp_0}^{0,8} + 50 \cdot \dfrac{D}{m_p}} \quad (25)$$

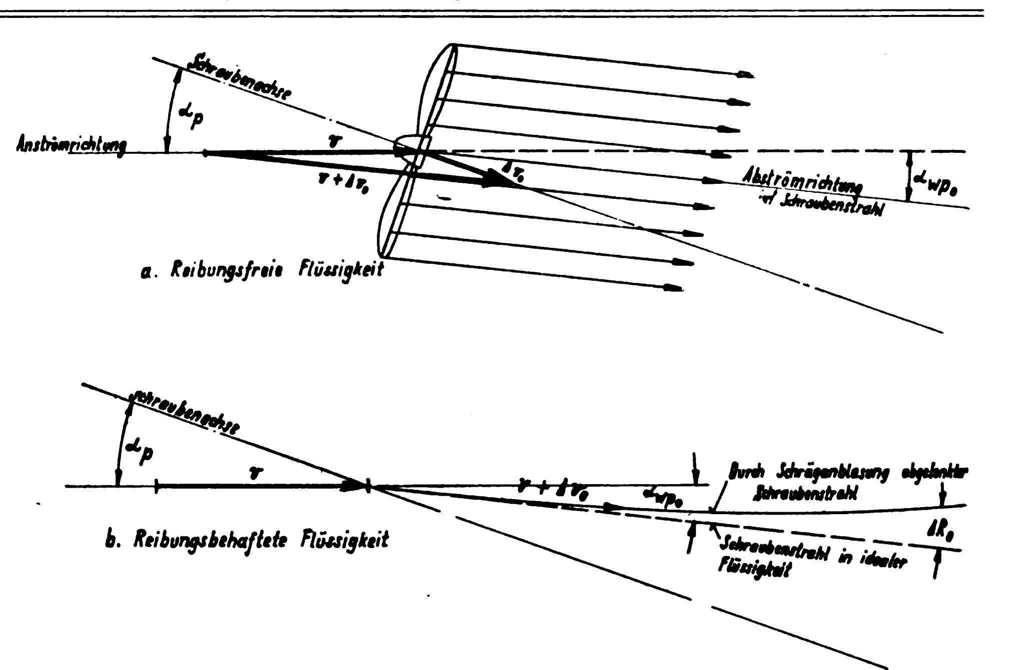


Bild 9. (Gültig in der Nähe der Schraubenkreisebene für $\Delta v \approx \Delta v_0$ = konst.; Schraubennormalkraft Np vernachlässigt.)

Smelt/Davies gebrauchen die Formel (23) für den Ablenkungswinkel am Ort der tragenden Linie des Flügels, d. h. für einen Ort dicht hinter der Schraube.

Am Ort des Höhenleitwerks erhält man den Ablenkungswinkel ΔR, wenn man mit einem geschätzten »mittleren« Schraubenstrahldurchmesser:

$$D_m = 0{,}2 \cdot D + 0{,}8 \cdot D_{II} = \left(0{,}8 + \frac{0{,}2}{\sqrt{1+c_s}}\right) \cdot D \quad (26)$$

und einem geschätzten »mittleren« Neigungswinkel des Schraubenstrahls zur Strömung zwischen Luftschraube und Höhenleitwerk

$$\alpha_{wp_m} = 0{,}9 \cdot (\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w) = 0{,}9 \cdot \Theta \quad . \; . \; (27)$$

rechnet und Gl. (26) und (27) in Gl. (25) einsetzt:

$$\Delta R = \frac{0{,}83 \cdot \Theta^{1,8}}{0{,}74 \cdot \Theta^{0,8} + \left(40 + \dfrac{10}{\sqrt{1+c_s}}\right) \cdot \dfrac{D}{r_p}} \quad (28)$$

Diese Gleichung kann natürlich keinen Anspruch auf Zuverlässigkeit erheben, da sie nur für einen sehr vereinfachten Fall abgeleitet ist, der z. B. bei mehrmotorigen Flugzeugen nicht mehr gilt. Wenn trotzdem diese Gl. für 2 motorige Flugzeuge in der Form (28) in dieser Arbeit weiter verwendet wird, so geschieht dies unter der Annahme, daß die Größenordnung des Ablenkungswinkels und seine Ableitung durch die obige Gl. einigermaßen wiedergegeben werden. Durch Auswertung von Windkanalversuchen muß jedoch die Gl. (28) auf ihre Richtigkeit überprüft und korrigiert werden. Im allgemeinen ist aber ΔR klein gegen $(\alpha_w + \alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w)$, so daß kleine Fehler bei der Bestimmung von ΔR in Kauf genommen werden können. Für Flugzeuge mit mehr als zwei Motoren wird $\Delta R = 0$ gesetzt.

Auftriebserhöhung Δc_a: Die Auftriebserhöhung durch den Schraubenstrahl kann man nach Smelt/Davies [6] in sehr guter Übereinstimmung mit Windkanalversuchen errechnen. Es werden hierbei folgende Einflüsse berücksichtigt:

1. Durch die Zusatzgeschwindigkeit Δv wird der Auftrieb im Schraubenstrahlbereich erhöht. Wenn man den Zusatzauftrieb durch den Staudruck der ungestörten Strömung und durch die gesamte Flügelfläche dividiert, erhält man eine c_a-Erhöhung Δc_a[1]). Für die von Smelt/Davies eingeführten 2 Grenzfälle

a) Flügeltiefe $l \ll$ Schraubendurchmesser D
b) Flügeltiefe $l \gg$ Schraubendurchmesser D

[1]) Diese c_a-Erhöhung ist jedoch nur eine scheinbare, da die Auftriebserhöhung nicht durch eine Anstellwinkeländerung entstanden ist sondern durch die Geschwindigkeitserhöhung im Schraubenstrahl.

erhält man, daß im Fall

a) der effektive Anstellwinkel durch die Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl nicht geändert wird und die c_a-Erhöhung proportional dem Verhältnis der Staudruckerhöhung am Ort der tragenden Linie des Flügels ist. Den Einfluß einer Anstellung der Schraubenachse zur Anblasrichtung siehe unter 2.

b) der induzierte Anstellwinkel durch die Zusatzgeschwindigkeit so geändert wird, daß die Zirkulation längs der Flügelspannweite sich nicht ändert und die c_a-Erhöhung proportional der Geschwindigkeitserhöhung am Ort der tragenden Linie des Flügels ist.

2. Durch die Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl entsteht bei angestellter Schraubenachse eine abwärts gerichtete Geschwindigkeit, die den effektiven Anstellwinkel der im Schraubenstrahl liegenden Flügelfläche zu verringern sucht. Für die Grenzfälle a) und b) (siehe oben) erhält man im Fall b) keinen Einfluß der abwärts gerichteten Geschwindigkeit und im Fall a) eine Verkleinerung der örtlichen ungestörten Auftriebsbeizahl um $K_2 \cdot \left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{\infty\delta} \cdot \Delta\alpha$, wobei $\Delta\alpha$ gleich der Anstellwinkeländerung am Ort der tragenden Linie des Flügels ist, die durch die Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl und durch die Reibungskräfte auf den Strahl hervorgerufen ist.

Das Ergebnis der Arbeit von Smelt/Davies ist:

$$\Delta c_a = \frac{z \cdot l_\delta \cdot D^*}{F} \cdot s \cdot \left[K_1 \cdot c_{a\delta} - K_2 \cdot \left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{\delta\infty} \cdot \Delta\alpha\right] \quad (29)$$

In dieser Formel bedeuten

K_1 = Konstante zwischen den Werten 1 und 2, die die Zustände zwischen den zwei Grenzfällen a) und b) der Rechnung zugänglich macht und auf empirischem Weg aus Windkanalmessungen bestimmt ist, Bild 10.

K_2 = Konstante zwischen den Werten 0 und 1; von Smelt/Davies wird $K_2 \approx 0{,}6$ gesetzt.

$\Delta\alpha \approx \alpha_{wp_0} - \Delta R_0$
= Anstellwinkeländerung durch den Schraubenstrahl am Ort der tragenden Linie des Flügels.

$$\alpha_{wp_0} = \frac{\sqrt{1+c_s} - 1}{\sqrt{1+c_s} + 1} \cdot (\alpha_p) = \frac{\sqrt{1+c_s} - 1}{\sqrt{1+c_s} + 1} \cdot (\alpha + \varkappa_p - \varkappa) \quad . \; . \; . \; (30)$$



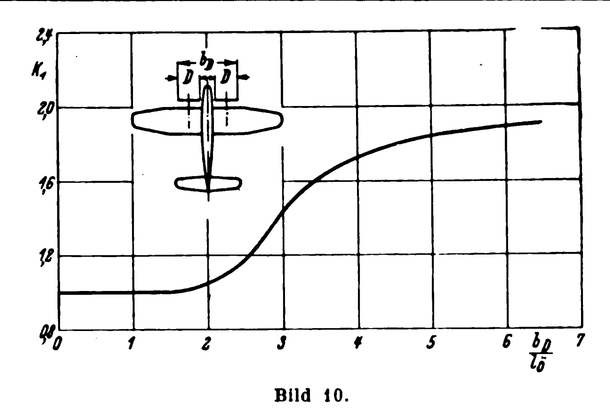


Bild 10.

= Abwindwinkel infolge Schraubenschub S_p am Ort der Schraubenkreisebene gemessen (der Abwindwinkel infolge Schraubennormalkraft N_p ist hier vernachlässigt).

$$\Delta R_0 = \frac{\alpha_{w\,p_0}^{1,8}}{0,8 \cdot \alpha_{w\,p_0}^{0,8} + 50 \cdot \frac{D}{m_p}} = \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

= Ablenkungswinkel durch Reibungskräfte (s. Formel (25)).

Von Millikan [3] wird gesetzt für $\frac{m_p}{D} < 1$

$$\Delta \alpha = \left(1 - 0,07 \cdot \frac{m_p}{D}\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + c_s} - 1}{\sqrt{1 + c_s} + 1} \cdot (\alpha + \varkappa_p - \varkappa) \quad \ldots \quad (32)$$

Weitere Bezeichnungen am Schluß dieser Arbeit.

Abwindwinkel $\Delta\alpha_w$.

Die im vorigen Abschnitt besprochene Auftriebserhöhung bewirkt eine Änderung des Abwindwinkels um $\Delta\alpha_w$. In erster Näherung soll hier der durch den Tragflügelauftrieb hervorgerufene Abwindwinkel am Ort des Höhenleitwerkes gleich dem doppelten induzierten Anstellwinkel am Ort der tragenden Linie gesetzt werden. Die Untersuchung kann dann darauf beschränkt bleiben, die Änderung des induzierten Anstellwinkels durch die Auftriebserhöhung infolge Schraubenstrahl festzustellen.

Der induzierte Anstellwinkel im Schraubenstrahlbereich des Flügels ist:

$$\alpha_{i\,p} = \alpha_\delta - \alpha_{p\,\mathrm{eff}}$$

$$= \alpha_\delta - \frac{c_{a\,\delta\,p}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Nach kurzer Ableitung erhält man aus (29) die wirklich vorhandene Auftriebsbeizahl im Schraubenstrahlbereich bezogen auf den erhöhten Staudruck q_s.

$$c_{a\,\delta\,p} = \frac{1}{(1+s)^2} \cdot \left[c_{a\,\delta} + K_1 \cdot s \cdot c_{a\,\delta} - K_2 \cdot s \cdot \left(\frac{d\,c_a}{d\alpha}\right)_{\delta\,\infty} \cdot \Delta\,\alpha\right]$$

$$= \frac{c_{a\,\delta}}{(1+s)^2} \cdot \left[1 + K_1 \cdot s - K_2 \cdot s \cdot \frac{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}}{c_{a\,\delta}} \cdot \Delta\,\alpha\right]$$

$$\approx c_{a\,\delta}\left(\frac{1 + K_1 \cdot s}{(1+s)^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Damit wird

$$\Delta\,\alpha_{i\,p} = \alpha_{i\,p} - \alpha_i$$

$$= \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} - \frac{1 + K_1 \cdot s - K_2 \cdot s \cdot \frac{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}}{c_{a\,\delta}} \cdot \Delta\,\alpha}{(1+s)^2 \cdot \left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot c_{a\,\delta}$$

$$= \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left[1 - \frac{1 + K_1 \cdot s - K_2 \cdot s \cdot \frac{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}}{c_{a\,\delta}} \cdot \Delta\,\alpha}{(1+s)^2}\right]$$

$$= \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left(1 - \frac{1 + K_1 \cdot s}{1 + 2\,s}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

Entsprechend der obigen Annahme $\Delta\alpha_w = 2 \cdot \Delta\alpha$; erhält man

$$\Delta\,\alpha_w = 2 \cdot \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left[1 - \frac{1 + K_1 \cdot s - K_2 \cdot s \cdot \frac{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}}{c_{a\,\delta}} \cdot \Delta\,\alpha}{(1+s)^2}\right]$$

$$= 2 \cdot \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left[1 - \frac{1 + \Delta\,c_a \cdot \frac{F}{z \cdot l_\delta \cdot D^* \cdot c_{a\,\delta}}}{(1+s)^2}\right]$$

$$\approx 2 \cdot \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left(1 - \frac{1 + K_1 \cdot s}{1 + 2 \cdot s}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

Aus der Formel (36) erhält man für die beiden betrachteten Grenzfälle:

a) $l \ll \Sigma D : K_1 = 2$

$$\Delta\,\alpha_w = 2 \cdot \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \left(1 - \frac{1 + 2\,s}{1 + 2\,s}\right) = 0$$

b) $l \gg \Sigma D : K_1 = 1$

$$\Delta\,\alpha_w = 2 \cdot \frac{c_{a\,\delta}}{\left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\,\infty}} \cdot \frac{s}{1+s} = 2 \cdot \alpha_{\mathrm{eff}} \cdot \frac{s}{1 \cdot s}.$$

Für die Längsstabilität erscheint es also vorteilhaft, die Luftschrauben möglichst weit über die Spannweite des Flugzeugs zu verteilen.

III. Aufstellung der Gleichung zur Berechnung der statischen Längsstabilität im Motorflug.

Wenn man jetzt alle im vorigen Abschnitt besprochenen Einflüsse bei der Berechnung des Längsmomentes berücksichtigt, erhält man folgende Gleichung (s. Bild 11 bis 13), in der c_a statt c_n und $c_{a\,H}$ statt $c_{n\,H}$ gesetzt ist:

Längsmomentenbeizahl des ganzen Flugzeugs bei Anwesenheit eines Schraubenstrahls bezogen auf den Flugzeugschwerpunkt S:

$$c_{M\,p} = c_{M\,F\,S} + \Delta\,c_{M\,F\,S\,p} + \Delta\,c_{M\,p} + c_{M\,H\,p} \quad \ldots \quad (37)$$

In der obigen Gleichung bedeutet das erste Glied der rechten Seite

$$c_{M\,F\,S} = c_{M\,F\,P} + c_a \cdot \frac{a}{l_F} + c_t \cdot \frac{b}{l_F} \quad \ldots \quad (37a)$$

die Längsmomentenbeizahl des Flügels bezogen auf den Schwerpunkt des Flugzeugs, wenn man sich den Luftschraubenstrahleinfluß fortdenkt.

Das zweite Glied

$$\Delta\,c_{M\,F\,S\,p} = c_{M\,P} \cdot \left(\frac{q_s}{q} - 1\right) \cdot \frac{l_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} + \left(c_{a\,\delta\,p} \cdot \frac{q_s}{q} - c_{a\,\delta}\right)$$

$$\times \frac{a_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} + \left(c_{t\,\delta\,p} \cdot \frac{q_s}{q} - c_{t\,\delta}\right) \cdot \frac{b_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} \quad \ldots \quad (37b)$$

erfaßt den Einfluß des Schraubenstrahls auf die Längsmomentenbeizahl des Flügels. Durch den Schraubenstrahl ändert sich die Momentenbeizahl c_{MP} wahrscheinlich nur unwesentlich. Wohl aber ändert sich im allgemeinen die örtliche Auftriebsbeizahl, die etwas kleiner wird und die örtliche Tangentialkraftbeizahl, die in erster Näherung sich proportional c_a^2 ändert. Wie bereits vorher gezeigt worden ist, wird durch die Staudruckerhöhung im Schraubenstrahl die Auftriebsbeizahl nur scheinbar erhöht. Wenn man die ört-

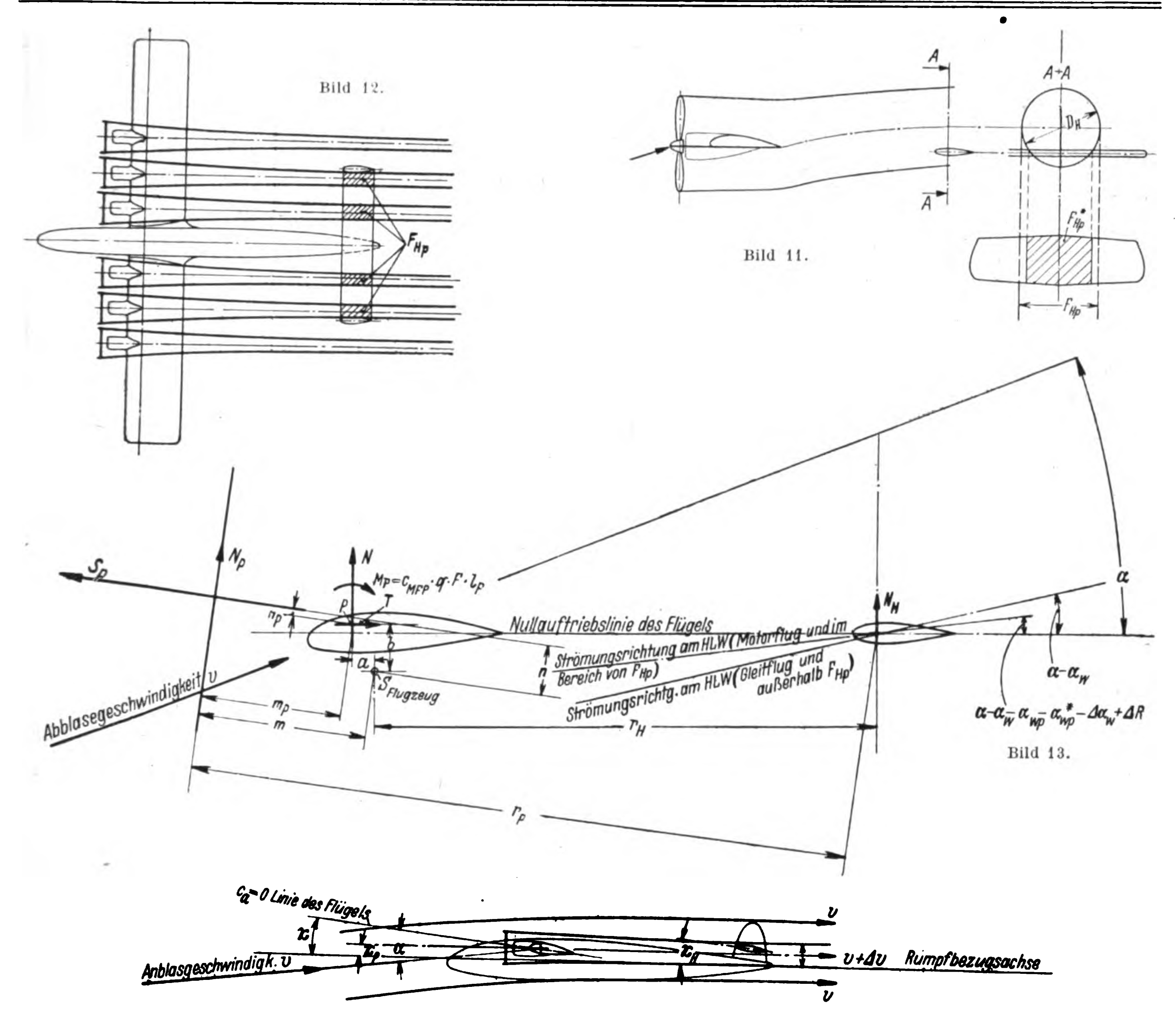


Bild 12.

Bild 11.

Bild 13.

liche Auftriebserhöhung durch den örtlichen Staudruck $q_S = q + \Delta q$ und durch die örtliche Flügeltiefe dividiert, erkennt man sofort, daß eine c_a-Erhöhung nicht stattfindet, sondern im allgemeinen eine c_a-Verminderung; allerdings ergibt die wirklich vorhandene c_a-Beizahl $c_{a\delta p}$ mit dem »örtlichen« Staudruck und der »örtlichen« Fläche F_δ multipliziert eine Auftriebserhöhung durch den Schraubenstrahl, abgesehen von dem Sonderfall, daß die $c_{a\delta}$-Beizahl klein und die Schraubenachse negativ zur örtlichen Flügelsehne eingestellt ist.

Das dritte Glied

$$\Delta c_{Mp} = z \cdot c_{np} \cdot \frac{m}{l_F} + c_s^* \cdot \frac{n}{l_F} = \Delta c_{Mp}'' + \Delta c_{Mp}' \quad (37\text{c})$$

enthält den Einfluß der Schraubennormalkraft N_p und des Schraubenschubs S_p auf die Längsmomentenbeizahl.

Das vierte Glied

$$c_{MHp} = \frac{d c_{aH}}{d\alpha_H} \cdot \frac{F_H \cdot r_H}{F \cdot l_F} \left\{ \left[1 + \frac{F_{Hp}^*}{F_H} \cdot \left(\frac{q_H}{q}\right)\right] \left(\alpha_{w0} + \frac{d\alpha_H}{d\alpha} \cdot \alpha + \varkappa_H - \varkappa\right) - \left[\frac{F_{Hp}}{F_H} + \frac{F_{Hp}^*}{F_H} \cdot \left(\frac{q_H}{q} - 1\right)\right] \cdot \left(\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w - \Delta R\right) \right\} \quad . . . (37\text{d})$$

enthält den Beitrag des Höhenleitwerks zur Längsmomentenbeizahl unter Berücksichtigung des Schraubenstrahleinflusses. Hierbei ist die Strahldrehung unberücksichtigt geblieben, deren Einfluß nur bei genauer Kenntnis der Lage und Verformung des Schraubenstrahls in Rechnung gesetzt werden kann. Um die Fläche F_{Hp}^* zu bestimmen, s. Bild 11, ist es notwendig, daß man aus einer Integration der Abwindwinkel α_w, α_{wp}, α_{wp}^*, $\Delta\alpha_w$ und ΔR über die Flugzeuglänge die Höhenlage des Schraubenstrahls zum Höhenleitwerk bestimmt und die seitliche Auswanderung des Schraubenstrahls in erster Näherung schätzt; die Rechnung ist jedoch umständlich und ihr Ergebnis etwas problematisch. Für große mehrmotorige Flugzeuge kann die Strahldrehung vernachlässigt werden, wie in dem folgenden Beispiel gezeigt wird, da der Einfluß der Strahldrehung gegenüber den anderen die Längsstabilität beeinflussenden Faktoren zurücktritt.

Der Ausdruck $\frac{F_{Hp}^*}{F_H} \cdot \left(\frac{q_H}{q} - 1\right)$ enthält den stabilisierenden Einfluß der Staudruckerhöhung der direkt von dem Schraubenstrahl getroffenen Leitwerkteile.

Der Ausdruck

$$\left[\frac{F_{Hp}}{F_H} + \frac{F_{Hp}^*}{F_H} \cdot \left(\frac{q_H}{q} - 1\right)\right] \cdot \left(\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w - \Delta R\right)$$

enthält den Einfluß der Abwindwinkel, die durch den Schraubenstrahl direkt oder indirekt hervorgerufen werden.

Für den Sonderfall, daß das Höhenleitwerk nicht im Schraubenstrahl liegt, erhält man

$$c_{MHp} = \frac{d c_{aH}}{d\alpha_H} \cdot \frac{F_H \cdot r_H}{F \cdot l_F} \cdot \left\{ \left(\alpha_{w0} + \frac{d\alpha_H}{d\alpha} \cdot \alpha + \varkappa_H - \varkappa\right) - \frac{F_{Hp}}{F_H} \cdot \left(\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w - \Delta R\right) \right\} \quad . . . (37\text{e})$$

Der Einfluß eines Rumpfes und der Motorgondeln ist in bekannter Weise [9, 10] zu berücksichtigen und hier der Einfachheit halber fortgelassen.

Zur Einführung der zusätzlichen Abwindwinkel im Bereich des Luftschraubenstrahles sollen noch einige Erklärungen gegeben werden. Mit der Annahme, daß die Schubbelastung der Schraubenkreisfläche konstant, der Schraubenschub in Achsrichtung der Schraube vom Anstellwinkel unabhängig und die Normalkraft $N_p = f\ (\alpha_p)$ die einzige durch die Schräganblasung neu entstehende Kraft ist — wenn man von dem noch entstehenden Giermoment absieht —, erhält man die Abwindwinkel α_{wp} und $\alpha_{wp}{}^*$ für einen nicht durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahl mit den Formeln (6) und (16). Vernachlässigt ist in diesen Formeln der Einfluß der Reibungskräfte, die den schräg angeblasenen Schraubenstrahl nach oben zu krümmen, seitlich abzulenken und auszubreiten versuchen. Wenn jetzt ein Tragflügel durch den Schraubenstrahl gesteckt wird, ist es erforderlich, die hierdurch am Tragflügel neu entstehenden Kräfte und den hierdurch hervorgerufenen Abwindwinkel zu bestimmen, der dem bereits ohne Schraubenstrahleinfluß berechneten Abwindwinkel zu überlagern ist. Bei der Berechnung der am Tragflügel durch den Schraubenstrahl neu entstehenden Kräfte muß die Lage und die Einflußbreite des Schraubenstrahls zur tragenden Linie so weit beachtet werden, daß eine gute Übereinstimmung mit der Wirklichkeit erzielt wird, was anscheinend dem Verfahren von Smelt/Davies gelungen ist. Die Abwindwinkelberechnung für diese Zusatzkräfte am Tragflügel (s. Formel 36) ist nur in sehr vereinfachter Form durchgeführt worden; der Betrag des Abwindwinkels $\Delta\alpha_w$ wird also fehlerbehaftet sein. Es wird allerdings angenommen, daß die Änderung des Abwindwinkels mit dem Anstellwinkel, auf die es hier eigentlich nur ankommt, bereits genau genug erfaßt ist; Windkanalversuche zur Untersuchung dieser Annahme sind also erwünscht. Schließlich ist die Kraftänderung am Höhenleitwerk durch die nur im »Bereich des Schraubenstrahls« wirksamen Abwindwinkeländerungen und durch die im Schraubenstrahl wirksame Staudruckerhöhung nur sehr vereinfacht nach der Streifenmethode angesetzt. Alle diese Vereinfachungen haben aber in einem Fall, wo eine Überprüfung durch einen Windkanalversuch möglich war (s. Bild 14, 15 und 16), eine so gute Übereinstimmung im Endergebnis zwischen der Rechnung und dem Versuch ergeben, daß sie zumindest für Überschlagrechnungen bestehen bleiben dürfen.

IV. Durchführung der Rechnung.

Die Vielzahl der Einflußgrößen der Gl. (37) macht es erforderlich, den Gang der Rechnung kurz darzustellen:

1. Berechnung der Längsmomentenbeizahl $c_{MFS} = f\ (\alpha)$ für das Flugzeug ohne Höhenleitwerk und ohne Schrauben in bekannter Weise.
2. Bestimmung der Schraubenabmessungen und ihrer Kennwerte: $c_p = f\ (\lambda)$ u. $c_s = f\ (\lambda)$. Berechnung von D^* und D_H [s. Formel (11) u. (14)].
3. Berechnung der Abhängigkeit $c_s{}^* = f\ (c_a,\ G)$ für die Vollgasmotorleistung des Flugzeugs [s. Formel (2)].
4. Berechnung der c_a-Erhöhung Δc_a durch den Schraubenstrahl [s. Formel (29)].
5. Bestimmung der Größen l_δ, a_δ, b_δ und F_δ aus einer Übersichtszeichnung des Flugzeugs und Berechnung von $\frac{q_S}{q}$, $c_{a\delta p}$ und $c_{t\delta p}$ [s. Formel (12) u. (34)]. Die Längsmomentenbeizahl Δc_{MFSp} ist somit zu berechnen.
6. Bestimmung der Größen m und n und Berechnung von c_{np} [s. Formel (5)]. Die Längsmomentenbeizahl Δc_{Mp} kann hiermit berechnet werden.
7. Neben den bereits für die Stabilitätsrechnung ohne Schrauben benötigten Größen muß jetzt noch bestimmt werden: F_{Hp}, F_{Hp}^*, $\frac{q_H}{q}$ [s. Formel (10)] und die Abwindwinkel α_{wp} [s. Formel (16)], $\alpha_{wp}{}^*$ [s. Formel (6)], $\Delta\alpha_{wp}$ [s. Formel (36)] und ΔR [s. Formel (28)]. Anschließend Berechnung der Längsmomentenbeizahl c_{MHp}.

V. Anwendung des Verfahrens zur Nachrechnung eines Windkanal-Versuches.

Zur Nachprüfung der in den vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten Formeln zur Berechnung des Einflusses der Schrauben auf den Verlauf der Längsmomente wird im folgenden das Ergebnis eines Windkanalversuchs nachgerechnet. Der Versuch an dem Modell ohne Schrauben wird dabei als Grundlage des Vergleichs der Rechnung mit der Messung benutzt; d. h. es wird nur die Änderung der Auftriebsbeizahl und der Längsmomentenbeizahl durch die laufenden Schrauben gegenüber dem Zustand ohne Schrauben berechnet und mit dem entsprechenden Ergebnis der Windkanalmessung verglichen. Das Windkanalergebnis an dem Modell ohne Schrauben ist also weitgehend in die Rechnung eingebaut.

Die Änderung der Auftriebsbeizahl erhält man aus der Formel (29)

$$\Delta c_a = \frac{F_\delta}{F} \cdot s \left[K_1 \cdot c_{a\delta} - K_2 \cdot \left(\frac{d\,c_a}{d\,\alpha}\right)_{\delta\infty} \cdot \Delta\,\alpha \right].$$

Die Änderung der Längsmomentenbeizahl ergibt sich aus (37)

$$\begin{aligned}\Delta c_M = c_{MP} \cdot \left(\frac{q_S}{q} - 1\right) \cdot \frac{l_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} + \left(c_{a\delta p} \cdot \frac{q_S}{q} - c_{a\delta}\right) \\ \times \frac{a_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} + \left(c_{t\delta p} \cdot \frac{q_S}{q} - c_{t\delta}\right) \cdot \frac{b_\delta}{l_F} \cdot \frac{F_\delta}{F} + c_{np} \cdot \frac{m}{l_F} \\ + c_s{}^* \cdot \frac{n}{l_F} - \frac{d\,c_{aH}}{d\,\alpha_H} \cdot \frac{F_{Hp} \cdot r_H}{F \cdot l_F} \cdot (\alpha_{wp} + \alpha_{wp}{}^* + \Delta\alpha_w).\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Längsmomentenbeizahl des Höhenleitwerks bei laufenden Schrauben konnte der Faktor $\frac{q_H}{q} = 1$ gesetzt werden, da Druckverteilungsmessungen am Ort des Höhenleitwerkes ergaben, daß der Schraubenstrahl bei Reisedrosselstellung des Motors im Bereich Schnellflug bis steiles Steigen immer mehr als eine Leitwerkstiefe unterhalb des Leitwerks lag. Die Luftkraftbeizahlen c_{MP}, $c_{a\delta p}$ und $c_{t\delta p}$ konnten Profilmessungen aus dem gleichen Kanal entnommen werden. Die Schubzahl $c_s{}^*$ wurde aus einer Widerstandsmessung bei $c_a = 0$ mit verschiedenen Schraubendrehzahlen bzw. ohne Schrauben berechnet. Die auf diese Weise erhaltene Abhängigkeit der Schubzahl vom Fortschrittsgrad der Schraube wurde auch für alle anderen Anstellwinkel [5] als gültig angenommen; die Abhängigkeit des Schraubenfortschrittsgrades von der Auftriebszahl wurde rechnerisch unter Verwendung von Schraubenmessungen für die Reisedrosselstellung des Motors berechnet und bei der Messung der Längsmomentenbeizahl im Windkanal genau eingehalten. Die dieser Rechnung zugrunde gelegten Schraubenmessungen wurden ebenfalls bei der Berechnung von c_{np} verwendet. Die Größe

$$\frac{d\,c_{aH}}{d\,\alpha_H} \cdot \frac{F_H \cdot r_H}{F \cdot l_F} = \frac{d\,c_{MH}}{d\,\alpha} \cdot \frac{d\,\alpha}{d\,\alpha_H}$$

konnte wieder dem Winkanalversuch entnommen werden, wobei c_{MH} gleich der Differenz der über dem Anstellwinkel aufgetragenen Längsmomentenbeizahlen für das Flugzeug ohne bzw. mit Höhenleitwerk gesetzt wurde.

Das Ergebnis der Rechnung ist in Bild 14 bis 16 mit den Versuchswerten verglichen. Die Rechnung ist jeweils durch die ausgezogene Kurve dargestellt. Die eingetragenen Punkte stellen die entsprechenden Werte des Versuches dar. Bild 14 zeigt die c_a-Erhöhung Δc_a durch den Schraubenstrahl. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch ist gut.

Die Änderung der Längsmomentenbeizahl durch den Schraubenstrahl ist für Reisedrosselstellung Bild 15 zu entnehmen, die außerdem die einzelnen Anteile der Längsmomentenänderung enthält:

Δc_{MFp} enthält den Einfluß des Schraubenstrahls auf den Flügel,

$\Delta c_{Mp} = \Delta c_{Mp}{}' + \Delta c_{Mp}{}''$ enthält den Einfluß der in der Schraubenkreisebene wirkenden Kräfte S_p ($\Delta c_{Mp}{}'$) und N_p ($\Delta c_{Mp}{}''$).

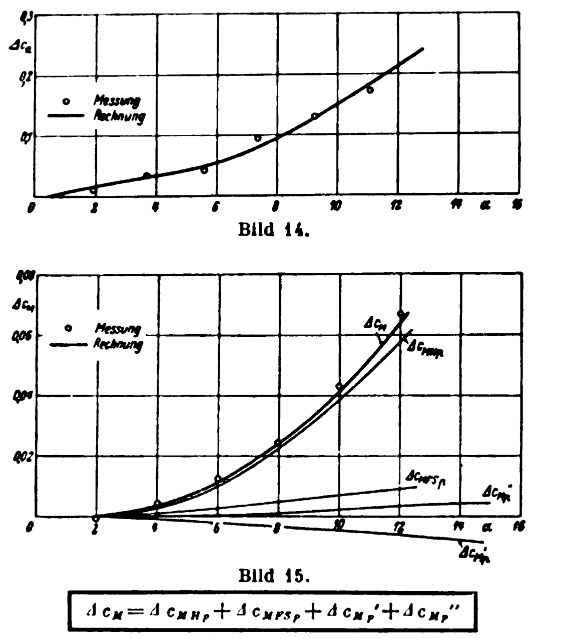


Bild 14.

Bild 15.

$$\Delta c_M = \Delta c_{M H_p} + \Delta c_{M F S_p} + \Delta c_{M_p}' + \Delta c_{M_p}''$$

$\Delta c_{M H_p}$ = Momentenänderung infolge Abwindänderung am Höhenleitwerk,
$\Delta c_{M F S_p}$ = Momentenänderung am Flügel infolge Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl,
$\Delta c_{M_p}'$ bzw. $\Delta c_{M_p}''$ = Momentenänderung infolge Schraubenschub bzw. Normalkraft.

$\Delta c_{M H_p}$ enthält den Einfluß des Schraubenstrahls auf die am Höhenleitwerk wirkenden Kräfte, die im vorliegenden Fall allein beeinflußt sind durch die Abwindwinkeländerung infolge des Schraubenstrahls.

Der Versuch stimmt auch hier gut mit der Rechnung überein, die durch die ausgezogene Kurve dargestellt ist; die eingetragenen Punkte stellen die entsprechenden Werte des Versuches dar. Man erkennt, daß die Anteile $\Delta c_{M F p}$, $\Delta c_{M_p}'$ und $\Delta c_{M_p}''$ klein sind und sich gegenseitig aufheben. Der Anteil $\Delta c_{M F p}$ kann natürlich bei stark gepfeiltem Flügel größer werden; ebenso kann der Anteil $\Delta c_{M_p}'$ bei besonders hoch zum Schwerpunkt gelegenen Schrauben im Gesamthaushalt der Momente eine größere Rolle spielen. Im vorliegenden Fall ist die Hauptquelle für die Stabilitätsänderung in der Abwindwinkeländerung am Höhenleitwerk zu suchen, die deshalb in Bild 16 gesondert aufgetragen ist.

Die Abwindwinkel α_{wp} bzw. $\Delta\alpha_w$, die aus der vektoriellen Addition der Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl bzw. aus der Auftriebsänderung am Flügel entstanden sind, sind in diesem Fall gleich groß und am wirkungsvollsten für die Änderung der Längsmomente. Der Abwind infolge der Normalkraft N_p der schräg angeblasenen Schraube ist dagegen nur höchstens ¼ so groß. α_w ist der Abwindwinkel ohne Schraubenstrahl und dem Windkanalversuch entnommen. $\alpha_{w\,ges} = \alpha_w + \alpha_{wp} + \Delta\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^*$ stellt den Abwindwinkel für den Leitwerksteil dar, der in der Grundrißprojektion des Flugzeugs im Schraubenstrahl liegt (s. Bild 12). Den Abwind in der vorgeschlagenen Form nach der »Streifenmethode« für die Berechnung des Verlaufs der Längsmomentenbeizahl $c_M = f(\alpha)$ einzusetzen, hat sich damit im vorliegenden Fall als ausreichend genau erwiesen. Weitere Auswertungen von Windkanalversuchen müssen ergeben, ob diese Methode allgemein zu befriedigenden Ergebnissen führt. Es muß aber hier noch erwähnt werden, daß der vorliegende Windkanalversuch sich besonders gut für eine Nachrechnung eignete, weil durch eine Gesamtdruckmessung am Höhenleitwerk festgestellt wurde, daß das Leitwerk außerhalb des Schraubenstrahls lag und der Einfluß der Strahldrehung und des erhöhten Schraubenstrahlstaudrucks auf das Höhenleitwerk gleich Null gesetzt werden konnte.

VI. Zusammenfassung.

Das durch einen Windkanalversuch nachgeprüfte Verfahren zur Berechnung der statischen Längsstabilität im Motorflug zerlegt den Einfluß der Luftschrauben in drei wesentliche Anteile:

1. Einfluß der in der Schraubenkreisebene wirkenden Kräfte.
2. Einfluß der Auftriebs- und Längsmomentenänderung des im Schraubenstrahl liegenden Flügelstückes.
3. Einfluß der Abwindänderung infolge Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl und infolge neu entstehender Auftriebskräfte in der Schraubenkreisebene und am Flügel.

Trotz vieler vereinfachender Annahmen konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch erzielt werden, so daß die Verwendung des beschriebenen Verfahrens für Vergleichs- und Projektzwecke aussichtsreich erscheint.

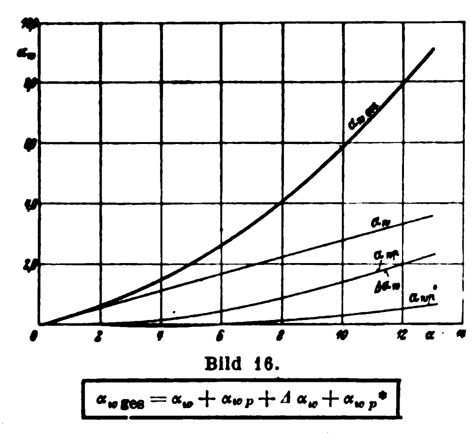


Bild 16.

$$\alpha_{w\,ges} = \alpha_w + \alpha_{wp} + \Delta\alpha_w + \alpha_{wp}^*$$

VII. Schrifttum.

[1] Fuchs-Hopf, Aerodynamik-Mechanik des Flugzeugs, S. 183.

[2] Misztal, Zur Frage der schräg angeblasenen Propeller, AAJ.

[3] Millikan, The Influence of Running Propellers on Airplane Characteristics, J. aer. Sci. Bd. 7 (1940), S. 85.

[4] Gorsky, Untersuchungen über den Einfluß des Rumpfes und der Tragfläche auf das Höhenleitwerk, Luschau Bd. 1 (1935), S. 79.

[5] Durand-Glauert, Aerodynamic Theory, Airplane Propellers, Bd. IV. L.

[6] Smelt-Davies, Estimation of Increase in Lift due to Slipstream, R. u. M. 1788.

[7] Stieß, Über den Einfluß des Luftschraubendrehsinnes auf die Längsstabilität, Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. 217.

[8] Bryant, Performance and Longitudinal Stability of a Single-Engined High Wing Monoplane, R. u. M. 1687.

[9] Munk, Fundamentals of Fluid Dynamics for Aircraft Designers, S. 38.

[10] Vandrey, Zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragflügel und Rumpf, Luftf.-Forschg. Bd. 14 (1937), S. 347.

[11] Multhopp, Zur Aerodynamik des Flugzeugrumpfes. Luftf.-Forschg. (1941), S. 52.

[12] Hoerner, Einfluß von Rumpf und Luftschraube auf die Stabilität (Unveröffentlicht).

[13] Helmbold, Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 3.

[14] Flachsbarth u. Kröber, Experimentelle Untersuchungen an schräg angeblasenen Schraubenpropellern. Z. Flugtechn. Bd. 20 (1929), S. 605.

[15] Stüper, Einfluß des Schraubenstrahls auf Flügel und Leitwerk. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 181.

VIII. Bezeichnungen (siehe auch DIN L 100, Ausgabe vom Juli 1939).

α = Anstellwinkel der Nullauftriebslinie des Flügels,

α_δ = Anstellwinkel der Nullauftriebslinie an einer beliebigen Stelle der Spannweite,

α_i = induzierter Anstellwinkel an dieser Stelle,

α_{eff} = effektiver Anstellwinkel an dieser Stelle,

$\alpha_{\ddot{o}p}$, α_{ip}, $\alpha_{p\,eff}$ = Definition wie für $\alpha_{\ddot{o}}$, α_i und α_{eff} im Bereich des Schraubenstrahls,

$\Delta\alpha_{ip} = \alpha_{ip} - \alpha_i$ = Änderung des induzierten Anstellwinkels durch den Schraubenstrahl,

$\Delta\alpha$ = s. Formel (29) = »Anstellwinkeländerung« durch den Schraubenstrahl am Ort der tragenden Linie des Flügels,

α_p = Anstellwinkel der Schraubenachse,

$\alpha_{Hp} = \alpha_H - (\alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w + \Delta R) = \alpha - \alpha_{w\,ges} + \varkappa_H - \varkappa$ = Anstellwinkel des Höhenleitwerks im Bereich des Schraubenstrahls, d. h. Anstellwinkel der Fläche F_{Hp}^*,

$\alpha_H = \alpha - \alpha_w + \varkappa_H - \varkappa$ = Anstellwinkel des Höhenleitwerks ohne Schraubenstrahl,

$\alpha_w = \alpha_{w0} + \frac{d\alpha_H}{d\alpha} \cdot \alpha$ = Abwindwinkel am Ort des Höhenleitwerks ohne Schraubenstrahl,

α_{wp} Abwindwinkel infolge Schraubenschub S_p am Ort des Höhenleitwerks gemessen,

α_{wp0} Abwindwinkel wie α_{wp} jedoch am Ort der Schraubenkreisebene gemessen,

α_{wp}^* = Abwindwinkel infolge Schraubennormalkraft N_p am Ort des Höhenleitwerks gemessen,

$\Delta\alpha_w$ = Abwindwinkel infolge Auftriebserhöhung am Flügel durch den Schraubenstrahl am Ort des Höhenleitwerks gemessen,

$\varkappa_H$ = Einstellwinkel des Höhenleitwerks zur Rumpflängsachse,

$\varkappa_p = \alpha_p - \alpha + \varkappa$ = Einstellwinkel der Schraubenachse zur Rumpflängsachse,

$\varkappa$ = Einstellwinkel des Flügels zur Rumpflängsachse,

ΔR = Ablenkungswinkel, den der Schraubenstrahl durch Schräganblasung am Ort des Höhenleitwerkes erfährt,

ΔR_0 = wie ΔR, jedoch am Ort der tragenden Linie des Flügels,

Δt = Änderung des Höhenleitwerkanstellwinkels durch die Schraubenstrahldrehung im Bereich der Höhenleitwerksfläche F_{Hp}^*,

$\Theta = \alpha_{wp} + \alpha_{wp}^* + \Delta\alpha_w$ = »Anstellwinkel« zwischen Schraubenstrahl und Strömungsrichtung ohne Schraubenstrahl am Ort des Höhenleitwerks,

c_a = Auftriebsbeizahl des Flügels ohne Schraubenstrahleinfluß, bezogen auf $q \cdot F$,

$c_{a\ddot{o}}$ = örtliche Auftriebsbeizahl des Flügels ohne Schraubenstrahleinfluß im Bereich des Schraubenstrahls, bezogen auf q und die im Schraubenstrahl liegende Flügelfläche $z \cdot D^* \cdot l_{\ddot{o}} = F_{\ddot{o}}$,

$c_{ap} = c_a + \Delta c_a$ = Auftriebsbeizahl des Flügels mit Schraubenstrahleinfluß, bezogen auf $q \cdot F$,

Δc_a = Erhöhung der Auftriebsbeizahl des Flügels durch den Schraubenstrahleinfluß, bezogen auf $q \cdot F$,

$c_{a\ddot{o}p}$ = örtliche Auftriebsbeizahl des Flügels mit Schraubenstrahleinfluß im Bereich des Schraubenstrahls bezogen auf $q_s \cdot F_{\ddot{o}}$. Siehe auch Formel (34),

v = Strömungsgeschwindigkeit,

Δv = Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl infolge Schub S_p,

Δv_0 = wie Δv, jedoch am Ort der Schraubenebene,

Δv_∞ = wie Δv, jedoch in großer Entfernung hinter der Luftschraube,

Δv_∞^* = Zusatzgeschwindigkeit senkrecht zur Schraubenachsrichtung infolge Normalkraft N_p in großer Entfernung hinter der Schraube,

v_t = Tangentialgeschwindigkeit durch Schraubenstrahldrehung am Ort des Höhenleitwerks,

q = Staudruck der ungestörten Strömung,

Δq_∞ = Zusatzstaudruck im Schraubenstrahl in großer Entfernung hinter der Schraube,

$q_s = q + \Delta q$ = Staudruck im Schraubenstrahl,

$q_H = q + \Delta q_H$ = Staudruck im Schraubenstrahl am Ort des Höhenleitwerks,

c_{MP} = Längsmomentenbeizahl eines Flügelschnittes bezogen auf seinen Pol*,

c_{MFP} = Längsmomentenbeizahl des Flügels, bezogen auf den Pol des Flügels,

c_{MFS} = Längsmomentenbeizahl des Flügels, bezogen auf den Schwerpunkt,

Δc_{MFSp} = Änderung der Längsmomentenbeizahl c_{MFS} des Flügels durch den Schraubenstrahl,

$\Delta c_{Mp} = \Delta c_{Mp}' + \Delta c_{Mp}''$ = Längsmomentenbeizahl der in der Schraubenkreisebene wirkenden Kräfte S_p und N_p,

c_{Mp} = Längsmomentenbeizahl des ganzen Flugzeugs bei Anwesenheit eines Schraubenstrahls bezogen auf den Schwerpunkt,

c_{MH} = Längsmomentenbeizahl des Höhenleitwerks bezogen auf den Schwerpunkt,

$\Delta c_{MHp} = c_{MH} - c_{MHp}$ = Änderung der Längsmomentenbeizahl c_{MH} des Höhenleitwerks durch den Schraubenstrahl,

S = Flugzeugschwerpunkt,

D^* = Schraubenstrahldurchmesser am Ort der tragenden Linie des Flügels,

D_H = Schraubendurchmesser am Ort der tragenden Linie des Höhenleitwerke,

D_m = »mittlerer« Schraubenstrahldurchmesser,

$\lambda = \frac{v}{n \cdot D}$ = Schraubenfortschrittsgrad,

$c_p = \frac{N}{\varrho \cdot n^3 \cdot D^5}$ = Leistungswert der Schraube,

$c_{np} = \frac{N_p}{q \cdot F}$ = Normalkraftbeizahl der Schraube,

N_p = Normalkraft der schräg angeblasenen Schraube,

S_p = Schraubenschub,

$c_s = \frac{S_p}{q \cdot F_p}$ = Schubbelastungsgrad,

$c_s^* = \frac{z \cdot S_p}{q \cdot F}$ = Schubzahl des Flugzeugs,

$s_0 = \frac{\Delta v_0}{v} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{1 + c_s} - 1)$ = Faktor zur Berechnung der Zusatzgeschwindigkeit in der Schraubenkreisebene,

* Pol ist eine bei B. & V. übliche Kurzbezeichnung für den Neutralpunkt.

$s = \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+c_s} - 1)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{D}{m_p}\right)^2}}\right)$ = Faktor zur Berechnung der Zusatzgeschwindigkeit im Schraubenstrahl in der Entfernung m_p hinter der Schraube,

n_s = Schraubendrehzahl,

z = Schraubenanzahl,

η_{st} = Störwirkungsgrad (s. Z. Flugtechn. (1931), S. 700),

N_s = Luftkraft normal zur Strahlachse des schräg angeblasenen Schraubenstrahl-Zylinders,

$c_{n,s} = \frac{N_s}{q \cdot D}$ = Luftkraftbeizahl des schräg angeblasenen Zylinders,

F_{Hp} = Vom Schraubenstrahl beeinflußte Höhenleitwerksfläche,

F_{Hp}^* = Vom Schraubenstrahlstaudruck getroffene Höhenleitwerksfläche,

$F_s = z \cdot l_s \cdot D^*$ = »örtliche« Flügelfläche, l_s = »örtliche« Flügeltiefe } im Schraubenstrahlbereich,

l_F = aerodynamische Flügeltiefe des Gesamtflügels,

r_p = Abstand des Höhenleitwerkpoles von der Schraubenebene,

m, n = Abstand des Flugzeugschwerpunktes S von der Luftschraube parallel bzw. senkrecht zur Schraubenachse gemessen,

m_p, n_p = Abstand des Tragflügelpols von der Luftschraube parallel bzw. senkrecht zur Schraubenachse gemessen,

K_1, K_2 = Konstanten zur Berechnung der c_a-Erhöhung durch den Schraubenstrahl (s. Bild 10),

k = Faktor zur Berechnung der Schraubennormalkraft (s. Bild 5),

$\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{\infty} = f\left(\frac{d}{l}\right)$ = c_a-Anstieg des Profils im Schraubenstrahlbereich in zweidimensionaler Strömung gemessen,

$\uparrow$ = Zeichen für vektorielle Addition.

Indices:

s = Örtliche Größen,

p = durch Luftschraube entstandene oder beeinflußte Größen.

Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage*).

II. Numerischer Teil.

Von K. Krienes und Th. Schade.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, E. V., Institut für instationäre Vorgänge.

Im Anschluß an die Arbeit des zweitgenannten Verfassers, in welcher der analytische Teil des Problems der schwingenden kreisförmigen Tragfläche behandelt wurde [1], werden im vorliegenden Bericht die aerodynamischen Beiwerte für Abwindverteilungen, die beliebige Funktionen 2. Grades sind, berechnet, und zwar im Bereich der reduzierten Frequenzen $\omega = 0$ bis 2,0. In einigen Fällen wird auch die Druckverteilung ermittelt. Die rechnerischen Ergebnisse sind durch graphische Darstellungen veranschaulicht.

Gliederung.

I. Einleitung.

Wie im I. Teil [1] dieser Arbeit bereits ausführlich erläutert ist, wird das Druck- oder Beschleunigungspotential angesetzt als Summe von Potentialfunktionen erster und zweiter Art. Die Funktionen erster Art erhält man mittels eines Separationsansatzes aus der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ nach Einführung von elliptischen Koordinaten:

$$\varphi_n^m(\mu,\eta,\vartheta) = \frac{1}{i^{n-m+1}}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,C_n^m\,P_n^m(\mu)\,Q_n^m(i\eta)\cdot\frac{\cos m\vartheta}{\sin m\vartheta}\,e^{i\nu t} \quad (1,1)$$

Die Potentialfunktionen zweiter Art ergeben sich durch Differentiation von φ_{n+1}^n nach dem Grundkreisradius c bei konstanten x, y, z.

$$\varphi_n = C_n\,\frac{\mu\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}}{(\mu^2+\eta^2)\,(1+\eta^2)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{\cos n\vartheta}{\sin n\vartheta}\,e^{i\nu t} \quad (1,2)$$

Die von diesen Potentialfunktionen induzierten Abwärtsgeschwindigkeiten an der tragenden Fläche — kurz mit Abwind bezeichnet — sind im ersten Teil berechnet worden und sollen hier noch einmal zusammengestellt werden.

Das Potential

$$\varphi_s = i\,\omega\,\varphi_1^0 \quad (1,3)$$

liefert

$$W_s = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{V}e^{i\nu t} + \frac{1}{V}e^{i(\nu t-\omega x)}\left[\frac{\pi}{2}\,\omega\,H_0^{(2)}(\omega x_0) + \int_1^\infty \frac{x_0\,s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\,\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\right] \quad (1,4)$$

$$\varphi_k = i\,\omega\,\varphi_2^1 + \frac{3}{2}\,\varphi_1^0 \quad (1,5)$$

ergibt

$$W_k = -\frac{3\pi}{4}\frac{1}{V}\,x\cdot e^{i\nu t} + \frac{1}{V}e^{i(\nu t-\omega x)}\Bigg[\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\omega\frac{d}{d\omega}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\,i\,H_0^{(2)}(\omega x_0) + \frac{i}{2}\left(\omega-3\frac{d}{d\omega}\right)\int_1^\infty \frac{x_0\,s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\Bigg] \quad (1,6)$$

$$\varphi_h^1 = i\,\omega\,\varphi_3^0 - 5\,\varphi_2^1 - \frac{3}{2}\,i\,\omega\,\varphi_1^0$$

ergibt

$$W_h^1 = \frac{15\pi}{8}\frac{1}{V}\,(x^2+y^2)\,e^{i\nu t} + \frac{1}{V}e^{i(\nu t-\omega x)}\left[-\frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,\omega\,H_0^{(2)}(\omega x_0) - \frac{5}{2}\int_1^\infty \frac{x_0\,s\cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2+1-x_0^2}\cdot\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\right] \quad (1,8)$$

(Der zu kompensierende Term (vgl. Abschn. 2) ist hier bis auf den Faktor $-\frac{5}{2}$ derselbe wie bei der Abwindfunktion W_s (1,4)).

$$\varphi_h^2 = i\,w\,\varphi_3^2 + \frac{5}{2}\,\varphi_2^1 \quad (1,9)$$

liefert

*) P 3119.



$$W_K^2 = \frac{15}{16}\pi \cdot \frac{1}{V}(y^2 - x^2) e^{i\nu t} + \frac{1}{V} e^{i(\nu t - \omega x)} \left[\left(\frac{5}{4} i\omega + \frac{15}{2} i \frac{d}{d\omega} + \frac{15}{4} i\omega \frac{d^2}{d\omega^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega x_0) \right) \right.$$
$$+ \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\omega \frac{d}{d\omega} - \frac{15}{4} \frac{d^2}{d\omega^2} \right) \int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$
$$\left. - \frac{1}{4} i\omega \int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds \right] \quad (1,10)$$

Von den in y antisymmetrischen Potentialfunktionen ergibt

$$\varphi_K = i\omega \overline{\varphi}_2^1 \quad (1,11)$$

$$W_K = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{1}{V} \cdot y e^{i\nu t} + \frac{1}{V} e^{i(\nu t - \omega x)} \left[\frac{3}{2} y \cdot \omega \cdot \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(\omega x_0) \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2} y \int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{y}{2} i\omega \int_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} \right] \quad (1,12)$$

und

$$\varphi_K^3 = i\omega \overline{\varphi}_3^2 + \frac{5}{2} \overline{\varphi}_2^1 \quad (1,13)$$

$$W_K^3 = -\frac{15\pi}{8} \frac{1}{V} x \cdot y \cdot e^{i\nu t} + \frac{1}{V} e^{i(\nu t - \omega x)} \cdot y \cdot \left[\left(\frac{15}{4} + \frac{15}{4} \omega \frac{d}{d\omega} \right) \left(-\frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(\omega x_0) \right) \right.$$
$$- \frac{5}{4} \int_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} + \left(\frac{5}{4} i\omega + \frac{15}{4i} \frac{d}{d\omega} \right) \int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$
$$\left. + \frac{i\omega}{2} \int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} \right] \quad (1,14)$$

Dabei ist

$$\int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = i Q_0(y) \operatorname{Sin}(\omega y) + \frac{\pi}{2} P_0(y) \operatorname{Cof}(\omega y)$$
$$- \frac{\pi}{2} \int_0^\omega H_0^{(2)}(\overline{\omega} x_0) \operatorname{Cof}[(\omega - \overline{\omega}) y] d\overline{\omega} \quad (1,15)$$

$$\int_1^\infty \frac{x_0^2 s^2 - 1 + x_0^2}{(x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{\sqrt{s^2-1}} ds = -Q_1(y) \operatorname{Cof}(\omega y) + \frac{\pi}{2} i P_1(y) \operatorname{Sin}(\omega y)$$
$$- \frac{\pi}{2} i\omega P_0(y) \operatorname{Cof}(\omega y) + \omega Q_0(y) \operatorname{Sin}(\omega y) + \frac{\pi}{2} i \int_0^\omega (\omega - \overline{\omega}) H_0^{(2)}(\overline{\omega} x_0) \operatorname{Cof}[(\omega - \overline{\omega}) y] d\overline{\omega} \quad (1,16)$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = -i \int_0^\omega d\omega \int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{x_0^2 s^2 + 1 - x_0^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} + \frac{1}{y} Q_0(y) \quad (1,17)$$

$$\int_1^\infty \frac{x_0 s \cdot e^{-\omega i x_0 s}}{(x^2 s^2 + 1 - x_0^2)^2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{2iy} \left(-Q_1(y) \operatorname{Sin}(\omega y) \right.$$
$$+ \frac{\pi}{2} i P_1(y) \operatorname{Cof}(\omega y) + Q_0(y) \omega \operatorname{Cof}(\omega y) - \frac{\pi}{2} i P_0(y) \omega \operatorname{Sin}(\omega y)$$
$$\left. + \frac{\pi}{2} i \int_0^\omega (\omega - \overline{\omega}) H_0^{(2)}(\overline{\omega} x_0) \operatorname{Sin}[(\omega - \overline{\omega}) y] d\overline{\omega} \right) \quad (1,18)$$

Die Abwindfunktionen 2. Art lauten symmetrisch:

$$W_n = \frac{1}{V} e^{i(\nu t - \omega x)} (-1)^{n+1} \left[\frac{i^n}{x_0} \int_0^\omega \frac{(\omega - \overline{\omega})^{n-1}}{(n-1)!} \overline{\omega} \frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(\overline{\omega} x_0) \operatorname{Cof}[(\omega - \overline{\omega}) y] d\overline{\omega} \right.$$
$$+ \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \omega^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \frac{dP_1}{dy} \operatorname{Cof}(\omega y) - i \frac{dQ_1}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) \right)$$
$$- \frac{i^{n-2}}{(n-2)!} \omega^{n-2} \left(\frac{dQ_2}{dy} \operatorname{Cof}(\omega y) + \frac{\pi}{2} i \frac{dP_2}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) \right)$$
$$\left. - \frac{i^{n-3}}{(n-3)!} \omega^{n-3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{dP_3}{dy} \operatorname{Cof}(\omega y) - i \frac{dQ_3}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) \right) + \ldots \right], \quad (1,19)$$

antisymmetrisch

$$\overline{W}_n = \frac{1}{V} e^{i(\nu t - \omega x)} (-1)^n \left[\frac{i^{n+1}}{x_0} \int_0^{\omega} \frac{(\omega - \overline{\omega})^{n-1}}{(n-1)!} \overline{\omega} \frac{\pi}{2} i H_1^{(1)} (\overline{\omega} x_0) \operatorname{Sin} [(\omega - \overline{\omega}) y] d\overline{\omega} \right.$$
$$+ \frac{i^n}{(n-1)!} \omega^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} \frac{dP_1}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) - i \frac{dQ_1}{dy} \operatorname{Cos}(\omega y) \right)$$
$$- \frac{i^{n-1}}{(n-2)!} \omega^{n-2} \left(\frac{dQ_2}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) + \frac{\pi}{2} i \frac{dP_2}{dy} \operatorname{Cos}(\omega y) \right)$$
$$\left. - \frac{i^{n-2}}{(n-3)!} \omega^{n-3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{dP_3}{dy} \operatorname{Sin}(\omega y) - i \frac{dQ_3}{dy} \operatorname{Cos}(\omega y) \right) + \ldots \right] \quad (1,20)$$

II. Kompensationsrechnung.

Die Abwindfunktionen 1. Art lassen sich nach Abschnitt 1 allgemein in der Form

$$W_\sigma = f_\sigma (x, y) e^{i \nu t} + g_\sigma (y, \omega) e^{i(\nu t - \omega x)} \quad (2,1)$$

schreiben, wobei $f_\sigma (x, y)$ ein Polynom in x und y ist, während $g_\sigma (y, \omega)$ transzendente Funktionen enthält. Dieser zweite Term wird »kompensiert« mit den Abwindfunktionen 2. Art, die von der Form sind

$$W_n = h_n (y, \omega) e^{i(\nu t - \omega x)} \quad (2,2)$$

Die Bedingung lautet

$$W_\sigma + \sum_{n=0}^{\infty} K_{\sigma, n} W_n = f_\sigma (x, y) e^{i \nu t} \quad (2,3)$$

das heißt

$$-g_\sigma (y, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{\sigma, n} h_n (y, \omega) \quad (2,4)$$

Um zu einem zahlenmäßigen Ergebnis für die Koeffizienten $K_{\sigma, n}$ zu gelangen, wird die unendliche Reihe mit $n = 4$ abgebrochen. Weiterhin wird die Gl. (2, 4) im Fall der symmetrischen Abwindfunktionen mit $\cos^2 \alpha \cos 2 k \alpha \, d\alpha$ ($k = 0, 1, 2$), im antisymmetrischen Fall mit $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cos 2 k \alpha \, d\alpha$ ($k = 0,1$) multipliziert und dann von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ integriert. Damit erhält man ein erstes Gleichungssystem für die $K_{\sigma, n}$:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_\sigma (\omega, \sin \alpha) \cos^2 \alpha \cos 2 k \alpha \, d\alpha$$
$$= \sum_n K_{\sigma, n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n (\omega, \sin \alpha) \cos^2 \alpha \cos 2 k \alpha \, d\alpha \qquad k = 0; 1; 2 \quad (2,5)$$

bzw. im antisymmetrischen Fall:

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{g}_\sigma \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cos 2 k \alpha \, d\alpha$$
$$= \sum_n \overline{K}_{\sigma, n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{h}_n (\omega, \sin \alpha) \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cos 2 k \alpha \, d\alpha \qquad k = 0; 1 \quad (2,6)$$

III. Die Abflußbedingung.

Die Koeffizienten $K_{\sigma, n}$ der Potentialfunktionen 2. Art müssen weiterhin so gewählt werden, daß die Auftriebsdichte an der Hinterkante der tragenden Fläche verschwindet (vgl. Teil I). Die hierfür zu erfüllende Bedingung lautet im symmetrischen Fall:

$$K_{2\lambda+1} = \frac{4}{\pi} (-1)^{\lambda+1} (2\lambda + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k K_{2k}}{(2\lambda+1)^2 - (2k)^2}, \quad (3,1)$$

für die antisymmetrischen Funktionen

$$\overline{K}_{2k} = -\frac{4}{\pi} (-1)^k 2k \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \overline{K}_{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)^2 - (2k)^2} \quad (3,2)$$

Da in der vorliegenden Rechnung nur die Potentialfunktionen 2. Art bis $n = 4$ berücksichtigt werden, sind die in (3, 1) und (3, 2) auftretenden unendlichen Summen bei den entsprechenden Gliedern abzubrechen.

IV. Die Auflösung der Gleichungssysteme.

Drückt man die Koeffizienten $K_{\sigma,1}$ und $K_{\sigma,3}$ in Gl. (2, 5) mittels (3, 1) durch $K_{\sigma,0}$, $K_{\sigma,2}$ und $K_{\sigma,4}$ aus, das heißt

$$\left. \begin{aligned} K_{\sigma,1} &= -\frac{4}{\pi} \left(K_{\sigma,0} + \frac{1}{3} K_{\sigma,2} - \frac{1}{15} K_{\sigma,4} \right) \\ K_{\sigma,3} &= \frac{12}{\pi} \left(\frac{1}{9} K_{\sigma,0} - \frac{1}{5} K_{\sigma,2} - \frac{1}{7} K_{\sigma,4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4,1)$$

und setzt weiterhin:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n (\omega, \sin \alpha) \cos^2 \alpha \cos 2 k \alpha \, d\alpha &= h_{n, k} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_\sigma (\omega, \sin \alpha) \cos^2 \alpha \cos 2 k \alpha \, d\alpha &= g_{\sigma, k} \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

so ergibt sich für (2, 5)

$$K_{\sigma,0} \cdot M_{0,k} + K_{\sigma,2} \cdot M_{2,k} + K_{\sigma,4} \cdot M_{4,k} = -g_{\sigma,k} \qquad k = 0; 1; 2, \ldots \quad (4,3)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} M_{0,k} &= h_{0,k} - \frac{4}{\pi} h_{1,k} + \frac{4}{3\pi} h_{3,k} \\ M_{2,k} &= -\frac{4}{3\pi} h_{1,k} + h_{2,k} - \frac{12}{5\pi} h_{3,k} \\ M_{4,k} &= \frac{4}{15\pi} h_{1,k} - \frac{12}{7\pi} h_{3,k} + h_{4,k} \end{aligned} \right\} \quad (4,4)$$

ist. Die drei komplexen Gl. (4, 3) für die komplexen Unbekannten $K_{\sigma,0}$, $K_{\sigma,2}$ und $K_{\sigma,4}$ werden in Real- und Imaginärteil zerlegt, was folgende 6 Gleichungen liefert, die der Kürze halber in Matrizenform geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}^r - \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{k}^i &= -\mathfrak{c} \\ \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{k}^r + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}^i &= -\mathfrak{d} \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} M_{0,0}^r & M_{2,0}^r & M_{4,0}^r \\ M_{0,1}^r & M_{2,1}^r & M_{4,1}^r \\ M_{0,2}^r & M_{2,2}^r & M_{4,2}^r \end{pmatrix} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} M_{0,0}^i & M_{2,0}^i & M_{4,0}^i \\ M_{0,1}^i & M_{2,1}^i & M_{4,1}^i \\ M_{0,2}^i & M_{2,2}^i & M_{4,2}^i \end{pmatrix} \quad (4,6)$$

$$\mathfrak{k}^r = \begin{pmatrix} K_{\sigma,0}^r \\ K_{\sigma,2}^r \\ K_{\sigma,4}^r \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{k}^i = \begin{pmatrix} K_{\sigma,0}^i \\ K_{\sigma,2}^i \\ K_{\sigma,4}^i \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} g_{\sigma,0}^r \\ g_{\sigma,1}^r \\ g_{\sigma,2}^r \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{d} = \begin{pmatrix} g_{\sigma,0}^i \\ g_{\sigma,1}^i \\ g_{\sigma,2}^i \end{pmatrix} \quad (4,7)$$

Aus den Gl. (4, 5) ergibt sich mit Hilfe der inversen Matrizen $\mathfrak{A}^{-1}$ und $\mathfrak{B}^{-1}$

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k}^r = -(\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{c} + \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{d}) \qquad \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{k}^i = -\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{d} + \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{c} \quad (4,8)$$

wobei

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{B} \quad (4,9)$$

ist. Die Lösungen von (4, 5) sind dann gegeben durch

$$\mathfrak{k}^r = -\mathfrak{U}^{-1} (\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{d}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}^i = \mathfrak{U}^{-1} (\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{c} - \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{d}) \quad (4,10)$$

Für die antisymmetrischen Bewegungen gestalten sich die Rechnungen einfacher, da die Potentialfunktion $\overline{\varphi}_0$ nicht existiert und somit eine komplexe Unbekannte fortfällt.

Dementsprechend brauchen die Gl. (2, 6) nur für $k = 0; 1$ genommen zu werden. Setzt man wieder

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{g}_\sigma(\omega, \sin\alpha) \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cos 2k\alpha\, d\alpha &= \bar{g}_{\sigma,k}; \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{h}_n(\omega, \sin\alpha) \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cos 2k\alpha\, d\alpha &= \bar{h}_{n,k} \end{aligned}\right\} \quad (4, 11)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \bar{K}_{\sigma,2} &= \frac{8}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\bar{K}_{\sigma,1} - \frac{1}{5}\bar{K}_{\sigma,3}\right) \\ \bar{K}_{\sigma,4} &= -\frac{16}{\pi}\left(-\frac{1}{15}\bar{K}_{\sigma,1} + \frac{1}{7}\bar{K}_{\sigma,3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4, 12)$$

nach Gl. (3, 2), so wird aus Gl. (2, 6)

$$\bar{K}_{\sigma,1}\bar{M}_{1,k} + \bar{K}_{\sigma,3}\bar{M}_{3,k} = -\bar{g}_{\sigma,k}; \quad k = 0; 1 \quad (4, 13)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \bar{M}_{1,k} &= \bar{h}_{1,k} - \frac{8}{3\pi}\bar{h}_{2,k} + \frac{16}{15\pi}\bar{h}_{4,k} \\ \bar{M}_{3,k} &= -\frac{8}{5\pi}\bar{h}_{2,k} + \bar{h}_{3,k} - \frac{16}{7\pi}\bar{h}_{4,k} \end{aligned}\right\} \quad (4, 14)$$

Die Auflösung der Gl. (4, 13) geht wie im symmetrischen Fall vor sich, nur daß hier sämtliche Matrizen zweizeilig sind.

Die Aufgabe besteht nun zunächst darin, die Funktionen $g_{\sigma,k}$, $h_{n,k}$ usw. (4, 2; 4, 11) zu bestimmen. Zu diesem Zweck werden die in Abschnitt 1 aufgeführten Abwindfunktionen in Reihen nach ω entwickelt, wobei sich die Koeffizienten als trigonometrische Reihen in α angeben lassen. Nach Ausführung der Integrationen gemäß (4, 2) bzw. (4, 11) erhält man für $g_{\sigma,k}$ und $h_{n,k}$ komplexe Reihen in ω, deren Werte zwischen $\omega = 0$ und $\omega = 2$ in Schritten von 0,2 berechnet wurden. Mit Hilfe von (4, 4) bzw. (4, 14) können dann Real- und Imaginärteil der Gleichungskoeffizienten $M_{n,k}$ bestimmt werden. Da die Bestimmung der Koeffizienten der ω-Reihen $g_{\sigma,k}$ und $h_{n,k}$ einen erheblichen Rechenaufwand erfordert, sei noch darauf hingewiesen, daß man sich für die antisymmetrischen Funktionen die Berechnung der Integrale wesentlich erleichtern kann, wenn man folgende Beziehungen berücksichtigt (vgl. Abschnitt 1):

$$\begin{aligned} &\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cos 2k\alpha \frac{d}{d\omega}\int_0^{\omega} \frac{(\omega-\varpi)^{n-1}}{(n-1)!}\varpi\frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(\varpi\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\varpi)\sin\alpha]\,d\varpi \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cos 2k\alpha\int_0^{\omega}\frac{(\omega-\varpi)^{n-2}}{(n-2)!}\varpi\frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(\varpi\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}[(\omega-\varpi)\sin\alpha]\,d\varpi \\ &+ \cos^2\alpha\cos 2k\alpha\int_0^{\omega}\frac{(\omega-\varpi)^{n-1}}{(n-1)!}\varpi\frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(\varpi\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}[(\omega-\varpi)\sin\alpha]\,d\varpi \quad (4, 15) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cos 2k\alpha\frac{d}{d\omega}[F(y)\,\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha)] = \cos^2\alpha\cos 2k\alpha F(y)\,\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha) \quad (4, 16)$$

Das heißt durch Integration über ω lassen sich die Integrale der antisymmetrischen Funktionen aus den symmetrischen berechnen. In der vorliegenden Arbeit wurden die Beziehungen (4, 15) und (4, 16) benutzt als Rechenkontrolle für die unabhängig voneinander berechneten symmetrischen und antisymmetrischen Integrale. Die Ergebnisse der Gleichungsauflösung sind in Zahlentafeln niedergelegt und graphisch dargestellt.

V. Bestimmung der auf die schwingende Tragfläche wirkenden Luftkräfte.

Setzt man die im vorigen Abschnitt bestimmten Koeffizienten $K_{\sigma,n}$ in Gl. (2, 3) ein, so erhält man

$$W_\sigma + \sum_{n=0}^{4} K_{\sigma,n} W_n \approx f_\sigma(x, y)\, e^{i\nu t} \quad (5, 1)$$

Mittels Linearkombination der $f_\sigma(x, y)$ lassen sich nun die einfachen periodischen Bewegungen des kreisförmigen Tragflügels berechnen, die in folgender Form gegeben sein mögen:

$$z_\sigma = z_\sigma(x, y)\, e^{i\nu t} \quad (5, 2)$$

Dann ist der Abwind

$$W^{(\sigma)} = \frac{d(c z_0)}{dt} = V\left(i\omega z_n(x, y) + \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}\right) e^{i\nu t} \quad (5, 3)$$

Als Beispiel sei im folgenden die Schlagschwingung angegeben:

$$z_A = \frac{A}{c} e^{i\nu t},$$

das heißt

$$W_A = V\frac{A}{c}\cdot i\omega e^{i\nu t}$$

und unter Berücksichtigung von (1, 4) und (5, 1)

$$\begin{aligned} W_A &= -\frac{2}{\pi}V^2\cdot\frac{A}{c} i\omega\cdot f_s(x, y)\, e^{i\nu t} \\ &\approx -\frac{2}{\pi}V^2\cdot\frac{A}{c} i\omega\left[W_s + \sum_{n=0}^{4} K_{s,n} W_n\right]. \end{aligned}$$

Dementsprechend wird das zugehörige Druckpotential

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{2}{\pi}V^2\cdot\frac{A}{c} i\omega\left[\varphi_s + \sum_{n=0}^{4} K_{s,n}\varphi_n\right] \\ &= V^2\cdot\frac{A}{c}\cdot\frac{2}{\pi}\left[\omega^2\varphi_1^0 - i\omega\sum_{n=0}^{4} K_{s,n}\varphi_n\right]. \end{aligned}$$

Nun ist der Drucksprung, das heißt die Auftriebsdichte an der Fläche gegeben durch

$$\Pi(x, y, t) = 2\varrho\varphi_{ob},$$

das heißt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, t) = \frac{\varrho}{2}V^2\cdot\frac{A}{c}\cdot\frac{8}{\pi}\Big[\omega^2\sqrt{1-r^2} \\ - i\omega\sum_{n=0}^{4} K_{s,n}\frac{r^n\cos n\vartheta}{\sqrt{1-r^2}}\Big] e^{i\nu t}. \end{aligned}$$

Einen Beitrag zum Gesamtauftrieb liefern nur φ_1^0 und φ (vgl. Teil I), so daß sich für den Auftrieb bei der Schlagschwingung ergibt:

$$A = \pi\varrho V^2 c^2\cdot\frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{3}\omega^2 + \omega K_{s,0}^i - i\omega K_{s,0}^r\right]\cdot\frac{A}{c} e^{i\nu t}.$$

Das Gesamtmoment, bezogen auf die y-Achse, wird durch φ_2^1 und φ_1 gegeben:

$$M = \pi\varrho V^2 c^3\cdot\frac{8}{3\pi}\left[\omega K_{s,1}^i - i\omega K_{s,1}^r\right]\cdot\frac{A}{c} e^{i\nu t}.$$

In den Zahlentafeln und Kurven sind die Werte der dimensionslosen Koeffizienten k_A und m_A angegeben gemäß der Definition von Küssner:

$$A = \pi\varrho V^2 c^2\cdot k_A\cdot\frac{A}{c} e^{i\nu t},$$

$$M = \pi\varrho V^2 c^3\cdot m_A\cdot\frac{A}{c} e^{i\nu t}.$$

Für die Kippschwingung sehen die Rechnungen folgendermaßen aus:

$$z_B = -\frac{B}{c} \cdot x \cdot e^{i\nu t}.$$

Daraus folgt nach (5, 3)

$$W_B = -\frac{B}{c} \cdot V \cdot (i\omega x + 1)\, e^{i\nu t}$$

$$= B \cdot V^2 i\omega \cdot \frac{4}{3\pi}\left(W_k + \sum_{n=0}^{4} K_{k,n} W_n\right)$$

$$+ B \cdot V^2 \cdot \frac{2}{\pi}\left(W_s + \sum_{n=0}^{4} K_{s,n} W_n\right).$$

Das zugehörige Druckpotential lautet also mit $\varphi_k = i\omega\varphi_2^1 + \frac{3}{2}\varphi_1^0$ und $\varphi_s = i\omega\varphi_1^0$

$$\varphi_B = \frac{B}{C} \cdot V^2 \cdot \frac{2}{\pi}\left[2\, i\omega\varphi_1^0 - \frac{2}{3}\omega^2\varphi_2^1 + \sum_{n=0}^{4}\left(K_{s,n} + \frac{2}{3} i\omega K_{k,n}\right)\varphi_n\right],$$

woraus sich wieder Druckverteilung, Auftrieb usw. bestimmen lassen:

$$A = \pi\varrho V^2 c^2 \cdot \frac{8}{\pi}\left[-K^r_{*,0} - \frac{2}{3}\omega K^i_{k,0} + i\left(\frac{2}{3}\omega + K^i_{*,0} + \frac{2}{3}\omega K^r_{k,0}\right)\right] \cdot B \cdot e^{i\nu t}.$$

$$M = \pi\varrho V^2 c^3 \cdot \frac{8}{3\pi}\left[K^r_{*,1} - \frac{2}{3}\omega K^i_{k,1} - \frac{2}{15}\omega^2 + i\left(K^i_{*,1} + \frac{2}{3}\omega K^r_{k,1}\right)\right] \cdot B \cdot e^{i\nu t}.$$

In ähnlicher Weise geht die Berechnung der Biegeschwingungen sowie der in y antisymmetrischen Bewegungen der Platte vor sich.

$$z_D = \frac{D}{c} \cdot x^2 \cdot e^{i\nu t} \qquad W_D = \frac{D}{c} \cdot V \cdot (i\omega x^2 + 2x)\, e^{i\nu t};$$

$$z_F = \frac{F}{c} \cdot y^2 \cdot e^{i\nu t} \qquad W_F = \frac{F}{c} \cdot V\, i\omega\, y^2 e^{i\nu t};$$

$$z_C = \frac{C}{c} \cdot y \cdot e^{i\nu t} \qquad W_C = \frac{C}{c} \cdot V\, i\omega\, y\, e^{i\nu t};$$

$$z_E = \frac{E}{c} \cdot x \cdot y \cdot e^{i\nu t} \qquad W_E = \frac{E}{c} \cdot V \cdot (i\omega x \cdot y + y)\, e^{i\nu t}.$$

Die zugehörigen Druckpotentiale sind

$$\varphi_D = \frac{D}{c} \cdot V^2 \cdot \frac{8}{3\pi}\left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{20}\omega^2\right)\varphi_1^0 - 2\, i\omega\varphi_2^1 - \frac{\omega^2}{10}\varphi_3^0 + \frac{\omega^2}{5}\varphi_3^2 + \sum_{n=0}^{4}\left(-K_{K,n} + \frac{i\omega}{10} K^1_{B,n} - \frac{i\omega}{5} K^2_{B,n}\right)\varphi_n\right],$$

$$\varphi_F = \frac{F}{c} \cdot V^2 \cdot \frac{4}{15\pi}\left[-\omega^2\varphi_3^0 + \frac{3}{2}\omega^2\varphi_1^0 - 2\omega^2\varphi_3^2 + i\omega\sum_{n=0}^{4}\left(K^1_{B,n} + 2K^2_{B,n}\right)\varphi_n\right],$$

$$\varphi_C = \frac{C}{c} \cdot V^2 \cdot \frac{4}{3\pi}\left[\omega^2\bar\varphi_2^1 - i\omega\sum_{n=1}^{4}\bar K_{K,n}\bar\varphi_n\right],$$

$$\varphi_E = \frac{E}{c} \cdot V^2 \cdot \frac{4}{3\pi}\left[-2\, i\omega\,\bar\varphi_2^1 + \frac{2}{5}\omega^2\bar\varphi_3^2 - \sum_{n=1}^{4}\left(\bar K_{K,n} + \frac{2}{5} i\omega\bar K^3_{B,n}\right)\bar\varphi_n\right].$$

Die Potentialfunktionen φ_n^m und φ_n sind im Teil I angegeben. Ihre Werte auf der Kreisfläche erhält man für $\eta = 0$. Die entsprechenden Auftriebs- und Momentenkoeffizienten sind mit k_D, m_D, k_F, m_F usw. bezeichnet.

VI. Zahlentafeln und Bilder.

Zahlentafeln 1 bis 6 enthalten die Werte der Koeffizienten $K_{\sigma,n}$, aufgespalten in Real- und Imaginärteil, die sich aus der Kompensationsrechnung in Verbindung mit der Abflußbedingung ergeben. Der Imaginärteil $K^i_{\sigma,n}$ ist Null für $\omega = 0$.

Die eingerahmten Werte sind gleich

$$\lim_{\omega \to 0}\left(\frac{K^i_{\sigma,n}}{\omega}\right) = \left[\frac{d\,K^i_{\sigma,n}}{d\omega}\right]_{\omega=0}.$$

Weiterhin sind Real- und Imaginärteil der Auftriebs- und Momentenbeiwerte angegeben für die verschiedenen Schwingungsformen. In den graphischen Darstellungen sind diese in komplexer Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene wiedergegeben.

Bild 11 bis 20 zeigen in perspektivischer Darstellung Real- und Imaginärteil des Druckes bei $\omega = 0$, 1,0, 1,8, bezogen auf den Staudruck $\frac{\varrho}{2} V^2$ und für die Amplituden $\frac{A}{c}$ bzw. $\frac{B}{c} = 1$ usf. Die Werte sind für die Flügelschnitte $\left|\frac{y}{c}\right| = 0$; $= \sin\frac{\pi}{8} = 0{,}383$; $= \sin\frac{\pi}{4} = 0{,}707$; $= \sin\frac{3\pi}{8} = 0{,}924$ der rechten bzw. linken Hälfte des kreisförmigen Tragflügels aufgetragen. Hierbei ist noch zu bemerken, daß die Druckverteilung an der Hinterkante der Tragfläche jeweils nach Null extrapoliert wurde, was sich rechnerisch wegen der endlichen Anzahl der Reihenglieder nicht ergibt (vgl. hierzu Kinner [2]).

Bild 21 bis 24 zeigen den Vergleich der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Rechnungen mit den Werten, die sich aus der Streifentheorie sowie der Theorie von Possio [3] ergeben. Bei der Streifentheorie wird in jedem Flügelschnitt nach der zweidimensionalen Theorie gerechnet ohne Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung der Schnitte und insbesondere der endlichen Spannweite. Hiernach ist bereits im Stationären $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 2\pi \approx 6{,}28$. Nach Possio, der für $\omega = 0$ die Formeln der tragenden Linie erhält, wird $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = \frac{2\pi\lambda}{\lambda + 2} \approx 2{,}44$. Voraussetzung für seine Rechnung ist große Flügelstreckung λ und kleine ω-Werte. Nach der Theorie der kreisförmigen Tragfläche [2] ergibt sich der stationäre Wert $\frac{d\,c_a}{d\,\alpha} = 1{,}82$.

Schrifttum.

[1] Th. Schade, Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 387/400.
[2] W. Kinner, Ing.-Archiv Bd. 8 (1937), S. 47.
[3] C. Possio, Aerotecnica Bd. 18 (1938), S. 1324/1351.

Abgeschlossen Januar 1941.

Zahlentafel 1. Schlagschwingung: $z_A = \frac{A}{c} e^{i \nu t}$.

Die Koeffizienten $K_{s,n} = K^r_{s,n} + i K^i_{s,n}$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$K^r_{s,0}$	0,3531	0,3456	0,3251	0,2905	0,2413	0,1786	0,1056	0,0276	—0,0484	—0,1139	—0,1576
$K^r_{s,1}$	—0,5489	—0,5357	—0,4988	—0,4367	—0,3487	—0,2373	—0,1086	0,0281	0,1613	0,2789	0,3685
$K^r_{s,2}$	0,2246	0,2155	0,1891	0,1450	0,0837	0,0086	—0,0753	—0,1609	—0,2412	—0,3116	—0,3751
$K^r_{s,3}$	0,0042	0,0090	0,0234	0,0466	0,0766	0,1098	0,1416	0,1668	0,1806	0,1797	0,1640
$K^r_{s,4}$	—0,0475	—0,0493	—0,0547	—0,0624	—0,0699	—0,0743	—0,0720	—0,0590	—0,0308	0,0183	0,1020
	s. S. 286										
$K^i_{s,0}$	—0,2484	—0,0522	—0,1083	—0,1645	—0,2154	—0,2553	—0,2787	—0,2813	—0,2604	—0,2151	—0,1462
$K^i_{s,1}$	0,4465	0,0931	0,1913	0,2879	0,3737	0,4387	0,4739	0,4725	0,4314	0,3506	0,2330
$K^i_{s,2}$	—0,3052	—0,0622	—0,1243	—0,1813	—0,2271	—0,2555	—0,2617	—0,2432	—0,2005	—0,1370	—0,0582
$K^i_{s,3}$	0,1235	0,0241	0,0448	0,0587	0,0626	0,0539	0,0311	—0,0052	0,0524	—0,1059	0,1599
$K^i_{s,4}$	0,0078	0,0023	0,0078	0,0183	0.0356	0,0604	0,0927	0,1312	0,1740	0,2185	0,2607

Auftriebs- und Momentenbeiwert. ($k_A = k'_A + i k''_A$, $m_A = m'_A + i m''_A$.)

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
k'_A	0	0,0073	0,0255	0,0543	0,1044	0,1986	0,3705	0,6608	1,1120	1,7641	2,6507
k''_A	0	—0,1760	—0,3311	—0,4439	—0,4916	—0,4547	—0,3226	—0,0984	0,1970	0,5222	0,8025
m'_A	0	0,0158	0,0650	0,1466	0,2538	0,3724	0,4827	0,5615	0,5859	0,5357	0,3956
m''_A	0	0,0909	0,1694	0,2224	0,2368	0,2014	0,1106	0,0334	—0,2191	—0,4261	—0,6255

Zahlentafel 2. Kippschwingung: $z_B = \frac{B}{c} \cdot x \cdot e^{i \nu t}$.

Die Koeffizienten $K_{K,n} = K^r_{K,n} + i K^i_{K,n}$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$K^r_{K,0}$	—0,2221	—0,2212	—0,2133	—0,1941	—0,1613	—0,1153	—0,0583	0,0049	0,0681	0,1247	0,1651
$K^r_{K,1}$	0,3872	0,3844	0,3677	0,3299	0,2681	0,1831	0,0797	—0,0336	—0,1462	—0,2470	—0,3258
$K^r_{K,2}$	—0,2446	—0,2397	—0,2213	—0,1861	—0,1338	—0,0668	0,0100	0,0895	0,1646	0,2282	0,2824
$K^r_{K,3}$	0,0888	0,0829	0,0648	0,0351	—0,0041	—0,0490	—0,0945	—0,1345	—0,1636	—0,1767	—0,1729
$K^r_{K,4}$	0,0069	0,0117	0,0252	0,0453	0,0694	0,0937	0,1138	0,1251	0,1223	0,1013	0,0499
	s. S. 286										
$K^i_{K,0}$	0,1259	0,0302	0,0686	0,1113	0,1526	0,1865	0,2074	0,2107	0,1934	0,1543	0,0927
$K^i_{K,1}$	—0,2630	—0,0603	—0,1330	—0,2109	—0,2844	—0,3433	—0,3780	—0,3814	—0,3499	—0,2839	—0,1857
$K^i_{K,2}$	0,2597	0,0549	0,1132	0,1698	0,2181	0,2515	0,2648	0,2550	0,2224	0,1724	0,1124
$K^i_{K,3}$	—0,1934	—0,0382	—0,0730	—0,1006	—0,1171	—0,1191	—0,1045	—0,0734	—0,0283	0,0256	0,0819
$K^i_{K,4}$	0,0887	0,0165	0,0286	0,0332	0,0280	0,0111	—0,0179	—0,0585	—0,1092	—0,1683	—0,2354

Auftriebs- und Momentenbeiwerte.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
k'_B	0,8992	0,8699	0,7813	0,6264	0,4073	0,1381	—0,1537	—0,4304	—0,6484	—0,7617	—0,7160
k''_B	0	0,1314	0,2584	0,4020	0,5904	0,8517	1,2085	1,6720	2,2380	2,8889	3,5835
m'_B	—0,4659	—0,4524	—0,4114	—0,3398	—0,2397	—0,1203	0,0015	0,1043	0,1640	0,1592	0,0703
m''_B	0	0,1225	0,2456	0,3564	0,4386	0,4760	0,4563	0,3745	0,2339	0,0460	—0,1710

Zahlentafel 3. Biegeschwingung 2: $W_B^2 = F_1 (x^2 - y^2) e^{i \nu t}$.

Die Koeffizienten $K_{B,n}^2 = K_{B,n}^{2(r)} + i K_{B,n}^{2(i)}$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$K_{B,0}^{2(r)}$	0,1123	0,1077	0,0937	0,0701	0,0372	— 0,0034	— 0,0487	— 0,0949	— 0,1378	— 0,1757	— 0,2090
$K_{B,1}^{2(r)}$	— 0,2620	— 0,2531	— 0,2266	— 0,1823	— 0,1212	— 0,0471	0,0338	0,1133	0,1825	0,2349	0,2655
$K_{B,2}^{2(r)}$	0,3034	0,2944	0,2683	0,2257	0,1685	0,1015	0,0311	— 0,0341	— 0,0850	— 0,1121	— 0,1035
$K_{B,3}^{2(r)}$	— 0,2465	— 0,2369	— 0,2075	— 0,1602	— 0,0982	— 0,0256	0,0516	0,1269	0,1936	0,2456	0,2764
$K_{B,4}^{2(r)}$	0,1144	0,1057	0,0776	0,0322	— 0,0271	— 0,0978	— 0,1759	— 0,2586	— 0,3429	— 0,4298	— 0,5243
	s. S. 286										
$K_{B,0}^{2(i)}$	— 0,1580	— 0,0323	— 0,0646	— 0,0945	— 0,1185	— 0,1334	— 0,1365	— 0,1263,	— 0,1030	— 0,0678	— 0,0217
$K_{B,1}^{2(i)}$	0,3199	0,0648	0,1286	0,1863	0,2313	0,2576	0,2602	0,2369	0,1884	0,1202	0,0402
$K_{B,2}^{2(i)}$	— 0,3360	— 0,0670	— 0,1305	— 0,1851	— 0,2253	— 0,2456	— 0,2425	— 0,2147	— 0,1634	— 0,0979	— 0,0323
$K_{B,3}^{2(i)}$	0,3433	0,0678	0,1304	0,1826	0,2197	0,2374	0,2334	0,2069	0,1592	0,0956	0,0229
$K_{B,4}^{2(i)}$	— 0,2817	— 0,0556	— 0,1066	— 0,1489	— 0,1794	— 0,1950	— 0,1944	— 0,1768	— 0,1430	— 0,0909	— 0,0137

Biegeschwingung 1: $W_B^1 = D_1 (x^2 + y^2) e^{i \nu t}$.

Für die Koeffizienten $K_{B,n}^1$ gilt die Beziehung (vgl. (1. 8)): $K_{B,n}^1 = -\frac{5}{2} K_{S,n}$.

Zahlentafel 4. Biegeschwingung: $z_D = \frac{D}{c} \cdot x^2 \cdot e^{i \nu t}$.

Auftriebs- und Momentenbeiwerte.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
k_D'	— 0,9436	— 0,9531	— 1,0005	— 1,0999	— 1,2519	— 1,4439	— 1,6503	— 1,8359	— 1,9598	— 1,9824	— 1,8568
k_D''	0	0,0291	0,0970	0,2012	0,3340	0,4840	0,6363	0,7727	0,8720	0,9129	0,8661
m_D'	— 0,4382	— 0,4268	— 0,3828	— 0,2992	— 0,1770	— 0,0248	0,1414	0,3002	0,4289	0,5071	0,5188
m_D''	0	0,0202	0,0464	0,0660	0,0606	0,0136	— 0,0878	— 0,2491	— 0,4675	— 0,7312	— 1,0239

Biegeschwingung: $z_F = \frac{F}{c} \cdot y^2 \cdot e^{i \nu t}$.

Auftriebs- und Momentenbeiwerte.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
k_F'	0	0,0023	0,0079	0,0158	0,0267	0,0436	0,0718	0,1185	0,1928	0,3042	0,4603
k_F''	0	— 0,0441	— 0,0849	— 0,1194	— 0,1437	— 0,1539	— 0,1472	— 0,1230	— 0,0841	— 0,0407	— 0,0163
m_F'	0	0,0023	0,0100	0,0236	0,0427	0,0658	0,0902	0,1121	0,1271	0,1296	0,1137
m_F''	0	0,0189	0,0359	0,0494	0,0570	0,0565	0,0461	0,0248	— 0,0070	— 0,0463	— 0,0883

Zahlentafel 5. Rollschwingung: $z_C = \frac{C}{c} \cdot y \cdot e^{i \nu t}$.

Die Koeffizienten $\overline{K}_{R,n} = \overline{K}_{R,n}^r + i \overline{K}_{R,n}^i$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$K_{R,1}^r$	0,2254	0,2177	0,1965	0,1625	0,1197	0,0734	0,0300	— 0,0045	— 0,0256	— 0,0324	— 0,0254
$K_{R,2}^r$	— 0,2448	— 0,2351	— 0,2074	— 0,1638	— 0,1090	— 0,0497	0,0067	0,0527	0,0828	0,0940	0,0889
$K_{R,3}^r$	0,1050	0,0987	0,0798	0,0508	0,0146	— 0,0249	— 0,0631	— 0,0960	— 0,1201	— 0,1325	— 0,1324
$K_{R,4}^r$	0,0001	0,0021	0,0086	0,0182	0,0300	0,0430	0,0561	0,0683	0,0787	0,0854	0,0877
	s. S. 286										
$K_{R,1}^i$	— 0,1876	— 0,0368	0,0702	— 0,0962	— 0,1109	— 0,1118	— 0,0981	— 0,0721	— 0,0390	— 0,0029	0,0294
$K_{R,2}^i$	0,2593	0,0509	0,0968	0,1322	0,1525	0,1545	0,1374	0,1039	0,0594	0,0094	— 0,0383
$K_{R,3}^i$	— 0,1965	— 0,0387	— 0,0730	— 0,0993	— 0,1146	— 0,1170	— 0,1063	— 0,0837	— 0,0516	— 0,0136	0,0263
$K_{R,4}^i$	0,0793	0,0157	0,0292	0,0396	0,0457	0,0471	0,0440	0,0364	0,0243	0,0089	— 0,0091

Rollmomentenbeiwert $m_C = m_C' + i m_C''$.

m_C'	0	— 0,0004	— 0,0022	— 0,0081	— 0,0222	— 0,0499	— 0,0963	— 0,1647	— 0,2544	— 0,3638	— 0,4859
m''	0	0,0246	0,0445	0,0552	0,0542	0,0416	0,0204	— 0,0036	0,0231	— 0,0330	— 0,0287

Zahlentafel 6. Torsionsschwingung: $z_E = \frac{E}{c} \cdot x \cdot y \cdot e^{i\nu t}$.

Die Koeffizienten $\overline{K}^3_{B,n} = \overline{K}^{3(r)}_{B,n} + i\,\overline{K}^{3(i)}_{B,n}$.

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$K^{3(r)}_{B,1}$	—0,2431	—0,2328	—0,2059	—0,1623	—0,1068	—0,0467	0,0093	0,0526	0,0758	0,0766	0,0553
$K^{3(r)}_{B,2}$	0,3301	0,3148	0,2721	0,2045	0,1190	0,0258	—0,0629	—0,1356	—0,1821	—0,1973	—0,1805
$K^{3(r)}_{B,3}$	—0,2430	—0,2301	—0,1911	—0,1310	—0,0556	0,0270	0,1080	0,1785	0,2312	0,2598	0,2622
$K^{3(r)}_{B,4}$	0,0943	0,0884	0,0691	0,0402	0,0042	—0,0355	—0,0754	—0,1120	—0,1425	—0,1631	—0,1720
$K^{3(i)}_{B,1}$	s. S. 286 0,2344	0,0458	0,0873	0,1187	0,1346	0,1314	0,1063	0,0650	0,0120	—0,0456	—0,0966
$K^{3(i)}_{B,2}$	—0,4101	—0,0804	—0,1528	—0,2084	—0,2396	—0,2410	—0,2101	—0,1526	—0,0747	0,0132	0,0979
$K^{3(i)}_{B,3}$	0,4145	0,0817	0,1545	0,2114	0,2460	0,2542	0,2354	0,1913	0,1267	0,0500	—0,0313
$K^{3(i)}_{B,4}$	—0,2220	—0,0439	—0,0828	—0,1135	—0,1333	—0,1403	—0,1352	—0,1171	—0,0881	—0,0519	—0,0100

Rollmomentenbeiwert $m_E = m_E' + i\,m_E''$.

m_E'	0,1276	0,1211	0,1033	0,0759	0,0434	0,0118	—0,0119	—0,0232	—0,0188	0,0002	0,0294
m_E''	0	0,0139	0,0322	0,0593	0,0990	0,1525	0,2186	0,2927	0,3676	0,4370	0,4944

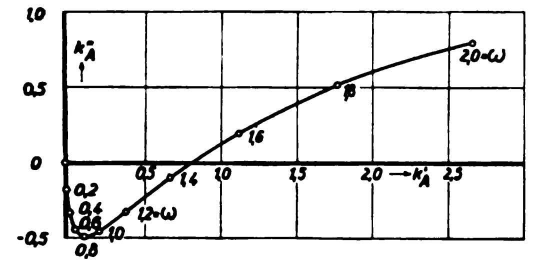


Bild 1 (links). Schlagschwingung A. Auftriebsbeiwerte in komplexer Darstellung,

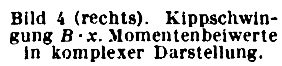
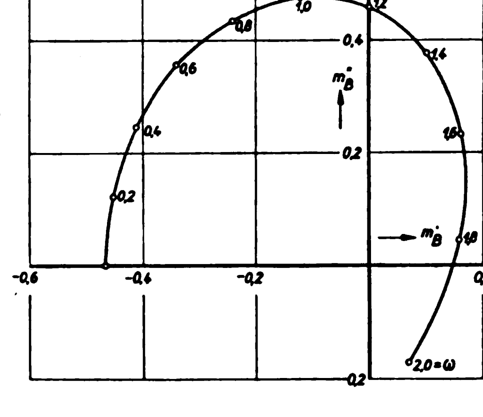
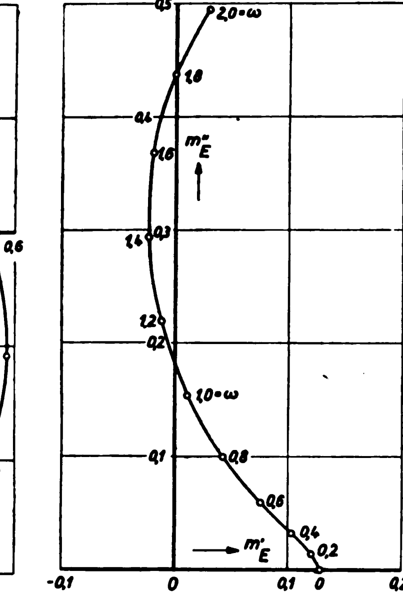


Bild 4 (rechts). Kippschwingung $B \cdot x$. Momentenbeiwerte in komplexer Darstellung.





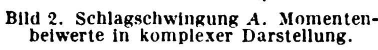


Bild 2. Schlagschwingung A. Momentenbeiwerte in komplexer Darstellung.

Bild 3. Kippschwingung $B \cdot x$. Auftriebsbeiwerte in komplexer Darstellung.

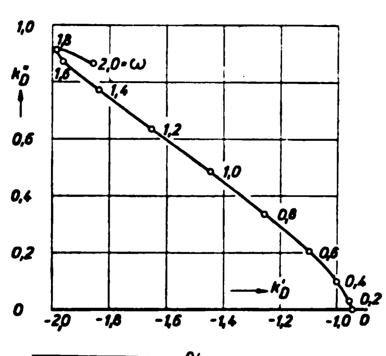


Bild 5 (rechts oben). Biegeschwingung $D \cdot x^2$. Auftriebswerte in komplexer Darstellung.

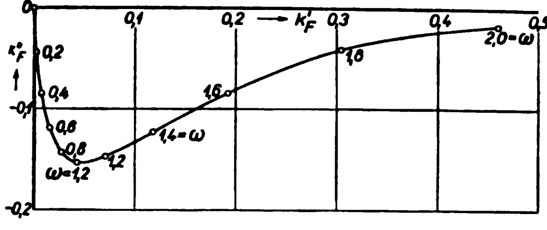
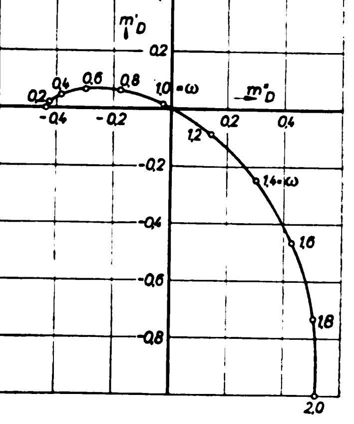


Bild 7. Biegeschwingung $F \cdot y^2$. Auftriebsbeiwerte in komplexer Darstellung.



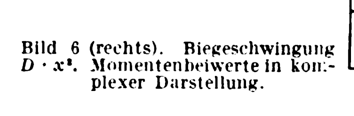


Bild 6 (rechts). Biegeschwingung $D \cdot x^2$. Momentenbeiwerte in komplexer Darstellung.

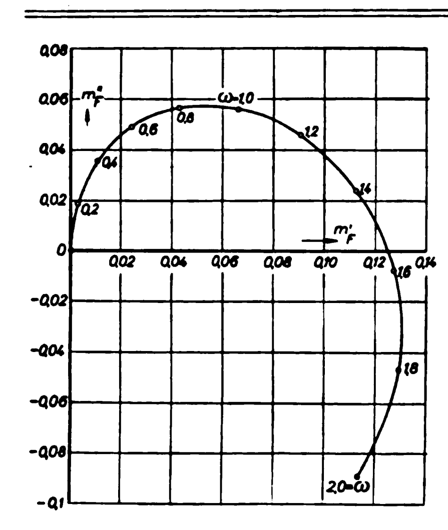


Bild 8. Biegeschwingung $F \cdot y^2$. Momentenbeiwerte in komplexer Darstellung.

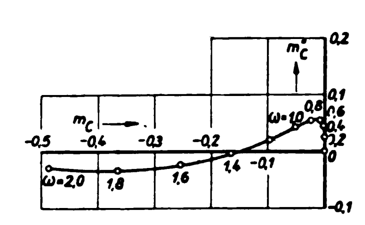
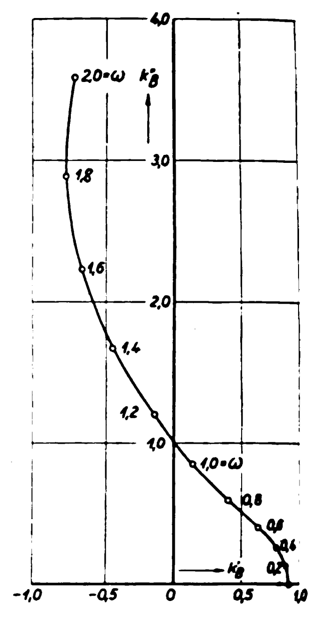


Bild 9. Rollschwingung $C \cdot y$. Rollmomentenbeiwerte in komplexer Darstellung.

Bild 10 (rechts). Torsionsschwingung $E \cdot x \cdot y$. Rollmomentenbeiwerte in komplexer Darstellung.



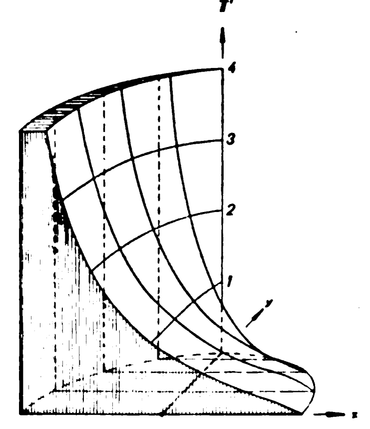


Bild 11. Schlagschwingung A. Grenzfall der imaginären Druckverteilung $\left(\frac{\pi^i}{\omega}\right)\omega = 0$.

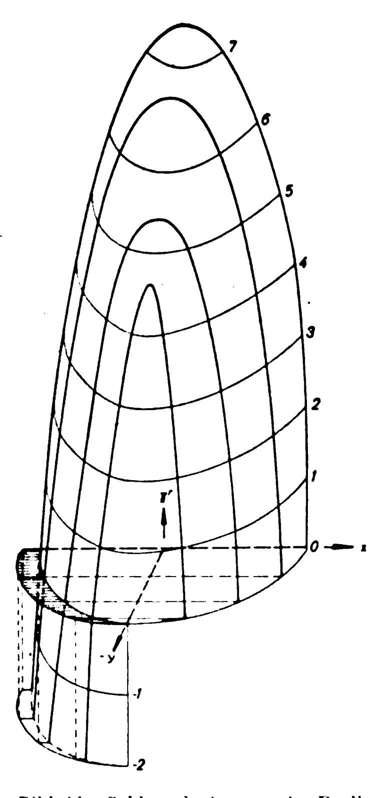


Bild 14. Schlagschwingung A. Reelle Druckverteilung bei $\omega = 1{,}8$.

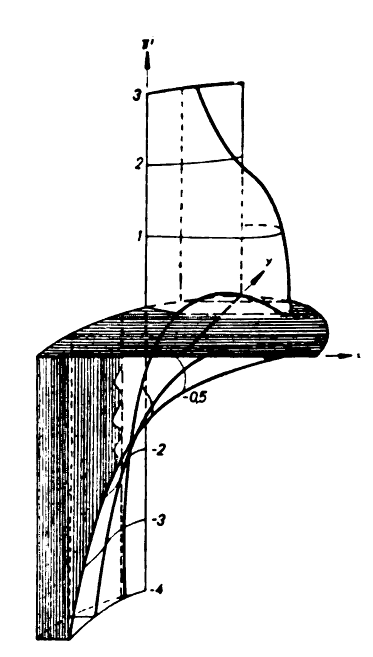


Bild 15. Schlagschwingung A. Imaginäre Druckverteilung bei $\omega = 1{,}8$.

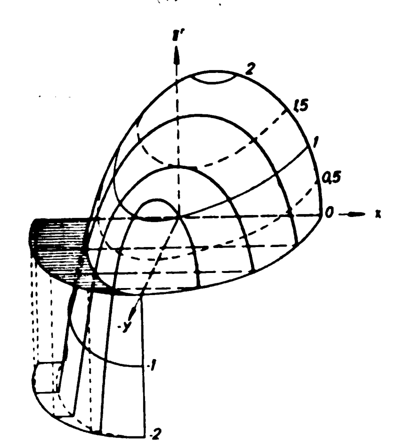


Bild 12. Schlagschwingung A. Reelle Druckverteilung bei $\omega = 1$.

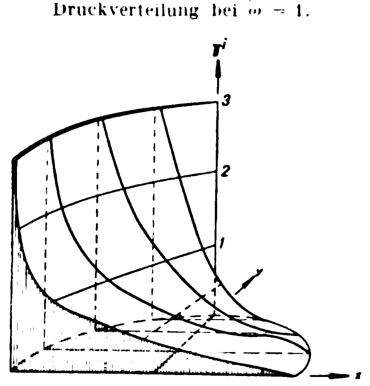


Bild 13. Schlagschwingung A. Imaginäre Druckverteilung bei $\omega = 1$.

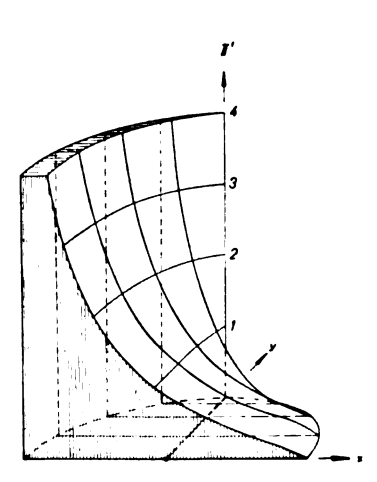


Bild 16. Kippschwingung $B \cdot x$. Reelle Druckverteilung bei $\omega = 0$.

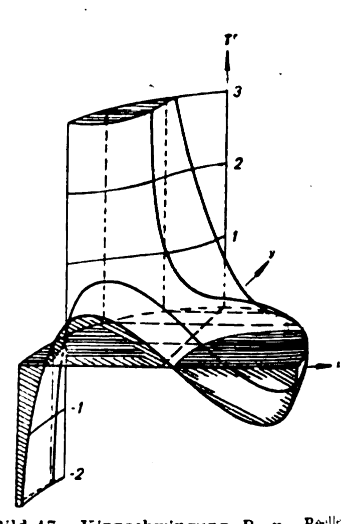


Bild 17. Kippschwingung $B \cdot x$. Reelle Druckverteilung bei $\omega = 1{,}6$.

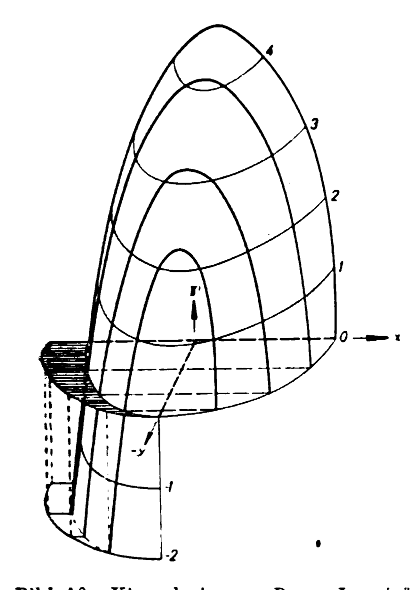


Bild 18. Kippschwingung $B \cdot x$. Imaginäre Druckverteilung bei $\omega = 1{,}0$.

Bild 19. Kippschwingung $B \cdot x$. Reelle Druckverteilung bei $\omega = 1{,}8$.

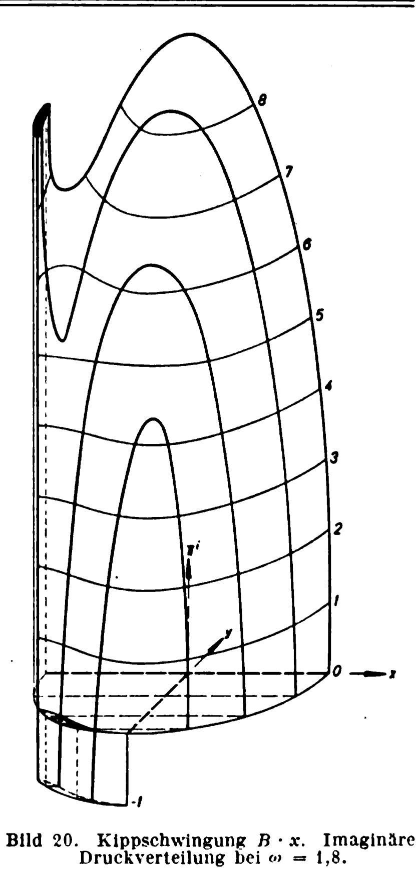


Bild 20. Kippschwingung $B \cdot x$. Imaginäre Druckverteilung bei $\omega = 1{,}8$.

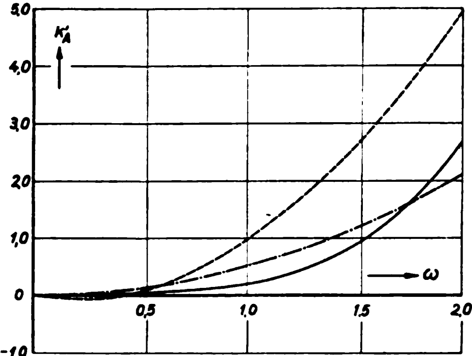


Bild 21. Schlagschwingung A. Auftriebsbeiwert k_A' (Realteil). In Abhängigkeit von ω.
——————— vorliegender Rechnung,
—·—·—·— Theorie von Possio,
— — — — — Streifentheorie (ebene Strömung).

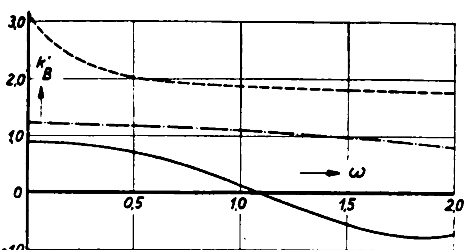
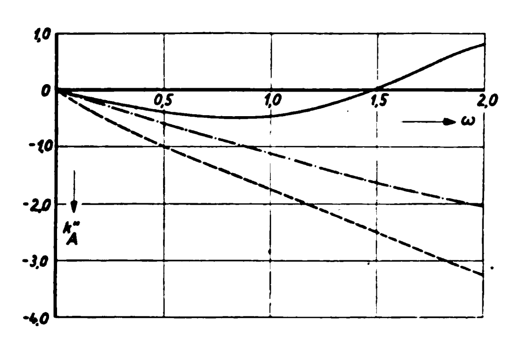
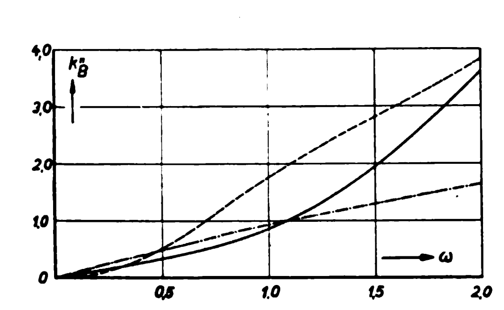


Bild 23. Kippschwingung $B \cdot x$. Auftriebsbeiwert k_B' (Realteil). Vgl. Bild 21.





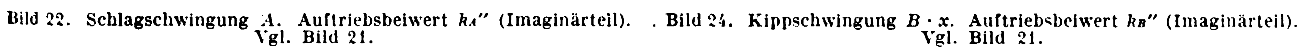


Bild 22. Schlagschwingung A. Auftriebsbeiwert k_A'' (Imaginärteil). Vgl. Bild 21.

Bild 24. Kippschwingung $B \cdot x$. Auftriebsbeiwert k_B'' (Imaginärteil). Vgl. Bild 21.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 20. Oktober 1942 | Lfg. 9

Die Grenzschicht an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen*).

Von H. Schlichting.

Bericht des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Braunschweig.

Für die längsangeströmte ebene Platte wird eine Berechnung der Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen an der Wand bei laminarer und turbulenter Strömung ausgeführt.

Gliederung.

I. Einleitung.

Die Beeinflussung der Reibungsschicht an einem umströmten Körper durch Absaugung hat für das Flugzeug Bedeutung sowohl für den Maximalauftrieb als auch für den Widerstand. Die Absaugung als Hilfsmittel zur Beeinflussung der Reibungsschicht wurde schon 1904 von L. Prandtl in seiner grundlegenden Grenzschichtarbeit [1] angegeben. Die physikalische Wirkung der Absaugung besteht in der Vermeidung der Grenzschichtablösung im Druckanstieggebiet der Strömung. Dadurch ergibt sich eine Verminderung des Druckwiderstandes und beim Tragflügel auch eine Erhöhung des Maximalauftriebes. Die letztere ist eingehend von O. Schrenk [3] untersucht worden. Hierbei ist die Grenzschicht meist turbulent. Eine erst neuerdings erkannte andere Anwendungsmöglichkeit ist die Laminarerhaltung der Reibungsschicht durch Absaugung. Versuche hierüber sind von Ackeret [4] ausgeführt worden. Hierbei wird in Gebieten, wo sonst die laminare Grenzschicht in die turbulente umschlagen würde, durch Absaugung die laminare Grenzschicht so dünn gehalten, daß der Umschlag vermieden wird. Hierdurch wird der Oberflächenreibungswiderstand vermindert.

Durch das Ausblasen von Flüssigkeit aus der Wand in die Reibungsschicht wird die Grenzschichtdicke vergrößert und infolgedessen die Wandschubspannung und somit der Reibungswiderstand verkleinert. Dies gilt sowohl für die laminare als auch für die turbulente Grenzschicht. Praktisch dürfte jedoch beim Ausblasen in der laminaren Reibungsschicht immer Umschlag eintreten, da durch das Ausblasen die Stabilitätsgrenze der laminaren Reibungsschicht stark herabgesetzt wird. Versuchsergebnisse über das Ausblasen in der Reibungsschicht liegen bisher noch nicht vor.

Einen Beitrag zur theoretischen Behandlung der Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen haben wir bereits in einer früheren Arbeit gegeben [8]. Dabei wurde durch eine einfache Abschätzung die grundsätzlich verschiedene Ausbildung der laminaren Grenzschicht bei Absaugung und Ausblasen aufgezeigt. Diese führte zu dem bemerkenswert einfachen Ergebnis, daß bei der längsangeströmten Platte mit

*) A 35 27.

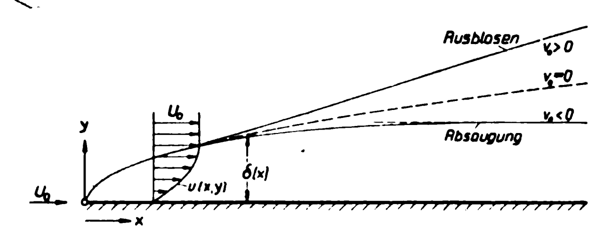


Bild 1. Erläuterungsskizze; Grenzschichten an der ebenen Platte mit Absaugung und Ausblasen.

konstanter Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit in großem Abstand von der Vorderkante im Fall der Absaugung die Grenzschichtdicke konstant wird, während sie beim Ausblasen in großem Abstand von der Vorderkante proportional mit x (= Abstand von der Vorderkante) zunimmt. Dazwischen liegt der Fall der undurchlässigen Wand, wo bekanntlich die Grenzschichtdicke im laminaren Fall nach Blasius [5] mit $\sqrt{x}$ und im turbulenten Fall näherungsweise mit $x^{4/5}$ zunimmt. Im vorliegenden Bericht soll für die laminare Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte als Ergänzung zu den früheren Ergebnissen der »Anlauf« bei Absaugung und Ausblasen näher untersucht werden, d. h. die Ausbildung der Grenzschicht vor Erreichen der früher angegebenen asymptotischen Gesetze. Dabei wird ein mit dem Impulssatz arbeitendes Näherungsverfahren benutzt, welches dem von K. Pohlhausen [6] ähnlich ist. Ferner werden einige Abschätzungen für die turbulente Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen angegeben.

II. Die asymptotische Lösung für die laminare Grenzschicht.

Die in der früheren Arbeit [8] abgeleiteten Ergebnisse für die laminare Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen seien hier kurz zusammengestellt, da im folgenden mehrfach darauf Bezug genommen wird:

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y zugrunde (x parallel, y senkrecht zur Wand). u, v seien die Geschwindigkeitskomponenten in der Grenzschicht in der x- bzw. y-Richtung, U_0 die Anströmungsgeschwindigkeit und $v_0(x)$ die vorgegebene Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit an der Wand, welche als kontinuierlich angenommen wird. $v_0 < 0$ bedeutet Absaugen, $v_0 > 0$ Ausblasen, und $v_0 \equiv 0$ den Fall der undurchlässigen Wand. Ferner sei ν die kinematische Zähigkeit. Damit lauten die Prandtlschen Grenzschichtgleichungen mit Randbedingungen für das ebene Problem:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$y=0: u=0;\; v=v_0(x);\; y=\infty: u=U_0 \quad \ldots \quad (3)$$

Der Ansatz für die Wandschubspannung im laminaren Fall

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad \text{. . . . . (4)}$$

wird auch für die Grenzschicht mit Ausblasen und Absaugen beibehalten. Durch Integration von Gl. (1) zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = \infty$ erhält man

$$U_0^2 \frac{d\vartheta}{dx} - U_0 v_0 = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad \text{. . . . . (5)}$$

Dabei ist ϑ die Impulsverlustdicke und δ^* die Verdrängungsdicke, welche definiert sind durch:

$$U_0^2 \vartheta = \int_{y=0}^{\infty} u\,(U_0 - u)\,dy \quad \text{. . . . . . . (6)}$$

$$U_0 \delta^* = \int_{y=0}^{\infty} (U_0 - u)\,dy \quad \text{. . . . . (7)}$$

Für den Fall der **Absaugung mit konstanter Intensität**, $v_0 = \text{const}$, wird in einiger Entfernung von der Plattenvorderkante die Grenzschichtdicke und damit auch die Impulsverlustdicke konstant, und die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht unabhängig von x (asymptotisches Grenzschichtprofil). Für die asymptotische Geschwindigkeitsverteilung wurde als exakte Lösung der Grenzschichtdifferentialgleichung (1) bis (3) gefunden:

$$u(y) = U_0 \left(1 - e^{\frac{v_0 y}{\nu}}\right); \; v = v_0 \quad \text{. . . . . (8)}$$

Hieraus ergibt sich für die Verdrängungsdicke

$$\delta^*_\infty = \frac{\nu}{-v_0} \text{ oder } \frac{-v_0 \delta^*_\infty}{\nu} = 1 \quad \text{. . . . (9)}$$

oder

$$\frac{U_0 \delta^*_\infty}{\nu} = \frac{U_0}{-v_0} = \frac{1}{c_Q}; \text{ (Absaugen laminar) . . (9a)}$$

und für die Impulsverlustdicke

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{2} \frac{\nu}{-v_0} \quad \text{. . . . . (10)}$$

Dabei bedeutet $c_Q = -v_0/U_0$ den Mengenbeiwert der Absaugung. Die Geschwindigkeitsverteilung läßt sich damit auch schreiben

$$u(y) = U_0 \left(1 - e^{-y/\delta^*_\infty}\right) \quad \text{. . . . . . (11)}$$

Aus Gl. (8) folgt für die Wandschubspannung der asymptotischen Lösung

$$\tau_{0\infty} = -\varrho v_0 U_0 \quad \text{. . . . . (12)}$$

Im Fall des Ausblasens wächst die Grenzschichtdicke asymptotisch mit x an, und man erhält

$$\vartheta_\infty = \frac{v_0}{U_0} x \text{ (Ausblasen laminar u. turbulent)} \quad (13)$$

Hierin kommt die Zähigkeit nicht vor, so daß diese Gleichung sowohl für laminare als auch für turbulente Strömung gilt.

III. Der Anlauf für die laminare Grenzschicht mit Absaugung.

Während für die Grenzschicht an der ebenen Platte bei undurchlässiger Wand die Grenzschichtprofile in verschiedenen Abständen x zueinander affin sind, ist dies für die Grenzschichten mit Absaugung und Ausblasen bei konstantem v_0 nicht mehr der Fall. In beiden Fällen ist, wie in [8] gezeigt, am Plattenanfang das Blasiussche Geschwindigkeitsprofil der Plattenströmung vorhanden. Weiter stromabwärts ändert sich unter der Wirkung des Absaugens bzw. Ausblasens die Form des Geschwindigkeitsprofiles in ähnlicher Weise wie unter der Einwirkung eines Druckgefälles, bis der oben besprochene asymptotische Zustand erreicht ist. Wir wollen insbesondere diesen »Anlauf« für den Fall der Absaugung und des Ausblasens mit konstanter Intensität v_0 berechnen.

Da die Berechnung der Grenzschicht aus den Differentialgleichungen in diesem Fall ziemlich schwierig ist, führen wir eine Näherungsrechnung durch, welche an den Impulssatz der Grenzschicht anknüpft und dem bekannten Pohlhausen-Verfahren [6] bei undurchlässiger Wand ähnlich ist.

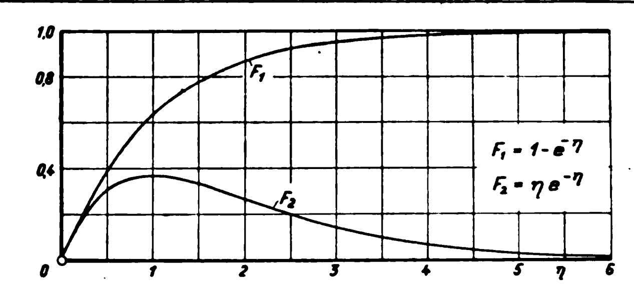


Bild 2. Ebene Platte mit Absaugung; Anlauf. Die Funktionen F_1 und F_2 der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht nach Gl. (14).

Für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht machen wir den Ansatz:

$$\frac{u}{U_0} = F_1(\eta) + K F_2(\eta); \; \eta = \frac{y}{\delta_1(x)}, \quad \text{. . . (14)}$$

wo F_1 und F_2 zunächst willkürliche Funktionen sind und $\delta_1(x)$ ein Maß für die Grenzschichtdicke ist. $K = K(x)$ ist ein Formparameter, der weiterhin berechnet werden muß. Die Geschwindigkeitsprofile des Anlaufes nehmen wir also als einparametrige Schar an. Für das Geschwindigkeitsprofil nach Gl. (14) schreiben wir die folgenden fünf Randbedingungen vor, welche sämtlich aus den Differentialgleichungen der Grenzschicht mit Absaugung, Gl. (1) bis (3), folgen:

$$y = 0: u = 0; \; v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \quad \text{. . (15a, b)}$$

$$y = \infty: u = U_0; \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{. . (16a, b, c)}$$

Die Funktionen F_1 und F_2 wählen wir so, daß sie dem Fall der Grenzschicht mit Absaugung möglichst gut angepaßt sind. Insbesondere soll das asymptotische Absaugeprofil nach Gl. (8) in der einparametrigen Schar der Geschwindigkeitsprofile von Gl. (14) exakt enthalten sein. Dies ist erfüllt, wenn wir wählen:

$$\left.\begin{aligned} F_1(\eta) &= 1 - e^{-\eta} \\ F_2(\eta) &= \eta\, e^{-\eta} \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . (17)}$$

Die Funktionen F_1 und F_2 sind in Bild 2 und Zahlentafel 1 angegeben. Damit keine Geschwindigkeitsprofile mit $u/U_0 > 1$ vorkommen, unterliegt K der Beschränkung $K \leq 0$. Für $K < -1$ ergibt sich Rückströmung an der Wand, die im vorliegenden Fall nicht auftreten kann. Die praktisch in Frage kommenden Werte von K liegen also zwischen

$$-1 \leq K \leq 0 \quad \text{. . . . . (17a)}$$

Zahlentafel 1. Die Funktionen F_1 und F_2 der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen (zu Bild 2).

η	F_1	F_2
0	0	0
0,2	0,1813	0,1637
0,4	0,3297	0,2681
0,6	0,4512	0,3293
0,8	0,5507	0,3594
1,0	0,6321	0,3679
1,2	0,6988	0,3614
1,4	0,7534	0,3452
1,6	0,7981	0,3230
1,8	0,8347	0,2975
2,0	0,8647	0,2707
2,2	0,8892	0,2438
2,4	0,9093	0,2177
2,6	0,9257	0,1931
2,8	0,9392	0,1703
3,0	0,9502	0,1494
3,5	0,9698	0,1057
4,0	0,9817	0,0733
4,5	0,9889	0,0500
5,0	0,9933	0,0337
6,0	0,9975	0,0149
7,0	0,9991	0,0064
∞	1	0

Das asymptotische Absaugeprofil Gl. (11) erhält man aus Gl. (14) für $K = 0$ und $\delta_1 = \delta_\infty^*$. Durch die Wahl der Funktionen F_1 und F_2 nach Gl. (17) sind die Randbedingungen (15a) und (16a, b, c) schon ohne weiteres erfüllt. Die letzte Randbedingung (15b) ergibt wegen

$$\frac{\delta_1}{U_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \frac{\delta_1}{U_0}\frac{\tau_0}{\mu} = 1 + K \quad \ldots \ldots (18)$$

die folgende Bestimmungsgleichung für K:

$$v_0 \frac{U_0}{\delta_1}(1+K) = \nu \frac{U_0}{\delta_1^2}(-1-2K)$$

oder

$$K = \frac{\lambda_1 - 1}{2 - \lambda_1}, \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

wobei

$$\lambda_1(x) = \frac{-v_0\,\delta_1(x)}{\nu} \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

ebenfalls als Formparameter der Geschwindigkeitsprofile angesehen werden kann.

Für die Verdrängungsdicke δ^* und die Impulsdicke ϑ erhält man aus Gl. (14) und (17):

$$\frac{\delta^*}{\delta_1} = 1 - K = \frac{3 - 2\lambda_1}{2 - \lambda_1} \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

$$\frac{\vartheta}{\delta_1} = \frac{1}{2}\left(1 - K - \frac{1}{2}K^2\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{11 - 12\lambda_1 + 3\lambda_1^2}{(2-\lambda_1)^2} = g(\lambda_1) \quad (22)$$

Weiterhin ergibt sich nach Gl. (18) und (22):

$$\beta = \frac{\vartheta}{U_0}\frac{\tau_0}{\mu} = \frac{\vartheta}{U_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = (1+K)\frac{\vartheta}{\delta_1} = \frac{g(\lambda_1)}{2-\lambda_1} = f(\lambda_1) \quad (23)$$

Ferner wird noch gebraucht

$$\frac{-v_0\,\vartheta}{\nu} = \varkappa_1 = g(\lambda_1)\cdot\lambda_1 \quad \ldots \ldots (24)$$

Der Spezialfall der Platte ohne Absaugung ist gegeben durch $\lambda_1 = 0$, $K = -1/2$; das asymptotische Grenzschichtprofil mit Absaugung durch $\lambda_1 = 1$; $K = 0$ (vgl. Zahlentafel 2).

Zahlentafel 2. Kenngrößen der Grenzschicht mit Absaugung.

Fall	K	λ_1	$\frac{\delta^*}{\delta_1}$	$\frac{\vartheta}{\delta_1} = g$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	β	$\varkappa_1$
Platte ohne Absaugung	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{24}{11}$	$\frac{11}{32}$	0
Asymptote mit Absaugung	0	1	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Asymptote mit Ausblasen	-1	$-\infty$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{3}$	0	$-\infty$

Der Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta_1(x)$ und damit des Formparameters $\lambda_1(x)$ in Abhängigkeit von der Lauflänge x muß nun aus der Impulsgleichung (5) berechnet werden. Damit sind dann sämtliche anderen Grenzschichtgrößen durch die vorstehenden Beziehungen bekannt.

Die Impulsgleichung der Grenzschicht mit Absaugung nach Gl. (5) läßt sich schreiben:

$$\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\frac{d\vartheta}{dx} - \frac{v_0\,\vartheta}{\nu} = \frac{\vartheta}{U_0}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \quad \ldots \ldots (25)$$

Wir setzen nach Holstein und Bohlen [7]

$$\frac{\vartheta^2}{\nu} = Z \quad \ldots \ldots \ldots (26)$$

Dann ist nach Gl. (24)

$$\frac{-v_0\,\vartheta}{\nu} = \varkappa_1 = -v_0\sqrt{\frac{Z}{\nu}} \quad \ldots \ldots (27)$$

Setzen wir noch

$$\left.\begin{aligned} G(\varkappa_1) &= 2f - 2\varkappa_1 = \frac{2g}{2-\lambda_1} - 2\lambda_1 g \\ G(\varkappa_1) &= 2g\frac{(1-\lambda_1)^2}{2-\lambda_1}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (28)$$

so erhält man für die Impulsdicke aus Gl. (25) die folgende Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{dZ}{dx} = \frac{G(\varkappa_1)}{U_0}; \quad \varkappa_1 = -v_0\sqrt{\frac{Z}{\nu}}} \quad \ldots (29)$$

Mit der dimensionslosen Lauflänge

$$\xi = \frac{U_0\,x}{\nu}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots (30)$$

und $\varkappa_1^2 = Z v_0^2/\nu$ nach Gl. (27) läßt sich die Differentialgleichung (29) auch schreiben in der dimensionslosen Form

$$\boxed{\frac{d(\varkappa_1^2)}{d\xi} = G(\varkappa_1)} \quad \ldots \ldots (31)$$

Anfangsbedingung: $\xi = 0: \varkappa_1 = 0;\ \lambda_1 = 0;\ G = \frac{11}{16}$.

Ist hieraus $\varkappa_1(\xi)$ bestimmt, so hat man $\lambda_1(\xi)$ nach Gl. (24) und damit alle übrigen Grenzschichtgrößen. Für $\lambda_1 = 1$, d. i. $\varkappa_1 = 1/2$ ist nach Gl. (28) $G = 0$. Die Lösung $\varkappa_1(\xi)$ hat also die Konstante $\varkappa_1 = 1/2$ als Asymptote, entsprechend der exakten asymptotischen Lösung für Absaugung.

Die Lösung der Gleichung (31) könnte z. B. nach dem Isoklinenverfahren gefunden werden; im vorliegenden Fall läßt sie sich jedoch analytisch berechnen.

Zuvor möge aus unserer Näherungsrechnung kurz der Spezialfall ohne Absaugung abgeleitet werden, welcher der exakten Blasius-Lösung entspricht. Hierfür ist nach Zahlentafel 2 und Gl. (28)

$$\lambda_1 = 0;\ \varkappa_1 = 0;\ K = -\frac{1}{2};\ G(0) = g(0) = \frac{11}{16}.$$

Aus Gl. (29) erhält man somit

$$Z\,U_0 = \frac{11}{16}x \text{ oder } \vartheta = \sqrt{\frac{11}{16}\frac{\nu x}{U_0}} = 0{,}83\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}, \quad (32)$$

während die exakte Blasius-Lösung $\vartheta = 0{,}664\sqrt{\nu x/U_0}$ ergibt. Die Verdrängungsdicke wird nach unserer Näherungslösung $\delta^* = 1{,}81\sqrt{\nu x/U_0}$, während die exakte Blasius-Lösung $\delta^* = 1{,}73\sqrt{\nu x/U_0}$ ergibt.

Aus Gl. (32) folgt für den Beiwert des Gesamtwiderstandes der Platte der Länge l, bezogen auf die benetzte Oberfläche, wegen $c_f = 2\,\vartheta_l/l$:

$$c_f = 1{,}66\left(\frac{U_0\,l}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \ldots \ldots (32a)$$

während der exakte Wert nach Blasius $c_f = 1{,}328\,(U_0 l/\nu)^{-\frac{1}{2}}$ ist.

Die Lösung der Differentialgleichung (31) läßt sich auf analytischem Wege durchführen. Man erhält nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{d\xi}{d\lambda_1} = \frac{1}{4}\left\{-3 + \frac{2(\lambda_1 - 6)}{(2-\lambda_1)^2(\lambda_1 - 1)}\right\} \quad \ldots (33)$$

Die Integration ergibt die Lösung:

$$\xi = -\frac{3}{4}\lambda_1 + \frac{2}{\lambda_1 - 2} + \frac{5}{2}\log\frac{2-\lambda_1}{1-\lambda_1} + C \quad \ldots (34)$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Anfangsbedingung $\xi = 0: \lambda_1 = 0$ zu:

$$C = 1 - \frac{5}{2}\log 2.$$

Damit wird die Lösung:

$$\xi = 1 - \frac{3}{4}\lambda_1 + \frac{2}{\lambda_1 - 2} + \frac{5}{2}\log\frac{2-\lambda_1}{2(1-\lambda_1)} \quad \ldots (35)$$

Hiernach ist für $\lambda_1 \to 1: \xi \to \infty$.

Die Entwicklung in der Umgebung von $\lambda_1 = 0$ ergibt

$$\lambda_1 \to 0: \xi = \frac{11}{16}\lambda_1^2, \quad \ldots \ldots (36)^*)$$

und ist identisch mit der Lösung für die undurchlässige Wand, wie man an Hand von Gl. (32) und Zahlentafel 2 leicht verifiziert.

*) Dies folgt auch sofort aus Gl. (31) wegen $\varkappa_1 = \frac{11}{16}\lambda_1$ für $\xi \to 0$.

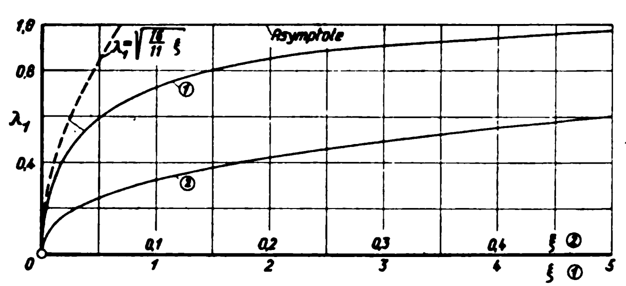


Bild 3. Ebene Platte mit Absaugung; Anlauf. Die Lösung $\lambda_1(\xi)$ der Differentialgleichung (31). Absaugung beginnt an Plattenvorderkante.

——— Lösung für Absaugung,
— — — Lösung für undurchlässige Wand.

Zahlentafel 3. Ebene Platte mit Absaugung (laminar): Kenngrößen der Grenzschicht (zu Bild 3, 4 und 8).

ξ	λ_1	$\frac{-v_0\delta^*}{\nu}$	$-K$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$\frac{-\tau_0}{\varrho\, v_0\, U_0}$
0	0	0	0,5	2,1819	∞
0,0078	0,1	0,147	0,474	2,1650	5,2632
0,0333	0,2	0,289	0,445	2,1471	2,7778
0,0844	0,3	0,424	0,412	2,1279	1,9608
0,1695	0,4	0,550	0,375	2,1078	1,5625
0,3053	0,5	0,666	0,333	2,0868	1,3333
0,5205	0,6	0,771	0,286	2,0657	1,1905
0,8426	0,7	0,861	0,231	2,0444	1,0989
1,4799	0,8	0,933	0,167	2,0242	1,0417
1,9555	0,85	0,960	0,130	2,0150	1,0230
2,7687	0,9	0,983	0,091	2,0076	1,0101
4,2611	0,95	0,995	0,0476	2,0022	1,0025
6,4008	0,98	0,998	0,0196	2,0004	1,0004
8,0945	0,99	0,999	0,0099	2,0001	1,0001
Asymptote ($\xi = \infty$)	1	1	0	2	1

Die nach Gl. (35) berechnete Lösung ist in Bild 3 und Zahlentafel 3 dargestellt. Bemerkenswert ist, daß auch hier die Lauflänge wieder in der dimensionslosen Form $\xi = \frac{U_0\,x}{\nu}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2$ erscheint, die auch schon bei der Abschätzung in [8] auftrat. Die weiteren Kenngrößen der Grenzschicht, nämlich δ^*/ϑ und $-v_0\,\delta^*/\nu$, können mit der Lösung (35) nach Gl. (20), (21) und (22) sofort berechnet werden. Sie sind in Zahlentafel 3 und Bild 4 angegeben. Man erkennt, daß nach einer Anlaufstrecke von

$$\xi_1 = \frac{U_0\,x_1}{\nu}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 = 3{,}5 \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

der Anlauf praktisch beendet ist, d. h. die Verdrängungsdicke den asymptotischen Wert δ^*_∞ nach Gl. (9) bis auf 1% erreicht hat.

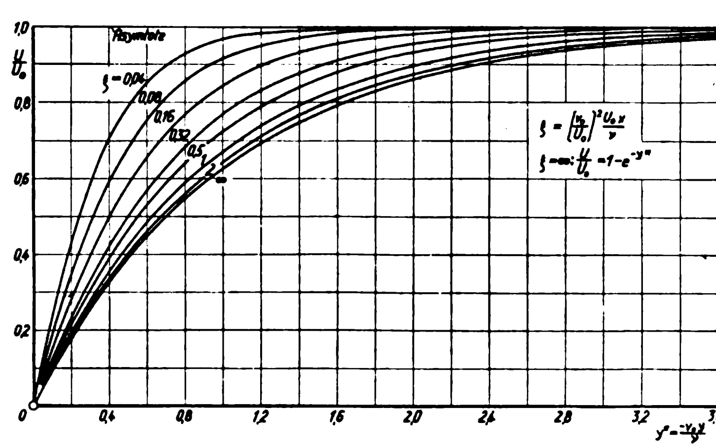


Bild 6. Anlauf bei der ebenen Platte mit Absaugung. Geschwindigkeitsprofile $\frac{u}{U_0}$ über $\frac{-v_0\,y}{\nu}$ für verschiedene $\xi = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0\,x}{\nu}$.

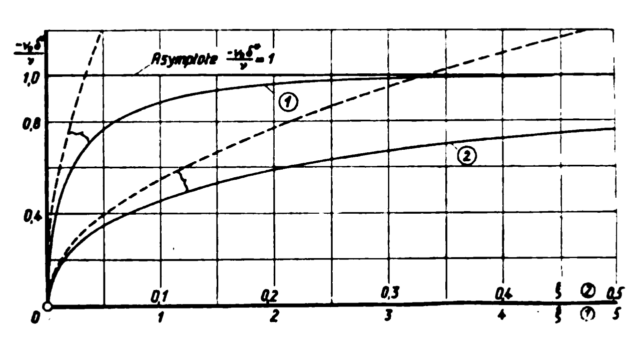


Bild 4. Ebene Platte mit Absaugung; Anlauf. Die dimensionslose Verdrängungsdicke $\frac{-v_0\,\delta^*}{\nu}$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Lauflänge $\xi = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0\,x}{\nu}$.

——— Lösung für Absaugung,
— — — Lösung für undurchlässige Wand.

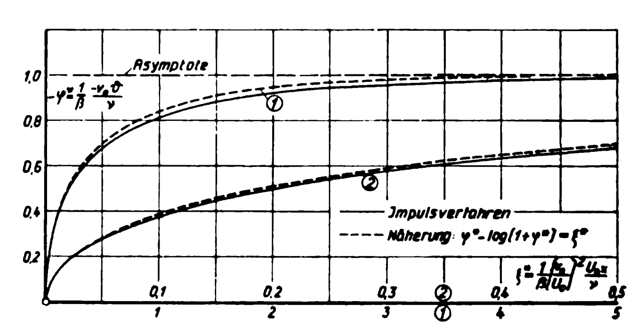


Bild 5. Anlauf bei der ebenen Platte mit Absaugung: Die dimensionslose Impulsdicke in Abhängigkeit von der dimensionslosen Lauflänge ξ^*. Vergleich der Rechnung nach dem Impulsverfahren mit der Abschätzung nach [8].

Weiter ist in Bild 5 die hier erhaltene Lösung mit unserer früheren Abschätzung [8] verglichen. Beide stimmen recht gut überein.

Die Geschwindigkeitsprofile im Anlaufgebiet sind in Bild 6 in Abhängigkeit von $-v_0\,y/\nu$ dargestellt und in Bild 7

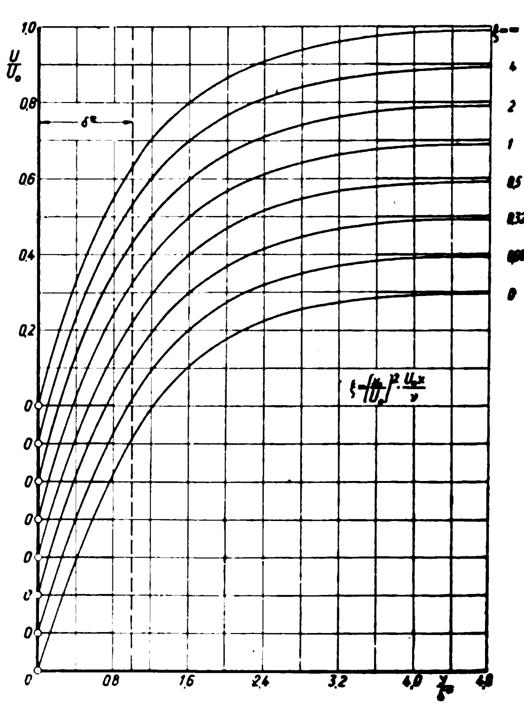


Bild 7. Anlauf bei der ebenen Platte mit Absaugung. Geschwindigkeitsprofile $\frac{u}{U_0}$ über $\frac{y}{\delta^*}$ für verschiedene $\xi = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \frac{U_0\,x}{\nu}$.

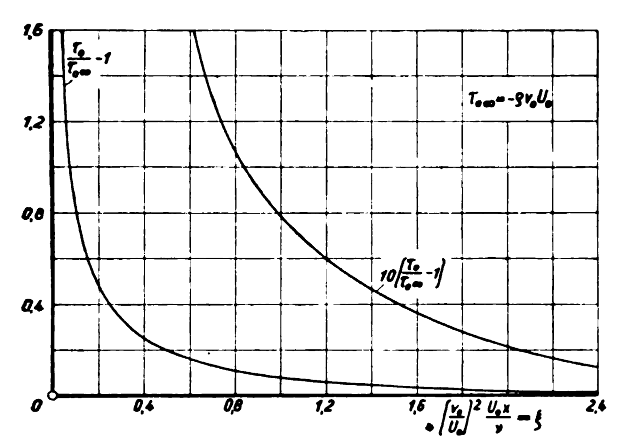


Bild 8. Anlauf bei der ebenen Platte mit Absaugung; örtlicher Reibungsbeiwert $\frac{\tau_0}{\tau_{0\infty}}$ über ξ.

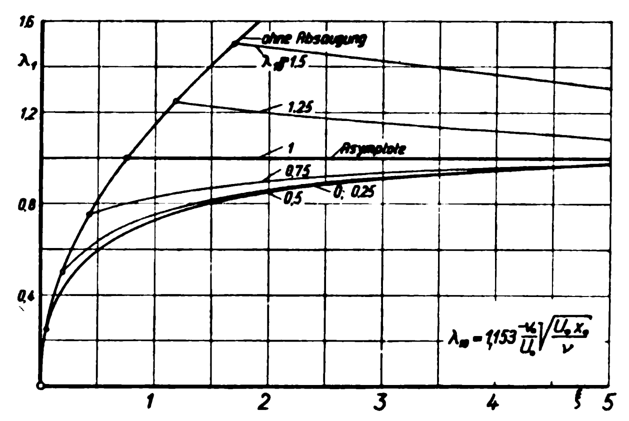


Bild 9. Anlauf bei der ebenen Platte mit Absaugung. Die Lösung $\lambda_1(\xi)$ der Differentialgleichung [31]. Absaugung beginnt im Abstand $x = x_0$ von der Plattenvorderkante.

über y/δ^* aufgetragen. Bei Annäherung an das asymptotische Absaugeprofil ($\xi = \infty$) wird die Krümmung der Geschwindigkeitsprofile in Wandnähe etwas größer, doch ändert sich die Form im ganzen Anlaufgebiet nicht stark. Dies geht auch schon aus Bild 3 unserer früheren Arbeit [8] hervor, wo die exakten Lösungen für das erste und letzte Profil des Anlaufes dargestellt sind.

Ferner ist noch in Bild 8 der örtliche Reibungsbeiwert $\tau_0/\tau_{0\infty}$ über ξ aufgetragen; es gilt

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0\infty}} = \frac{1}{\lambda_1(2-\lambda_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38)$$

Die vorstehend angegebene Lösung Gl. (35) gilt für den Fall, daß die konstante Absaugegeschwindigkeit $-v_0$ von der Plattenvorderkante an vorhanden ist. Es läßt sich die Lösung von Gl. (31) aber auch sofort angeben für den Fall, daß das Absaugegebiet erst im Abstand $x = x_0$ von der Plattenvorderkante beginnt. Dann hat man für $0 < x \leq x_0$ die Blasius-Lösung mit der Verdrängungsdicke $\delta^* = 1{,}73\sqrt{\nu x/U_0}$ oder

$$\frac{v_0\,\delta^*}{\nu} = 1{,}73\sqrt{\xi} \quad \text{für } 0 < \xi \leq \xi_0 \quad . \; . \; . \; (39)$$

Wegen $\delta^*/\delta_1 = 3/2$ für das Profil ohne Absaugung nach Zahlentafel 1 ist dann am Anfang der Absaugezone

$$\lambda_{10} = \frac{-v_0\,\delta_{10}}{\nu} = 1{,}153\sqrt{\xi_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

mit

$$\xi_0 = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2 \sqrt{\frac{U_0\,x_0}{\nu}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40\,a)$$

Mit $\lambda_1 = \lambda_{10}$ für $\xi = \xi_0$ erhält man für diesen Fall die Integrationskonstante in Gl. (34) zu

$$C = \xi_0 + \frac{3}{4}\lambda_{10} - \frac{2}{\lambda_{10}-2} - \frac{5}{2}\log\frac{2-\lambda_{10}}{1-\lambda_{10}}$$

und damit als Lösung

$$\xi - \xi_0 = \frac{3}{4}(\lambda_{10}-\lambda_1) + 2\left(\frac{1}{\lambda_1-2} - \frac{1}{\lambda_{10}-2}\right) + \frac{5}{2}\log\frac{(2-\lambda_1)(1-\lambda_{10})}{(2-\lambda_{10})(1-\lambda_1)}, \quad (41)$$

wobei λ_{10} durch den Anfangswert ξ_0 nach Gl. (40) und (40a) bestimmt ist. Der Verlauf von λ_1 über ξ nach Gl. (41) für verschiedene λ_{10} ist in Bild 9 angegeben.

Für die Platte mit an der Vorderkante beginnender Absaugung möge noch der Beiwert des **Gesamtwiderstandes** angegeben werden, soweit er von der Wandreibung herrührt. Quell- und Senkenwiderstand des Ausblasens und Absaugens sind hierbei nicht berücksichtigt. Dieser Widerstand ist größer als für die Platte ohne Absaugung und nähert sich für große Plattenlängen (große *Re*-Zahlen) dem asymptotischen Wert $c_{f\infty} = \frac{\tau_{0\infty}}{\frac{\varrho}{2}U_0^2} = 2\frac{-v_0}{U_0}$, ist also unabhängig von der *Re*-Zahl $U\,l/\nu$.

Für die einseitig angeströmte Platte der Breite b und der Länge l ist der Gesamtwiderstand

$$W = b\int_{x=0}^{l}\tau_0\,dx.$$

Dabei ist nach Gl. (12) und (38)

$$\tau_0 = \frac{\varrho\,U_0^2}{\lambda_1(2-\lambda_1)}\,\frac{-v_0}{U_0}.$$

Wegen $dx = \left(\frac{U_0}{v_0}\right)^2\frac{\nu}{U_0}\,d\xi$ kommt somit

$$W = b\,\varrho\,U_0^2\,\frac{\nu}{-v_0}\int_{\xi=0}^{\xi_l}\frac{d\xi}{\lambda_1(2-\lambda_1)}$$

oder wegen Gl. (33):

$$W = b\,\varrho\,U_0^2\,\frac{\nu}{-v_0}\,F(\lambda_{10}), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

wobei gesetzt ist

$$F(\lambda_{10}) = \int_{\lambda_1=0}^{\lambda_{10}}\frac{-\frac{3}{4} + \frac{\lambda_1-6}{2(2-\lambda_1)^2(\lambda_1-1)}}{\lambda_1(2-\lambda_1)}\,d\lambda_1 \quad . \; . \; (43)$$

Dabei bedeutet λ_{10} den Wert von λ_1 am Ende der Platte, welcher zu $\xi = \xi_l = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2\frac{U_0\,l}{\nu}$ aus Gl. (35) erhalten wird. Wir setzen abkürzend nach Gl. (35):

$$\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2\frac{U_0\,l}{\nu} = \xi_l = f(\lambda_{10}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

mit

$$f(\lambda_{10}) = 1 - \frac{3}{4}\lambda_{10} + \frac{2}{\lambda_{10}-2} + \frac{5}{2}\log\frac{2-\lambda_{10}}{2(1-\lambda_{10})} \quad (45)$$

Für den Widerstandsbeiwert der Platte $c_f = \frac{W}{\frac{\varrho}{2}U_0^2\,b\,l}$ erhält man nunmehr nach Gl. (42)

$$c_f = 2\,\frac{\nu}{-v_0\,l}\,F(\lambda_{10})$$

oder mit l nach Gl. (44)

$$c_f = 2\,\frac{-v_0}{U_0}\,\frac{F(\lambda_{10})}{f(\lambda_{10})} = 2\,\frac{-v_0}{U_0}\,G(\lambda_{10}) \quad . \; . \; . \; . \; (46)$$

Bei vorgegebener Absaugegeschwindigkeit $-v_0/U_0$ ist durch Gl. (44) und (46) das Widerstandsgesetz c_f über $U_0\,l/\nu$ in Form einer Parameterdarstellung gegeben. Der Parameter λ_{10} ist die dimensionslose Grenzschichtdicke am Plattenende: $\lambda_{10} = (-v_0\,\delta_1/\nu)_{x=l}$. Um das Widerstandsgesetz nach Gl. (46) numerisch auswerten zu können, muß noch die Funktion $F(\lambda_{10})$ berechnet werden. Durch Ausrechnung des Integrals Gl. (43) erhält man

$$F(\lambda_{10}) = 1 + \frac{\frac{7}{4}\lambda_{10} - 4}{(2-\lambda_{10})^2} + \frac{5}{2}\log\frac{2-\lambda_{10}}{2(1-\lambda_{10})} \quad . \; . \; (47)$$



Zahlentafel 4. Ebene Platte mit Absaugung; die Funktionen $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ des Widerstandsgesetzes nach Gl. (45), (46) und (47).

λ	$F(\lambda)$	$G(\lambda)$
0	0	∞
0,1	0,076	10,370
0,2	0,168	5,040
0,3	0,283	3,370
0,4	0,430	2,541
0,5	0,625	2,045
0,6	0,894	1,712
0,7	1,291	1,485
0,8	1,941	1,312
0,85	2,710	1,214
0,9	3,258	1,177
0,95	4,759	1,117
0,98	6,900	1,078
0,99	8,583	1,062
1	∞	1

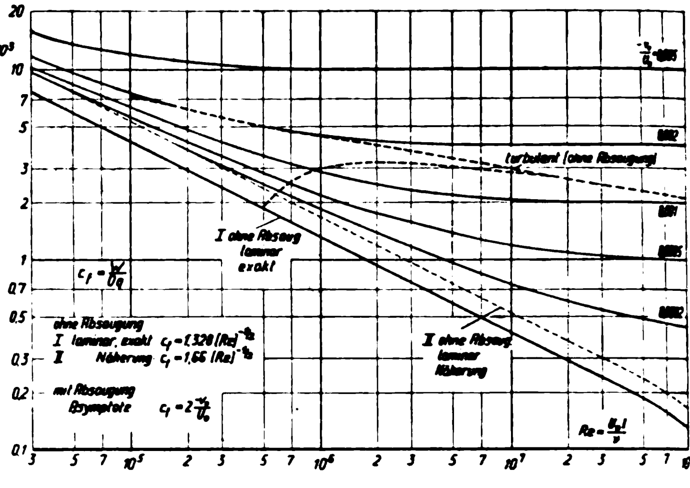


Bild 10. Ebene Platte mit Absaugung. Beiwerte des Gesamtwiderstandes für verschiedene Absaugemengen.

Für die Umgebung von $\lambda_{10} = 0$ gibt dieses die Entwicklung

$$\lambda_{10} \to 0: F(\lambda_{10}) = \frac{11}{16}\lambda_{10} \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Für sehr geringe Plattenlängen muß das Widerstandsgesetz Gl. (46) übergehen in dasjenige der Platte ohne Absaugung. Man erhält diesen Grenzübergang für $\lambda_{10} \to 0$. Wegen $f(\lambda_{10}) = \frac{11}{16}\lambda_{10}^2$ nach Gl. (36) und wegen Gl. (48) erhält man aus Gl. (46):

$$\lambda_{10} \to 0: c_f = 2\frac{-v_0}{U_0}\frac{1}{\lambda_{10}} = 2\frac{-v_0}{U_0}\frac{1}{\sqrt{\frac{16}{11}\xi_l}}$$

und mit ξ_l nach Gl. (44):

$$c_f = 2\sqrt{\frac{11}{16}}\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} = 1{,}66\sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (32a).

Andererseits wird für sehr große Plattenlänge ($\lambda_{10} \to 1$) nach Gl. (45) und (47)

$$\lambda_{10} \to 1: \frac{F(\lambda_{10})}{f(\lambda_{10})} = G(\lambda_{10}) \to 1 \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

und somit

$$c_{f\infty} = 2\frac{-v_0}{U_0}$$

in Übereinstimmung mit dem asymptotischen Gesetz nach Gl. (12). Das Widerstandsgesetz nach Gl. (44) und (46) ist in Bild 10 aufgetragen für verschiedene Werte der Absaugemenge $-v_0/U_0$. Je größer die Absaugemenge, desto früher, d. h. bei umso kleinerer *Re*-Zahl, verläßt die betreffende c_f-Kurve die Widerstandskurve der undurchlässigen Wand und geht nach einem gewissen Übergangsbereich in die asymptotische Kurve $c_{f\infty} = 2\frac{-v_0}{U_0}$ über.

Die hier angegebenen Widerstandsbeiwerte geben nicht ohne weiteres die Schleppleistung einer Platte mit Absaugung. Um diese zu erhalten, muß außer dem Widertand auch noch die Absaugeleistung und der Rückstoß der u. U. nach hinten wieder ausgeblasenen Absaugemenge in Rechnung gestellt werden.

IV. Der Anlauf für die laminare Grenzschicht mit Ausblasen.

Die in dem vorstehenden Abschnitt durchgeführten Rechnungen lassen sich sinngemäß auch auf die Grenzschicht mit Ausblasen übertragen. In diesem Fall hat der Parameter $\lambda_1(x) = -v_0\,\delta_1(x)/\nu$ negative Werte. Für die längsangeströmte ebene Platte mit konstanter Ausblasegeschwindigkeit längs der Platte ist an der Vorderkante $\lambda_1 = 0$; da in diesem Fall, wie in Kap. II gezeigt, für große x die Grenzschichtdicke über alle Grenzen wächst, gilt also

$$x \to \infty: \text{ asymptotisch: } \lambda_1 = -\infty; \; K = -1. \quad (50)$$

Aus Gl. (35) erhält man als asymptotische Lösung für sehr große negative λ_1:

$$\xi = -\frac{3}{4}\lambda_1 = \frac{3}{4}\frac{v_0\,\delta_1}{\nu}, \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

und die Parameter der Grenzschicht werden für das asymptotische Ausblaseprofil nach Gl. (19), (21), (22) und (23):

$$K = -1;\; \frac{\delta_\infty^*}{\delta_{1\infty}} = 2;\; \frac{\vartheta_\infty}{\delta_{1\infty}} = \frac{3}{4};\; \frac{\delta_\infty^*}{\vartheta_\infty} = \frac{8}{3};\; \beta_\infty = 0 \quad (52)$$

(vgl. auch Zahlentafel 2). Die Geschwindigkeitsverteilung für das asymptotische Absaugeprofil ist demnach nach Gl. (14):

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{U_0} &= F_1(\eta) - F_2(\eta) = 1 - e^{-\eta} - \eta\, e^{-\eta};\; \eta = \frac{y}{\delta_1} \\ \frac{u}{U_0} &= 1 - e^{-2\frac{y}{\delta_\infty^*}} - 2\frac{y}{\delta_\infty^*}e^{-2\frac{y}{\delta_\infty^*}} \\ &= 1 - e^{-2\frac{y}{\delta_\infty^*}}\left(1 + 2\frac{y}{\delta_\infty^*}\right) \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Wegen $\beta_\infty = 0$ hat also das asymptotische Ausblaseprofil verschwindende Wandschubspannung; in dieser Beziehung entspricht es dem Grenzschichtprofil am Ablösungspunkt bei undurchlässiger Wand. Aus Gl. (51) und (52) erhält man für die asymptotische Verdrängungsdicke und die Impulsdicke bei Ausblasen:

$$\delta_\infty^* = \frac{8}{3}\frac{v_0}{U_0}x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

$$\vartheta_\infty = \frac{v_0}{U_0}x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Die letzte Gleichung ist in Übereinstimmung mit Gl. (13).

Die Grenzschichtparameter im Anlauf, d. h. vor Erreichen der asymptotischen Lösung, werden aus Gl. (35) erhalten. Die Ergebnisse sind in Bild 11, 12, 13 sowie in Zahlentafel 5 angegeben. Bild 11 zeigt die dimensionslose Verdrängungsdicke $v_0\delta^*/\nu$ in Abhängigkeit von der Lauflänge $\xi = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^2\frac{U_0 x}{\nu}$. Bei $\xi = 20$ beträgt für $v_0\delta^*/\nu$ die Abweichung vom asymptotischen Wert nach Gl. (54) nur noch 1%. In Bild 12 und 13 sind die Geschwindigkeitsprofile aufgetragen, und zwar in Bild 12 die Geschwindigkeit u/U_0 über yv_0/ν und in Bild 13 die Geschwindigkeit u/U_0 über y/δ^*. Die Geschwindigkeitsprofile besitzen sämtlich einen Wendepunkt, der sich mit wachsendem ξ von der Wand aus nach größeren Werten von y/δ^* verschiebt. Für das

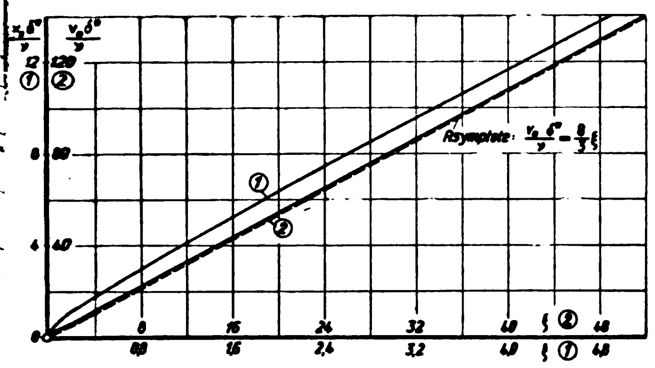


Bild 11. Laminare Grenzschicht an der ebenen Platte mit Ausblasen: Dimensionslose Verdrängungsdicke $\frac{v_0 \delta^*}{\nu}$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Lauflänge ξ.

Zahlentafel 5. Ebene Platte mit Ausblasen (laminar); Kenngrößen der Grenzschicht.

ξ	$-\lambda_1$	$\frac{v_0 \delta^*}{\nu}$	$-K$	$\frac{\delta^*}{\vartheta}$	$\frac{\tau_0}{\varrho v_0 U_0}$
0	0	0	0,500	2,18	∞
0,120	0,5	0,800	0,600	2,26	0,800
0,366	1	1,667	0,667	2,31	0,333
0,990	2	3,50	0,750	2,38	0,125
1,68	3	5,40	0,800	2,43	0,0666
2,39	4	7,43	0,833	2,47	0,0417
3,11	5	9,29	0,857	2,50	0,0286
4,59	7	13,21	0,889	2,53	0,0204
6,81	10	19,16	0,916	2,56	0,00834
10,55	15	29,1	0,940	2,59	0,00392
14,3	20	39,1	0,955	2,61	0,00227
18,05	25	49,1	0,962	2,615	0,00148
21,8	30	59,0	0,968	2,625	0,00104
29,3	40	79,0	0,975	2,635	0,000595
36,8	50	99,0	0,980	2,640	0,000385
44,3	60	119	0,984	2,650	0,000269
59,3	80	159	0,988	2,660	0,000153
74,3	100	199	0,990	2,667	0,000098
Asymptote ($\xi = \infty$)	$\frac{4}{3}\xi$	$\frac{8}{3}\xi$	1	$\frac{8}{3}$	0

asymptotische Ausblaseprofil liegt der Wendepunkt bei $y/\delta^* = 1/2$.

Bezüglich der Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Ausblasen ist zu sagen, daß wegen des Wendepunktes in den Geschwindigkeitsprofilen die Stabilitätsgrenze (kritische Reynoldssche Zahl) sehr niedrig ist. Schon in geringem Abstand von der Plattenvorderkante ist deshalb Umschlag der laminaren Grenzschicht in die turbulente zu erwarten. Die laminare Lauflänge $(U_0 x/\nu)_{\text{krit}}$ für die Grenzschicht mit Ausblasen ist vermutlich erheblich kleiner als für die ebene Platte mit undurchlässiger Wand, wo sie theoretisch $1{,}1 \cdot 10^5$ und experimentell 3,5 bis $5 \cdot 10^5$ beträgt. Genauere Angaben können nur auf Grund einer Stabilitätsuntersuchung gemacht werden.

V. Die turbulente Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen.

In diesem Abschnitt soll für die turbulente Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen eine analoge Abschätzung gegeben werden wie in Kap. III und IV für die laminare Grenzschicht. Die Theorie der turbulenten Grenzschicht ist heute noch nicht so weit entwickelt, daß man einen brauchbaren analytischen Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Strömung besitzt. Aus diesem Grunde kann vorläufig auch für die turbulente Grenzschicht mit Ausblasen und Absaugung kein analytischer Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung gemacht werden. Die Abschätzung kann sich deshalb nur auf die Grenzschichtdicke, die Impulsdicke und einige andere Kenngrößen der Grenzschicht beziehen.

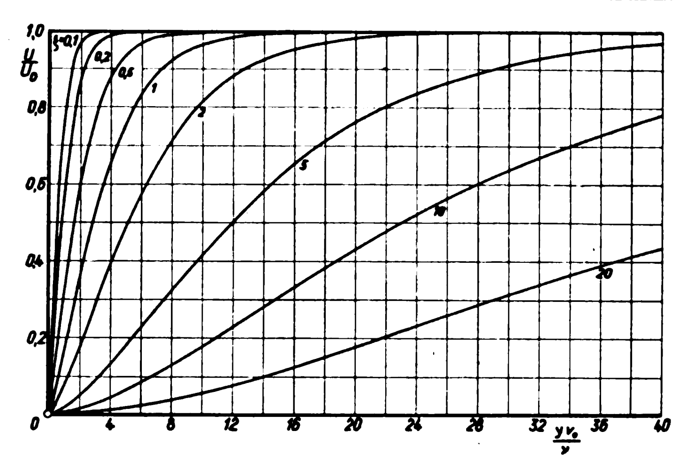


Bild 12. Laminare Grenzschicht an der ebenen Platte mit Ausblasen: Geschwindigkeitsprofile $\frac{u}{U_0}$ über $\frac{y v_0}{\nu}$ für verschiedene ξ.

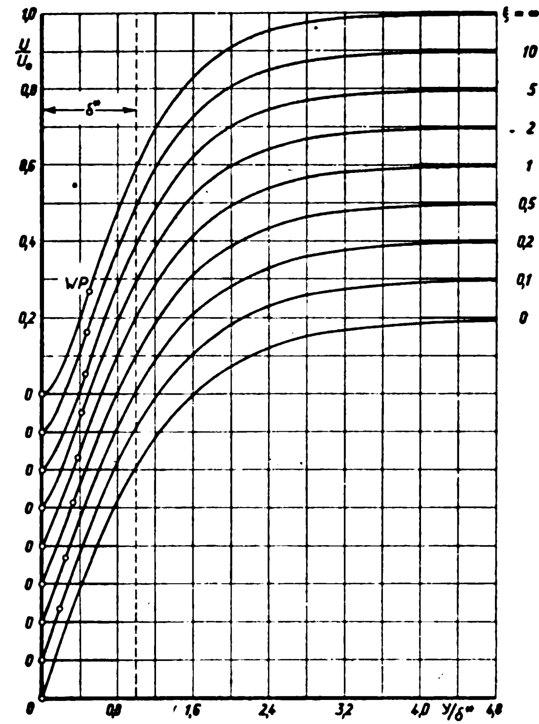


Bild 13. Laminare Grenzschicht an der ebenen Platte mit Ausblasen. Geschwindigkeitsprofile $\frac{u}{U_0}$ über y/δ^* für verschiedene ξ. (WP = Wendepunkt.)

Der Impulssatz liefert analog zu Gl. (5), jedoch mit τ_0 als turbulente Wandschubspannung, die Beziehung

$$U_0^2 \frac{d\vartheta}{dx} - U_0 v_0 = \frac{\tau_0}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Wir machen jetzt die Annahme, daß für die Wandschubspannung der turbulenten Grenzschicht mit Ausblasen und Absaugen der gleiche Ansatz gemacht werden kann, welcher sich bei undurchlässiger Wand für Druckabfall und -anstieg bewährt hat [9], nämlich

$$\tau_0 = 0{,}01256 \left(\frac{U_0 \vartheta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \varrho U_0^2 \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

Aus Gl. (56) und (57) erhält man folgende Differentialgleichung für die Impulsdicke

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{v_0}{U_0} + 0{,}01256 \left(\frac{U_0 \vartheta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Für den Fall der undurchlässigen Wand ($v_0 \equiv 0$) ergibt sich hieraus in bekannter Weise

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\right)^{\frac{5}{4}} &= 0{,}0157\,\frac{U_0\,x}{\nu}\\ \frac{U_0\,\vartheta}{\nu} &= 0{,}0360\left(\frac{U_0\,x}{\nu}\right)^{\frac{4}{5}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (59)$$

Für den Fall der Absaugung ($v_0 < 0$) ergibt sich als asymptotische Lösung wiederum eine konstante Grenzschichtdicke aus $d\vartheta/d\,x = 0$ zu:

$$\left(\frac{U_0\,\vartheta_\infty}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{0{,}01256}{\dfrac{-v_0}{U_0}} \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$

Umgerechnet auf die Verdrängungsdicke der Grenzschicht erhält man mit $\delta^*/\vartheta = 9/7$, was dem 1/7-Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung entspricht,

$$\frac{U_0\,\delta^*_\infty}{\nu} = 3{,}21\cdot 10^{-8}\left(\frac{-v_0}{U_0}\right)^{-4} \left(\begin{matrix}\text{Absaugen}\\ \text{turbulent}\end{matrix}\right) \quad \ldots (61)$$

Diese Gleichung ist das turbulente Analogon zu Gl. (9a), welche die asymptotische Verdrängungsdicke der laminaren Grenzschicht bei Absaugung gibt. Der Vergleich der beiden Gesetze Gl. (61) und (9a) zeigt, daß die asymptotische Dicke der turbulenten Grenzschicht gegenüber Änderungen der Absaugemenge erheblich empfindlicher ist als die laminare Grenzschicht.

Das asymptotische Gesetz für **Ausblasen** erhält man aus Gl. (58) mit $d\vartheta/d\,x = v_0/U_0$ zu

$$\vartheta_\infty = \frac{v_0}{U_0}\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

oder

$$\frac{U_0\,\vartheta_\infty}{\nu} = \frac{v_0}{U_0}\,\frac{U_0\,x}{\nu} \left(\begin{matrix}\text{Ausblasen}\\ \text{turbulent}\end{matrix}\right) \quad \ldots (62\,\text{a})$$

Gl. (62) ist in Übereinstimmung mit Gl. (13) der laminaren Grenzschicht. Man hat also das interessante Ergebnis, daß die asymtotische Grenzschichtdicke beim Ausblasen unabhängig ist vom Strömungszustand (laminar oder turbulent).

Den **Anlauf** für Absaugen und Ausblasen, d. h. die Entwicklung der Grenzschicht vor Erreichen der asymptotischen Gesetze nach Gl. (60) und (62), erhält man durch folgende einfache Rechnung. Nach Gl. (58) ist

$$\frac{\vartheta^{\frac{1}{4}}\,d\,\vartheta}{\dfrac{v_0}{U_0}\,\vartheta^{\frac{1}{4}} + 0{,}01256\left(\dfrac{U_0}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}} = d\,x \quad \ldots\ldots (63)$$

Für den Fall, daß die Absaugung an der Plattenvorderkante beginnt, liefert die Integration von Gl. (63) mit der Anfangsbedingung $x = 0 : \vartheta = 0$ und der Abkürzung

$$\varkappa = \frac{1}{0{,}01256}\left(\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{-v_0}{U_0} = 79{,}5\left(\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{-v_0}{U_0} \quad \ldots\ldots (64)$$

nach kurzer Zwischenrechnung das Ergebnis

$$2{,}49\cdot 10^{-8}\left\{\frac{\varkappa^4}{4} + \frac{\varkappa^3}{3} + \frac{\varkappa^2}{2} + \varkappa + \log\,(1-\varkappa)\right\} = \frac{1}{4}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0\,x}{\nu} = \frac{1}{4}\,\xi_2 \quad (65)$$

In der Umgebung von $\varkappa = 0$, $x = 0$ läßt sich Gl. (65) entwickeln in der Form

$$2{,}49\cdot 10^{-8}\,\frac{\varkappa^5}{5} = \frac{1}{4}\left(\frac{-v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0\,x}{\nu} \quad \ldots\ldots (66)$$

(Ausblasen und Absaugen)

Nach Gl. (65) kann $\varkappa$, und damit nach Gl. (64) auch $\left(\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{-v_0}{U_0}$, in Abhängigkeit von

$$\xi_2 = \left(\frac{v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0\,x}{\nu}$$

Zahlentafel 6. Ebene Platte mit Absaugen und Ausblasen, turbulent. Kenngrößen der Grenzschicht.

Absaugen		Ausblasen	
$\left(\frac{-v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0 x}{\nu}\cdot 10^8$	$\varkappa^4$	$\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0 x}{\nu}\cdot 10^8$	$\varkappa^4$
0	0	0	0
$2{,}18\cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0012	0,0016
0,00139	0,0016	0,0156	0,0256
0,00896	0,0081	0,1035	0,1296
0,03102	0,0256	0,3940	0,4096
0,1087	0,0625	1,092	1,000
0,3171	0,1296	3,001	2,442
0,8440	0,2401	6,770	5,060
2,152	0,4095	13,51	9,379
5,880	0,6560	24,21	16,000
11,00	0,8155	36,72	23,426
18,95	0,9220	53,65	33,178
21,63	0,941	75,83	45,698
25,43	0,991	104,6	61,466
32,19	0,980	1231	625
∞	1	22000	10000

$$\varkappa^4 = 79{,}5^4\cdot\frac{U_0\,\vartheta}{\nu}\cdot\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^4.$$

berechnet werden. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 6 und in Bild 14 für Absaugen und in Bild 15 für Ausblasen dargestellt.

Die asymptotischen Lösungen von Gl. (65) für sehr großes ξ_2 sind

Absaugen ($\varkappa > 0$) : $\varkappa = 1$.

In Übereinstimmung mit Gl. (60) und

Ausblasen ($\varkappa < 0$): $2{,}49\cdot 10^{-8}\,\frac{\varkappa^4}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{v_0}{U_0}\right)^5 \frac{U_0\,x}{\nu}$.

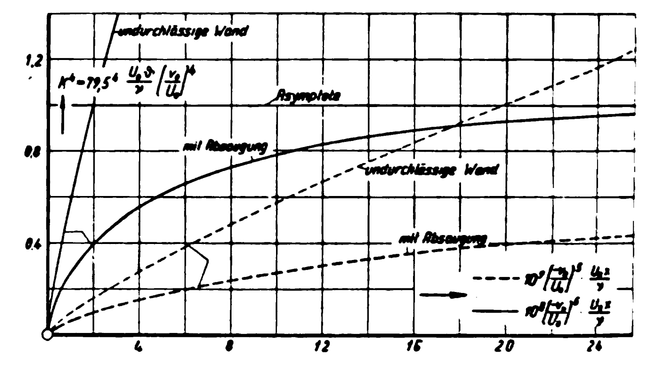


Bild 14. Turbulente Grenzschicht mit Absaugung. Zunahme der Impulsdicke im Anlauf.

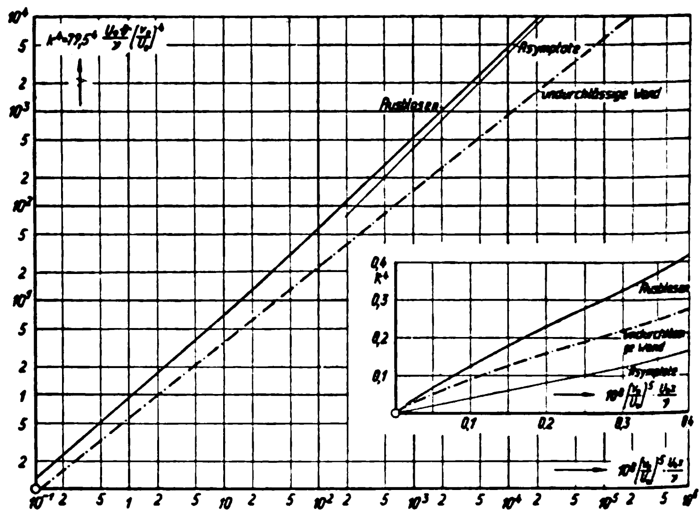


Bild 15. Turbulente Grenzschicht mit Ausblasen. Zunahme der Impulsdicke im Anlauf.

Dies ist identisch mit

$$\frac{U_0 \vartheta_x}{\nu} = \frac{v_0}{U_0} \frac{U_0 x}{\nu}$$

und somit in Übereinstimmung mit Gl. (62a) und (13).

Die Entwicklung der Lösung (65) in der Umgebung von $\varkappa = 0$, $\xi_1 = 0$ nach Gl. (66) ist identisch mit der Lösung für undurchlässige Wand nach Gl. (59), wie eine kurze Zwischenrechnung zeigt. Für die turbulente Grenzschicht mit Ausblasen und Absaugen gilt also ebenso wie für die laminare, daß in der Nähe der Vorderkante die Grenzschicht sich wie bei undurchlässiger Wand entwickelt.

Für den Fall, daß die Absaugung nicht an der Vorderkante, sondern erst bei $x = x_0$ beginnt, erhält man an Stelle von Gl. (65):

$$2{,}49 \cdot 10^{-8} \left\{ \frac{\varkappa^4}{4} + \frac{\varkappa^3}{3} + \frac{\varkappa^2}{2} + \varkappa + \log (1 - \varkappa) - \left[\frac{\varkappa_0^4}{4} + \frac{\varkappa_0^3}{3} + \frac{\varkappa_0^2}{2} + \varkappa_0 + \log (1 - \varkappa_0) \right] \right\} = \frac{1}{4} \left(\frac{v_0}{U_0} \right)^5 \left\{ \frac{U_0 x}{\nu} - \frac{U_0 x_0}{\nu} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (67)$$

Dabei ist

$$\varkappa_0 = 79{,}5 \left(\frac{U_0 \vartheta_0}{\nu} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{-v_0}{U_0}$$

gegeben durch die Impulsdicke ϑ_0 bei $x = x_0$ am Ende der Laufstrecke ohne Absaugung. Der Zusammenhang zwischen $\varkappa_0$ und x_0 ist gegeben durch Gl. (66) für $x = x_0$:

$$\varkappa_0 = 34{,}7 \frac{-v_0}{U_0} \left(\frac{U_0 x_0}{\nu} \right)^{1/5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (68)$$

VI. Zusammenfassung.

Es wird für die längsangeströmte ebene Platte die laminare und turbulente Grenzschicht mit Ausblasen und Absaugen berechnet. Dabei wird kontinuierliches Absaugen bzw. Ausblasen mit konstanter Intensität längs der Platte angenommen. Für sämtliche vier Fälle (laminar und turbulent; Absaugen und Ausblasen) ergeben sich recht einfache asymptotische Gesetze für die Zunahme der Grenzschichtdicke (oder Impulsdicke) längs der Platte, und zwar erhält man für Absaugung (laminar und turbulent) asymptotisch konstante Grenzschichtdicke, für Ausblasen (laminar und turbulent) asymptotisch linear mit der Lauflänge x zunehmende Grenzschichtdicke. Für sämtliche vier Fälle wird auch der »Anlauf« berechnet, d. h. die Entwicklung der Grenzschicht von der Plattenvorderkante bis zum Erreichen der asymptotischen Gesetze. Während im turbulenten Fall nur die charakteristischen Grenzschichtgrößen Verdrängungsdicke, Impulsdicke und Wandschubspannung ermittelt werden, wird für die laminare Grenzschicht überdies auch die Geschwindigkeitsverteilung im Anlauf mit Hilfe des Impulssatzes berechnet.

Bei den numerischen Rechnungen hat mich Herr Dr. Bussmann sehr wesentlich unterstützt.

VII. Schrifttum.

[1] L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung mit sehr kleiner Reibung. Verhdlg. III. Internat. Math.-Kongreß Heidelberg 1904; wieder abgedruckt in »Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik«. Göttingen 1927.

[2] L. Prandtl, The mechanics of viscous fluids. in Durand Aerodynamic Theory Bd. III. Berlin 1935.

[3] O. Schrenk, Versuche mit Absaugeflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 16.

[4] J. Ackeret, M. Ras, W. Pfenninger, Verhinderung des Turbulentwerdens einer Reibungsschicht durch Absaugung. Naturwissenschaften (1941), S. 622.

[5] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. u. Physik Bd. 56 (1908), S. 1.

[6] K. Pohlhausen, Zur näherungsweisen Integration der laminaren Grenzschicht. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 1 (1921), S. 252.

[7] H. Holstein und T. Bohlen, Ein vereinfachtes Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen (noch nicht veröffentlicht).

[8] H. Schlichting, Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 179.

[9] E. Gruschwitz, Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung. Ing.-Archiv Bd. 2 (1931), S. 321.

Abgeschlossen März 1942.

Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse*).

Von G. Guderley.

Bericht des Instituts für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Wie man aus den exakten Lösungen der Akustik vermuten kann, geht der Druck hinter einem kugeligen Verdichtungsstoß, der nach seinem Mittelpunkt zu fortschreitet, mit Annäherung an den Mittelpunkt nach Unendlich. Die genaue Untersuchung dieser Unendlichkeitsstelle bringt die vorliegende Arbeit. Das Verhalten von Druck, Dichte und Geschwindigkeit wird für kugelige und außerdem für den ganz entsprechend liegenden Fall zylindrischer Verdichtungsstöße berechnet. Die Abweichungen von den Aussagen der Akustik sind beträchtlich.

Gliederung.

1. Einleitung.

Das Verhalten eines kugeligen oder zylindrischen Verdichtungsstoßes, der sich in einem ruhenden idealen Gase in Richtung auf den Kugelmittelpunkt bzw. die Zylinderachse zu fortpflanzt, läßt sich im allgemeinen nicht in geschlossener Form angeben. Da jedoch das Differentialgleichungssystem für die Strömung hyperbolischen Typs ist, kann man wenigstens numerische Lösungen ohne sonderliche Schwierigkeiten berechnen. Aus ihnen sieht man, daß mit Annäherung an den Kugelmittelpunkt bzw. die Zylinderachse die Stärke des Verdichtungsstoßes gegen Unendlich geht. Die Unendlichkeitsstelle selbst ist allerdings mit diesen Näherungsmethoden nicht zu erfassen. Es sind dazu besondere analytische Untersuchungen notwendig, die in der vorliegenden Arbeit durchgeführt werden sollen. Bereits in der Akustik wird man bei der Untersuchung kugeliger Schallwellen auf eine solche Unendlichkeitsstelle geführt. Sichere Aussagen sind dabei allerdings nicht möglich, da die Voraussetzung kleiner Zustandsänderungen zugrunde liegt. Wie die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen, vermittelt die Akustik tatsächlich nicht einmal in qualitativer Hinsicht ein richtiges Bild der Vorgänge an jener Unendlichkeitsstelle.

Die Untersuchung selbst nimmt folgenden Verlauf. Nach der Aufstellung der hydrodynamischen Grundgleichungen in 2 bringt 3 einen Lösungsansatz, der geeignet ist, die fragliche Singularität zu erfassen, und der das ursprüngliche System partieller Differentialgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführt. Durch eine Ähnlichkeitstransformation reduziert 4 dieses System auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. In 5 werden die Ergebnisse der in 7, 8, 9 und 10 durchgeführten Diskussion der Lösungsmannigfaltigkeit zusammengestellt; und dann in 6 gezeigt, welche Lösungen in Wirklichkeit eintreten. Abschnitt 11 skizziert schließlich das Ergebnis einer ähnlich verlaufenen Diskussion bei stationären Strömungen. Es handelt sich um den Durchgang durch die kritische Geschwindigkeit.

*) A 35 4.

2. Grundgleichungen der Strömung, Bedingungen an Verdichtungsstößen.

Es sei

$\bar{p}$ der Druck,
$\bar{\varrho}$ die Dichte,
$\bar{s}$ die Entropie,
$\bar{a}$ die Schallgeschwindigkeit,
$\bar{v}$ die Geschwindigkeit eines Gasteilchens,
$\bar{u}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Verdichtungsstoßes im Raum,
t die Zeit, — der Nullpunkt der Zeitzählung sei in den Augenblick gelegt, in dem der Verdichtungsstoß den Kugelmittelpunkt bzw. die Zylinderachse erreicht —,
α eine Zahl, die für zylindrische Verdichtungsstöße den Wert 1, für kugelige Verdichtungsstöße den Wert 2 annimmt,
r die Ortskoordinate, — für $\alpha = 1$ stellt sie die Entfernung von der Achse eines Systems von Zylinderkoordinaten, für $\alpha = 2$ die Entfernung vom Nullpunkt eines Systems von Kugelkoordinaten dar —,
R die allgemeine Gaskonstante,
$\varkappa$ das Verhältnis zwischen der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und der bei konstantem Volumen.

Für ein ideales Gas mit konstantem $\varkappa$ ist

$$\bar{a}^2 = \varkappa \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}} \qquad (1)$$

und

$$\bar{s} = \frac{R}{\varkappa - 1} \cdot \ln \cdot (\bar{p}/\bar{\varrho}^{\varkappa}).$$

Die Strömung in einem von Verdichtungsstößen freien Gebiet wird durch die Kontinuitätsgleichung, das Newtonsche Prinzip und die Aussage, daß die Entropie eines Teilchens konstant bleibt, bestimmt.

$$\frac{\partial (\bar{\varrho}\bar{v})}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \frac{\alpha \cdot \bar{\varrho} \cdot \bar{v}}{r} = 0 \quad \text{(Kontinuität)} \qquad (2a)$$

$$\frac{1}{\bar{\varrho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{(Newtonsches Prinzip)} \qquad (2b)$$

$$\bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\bar{p}/\bar{\varrho}^{\varkappa}) + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}/\bar{\varrho}^{\varkappa}) = 0 \quad \text{(Konstanz der Entropie)} \qquad (2c)$$

An einem Verdichtungsstoß gelten die Gleichungen[1])

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \bar{\varrho}_1 (\bar{v}_1 - \bar{u})^2 \cdot \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{(\bar{v}_1 - \bar{u})^2}\right) \qquad (3a)$$

[1]) Siehe z. B. Ackeret, Beitrag Gasdynamik in Handbuch der Physik VII, Berlin 1927, S. 327. Die beiden ersten der dort angegebenen Gleichungen (8) ergeben nach einer kleinen Umformung die Gleichungen (3a) und (3b); die Gleichung (3c) erhält man durch Kombination der Kontinuitätsgleichung (bei Ackeret (1)) mit der zweiten der Ackeretschen Gleichungen (8).

$$\bar{\varrho}_2 = \bar{\varrho}_1 \cdot \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1 + 2\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{v}_1 - \bar{u}}\right)^2} \quad \text{(3b)}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u} + (\bar{v}_1 - \bar{u}) \cdot \frac{\varkappa - 1 + 2\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{v}_1 - \bar{u}}\right)^2}{\varkappa + 1}; \quad \text{(3c)}$$

dabei kennzeichnet der Index 1 den Zustand vor, der Index 2 den Zustand nach dem Stoß.

Für sehr starke Stöße, d. h. für $\bar{v}_1 - \bar{u} \gg \bar{a}$ und damit auch

$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{\varrho}_1 \bar{a}_1^2}{\varkappa} \ll \bar{\varrho}_1 (\bar{v}_1 - \bar{u})^2$$

erhält man

$$\bar{p}_2 = \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \bar{\varrho}_1 (\bar{v}_1 - \bar{u})^2 \quad \text{(3a')}$$

$$\bar{\varrho}_2 = \bar{\varrho}_1 \cdot \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \quad \text{(3b')}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u} + (\bar{v}_1 - \bar{u}) \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \quad \text{(3c')}$$

3. Der Lösungsansatz.

Zu einem brauchbaren Lösungsansatz gelangt man durch folgende Überlegung: Es liegt die Vermutung nahe, daß sich die Lebenslinie des Verdichtungsstoßes im rt-Diagramm für eine Umgebung des Punktes $r = 0$, $t = 0$ in der Form darstellen läßt

$$r = \sum a_m (-t)^m.$$

Solange sich der Verdichtungsstoß auf den Kugelmittelpunkt zu bewegt, ist t negativ; damit nur Potenzen positiver Zahlen auftreten, wurde deshalb t in die letzte Gleichung mit negativem Vorzeichen eingetragen. Die m sind beliebige positive Zahlen, die a_m reelle Konstante. Der kleinste auftretende Wert m sei n.

Für eine hinreichend kleine Nachbarschaft des Punktes $t = 0$ überwiegt das Glied $a_n \cdot t^n$ alle anderen Glieder. Beschränkt man sich auf diese Nachbarschaft, so erhält man als Gleichung für die Lebenslinie des Verdichtungsstoßes

$$r = a_n (-t)^n;$$

also eine Parabel $n$ter Ordnung.

Für die Geschwindigkeit des Verdichtungsstoßes ergibt sich

$$\frac{dr}{dt} = \bar{u} = -n \cdot a_n \cdot (-t)^{n-1} = -n \cdot a_n^{\frac{1}{n}} \cdot r^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Soll, wie bei unserem Problem, die Stärke des Verdichtungsstoßes und damit auch seine Geschwindigkeit für $t \to 0$ nach Unendlich gehen, so muß $n < 1$ sein.

Berechnet man die Zustandsgrößen nach dem Verdichtungsstoß mit Hilfe der Formeln (3'), wobei vor dem Verdichtungsstoß die Geschwindigkeit 0 herrschen möge, so erhält man

$$\bar{p}_2 = \left[\frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \bar{\varrho}_1 \cdot n^2 \cdot a_n^{\frac{2}{n}}\right] \cdot r^{2 - \frac{2}{n}}$$

$$\bar{\varrho}_2 = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \bar{\varrho}_1$$

$$\bar{v}_2 = \left[-\frac{2}{\varkappa + 1} \cdot n \cdot a_n^{\frac{1}{n}}\right] \cdot r^{1 - \frac{1}{n}}.$$

Wesentlich an diesem Ergebnis ist für uns, daß längs der raumzeitlichen Parabel $r/(-t)^n = a_n$ sich der Druck wie $r^{2-\frac{2}{n}}$, die Dichte wie r^0 und die Geschwindigkeit wie $r^{1-\frac{1}{n}}$ verhält. Es liegt die Vermutung nahe, daß auch längs anderer Parabeln $r/(-t)^n =$ konst. ein gleiches Verhalten eintritt. Wir führen deshalb ein

$$\frac{r}{(\mp t)^n} = \xi \quad \text{(4)}$$

— dabei soll hier wie überall in dieser Arbeit das obere Vorzeichen für $t < 0$ das untere Vorzeichen für $t > 0$ gelten — und machen den Ansatz[2])

$$\bar{p} = p(\xi) \cdot r^{2 - \frac{2}{n}} \quad \text{(5a)}$$

$$\bar{\varrho} = \varrho(\xi) \quad \text{(5b)}$$

$$\bar{v} = v(\xi) \cdot r^{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{(5c)}$$

Wenn man einführt

$$a^2 = \frac{\varkappa \cdot p}{\varrho}, \quad \text{(6)}$$

so ergibt sich aus (1)

$$\bar{a}^2 = a^2 \cdot r^{2 - \frac{2}{n}} \quad \text{(5d)}$$

Aus (4) erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\xi}{r}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm n \cdot \frac{r}{(\mp t)^{n+1}} = \pm n \cdot r^{-\frac{1}{n}} \cdot \xi^{1 + \frac{1}{n}}.$$

Geht man hiermit in das Differentialgleichungssystem (2) ein, so heben sich die Glieder mit r weg und es ergibt sich folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d \ln \varrho}{d \ln \xi}\left(1 \pm \frac{n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}}{v}\right) + \frac{d \ln v}{d \ln \xi} + \left(1 - \frac{1}{n} + \alpha\right) = 0 \quad \text{(7a)}$$

$$\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{a^2}{v^2} \cdot \frac{d \ln p}{d \ln \xi} + \frac{d \ln v}{d \ln \xi}\left(1 \pm \frac{n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}}{v}\right) + \left(\frac{2}{\varkappa} \cdot \frac{a^2}{v^2} + 1\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{(7b)}$$

$$\left(\frac{d \ln p}{d \ln \xi} - \varkappa \frac{d \ln \varrho}{d \ln \xi}\right)\left(1 \pm \frac{n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}}{v}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0. \quad \text{(7c)}$$

Tritt an der Stelle $\xi = \xi_v$ ein Verdichtungsstoß auf, so gilt für ihn

$$\frac{r}{(\mp t)^n} = \xi_v,$$

seine räumliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist

$$\bar{u} = \frac{dr}{dt} = \mp n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}} \cdot r^{1 - \frac{1}{n}}.$$

Man erhält für ihn aus den Bedingungen (3)

$$p_2 = p_1 + \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \varrho_1 \left(v_1 \pm n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}}\right)\left(1 - \left(\frac{a_1}{v_1 \pm n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}}}\right)^2\right) \quad \text{(8a)}$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 \cdot \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1 + 2\left(\frac{a_1}{v_1 \pm n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}}}\right)^2} \quad \text{(8b)}$$

$$v_2 = \mp n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}} + \left(v_1 \pm n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}}\right) \frac{\varkappa - 1 + 2\left(\frac{a_1}{v_1 \pm n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}}}\right)^2}{\varkappa + 1} \quad \text{(8c)}$$

Auch hier verschwinden die Glieder mit r.

Ist $v_1 = 0$ und der Verdichtungsstoß sehr stark, so erhält man die Anfangswerte für die Lösung des Systems (7)

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{2\,\varrho_1 \cdot n^2 \cdot \xi_v^{\frac{2}{n}}}{\varkappa + 1} \\ \varrho_2 &= \varrho_1 \cdot \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \\ v_2 &= -\frac{2}{\varkappa + 1} \cdot n \cdot \xi_v^{\frac{1}{n}} \end{aligned}\right\} \quad \text{(9)}$$

[2]) Durch die Forderung, daß das Strömungsfeld durch eine Ähnlichkeitstransformation in sich selbst übergeführt werden kann, kommt Bechert zu einem entsprechenden, etwas allgemeineren Ansatz. (Bechert, Über die Differentialgleichungen der Wellenausbreitungen in Gasen. Annalen der Physik. 5. Folge, Bd. 39 (1941), S. 357ff). Bekanntlich bestehen zwischen stationären zweidimensionalen Überschallströmungen und nichtstationären eindimensionalen Strömungen starke Ähnlichkeiten. Für $n = 1$ stellt der hier gebrachte Ansatz ein Analogon zu dem Busemannschen kegeligen Strömungsfeld bei stationären Strömungen dar. (A. Busemann, Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung Luft.-Forschg., Bd. 19 (1942), S. 137 bis 144.)

4. Reduktion des Systems (7) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Nachdem durch den Ansatz (5) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen gewonnen worden ist, besteht noch die Aufgabe, zu entscheiden, für welche Werte n die zu den Anfangswerten (9) gehörenden Lösungen des Systems physikalisch realisierbar sind und die Lösungen selbst anzugeben. Hierbei bedeutet es eine wesentliche Erleichterung, daß man das Differentialgleichungssystem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren kann. Daß dies möglich sein muß, und welche Transformationen dabei vorzunehmen sind, ergibt sich auf Grund von Dimensionsbetrachtungen[3]).

Löst man das System (7) nach den verschiedenen Ableitungen auf, so kann man das Ergebnis in der Form schreiben

$$dp : d\varrho : dv : d\xi = f_1(p, \varrho, v, \xi) : f_2(p, \varrho, v, \xi) : f_3(p, \varrho, v, \xi) : f_4(p, \varrho, v, \xi).$$

Dabei sind die f_1, f_2, f_3, f_4 Funktionen, die sich bei der Auflösung ergeben. Die verschiedenen hier auftretenden Größen haben folgende Dimensionen:

p hat die Dimension $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}^{\frac{2}{n}-4}$,
ϱ » » » $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}^{-4} \cdot \mathrm{s}^2$,
v » » » $\mathrm{cm}^{\frac{1}{n}} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,
ξ » » » $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-n}$,

Nun kann man die Beziehungen (10) sicher auch in dimensionsloser Form schreiben; in diesem Falle können in den Gleichungen nur die dimensionslosen Kombinationen der verschiedenen Größen auftreten. Von den vier Größen p, ϱ, v und ξ, die auf der rechten Seite von (10) stehen, gibt es nur zwei voneinander unabhängige dimensionslose Kombinationen. Wählt man hierfür etwa

$$\sqrt{\frac{\varkappa \cdot p}{\varrho \cdot \xi^{\frac{2}{n}}}} = \frac{a}{\xi^{\frac{1}{n}}} \quad \text{und} \quad \frac{v}{\xi^{\frac{1}{n}}},$$

so ergibt sich

$$d \ln p : d \ln \varrho : d \ln v : d \ln \xi = g_1\left(\frac{a}{\xi^{\frac{1}{n}}}; \frac{v}{\xi^{\frac{1}{n}}}\right) : g_2\left(\frac{a}{\xi^{\frac{1}{n}}}; \frac{v}{\xi^{\frac{1}{n}}}\right) : g_3\left(\frac{a}{\xi^{\frac{1}{n}}}; \frac{v}{\xi^{\frac{1}{n}}}\right) : g_4\left(\frac{a}{\xi^{\frac{1}{n}}}; \frac{v}{\xi^{\frac{1}{n}}}\right).$$

[3]) Auf Grund der Theorie der Differentialgleichungen ist die Reduktion des Gleichungssystems möglich, weil sich für dessen Lösungen Transformationsgruppen angeben lassen (s. z. B. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, Julius Springer 1930, S. 61 ff.). Die Dimensionsbetrachtungen dienen hier dazu, diese Gruppen aufzufinden.

Die g_i sind dabei Funktionen, die sich aus den f_i errechnen. Daß eine solche Darstellung möglich ist, läßt sich auch sofort aus (7) ablesen.

Wir führen diese dimensionslosen Kombinationen unter Zufügung der im Augenblick unwesentlichen Faktoren $\frac{1}{n}$ und $\mp \frac{1}{n}$ als neue Variable ein

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{a}{n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}} \\ \nu &= \mp \frac{v}{n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Dann ist

$$d \ln \mu = d \ln a - \frac{1}{n} \cdot d \ln \xi = \frac{1}{2} \cdot d \ln p - \frac{1}{2} d \ln \varrho - \frac{1}{n} \cdot d \ln \xi$$

und

$$d \ln \nu = d \ln v - \frac{1}{n} \cdot d \ln \xi.$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d \ln \mu}{d \ln \nu} = \frac{\frac{1}{2} g_1 - \frac{1}{2} g_2 - \frac{1}{n} g_4}{g_3 - \frac{1}{n} g_4}.$$

Wendet man diese Überlegungen auf (7) an, so hat man die Transformation durchzuführen

$$p = \frac{n^2}{\varkappa} \cdot \varrho \cdot \mu^2 \cdot \xi^{\frac{2}{n}}$$
$$v = \mp \cdot n \cdot \nu \cdot \xi^{\frac{1}{n}}$$
$$\varrho = \varrho$$
$$\xi = \xi$$

Dann ist

$$d \ln p = d \ln \varrho + 2\, d \ln \mu + \frac{2}{n} \cdot d \ln \xi$$
$$d \ln v = d \ln \nu + \frac{1}{n} \cdot d \ln \xi$$
$$d \ln \varrho = d \ln \varrho$$
$$d \ln \xi = d \ln \xi.$$

Damit erhält man aus (7)

$$\begin{aligned} d\nu \qquad\qquad &+ (\nu - 1)\, d \ln \varrho &&+ \nu (1 + \alpha)\, d \ln \xi = 0 \\ \varkappa (\nu - 1)\, d\nu + 2 \mu\, d\mu \qquad &+ \mu^2\, d \ln \varrho &&+ \left[2 \mu^2 + \varkappa \nu \left(\nu - \frac{1}{n}\right)\right] d \ln \xi = 0 \\ 2 (\nu - 1)\, d\mu + \mu (1 - \varkappa)(\nu - 1)\, d \ln \varrho & &&+ 2 \mu \left(\nu - \frac{1}{n}\right) d \ln \xi = 0. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich mit Hilfe der Cramerschen Regel

$$\begin{aligned} d\nu : d\mu : d \ln \varrho : d \ln \xi = \\ &\left[-2 (\nu - 1) \left\{\mu^2 \left(\varkappa \nu (1 + \alpha) + 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \varkappa \nu (\nu - 1) \left(\nu - \frac{1}{n}\right)\right\}\right] \\ &: \left[-\mu \left\{2 \mu^2 \left(\varkappa (\nu - 1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) + \varkappa (\nu - 1) \left[-(2 + (\varkappa - 1) \alpha) \nu^2 + \left(\frac{3 - \varkappa}{n} + \varkappa + 1 + (\varkappa - 1) \alpha\right) \nu - \frac{2}{n}\right]\right\}\right] \\ &: \left[4 \mu^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \varkappa \nu (\nu - 1) \left(\alpha (\nu - 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &: 2 \varkappa (\nu - 1) \cdot [\mu^2 - (\nu - 1)^2] \end{aligned} \qquad (13)$$

Die hierin enthaltene Proportion

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{\mu}{2 (\nu - 1)} \cdot \frac{2 \mu^2 \left(\varkappa (\nu - 1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) + \varkappa (\nu - 1) \left[-(2 + (\varkappa - 1) \alpha) \nu^2 + \left(\frac{3 - \varkappa}{n} + \varkappa + 1 + (\varkappa - 1) \alpha\right) \nu - \frac{2}{n}\right]}{\mu^2 \left(\varkappa \nu (1 + \alpha) + 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) - \varkappa \nu (\nu - 1) \left(\nu - \frac{1}{n}\right)}. \qquad (13a)$$

stellt die gewünschte Differentialgleichung dar.

Die weitere Diskussion gestaltet sich bequemer, wenn man außerdem aus (12) $d \ln \varrho$ eliminiert; man erhält die Gleichungen in denen sich die Kurven durch ihre Einlaufrichtung in Punkt P_5 bzw. P_2 unterscheiden.

Punkt A entspricht den Anfangsbedingungen (16) des Problems.

$$\left.\begin{aligned} d\nu\,(\mu^2 - \varkappa\,(\nu-1)^2) - 2\,\mu\,(\nu-1)\,d\mu + \left[((\varkappa-1)\,\nu+2)\,\mu^2 - \varkappa\,\nu\,(\nu-1)\left(\nu-\frac{1}{n}\right)\right] d\ln\xi = 0 \\ d\nu\,\mu\,(\varkappa-1) + 2\,(\nu-1)\,d\mu + \mu\left[(\varkappa+1+(\varkappa-1)\,\alpha)\,\nu - \frac{2}{n}\right] d\ln\xi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Auch in die Beziehungen für den Verdichtungsstoß (8) müssen μ und ν eingeführt werden. Das Ergebnis sei in der Form geschrieben

$$\nu_2 - 1 = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{\mu_1^2}{\nu_1-1} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,(\nu_1-1) \quad (15\text{a})$$

$$\mu_2^2 = \mu_1^2 + \frac{\varkappa-1}{2}\left[(\nu_1-1)^2 - (\nu_2-1)^2\right] \quad (15\text{b})$$

(8b) läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\nu_1-1}{\nu_2-1} \quad (15\text{c})$$

Man bestätigt diese Gleichungen mit Hilfe von (8) und (6). Die Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung (13) ergeben sich aus (9). Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\sqrt{2\,\varkappa\,(\varkappa-1)}}{\varkappa+1} \\ \nu_2 &= \frac{2}{\varkappa+1} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

5. Überblick über die Lösungsmannigfaltigkeit der Gleichung (13a) und ihre physikalischen Eigenschaften.

Die nächste Aufgabe wäre es, die Gestalt der Lösungsmannigfaltigkeit von (13a) zu bestimmen und ihre Beziehungen zum rt-Diagramm, d. h. zu den physikalischen Verhältnissen aufzuzeigen. Wir wollen jedoch, um rascher die Frage nach der in Wirklichkeit eintretenden Strömung beantworten und damit den Verlauf der gesamten Untersuchung übersehen zu können, diese Diskussion zurückstellen und zunächst nur ihre Ergebnisse anführen. Sie wird in den Abschnitten 7 bis 10 nachgeholt.

Den grundsätzlichen Verlauf der Lösungskurven, wie er sich für Werte n, die in der Nähe des wirklichen liegen, einstellt, ist in Bild 1 gezeigt. Dabei ist nur derjenige Teil der $\mu\nu$-Ebene dargestellt worden, der für unser Problem Interesse besitzt[4]). Um das Verhalten der Lösungskurven im Unendlichen erkennen zu können, ist die Darstellung so gewählt worden, daß sich die unendlich fernen Punkte der $\mu\nu$-Ebene ins Endliche abbilden.

Dies wird durch Einführung homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3 erreicht. Im Augenblick genügt es zu wissen, daß man sich Bild 1 dadurch erzeugt denken kann, daß man die $\mu\nu$-Ebene durch Zentralprojektion auf eine zu ihr geneigte Ebene abbildet. Dem Ursprung der $\mu\nu$-Ebene entspricht Punkt P_4. Aus den Achsen des Koordinatensystems $\nu = 0$ und $\mu = 0$ werden bei der Projektion die Geraden P_4P_6 und $P_7P_4P_1$. Der zur μ-Achse parallelen Geraden $\nu = 1$ entspricht hier die Gerade P_1P_6. Die im Unendlichen liegenden Punkte der $\mu\nu$-Ebene bilden sich auf die Gerade P_6P_7 ab. Die drei als Berandung benutzten Geraden P_1P_7, P_7P_6 und P_6P_1 sind Integrale der Differentialgleichung.

In dem dargestellten Teil der $\mu\nu$-Ebene besitzt das Richtungsfeld die sieben singulären Punkte P_1 bis P_7. Durch den singulären Punkt P_3 gehen nur zwei Lösungskurven, nämlich P_4PBP_6 und $P_1P_5P_3P_2CP_6$. Sie zerlegen das von uns betrachtete Gebiet in 4 Teile, und zwar werden durch die Kurve $P_1P_5P_3P_2CP_6$ Lösungen, die nach P_4 gehen, von solchen, die nach P_6 gehen, durch die Kurve $P_4P_3P_6$ die nach P_5 gehenden Lösungen von den nach P_2 gehenden Lösungen getrennt. Durch die strichpunktierten Lösungskurven wird jedes der vier Gebiete in zwei Teilgebiete zerlegt,

[4]) Dies ist im allgemeinen natürlich nur festzustellen, indem man auch die anderen Teile der Ebene untersucht.

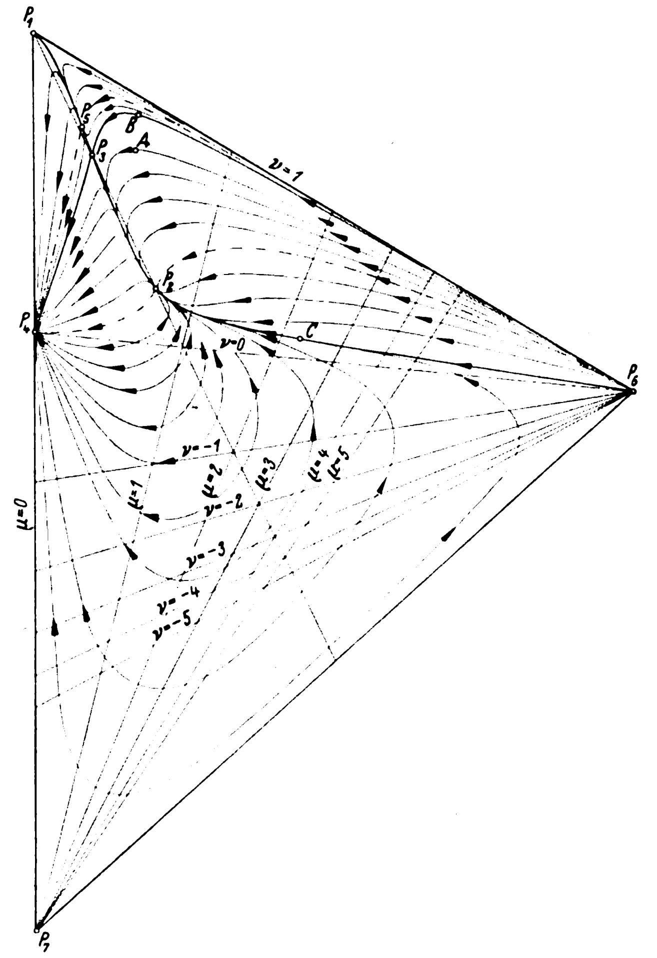


Bild 1. Grundsätzliche Gestalt der Lösungsmannigfaltigkeit in der $\mu\nu$-Ebene.

Die auf den Integralkurven eingetragenen Pfeile geben die Richtung an, in der ξ wächst. Für $t < 0$ ist dies gleichzeitig die Richtung fortschreitender Zeit, für $t > 0$ bewegt man sich mit fortschreitender Zeit in umgekehrter Richtung. Beim Einlauf in die Punkte P_4 und P_5 geht ξ nach Unendlich und damit, wegen (4), t nach 0. Da in P_5 μ und ν endlich sind, strebt dort, wie man aus (11) erkennt, v und a gegen Unendlich. Solche Lösungen sind natürlich unbrauchbar. Es handelt sich dabei um alle Integralkurven, die oberhalb der Linie $P_4P_3BP_6$ liegen. Im Punkt P_4 tritt eine entsprechende Schwierigkeit nicht ein. Entsprechend den verschiedenen Verhältnissen a/v, die man sich für $t = 0$ gegeben denken kann, sind in P_4 alle Verhältnisse μ/ν, d. h. alle Einlaufrichtungen möglich. Beim Übergang einer Lösung von $t < 0$ zu $t > 0$ spiegelt sich die Einlaufrichtung an der Achse $\nu = 0$. Für P_6 fällt im rt-Diagramm eine Linie $\xi =$ konst. mit der Lebenslinie eines Teilchens zusammen. Läuft man in P_6 in der Richtung $\frac{d\nu}{d\mu} = 0$ ein, so geht ξ nach einer von 0 verschiedenen Konstanten, für den Einlauf längs der Kurve CP_6 geht ξ nach 0. Nach (4) entspricht im rt-Diagramm dem Wert $\xi = 0$ die Linie $r = 0$. Die Lösungskurve CP_6 stellt somit eine Strömung dar, für die ein im Kugelmittelpunkt befindliches Teilchen in Ruhe

bleibt. Sie tritt bei dem vorliegenden Problem für $t > 0$ auf. Abgesehen von dem trivialen Fall des ruhenden Gases ist dies sogar die einzige Strömung dieser Art.

Auf der Linie $\mu + \nu = 1$ nimmt ξ ein Extremum an. Im rt-Diagramm erhält man für diesen Wert ξ eine Rückkehrkante. Bei Lösungen, die die Linie $\mu + \nu = 1$ aus dem Gebiet $\mu + \nu < 1$ kommend überschreiten, tritt vor der Rückkehrkante ein Verdichtungsstoß auf. Die anderen Lösungen sind in unserem Zusammenhang unbrauchbar. Die singulären Punkte P_2 und P_3 entsprechen solchen Kurven des rt-Diagramms, die mit einer Charakteristik des Differentialgleichungssystems zusammenfallen.

6. Die tatsächlich eintretende Lösung.

Hiermit sind die Grundlagen gegeben, um festzustellen, welche Strömung in Wirklichkeit eintritt. Den Anfangsbedingungen (16) entspricht der Punkt A. Da zunächst $t < 0$ ist, müssen die Lösungskurven in Pfeilrichtung durchlaufen werden. Man hat nun die Aufgabe, den Wert n zu bestimmen, für den die durch A gehende Lösungskurve physikalisch sinnvoll ist.

Bild 1 ist noch nicht für den richtigen Wert n entworfen, die durch A gehende Integrationslinie ist deshalb wahrscheinlich unbrauchbar. Wir können uns aber wenigstens an der Hand von Bild 1 unterrichten, welche Lösungskurven überhaupt physikalisch realisierbar sind. Dabei beschränken wir uns auf diejenigen Kurven, die in der Nähe von A verlaufen.

Die in der Nachbarschaft von A liegenden Lösungskurven gehen teils nach P_2, teils nach P_5. Durch die Lösung BP_3 werden sie voneinander getrennt. Die oberhalb von BP_3 liegenden Lösungen wurden schon im vorigen Abschnitt als unbrauchbar erkannt, da nämlich in P_5 Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit unendlich werden. Aber auch die zwischen BP_3 und CP_2 liegenden Lösungen sind physikalisch nicht realisierbar, sie überschreiten nämlich die Gerade $\mu + \nu = 1$ und kommen dabei aus dem Gebiet $\mu + \nu > 1$. Die einzige Lösung, die keine der beiden Schwierigkeiten besitzt, ist die Linie BP_3. (Auch die Linien unterhalb CP_2 kämen in Frage, mit ihnen sind jedoch die Anfangsbedingungen nicht zu erfüllen.) Man hat demnach n einen solchen Wert zu erteilen, daß die Lösungskurve BP_3 durch A geht. Es tritt dies für

für $\quad \alpha = 1$ bei $n = 0{,}834$,
$\quad \alpha = 2$ bei $n = 0{,}717$

ein[5]).

Hiermit erhält man aus (5), daß der Druck am Verdichtungsstoß sich für

$$\alpha = 1 \text{ wie } \left(\frac{1}{r}\right)^{0,396},$$

für

$$\alpha = 2 \text{ wie } \left(\frac{1}{r}\right)^{0,792}$$

verhält.

Daß nur die Lösung BP_3 brauchbar ist, kann man sich plausibel machen, indem man nach dem physikalischen Sinn der ausgeschlossenen Lösungen fragt. Werten n, die größer sind als der richtige, entsprechen Strömungen, für die der Druck nach dem Kugelmittelpunkt bzw. der Zylinderachse zu schwächer zunimmt als im Normalfall. Die Lösungskurven schneiden die Linie $\mu + \nu = 1$ und besitzen deshalb Rückkehrkanten. Aus dem Verhalten von μ und ξ an dieser Geraden ergibt sich zunächst, daß an der Rückkehrkante die Schallgeschwindigkeit und damit auch die Temperatur mit unendlichem Differentialquotienten (sowohl nach der Zeit als auch nach dem Ort) absinkt. Da die Geschwindigkeit endlich ist, besitzt die Entropie jedenfalls einen endlichen Differentialquotienten; dem unendlichen Differentialquotienten der Temperatur muß deshalb auch ein unendliches Druckgefälle entsprechen. Die Strömung ist zu verwirklichen, wenn man dieses Druckgefälle künstlich längs der Rückkehrkante erzeugt, d. h. an einer mit wachsendem t sich immer mehr dem Kugelmittelpunkt nähernden Stelle eine Saugwirkung anbringt, die das Gas vom Kugelmittelpunkt zu entfernen sucht. Es ist nicht verwunderlich, daß in diesem Falle ein schwächeres Anwachsen des Druckes mit Annäherung an den Kugelmittelpunkt eintritt.

Für Werte n, die kleiner sind als der richtige, tritt ein stärkeres Anwachsen des Druckes mit Annäherung an den Kugelmittelpunkt ein. Es ist zu erzeugen, indem man das hinter dem Verdichtungsstoß befindliche Material nach innen treibt. Um den gewünschten Charakter des Verdichtungsstoßes bis zum Kugelmittelpunkt aufrechtzuerhalten, ist es jedoch notwendig, daß man dem Gase Geschwindigkeiten und Drücke erteilt, die für $t \to 0$ nach unendlich gehen.

Die Kurve BP_3 steht zwischen diesen beiden entgegengesetzten Möglichkeiten und entspricht der einzigen Strömung, die ohne künstliche Hilfsmittel bestehen kann.

Nachdem die Werte n bestimmt sind, kann man den ganzen Verlauf der Integralkurven berechnen. Er ist in Bild 2a und 2b dargestellt. Das Stück AP_3 wurde bereits bei der Bestimmung von n benutzt. Von P_3 aus gelangt man in eindeutiger Weise nach P_4. Von dort aus geht die Lösungskurve in einer Richtung weiter, die man durch Spiegelung der Einlaufrichtung von P_3P_4 an der Achse $\nu = 0$ erhält. Es ist dies die Linie P_4D. Diese Lösungskurve schneidet in ihrem weiteren Verlauf die Linie $\mu + \nu = 1$, die Strömung besitzt also eine Rückkehrkante. Da diesmal die Lösungskurve aus dem Gebiet $\mu + \nu < 1$ kommt, ist dies das Zeichen für das Auftreten eines Verdichtungsstoßes. Über die Lage des Verdichtungsstoßes ist zunächst noch nichts bekannt. Dagegen weiß man, daß die Strömung nach dem Verdichtungsstoß die Linie $r = 0$ des rt-Diagramms als Lebenslinie eines Teilchens besitzen muß. Nun gibt es nur eine Strömung, die diese Eigenschaft besitzen muß, sie entspricht der Linie P_2CP_6. Man berechnet deshalb zunächst diese Kurve. Dazu benutzt man am besten den Schnitt der Lösungsflächen im $x_1x_2x_3$-Raum mit der Ebene $x_1 = 1$. Die hier notwendige Gleichung (23) findet sich im nächsten Abschnitt. Weiter bestimmt man zu der Kurve P_4D die Zustände, die von ihr aus durch Verdichtungsstöße erreicht werden können. Es ist dies die Linie AD'. Der Verdichtungsstoß tritt nun an der Stelle ein, wo die Kurve AD' die Lösung P_2CP_6 schneidet. Damit ist die Lösung im $\mu\nu$-Diagramm bestimmt. Die Berechnung von ϱ und ξ erfolgt durch

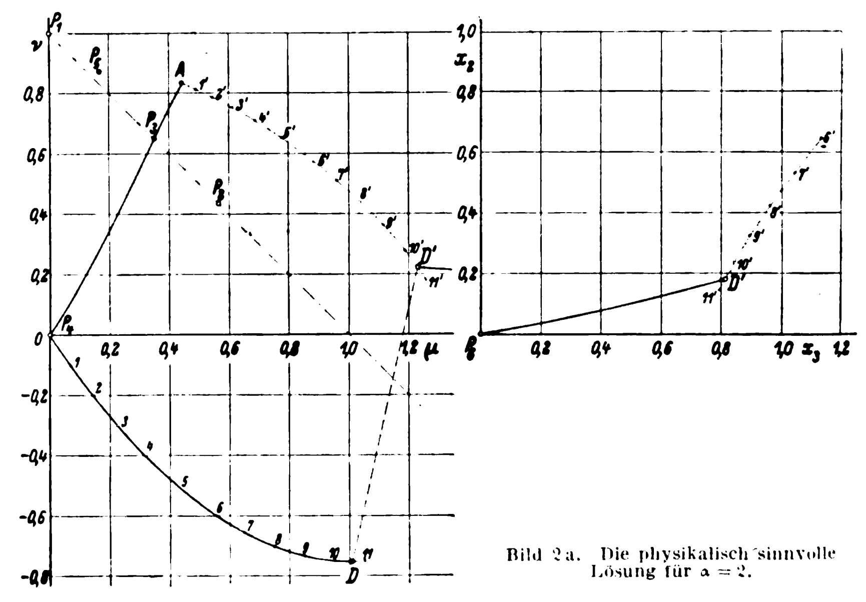
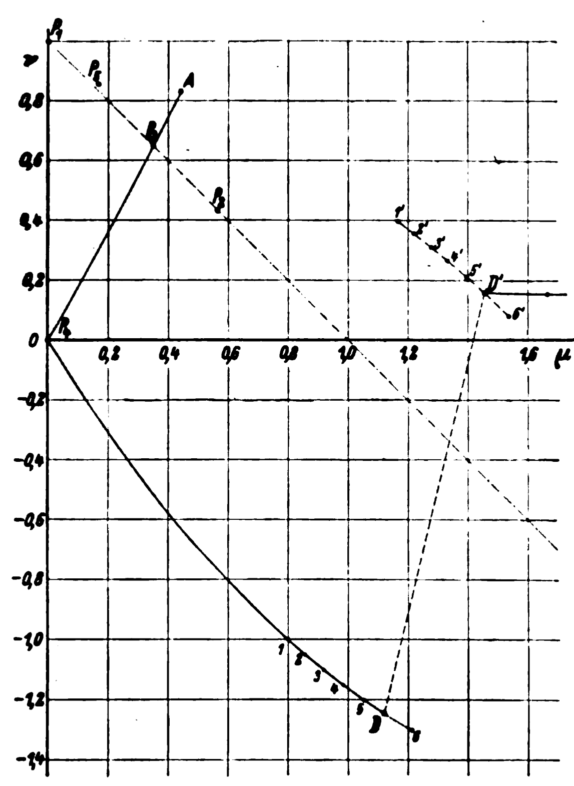


Bild 2a. Die physikalisch sinnvolle Lösung für $\alpha = 2$.

[5]) Diese Werte n sind etwas zu groß, man erkennt in Bild 2a und 2b, daß A geringfügig von der eingezeichneten Integrationslinie abweicht. Die Abweichung ist weniger als 1%.



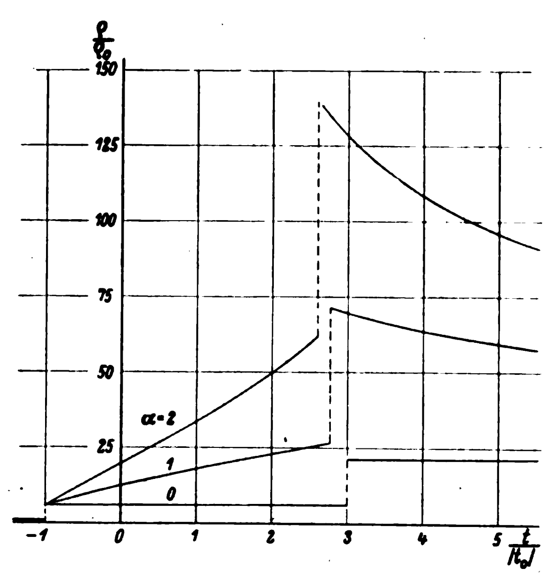


Bild 2b. Die physikalisch sinnvolle Lösung für $\alpha = 1$.

Quadraturen. Dann sind auch die übrigen Zustandsgrößen berechenbar. Bild 3, 4 und 5 zeigen für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$, $\bar{v}$, $\bar{p}$ und $\bar{\varrho}$ an der Stelle $r = r_0$ als Funktionen der Zeit, außerdem sind die entsprechenden Kurven für ebene Vorgänge ($\alpha = 0$) beigefügt. Die verschiedenen Größen sind dabei mit Hilfe der Dichte des Anfangszustandes $\bar{\varrho}_0$, der Geschwindigkeit $\bar{u}_0$ des Verdichtungsstoßes an der betrachteten Stelle r_0 und der Zeit t_0, zu der der erste Verdichtungsstoß in r_0 eintrifft, dimensionslos gemacht worden. Nach innen gerichtete Geschwindigkeiten sind nach oben abgetragen. Bild 6

Bild 5. Dichte als Funktion der Zeit für ebene, zylindrische und kugelige Verdichtungsstöße ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$).

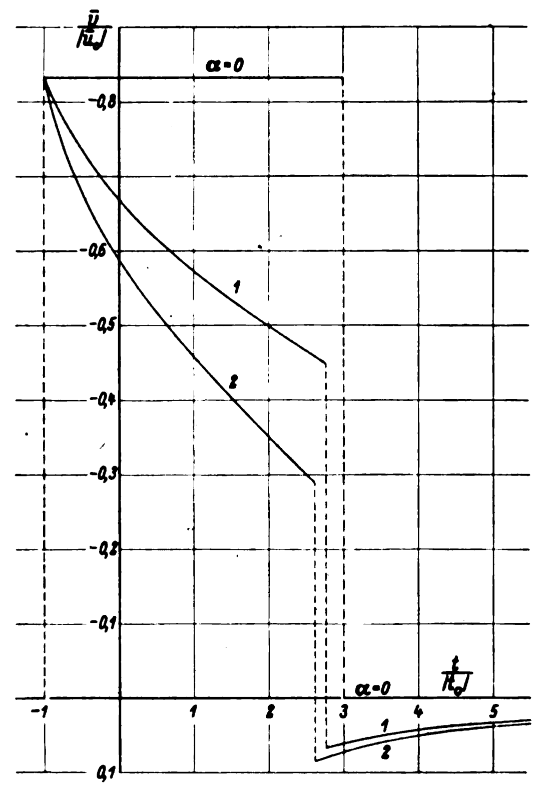


Bild 3. Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für ebene, zylindrische und kugelige Verdichtungsstöße ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$).

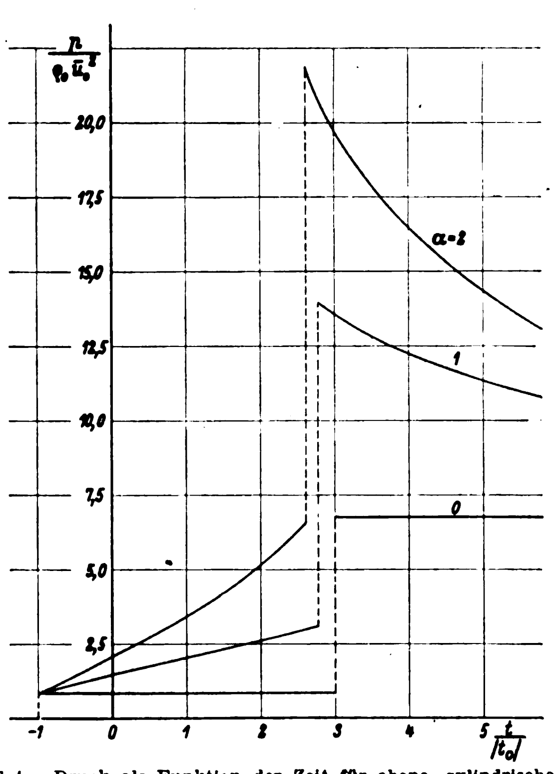


Bild 4. Druck als Funktion der Zeit für ebene, zylindrische und kugelige Verdichtungsstöße ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$).

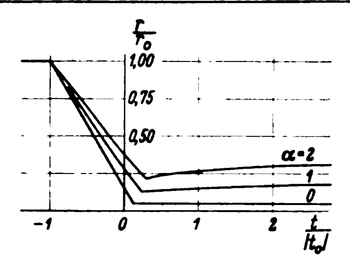


Bild 6. rt-Diagramme für ebene, zylindrische und kugelige Verdichtungsstöße ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$).

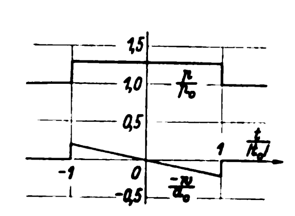


Bild 7. Druck und Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für $\alpha = 2$ in der Näherung der Akustik.

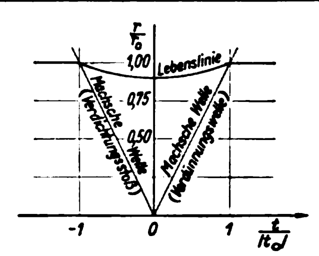


Bild 8. rt-Diagramme für $\alpha = 2$ in der Näherung der Akustik.

gibt die zugehörigen rt-Diagramme an. Sie enthalten für $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ jeweils die Lebenslinie eines Teilchens. Berechnet man ähnliche Diagramme in der Näherung der Akustik[6]), so erhält man Bild 7 und 8, und zwar stellt Bild 7 den Druck und die Geschwindigkeit an der Stelle $r = r_0$ als Funktion der Zeit, Bild 8 das rt-Diagramm dar. In hinreichender Nachbarschaft des Nullpunktes erhält man nämlich für das Geschwindigkeitspotential φ einer Strömung, bei der sich in einem ruhenden Medium der Schallgeschwindigkeit a_0 und des Druckes p_0 ein schwacher kugeliger Verdichtungsstoß fortpflanzt,

$$\varphi = 0 \qquad \text{für } t < -\frac{r}{a_0},$$

$$\varphi = \frac{-c\,(r + a_0\,t)}{r} \qquad \text{für } -\frac{r}{a_0} < t < \frac{r}{a_0},$$

$$\varphi = -2\,c \qquad \text{für } t > \frac{r}{a_0}.$$

c ist hierbei eine Konstante; den Bildern wurde $c = 0{,}2\,a_0 r_0$ zugrunde gelegt. Ein Vergleich von Bild 3, 4 und 6 mit 7 und 8 zeigt, daß die Vorgänge für $r = 0$, $t = 0$ durch die Näherung der Akustik nicht einmal qualitativ richtig erfaßt werden.

7. Die Lösungskurven in der $\mu\nu$-Ebene.

Wir holen nunmehr die Untersuchungen nach, deren Ergebnisse in 5 vorweggenommen wurden. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Gestalt der zu (13a) gehörenden Integralkurven[7]).

Man sieht sofort, daß die Geraden $\nu = 1$ und $\mu = 0$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Durch sie wird die $\mu\nu$-Ebene in vier Quadranten geteilt, deren je zwei durch Spiegelung an der Linie $\mu = 0$ auseinander hervorgehen. Für uns ist nur das Gebiet $\nu < 1$; $\mu > 0$ von Bedeutung.

Singuläre Stellen der Differentialgleichung (13a) hat man vor sich, wenn in ihr gleichzeitig Zähler und Nenner verschwinden. In besonders einfacher Form lassen sich diese Stellen finden, wenn man (14) benutzt. Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$b_1\,d\nu + c_1\,d\mu + d_1 \cdot d\ln\xi = 0,$$
$$b_2\,d\nu + c_2\,d\mu + d_2 \cdot d\ln\xi = 0,$$

wobei die b_1, c_1 und d_1 die in (14) auftretenden Funktionen darstellen, so ergibt sich die Gleichung (13a) in der Gestalt

$$d\mu : d\nu = (b_1\,d_2 - b_2\,d_1) : -(c_1\,d_2 - c_2\,d_1) \quad . \; . \; (17)$$

Singuläre Punkte liegen vor, wenn gleichzeitig

$$b_1 d_2 - b_2 d_1 = 0$$

und

$$c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$$

ist. Dies ist erfüllt entweder für

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18\text{a})$$

und

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18\text{b})$$

oder für

$$d_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19\text{a})$$

$$d_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19\text{b})$$

[6]) Vgl. M. Planck, Einführung in die theoretische Physik, 2. Bd., 3. Aufl., 4. Kapitel, dort insbesondere S. 108 und S. 110.

[7]) Über die Diskussion von Integralkurven s. z. B. Bieberbach a. a. O., Kapitel IV.

Setzt man die b_1 und c_1 ein, so ergibt sich zunächst aus (18a)

$$\nu = 1$$

und damit aus (18b)

$$\mu = 0$$

Dies sei der singuläre Punkt P_1.

Weiter ergeben sich aus (18a) die Bedingungen

$$\nu + \mu = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20\text{a})$$

$$\nu - \mu = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20\text{b})$$

Die Gerade $\nu - \mu = 1$ liegt außerhalb des uns interessierenden Gebietes. Geht man mit (20a) in (18b) ein, so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\varkappa \cdot \alpha \cdot \nu^2 - \nu\left[(2-\varkappa)\left(\frac{1}{n}-1\right) + \varkappa \cdot \alpha\right] + 2\left(\frac{1}{n}-1\right) = 0; \quad (21)$$

aus der man die Werte ν für zwei weitere singuläre Punkte P_2 und P_3 erhält. Mit P_2 werde der Punkt bezeichnet, dem der kleinere Wert ν zugehört. Je nach der Wahl von n sind diese Werte ν reell oder konjugiert komplex. Für das hier vorliegende Problem sind sie reell. Die Bedingungen (19) ergeben entweder

$$\mu = 0$$
$$\nu = 0$$

— dies sei der singuläre Punkt P_4 — oder

$$\mu = 0$$
$$\nu = 1$$

— dies ist der bereits gefundene Punkt P_1 — oder

$$\mu = 0$$
$$\nu = \frac{1}{n}$$

— dieser Punkt liegt für die uns interessierenden Werte n, die kleiner sind als 1, außerhalb des untersuchten Gebietes.

Weiter erhält man aus (19b)

$$\nu = \frac{2}{n}\,\frac{1}{(\varkappa + 1) + (\varkappa - 1)\cdot\alpha}.$$

Damit berechnet sich aus (19a)

$$\mu^2 = \frac{\varkappa \cdot \nu\,(\nu - 1)\left(\nu - \dfrac{1}{n}\right)}{(\alpha - 1)\,\nu + 2}.$$

Dieser singuläre Punkt sei P_5.

Damit sind die im Endlichen liegenden Singularitäten bestimmt. Das Verhalten im Unendlichen läßt sich untersuchen, indem man homogene Koordinaten einführt.

Dazu setzt man

$$\mu = \frac{x_1}{x_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22\text{a})$$

$$\nu = \frac{x_2}{x_3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22\text{b})$$

Der Einführung dieser drei Variablen x_1, x_2, x_3 an Stelle der früheren zwei Variablen μ und ν läßt sich folgende geometrische Deutung geben. Die Lösung der Differentialgleichung (13a) sei gegeben durch

$$F\,(\mu, \nu, C) = 0.$$

C ist dabei eine Integrationskonstante. Nach Einführung der homogenen Koordinaten erhält man hieraus

$$F\left(\frac{x_1}{x_3};\ \frac{x_2}{x_3};\ C\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt im $x_1 x_2 x_3$-Raum Kegelflächen dar, deren Spitze im Nullpunkt liegt und die von der Ebene $x_3 = 1$ in den Kurven $F(x_1, x_2, C) = 0$ geschnitten werden. Einem Punkt der $\mu\nu$-Ebene entspricht jetzt eine Erzeugende dieser Kegelfläche, die durch den Punkt

$$x_1 = \mu$$
$$x_2 = \nu$$

der Ebene $x_3 = 1$ geht. Bestimmt ist ein solcher Strahl durch die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$.

Auch wenn μ und ν gegen Unendlich gehen, erhält man im $x_1 x_2 x_3$-Raum wohlbestimmte Strahlen. Nimmt nämlich für $\mu \to \infty$ das Verhältnis $\mu : \nu$ den Wert c an, so erhält man aus (22)

$$x_1 : x_2 : x_3 = c : 1 : 0.$$

Will man nun das Verhalten der Lösungen in Punkten untersuchen, für die μ und ν unendlich wird, so braucht man nur die Kegelflächen, die den Lösungen entsprechen, so zu schneiden, daß die zu untersuchenden Stellen auf den Schnittflächen im Endlichen liegen. Schneidet man z. B. durch eine Ebene $x_1 = 1$, so wird

$$x_3 = \frac{1}{\mu};\ x_2 = \frac{\nu}{\mu}$$

d. h. die Punkte, für die μ unendlich ist, liegen auf der Geraden $x_3 = 0$. Nur der Punkt, der sich ergibt, wenn gleichzeitig μ und $\frac{\nu}{\mu}$ gegen Unendlich gehen, also $x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0$ ist, liegt auch hier im Unendlichen. Ihn kann man untersuchen, indem man $x_2 = 1$ setzt. Die Differentialgleichung für die den Lösungen entsprechenden Kegelflächen sowie einige weitere später notwendige Beziehungen erhält man, indem man mit (21) in (13) eingeht. Es ergibt sich

Wenn man außerdem das Verhalten der Integralkurven in der Nähe dieser singulären Punkte bestimmt, erhält man einen recht guten Überblick über die Lösungsmannigfaltigkeit. Gegebenenfalls muß man stellenweise das Richtungsfeld benutzen. Bild 1 stellt den Verlauf der Integralkurven dar, und zwar, um das Verhalten im Unendlichen klar erkennen zu lassen, durch die Schnitte zwischen den Lösungsflächen im $x_1 x_2 x_3$-Raum und der Ebene $x_3 - x_2/3 + x_1/3 = 1$. Zugrunde gelegt worden sind dieser Zeichnung die Werte

$$\alpha = 2$$
$$n = 0{,}75.$$

n ist mit Absicht von seinem in Wirklichkeit eintretenden Wert verschieden, dabei aber so gewählt worden, daß der grundsätzliche Verlauf der Lösungskurven erhalten bleibt. Punkt A entspricht den Anfangsbedingungen (16).

8. Das Verhalten von ξ längs der Integralkurven.

Zur Orientierung in der Lösungsmannigfaltigkeit von Bild 1 untersuchen wir zunächst das Verhalten von ξ längs der Integralkurven. Aus (13) läßt sich die Kurve berechnen, längs deren $\frac{d\xi}{d\mu}$ verschwindet, ξ also ein Extremum annimmt. Die Bedeutung eines solchen Extremums wird in Abschnitt 10 besprochen.

Man erhält

$$(\nu - 1)(\mu^2 - (\nu - 1)^2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

mit der Nebenbedingung, daß die in (13) auftretenden Proportionalitätsfaktoren für $d\mu$ und $d\nu$ nicht gleichzeitig verschwinden. Diese Nebenbedingung schließt die singulären Punkte P_1, P_2 und P_3 aus.

Aus (24) erhält man entweder

$$\nu = 1$$

oder

$$-\mu + \nu = 1$$

oder

$$\mu + \nu = 1.$$

$$(x_3\,d x_2 - x_2\,d x_3) : (x_3\,d x_1 - x_1\,d x_3) : x_3^2\,d \ln \varrho : x_3^2\,d \ln \xi =$$
$$= \left[-2(x_2 - x_3)\left\{x_1^2\left(\varkappa x_2(1+\alpha) + 2\left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right) - \varkappa x_2 (x_2 - x_3)\left(x_2 - \frac{1}{n}x_3\right)\right\}\right]$$
$$:\left[-x_1\left\{2x_1^2\left(\varkappa(x_2 - x_3) + \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right) + \varkappa(x_2 - x_3)\right]\left[-(2+(\varkappa-1)\alpha)x_2^2 + \left(\frac{3-\varkappa}{n} + (\varkappa+1) + (\varkappa-1)\alpha\right)x_2 x_3 - \frac{2}{n}x_3^2\right]\right\}$$
$$: x_3\left[4x_1^2 x_3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\varkappa x_2(x_2 - x_3)\left(\alpha(x_2 - x_3) - \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right)\right] : 2\varkappa x_3 (x_2 - x_3)\left\{x_1^2 - (x_2 - x_3)^2\right\}.$$

Um das Verhalten im Unendlichen zu bestimmen, setzen wir $x_1 = 1$. Man erhält die Gleichungen

$$\frac{d x_2}{d x_3} = \frac{x_2}{x_3} - \frac{2\cdot(x_2 - x_3)}{x_3}$$
$$\times \frac{\left\{\varkappa(1+\alpha)x_2 + 2\left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right\} - \varkappa x_2(x_2 - x_3)\left(x_2 - \frac{1}{n}x_3\right)}{2\left(\varkappa(x_2 - x_3) + \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right) + \varkappa(x_2 - x_3)\left[-\left(2+(\varkappa-1)\alpha\right)x_2^2 + \left(\frac{3-\varkappa}{n} + \varkappa + 1 + (\varkappa-1)\alpha\right)x_2 x_3 - \frac{2}{n}x_3^2\right]} \quad (23\,a)$$

$$\frac{d \ln \varrho}{d x_3} = \frac{4x_3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\varkappa x_2(x_2 - x_3)\left(\alpha(x_2 - x_3) - \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right)}{x_3\left[2\left(\varkappa(x_2 - x_3) + \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right) + \varkappa(x_2 - x_3)\left[-(2+(\varkappa-1)\alpha)x_2^2 + \left(\frac{3-\varkappa}{n} + \varkappa + 1 + (\varkappa-1)\alpha\right)x_2 x_3 - \frac{2}{n}x_3^2\right]\right]} \quad \ldots\ldots \quad (23\,b)$$

$$\frac{d \ln \xi}{d x_3} = \frac{2\varkappa(x_2 - x_3)\left\{1 - (x_2 - x_3)^2\right\}}{x_3\left[2\left(\varkappa(x_2 - x_3) + \left(1-\frac{1}{n}\right)x_3\right) + \varkappa(x_2 - x_3)\left[-(2+(\varkappa-1)\alpha)x_2^2 + \left(\frac{3-\varkappa}{n} + \varkappa + 1 + (\varkappa-1)\alpha\right)x_2 x_3 - \frac{2}{n}x_3^2\right]\right]} \quad \ldots\ldots \quad (23\,c)$$

Aus (23a) sieht man, daß die unendlich ferne Gerade $x_3 = 0$, eine Lösung der Differentialgleichung ist. Der Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ stellt einen weiteren singulären Punkt (P_6) dar. Die Gerade $\mu = 0$ schneidet die unendlich ferne Gerade im Punkte $x : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0$. Dieser Punkt — er sei P_7 — ist ebenfalls singulär.

Die beiden ersten Geraden besitzen nur geringes Interesse; die Gerade $\nu = 1$ ist selbst Lösung der Differentialgleichung, wird daher höchstens in einzelnen Punkten von anderen Lösungskurven überschritten, die Gerade $-\mu + \nu = 1$ liegt außerhalb des von uns betrachteten Gebiets. Bestimmt man nun an einer Stelle der $\mu\nu$-Ebene den Rich-

tungssinn, in dem man die Integralkurven bei wachsendem ξ durchläuft, so ist er aus Stetigkeitsgründen im ganzen uns interessierenden Bereich der $\mu\nu$-Ebene gegeben. Er ist in Bild 1 durch Pfeile gekennzeichnet.

Weiter soll für einige singuläre Punkte bestimmt werden, welchen Wert ξ annimmt, wenn man auf den Integralkurven in sie einläuft. In den Punkt P_4 ($\mu = 0$; $\nu = 0$) laufen Integralkurven in allen Richtungen ein. Für eine Nachbarschaft dieses Punktes erhält man aus

$$d\nu + \frac{1}{n} \cdot \nu \, d \ln \xi = 0, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

daraus

$$\nu \cdot \xi^{\frac{1}{n}} = \text{konst.}$$

Da $n > 0$, geht ξ für $\nu \to 0$ gegen Unendlich.

Die Linie $\xi = \infty$ entspricht im rt-Diagramm der Zeit $t = 0$. Gibt man sich für diesen Zeitpunkt beliebige endliche Werte v und a vor und berechnet dann μ und ν, so erhält man natürlich $\mu = 0$, $\nu = 0$. Damit ist die Existenz der Singularität P_4 erklärt. Das Verhältnis a/v, das sich für $t = 0$ ergibt, wird im $\mu\nu$-Diagramm gegeben durch die Richtung unter der die betreffende Lösungskurve in P_4 einläuft, und zwar ist

$$\frac{a}{v} = \mp \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Die hier auftretenden doppelten Vorzeichen sind eine Folge der doppelten Vorzeichen in (11). Beim Durchgang durch den Zeitpunkt $t = 0$ bleibt a/v unverändert, $\frac{d\mu}{d\nu}$ wechselt deshalb sein Vorzeichen. Ein weiterer Punkt, für den ξ ebenfalls nach Unendlich geht, ist P_5. Daß ξ dort entweder nach 0 oder nach Unendlich streben muß, ergibt sich aus (19). Daß es in Bild 1 nach Unendlich geht, erkennt man aus den eingetragenen Richtungen für wachsendes ξ. Die genaue Untersuchung mit dem Ergebnis, daß ξ beim Einlauf der Lösungskurven in P_5 immer nach Unendlich geht, wenn dort $\mu + \nu > 1$ ist, soll hier nicht durchgeführt werden. Schließlich ist noch der Punkt P_6 ($x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0$) von Interesse. In ihn laufen außer der unendlich fernen Geraden Lösungen in der Richtung

$$\frac{d x_2}{d x_3} = 1$$

sowie eine Lösung in der Richtung

$$\frac{d x_2}{d x_3} = \frac{2\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{\varkappa (1 + \alpha)}$$

ein. Aus (23c) ergibt sich, daß ξ für die erste Einlaufrichtung nach einer Konstanten, für die zweite Einlaufrichtung nach Null geht. Der Punkt P_6 besitzt insofern besonderes Interesse, als für ihn $\nu = 1$, d. h. $v = n \cdot \xi^{\frac{1}{n}}$ ist. In diesem Punkte ist also die Geschwindigkeit eines Teilchens gerade gleich der Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf der Parabel $\xi =$ konst. bewegt, d. h. dort fällt eine Parabel $\xi =$ konst. mit der Lebenslinie eines Teilchens zusammen. Läuft man in P_6 in der Richtung

$$\frac{d x_2}{d x_3} = \frac{2\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{\varkappa (1 + \alpha)}$$

ein, so erhält man die Parabel $\xi = \frac{r}{t^n} = 0$.

9. Machsche Wellen.

Recht aufschlußreich ist weiterhin die Frage nach den Charakteristiken der Differentialgleichung (2). Man erhält als Charakteristikenbedingung[8]) entweder

$$\frac{dr}{dt} = \bar{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

oder

$$\frac{dr}{dt} = \bar{v} + \bar{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26\text{a})$$

oder

$$\frac{dr}{dt} = \bar{v} - \bar{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26\text{b})$$

Die durch (25) bestimmten Charakteristiken sind die Stromlinien, sie besitzen in unserem Zusammenhang nur geringes Interesse. Die durch (26a) und (26b) bestimmten Charakteristiken entsprechen den Machschen Wellen bei stationären Strömungen. Dieser Analogie wegen sollen sie ebenfalls als Machsche Wellen bezeichnet werden.

Längs der durch (25) gegebenen Charakteristik ist die Bedingung erfüllt[9])

$$d\left(\frac{p}{\varrho^{\varkappa}}\right) = 0.$$

Längs der durch (26a) und (26b) gegebenen Machschen Wellen gelten die Beziehungen

$$-\frac{\bar{a}}{\varkappa}\left(\frac{d\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} + 2\frac{d\bar{a}}{\bar{a}}\right) - d\bar{v} = \alpha \cdot \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{r} \cdot dt \quad \ldots \quad (27\text{a})$$

$$+\frac{\bar{a}}{\varkappa}\left(\frac{d\bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} + 2\frac{d\bar{a}}{\bar{a}}\right) - d\bar{v} = -\alpha \cdot \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{r} \cdot dt \quad (27\text{b})$$

Wir stellen nun die Frage, wann eine Machsche Welle mit einer Linie $\xi =$ konst. zusammenfällt. Längs $\xi =$ konst. ist

$$\frac{dr}{dt} = \mp n \cdot \xi^{\frac{1}{n}} \cdot r^{1-\frac{1}{n}}.$$

Damit und unter Benutzung von (5) und (11) erhält man aus (26a)

$$\mp 1 = \mu \mp \nu,$$

aus 26b)

$$\mp 1 = -\mu \mp \nu.$$

In dem von uns untersuchten Bereich der $\mu\nu$-Ebene kommt im ersten Fall nur das untere, im zweiten Fall nur das obere Vorzeichen in Frage, d. h. in beiden Fällen interessieren nur die Punkte der Geraden $\mu + \nu = 1$. Machsche Wellen, die (26a) entsprechen, fallen nur für $t > 0$, Machsche Wellen, die (26b) entsprechen, für $t < 0$ mit einer Linie $\xi =$ konst. zusammen.

Ist $\mu + \nu > 1$, so ist der Betrag der Neigung der bei $t > 0$ durch (26a), bei $t < 0$ durch (26b) bestimmten Charakteristiken kleiner als die Beträge der Neigungen für die zugehörigen Linien $\xi =$ konst.; für $\mu + \nu < 1$ sind die Beträge der Neigungen dieser Charakteristiken kleiner als die Beträge der Neigungen der zugehörigen Linien $\xi =$ konst. Setzt man (11) und (5) in (27a) und (27b) unter Berücksichtigung der zugehörigen Vorzeichen von t und der eben gefundenen Beziehung

$$\mu + \nu = 1$$

ein, so ergibt sich gerade die Beziehung (21), aus der sich die singulären Punkte P_2 und P_3 ergeben haben. Für diese Punkte stimmen also die Linien $\xi =$ konst. mit den Machschen Wellen überein. Bekanntlich ist die Fortsetzung einer Strömung über eine Charakteristik hinaus auf beliebig viele Weisen möglich. Dementsprechend geht tatsächlich von P_2 eine Schar von Lösungskurven aus. Bei P_3 tritt ein entsprechendes Verhalten allerdings nicht ein, der Punkt wird nur von zwei Lösungskurven erreicht. Dies liegt daran, daß unsere Lösungen dem Ansatz (5) unterworfen sind. Unter dieser einschränkenden Bedingung sind hier nur diese beiden Fortsetzungen der Strömung möglich. Über Fortsetzungen anderer Art ist damit natürlich nichts ausgesagt.

10. Rückkehrkanten.

Im Abschnitt 7 war festgestellt worden, daß ξ längs der Integralkurven beim Schnitt mit der Geraden $\mu + \nu = 1$ ein Extremum annimmt. (Ausgenommen hiervon sind die

[8]) Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Berlin, Springer-Verlag 1937, Kapitel V § 2,3.

[9]) Vgl. Courant-Hilbert a. a. O. S. 292 unten oder § 7,1. Dort sind die entsprechenden Verhältnisse, allerdings nur für eine Differentialgleichung 2. Ordnung, nicht für Systeme 1. Ordnung behandelt.

Schnitte in den singulären Punkten P_2 und P_3.) Hat ξ ein Maximum, so sind Werten ξ, die kleiner sind als das Maximum 2, größeren Werten ξ kein Wert μ bzw. ν zugeordnet. Entsprechendes gilt im Fall eines Minimums. Das rt-Diagramm wird deshalb durch eine Linie $\xi = \xi_{\text{extr.}}$ in zwei Gebiete geteilt, deren eines doppelt und deren zweites überhaupt nicht mit Zustandsgrößen belegt ist. Die Linie $\xi = \xi_{\text{extr.}}$ stellt eine Rückkehrkante der Lösungsfläche dar. Natürlich sind solche Lösungen, zumindestens im Ganzen, physikalisch unmöglich; es entsteht die Frage, was eintritt, wenn man die zu dieser Strömung gehörenden Anfangs- und Randbedingungen verwirklicht.

Bei ebenen stationären Potentialströmungen ist das Auftreten von Rückkehrkanten schon seit längerer Zeit bebekannt[10]). Eine Diskussion ist dort in besonders einfacher Weise mit Hilfe des Prandtl-Busemannschen Charakteristikenverfahrens möglich[11]). Auf unsere Fragen lassen sich die wesentlichen Gedanken in folgender Form übertragen. Wir betrachten einen einfach belegten Teil des rt-Diagramms, der durch die Rückkehrkante und zwei zur Rückkehrkante führende Lebenslinien begrenzt ist; das Vorzeichen der Zeitzählung sei so gewählt, daß die Rückkehrkante am Ende der Lebenslinien liegt. Je nachdem, ob durch die Anfangsbedingungen und die berandenden Lebenslinien die Strömung bis zum Ort der Rückkehrkanten gegeben ist oder nicht, sind zwei Typen von Strömungen zu unterscheiden. Ist die Strömung nicht bis zum Ort der Rückkehrkanten bestimmt, so entsteht der durch die Randbedingungen unbestimmte Teil der berechneten Strömung durch analytische Fortsetzung. Man müßte auch die berandenden Stromlinien analytisch fortsetzen, um (wenigstens formal) auch diesen Teil der Strömung durch die Randbedingungen festzulegen. Dies ist aber physikalisch unmöglich, da die analytische Fortsetzung der berandenden Lebenslinien in der Zeitzählung rückwärts führt. Physikalisch mögliche Fortsetzung der Ränder dagegen ergeben auch physikalisch mögliche Strömungen. Hier tritt also die ursprünglich berechnete Strömung nur soweit ein, wie sie durch den physikalisch sinnvollen Teil der berandenden Lebenslinien bestimmt ist.

Bei dem anderen Strömungstyp wird durch die Randbedingungen nicht nur die Strömung bis zur Rückkehrkante, sondern sogar noch ein Teil der zugehörigen zurückkehrenden Strömung gegeben. Dieses Ergebnis entsteht zwangsläufig, wenn man nach Lösungen der Strömungsgleichungen (2) fragt, die die gegebenen Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. Da es physikalisch unmöglich ist, müssen wenigstens stellenweise Vorgänge auftreten, bei denen Abweichungen von den der Untersuchung zugrunde liegenden physikalischen Voraussetzungen auftreten. In diesem Falle ist es die Reibung und Wärmeleitung, die nicht mehr durchweg vernachlässigt werden darf: es tritt hier ein Verdichtungsstoß auf. Rückkehrkanten, die sich zwangsweise aus den gegebenen Randbedingungen ergeben, sind deshalb als ein Zeichen für das Auftreten eines Verdichtungsstoßes zu werten. Dieser liegt dabei zeitlich vor der Rückkehrkante. Beispiele hierzu zeigen die Bilder 9 und 10, und zwar geben die Bilder 9a und 9b die grundsätzliche Gestalt von Lösungen an, bei denen im $\mu\nu$-Diagramm die Gerade $\mu + \nu = 1$ bei fallendem $\mu + \nu$, d.h. von der Seite $\mu + \nu > 1$ her erreicht wird, für die Bilder 10a und 10b, kommen die Integralkurven aus dem Gebiet $\mu + \nu < 1$. Bei den Bildern 9a und 10a schneiden die Integralkurven die Gerade $\mu + \nu = 1$ zwischen P_2 und P_3, bei Bild 9b und 10b außerhalb der Strecke P_2P_3.

In den Bildern sind CD und EF die berandenden Lebenslinien, DE ist die Rückkehrkante. Damit der Zustand in einem Punkt der rt-Ebene bestimmt ist, müssen die drei durch ihn hindurchgehenden Charakteristiken die Ränder oder die Kurve auf der die Anfangsbedingungen gegeben sind, zu einem vorhergehenden Zeitpunkt geschnitten haben. Hiernach ist für die Bilder 9 die Grenze des bestimmten Bereichs die Machsche Welle DG, die die Rückkehrkante in D berührt. Die Strömungen, für die die Gerade $\mu + \nu = 1$ (immer natürlich mit Ausnahme der Punkte P_2 und P_3) von der Seite $\mu + \nu > 1$ her erreicht wird, gehören demnach dem Typ an, bei dem die Strömung durch die Rand- und Anfangsbedingungen nicht bis zur Rückkehrkante bestimmt ist. Hier ist eine analytische Fortsetzung über die Linie GD hinaus nicht möglich. Da der Ansatz (5) jedoch nur die analytischen Fortsetzungen erfaßt, sind für uns diese Lösungen unbrauchbar.

Bei den Bildern 10 überdecken die von den Rändern und der Kurve der Anfangsbedingungen herrührenden Charakteristiken das ganze Gebiet bis zur Rückkehrkante und sogar noch ein (gestrichelt eingezeichnetes) Stück der Rückkehrfläche. Bei Lösungen, die im Diagramm aus dem Gebiete $\mu + \nu < 1$ kommend die Linie $\mu + \nu = 1$ schneiden, treten danach Verdichtungsstöße ein.

11. Eine entsprechende Untersuchung für stationäre Strömungen.

Bei stationären ebenen oder rotationssymmetrischen Strömungen führt ein Ansatz, der (5) entspricht, nur für $n = 1$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Man erhält bei rotationssymmetrischen Strömungen das bekannte Busemannsche kegelige Feld. Beschränkt man sich jedoch auf Nachbarströmungen zu der Parallelströmung, so sind auch andere Exponenten n möglich. Von einigem Interesse dürfte hier die Untersuchung des Durchgangs durch die Schallgeschwindigkeit bei symmetrischen ebenen oder rotationssymmetrischen Düsen ein. Man muß dort, um den wesentlichen Charakter der Strömung zu erfassen, in der Strömungsdifferentialgleichung auch die quadratischen Glieder berücksichtigen. Wenn man den Nullpunkt des Koordinatensystems an die Stelle legt, wo die Schallgrenze die Symmetrieachse der Düse schneidet, so führt ein Ansatz,

[10]) W. Tollmien, Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1937), S. 117 bis 136. F. Ringleb, Über die Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Deutsche Mathematik, Bd. 5 S. 377 bis 384. W. Tollmien, Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 140 bis 152.

[11]) G. Guderley, Rückkehrkanten in ebener kompressibler Potentialströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942). S. 121 bis 126.

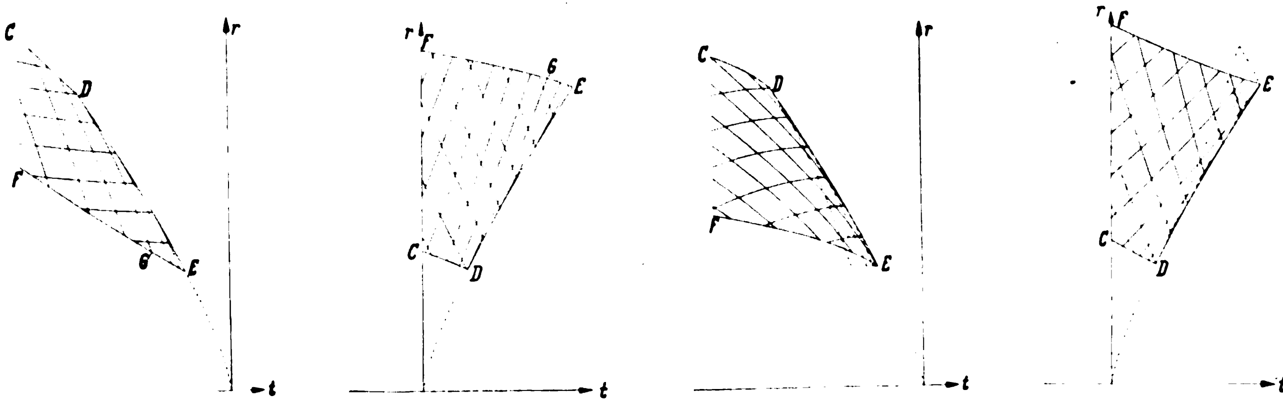


Bild 9 und 10. Der Verlauf der Machschen Wellen in der Nähe von Rückkehrkanten.

der (5) entspricht, zu einer Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, die man durch Ausnutzung von Gruppeneigenschaften auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann. Aus der Schar der Lösungskurven für die Differentialgleichung fallen nun wieder eine Anzahl aus, weil bei ihnen Rückkehrkanten auftreten. Dadurch wird das Verhalten beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit in folgender Weise eingeschränkt. Es sei die Symmetrieachse der Düse die x-Achse des Koordinatensystems. Die Abweichung des Geschwindigkeitsbetrages von der kritischen Geschwindigkeit sei Δw. Für die verschiedenen Ansätze, die (5) entsprechen, ist auf der Symmetrieachse

$$\Delta w = c \cdot x^n.$$

Möglich sind nur Werte $n \geqq 1$. Strömungen mit $n > 1$ entsprechen Düsen, deren Krümmung an der engsten Stelle verschwindet. Für Düsen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, stellt sich der Wert $n = 1$ ein. Diese Untersuchung liefert damit eine theoretische Begründung der Meyerschen Annahme, daß die Geschwindigkeitsverteilung längs der Achse einer symmetrischen Düse linear sei[12]).

12. Zusammenfassung.

Die Berechnung von starken zylindrischen oder kugeligen Verdichtungsstößen läßt sich durch einen geeigneten Ansatz auf die Integration dreier gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen. Durch Dimensionsbetrachtung sind diese auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zu reduzieren. Von den Lösungen dieser Differentialgleichung ist ein Teil wegen des Auftretens einer Rückkehrkante nur zu verwirklichen, wenn man durch eine geeignet angebrachte Saugwirkung den Druckanstieg nach dem Kugelmittelpunkt künstlich schwächt. Ein anderer Teil entspricht Lösungen, bei denen durch zusätzliche Kompression von außen der Druckanstieg besonders hohe Werte annimmt. Die im Normalfall eintretende Strömung steht zwischen diesen Typen. Für sie verhält sich der Druck bei zylindrischen Verdichtungsstößen wie $(1/r)^{0.396}$, bei kugeligen Verdichtungsstößen wie $(1/r)^{0.792}$.

---

[12]) Th. Meyer, Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Mitt. über Forschungsarbeiten, Berlin 1908.

Die Phygoidschwingung und die Möglichkeit ihrer automatischen Steuerung*).

Von W. Kerris.

Bericht aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

In der Arbeit wird die Möglichkeit der automatischen Steuerung der Phygoidschwingung mit Hilfe einer Geschwindigkeits- und Lagenaufschaltung untersucht. Die Frequenzen werden als Punkte einer Ebene über den Aufschaltgrößen der Geschwindigkeit und der Lage dargestellt. Die Punkte für aperiodische Steuerung liegen auf einer Kurve zweiten Grades. Das Verhalten an einigen ausgezeichneten Punkten wird erörtert und gezeigt, weshalb eine Steuerung mit der Geschwindigkeit allein nicht zum Ziel führen kann, während eine Steuerung mit der Lage allein sehr wohl möglich ist. Durch gleichzeitige Aufschaltung von Geschwindigkeit und Lage kann eine Störung schnell aperiodisch beseitigt werden. Wegen der Vernachlässigung der schnellen Drehschwingung sind die Ergebnisse in erster Linie qualitativ zu werten.

Gliederung.

Bezeichnungen.

G Gewicht des Flugkörpers kg,
g Erdbeschleunigung m/s²,
F Bezugsfläche m²,
ϱ Luftdichte kgs²/m⁴,
v Fluggeschwindigkeit m/s,
α Anstellwinkel,
ϑ Längsneigungswinkel,
γ Bahnneigungswinkel,
c_w Widerstandsbeiwert,
c_a Auftriebsbeiwert,
c_M Momentenbeiwert,
η Winkelausschlag des Höhenruders[1]),
η_k Winkelausschlag der Flügelklappen[1])
a Konstante der Geschwindigkeitsaufschaltung,
b Konstante der Lagenaufschaltung,
$\lambda = -\varepsilon \pm \eta^*$ Frequenz 1/s,
$\nu = \frac{v_0}{g} \lambda$ Dimensionslose Frequenz.

Ein übergesetzter Punkt bedeutet die Ableitung nach der Zeit.

Der Index 0 unmittelbar an einem Symbol (z. B. ϑ_0) deutet an, daß es sich um die Größe handelt, die zum ungestörten Flug gehört, dagegen bedeutet z. B. $(\vartheta)_0$ die Lagenabweichung zur Zeit $t = 0$.

I. Einleitung.

Bei der Störung der stationären Längsbewegung führt ein Flugzeug eine Bewegung aus, welche aus der Kopplung einer schnellen Drehschwingung um den Schwerpunkt mit einer langsamen Bahnschwingung des Schwerpunktes entsteht. Die schnelle Drehschwingung wird durch die Störung des Momentengleichgewichtes verursacht, die langsame Bahnschwingung, die sog. Phygoide, durch die Störung des Gleichgewichtes der Kräfte. Während die schnelle Drehschwingung durch geeignete Konstruktion des Flugzeuges stark gedämpft werden kann, wirkt sich die Phygoidschwingung namentlich bei der hohen Flächenbelastung moderner Flugzeuge sehr unangenehm aus, da sie langsam und schlecht gedämpft verläuft und große Höhenschwankungen dabei auftreten. Im folgenden wird dargelegt, wie die Phygoide durch eine automatische Steuerung unterdrückt werden kann. Ehe aber hierauf eingegangen wird, sei das Zustandekommen der Phygoide kurz erläutert.

Wir legen unserer Betrachtung ein Flugzeug zugrunde, das zunächst einen stationären Gleitflug macht. Wird die hierzu gehörende Geschwindigkeit verlangsamt, so nimmt auch der Auftrieb ab. Das Flugzeug kippt nun etwas, es geht in einen steileren Gleitflug und holt Fahrt auf. Wenn es die richtige Fahrt wieder bekommen hat, ist die Bahn noch zu stark geneigt, so daß die Fahrt jetzt zu hoch wird, während das Flugzeug sich in die Sollage aufrichtet; kurz, es führt Schwingungen um die stationäre Flugbahn aus.

Die Aufschaltgrößen für die automatische Steuerung.

Als Aufschaltgrößen für die automatische Steuerung der Phygoide kommen die Geschwindigkeit v, die Längsneigung ϑ und die Höhe h bzw. die zeitlichen Ableitungen dieser Größen in Frage. Der Anstellwinkel α kann bei der Phygoide im wesentlichen als konstant betrachtet werden und daher ist eine Aufschaltung des Bahnwinkels γ oder seiner Änderung in ihrer Wirkung identisch mit einer Aufschaltung der Längsneigung bzw. deren Änderung.

Im folgenden wird eine Geschwindigkeits- und Lagenaufschaltung betrachtet. Beschleunigung und Drehgeschwindigkeit scheinen für die Steuerung der langsam verlaufenden Phygoide ungeeignet, da es Schwierigkeiten bereiten dürfte, passende Fühler hierfür zu bauen[1]). Die Höhenänderung ist als Aufschaltgröße schon von Haus [1] vorgeschlagen worden und scheint nach anderwärts angestellten Versuchen durchaus geeignet zu sein.

Die Art der Steuerung.

Auf welche Weise man die Aufschaltgrößen das Flugzeug beeinflussen läßt, ob durch das Höhenruder oder ob durch Flügelklappen, die unmittelbar die Wölbung und somit den c_a-Wert vergrößern, ist grundsätzlich gleichgültig. Bei der praktischen Durchführung kann allerdings eine Steuerungsart vor der anderen wesentliche Vorteile haben, deshalb werden auch beide Möglichkeiten betrachtet.

II. Ableitung der Frequenzgleichung.

Aufstellung der Gleichungen.

Der Einfachheit halber werden die Gleichungen für den Fall eines Flugzeuges ohne Antrieb aufgestellt. Wir gehen ferner von der Voraussetzung aus, daß die Wurzeln für die schnelle Drehschwingung und die langsame Bahnschwin-

*) P 31 7.

[1]) Positiv, wenn die Hinterkante nach unten ausschlägt.

[1]) Das schließt natürlich nicht aus, daß man die Drehgeschwindigkeit zur Bekämpfung der schnellen Drehschwingung mit aufschalten kann, aber auf die Steuerung der Phygoide wird sich diese Aufschaltung praktisch kaum auswirken, da die Drehgeschwindigkeit hierbei zu klein ist, als daß der Drehgeschwindigkeitsfühler merklich darauf anspräche.



gung so weit auseinander liegen, daß sie sich nicht wesentlich beeinflussen können. Wir beschränken uns auf die Behandlung der langsamen Schwingung, dann kann das Trägheitsglied und das mit der Drehgeschwindigkeit proportionale Glied der aerodynamischen Dämpfung in der Momentengleichung gegenüber dem beim stationären Flug auftretenden Momentenglied der Luftkraft vernachlässigt werden. Die Bewegung wird also in bezug auf das Moment als quasi stationär angesehen; eine Anstellwinkeländerung kommt nur durch Ruderbetätigung zustande.

Unter Benutzung der Bezeichnungen des Normblattes DIN 100 erhält man[2]):

$$\frac{G}{g}\dot{v} + G\sin(\vartheta - \alpha) + c_w \frac{\varrho}{2} v^2 F = 0 \quad (1)$$

$$\frac{G}{g} v(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha}) + G\cos(\vartheta - \alpha) - c_a \frac{\varrho}{2} v^2 F = 0 \quad (2)$$

$$c_M \equiv 0 \quad (3)$$

Diese Gleichungen werden nun nach der Methode der kleinen Schwingungen behandelt. Man bringt Störungen δv, $\delta\vartheta$, $\delta\alpha$, δc_w, δc_a und δc_M an. Die Variationen nach α, c_w, c_a und c_M kommen aber nur als Folge der Betätigung des Höhenruders bzw. der Flügelklappen durch die Automatik zustande, beim ungesteuerten Flug sind sie gleich Null.

In den variierten Gleichungen können die Glieder ohne δ gestrichen werden, weil ihre Summe nach den Gleichungen (1), (2) und (3) gleich Null ist. Ebenso kann das Glied $\frac{G}{g}(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha})\,\delta v$ als klein von höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben. Die variierten Gleichungen lauten dann:

$$\frac{G}{g}\frac{d}{dt}\delta v + G\cos(\vartheta_0 - \alpha_0)(\delta\vartheta - \delta\alpha)$$
$$+ c_w \varrho F v_0 \delta v + \frac{\varrho}{2} v_0^2 F \delta c_w = 0 \quad (1\,a)$$

$$\frac{G}{g} v_0 \frac{d}{dt}(\delta\vartheta - \delta\alpha) - G\sin(\vartheta_0 - \alpha_0)(\delta\vartheta - \delta\alpha)$$
$$- c_a \varrho F v_0 \delta v - \frac{\varrho}{2} v_0^2 F \delta c_a = 0 \quad (2\,a)$$

$$\delta c_M \equiv 0 \quad (3\,a)$$

Den Zusammenhang zwischen der Anstellwinkelvariation und der Variation des Ruder- bzw. Klappenwinkels liefert Gl. (3a), denn man kann δc_M als vollständiges Differential auffassen.

$$\delta c_M = \left(\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}\right)_{\eta = \text{konst.}} \cdot \delta\alpha + \left(\frac{\partial c_M}{\partial \eta}\right)_{\alpha = \text{konst.}} \cdot \delta\eta \equiv 0 \quad (3\,b)$$

Hieraus erhält man:

$$\delta\alpha = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial c_M}\right)\left(\frac{\partial c_M}{\partial \eta}\right)\delta\eta \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$\boxed{\delta\alpha = \chi\,\delta\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4\,a)$$

Die Variationen δc_w und δc_a kann man auch als vollständige Differentiale auffassen:

$$\delta c_w = \left(\frac{\partial c_w}{\partial \eta}\right)_{\alpha = \text{konst.}} \cdot \delta\eta + \left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha}\right)_{\eta = \text{konst.}} \cdot \delta\alpha \quad (5)$$

Hierin läßt sich $\delta\alpha$ nach Gl. (4) ersetzen:

$$\delta c_w = \left[\left(\frac{\partial c_w}{\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial c_M}\right)\left(\frac{\partial c_M}{\partial \eta}\right)\right]\delta\eta \quad \ldots \quad (5\,a)$$

$$\boxed{\delta c_w = \Phi\,\delta\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5\,b)$$

Entsprechend findet man für δc_a:

$$\delta c_a = \left(\frac{\partial c_a}{\partial \eta}\right)_{\alpha = \text{konst.}} \cdot \delta\eta + \left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}\right)_{\eta = \text{konst.}} \cdot \delta\alpha \quad (6)$$

$$\delta c_a = \left[\left(\frac{\partial c_a}{\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial c_M}\right)\left(\frac{\partial c_M}{\partial \eta}\right)\right]\delta\eta \quad \ldots \quad (6\,a)$$

$$\boxed{\delta c_a = \Psi\,\delta\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6\,b)$$

[2]) Vgl. z. B. Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik Bd. I, 2. Aufl., S. 204 ff.

Wie man leicht einsieht, sind für die normalen Flugzustände χ, Φ und Ψ für Steuerung mit dem Höhenruder immer negativ, für Steuerung mit Flügelklappen positiv.

Die Größen

$$\left(\frac{\partial c_w}{\partial \eta}\right), \left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha}\right), \left(\frac{\partial c_a}{\partial \eta}\right), \left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}\right), \left(\frac{\partial c_M}{\partial \eta}\right), \left(\frac{\partial c_M}{\partial \alpha}\right)$$

können aus Windkanalmessungen entnommen werden. Wenn man mit dem Höhenruder steuert, überwiegt in den Gleichungen (5a) und (6a) das zweite Glied, welches den Anteil der Widerstands- und Auftriebsänderung darstellt, der durch die Anstellwinkeländerung bedingt ist; die Widerstands- und Auftriebsänderung durch den Höhenruderausschlag unmittelbar, die durch das erste Glied dargestellt werden, sind demgegenüber unbedeutend. Wird hingegen die Steuerung mit Flügelklappen vorgenommen, die unmittelbar die Wölbung des Flügels und damit den Widerstands- und Auftriebsbeiwert verändern, so sind die Glieder $\left(\frac{\partial c_w}{\partial \eta}\right)_{\alpha = \text{konst.}}$ und $\left(\frac{\partial c_a}{\partial \eta}\right)_{\alpha = \text{konst.}}$ wesentlich, und es können sogar demgegenüber die anderen Glieder unwesentlich werden, wenn durch die Verstellung der Flügelklappen keine erhebliche Momentenänderung, d. h. keine Vertrimmung des Flugzeuges eintritt. Man erkennt also deutlich, daß ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Steuerung mit dem Höhenruder und der mit Flügelklappen nicht besteht, sondern nur ein gradueller, durch den für die Praxis eine Steuerungsart der anderen überlegen sein kann.

Die Aufschaltung der Steuergrößen.

Der Ruder- bzw. Klappenausschlag ist nun nicht willkürlich, sondern eine Funktion der Störungen. Als Aufschaltgrößen wählen wir wegen der vorn auseinandergesetzen Gründe die Geschwindigkeit (gemessen mit einem Staurohr) und den Längsneigungswinkel (gemessen mit einem Lagekreisel).

Die Steuergleichung lautet also:

$$\delta\eta = a\frac{\delta v}{v_0} + b\,\delta\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Die dimensionslosen Konstanten a und b bestimmen die Größe der Aufschaltung; a gibt an, um wieviel Winkeleinheiten (im Bogenmaß) das Ruder bzw. die Klappen bei der relativen Geschwindigkeitsstörung $\frac{\delta v}{v_0} = 1$ verstellt werden, b gibt an, um wieviel Winkeleinheiten das Ruder oder die Klappen bei der Winkelstörung 1 verstellt werden.

Mit Hilfe von Gleichung (7) kann das $\delta\eta$ in den Gleichungen (4a), (5b) und (6b) ersetzt werden:

$$\delta\alpha = a\chi\frac{\delta v}{v_0} + b\chi\,\delta\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\delta c_w = a\Phi\frac{\delta v}{v_0} + b\Phi\,\delta\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\delta c_a = a\Psi\frac{\delta v}{v_0} + b\Psi\,\delta\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Hiermit lassen sich die Variationen $\delta\alpha$, δc_w und δc_a in den Gleichungen (1a) und (2a) ersetzen.

Wir führen dann noch folgende Vereinfachungen ein: Die G enthaltenden Glieder werden durch G dividiert, die anderen durch den äquivalenten Wert $\sqrt{c_a^2 + c_w^2}\,\frac{\varrho}{2} v^2 F$. Berücksichtigen wir ferner, daß $(\vartheta_0 - \alpha_0)$ gleich dem ungestörten Bahnwinkel γ_0 ist und daß

$$\cos\gamma_0 = \frac{c_a}{\sqrt{c_a^2 + c_w^2}} \text{ und } \sin\gamma_0 = \frac{-c_w}{\sqrt{c_a^2 + c_w^2}}\,^{3)}$$

gesetzt werden kann, so erhält man nach Ordnen der Glieder:

$$\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\frac{d}{dt} + 2\frac{c_w}{c_a} + a\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]\right\}\frac{\delta v}{v_0}$$
$$+ \left\{1 + b\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]\right\}\delta\vartheta = 0 \quad \ldots \quad (1\,b)$$

[3]) Das Minuszeichen rührt davon her, daß beim Gleitflug der Bahnwinkel negativ ist und daher auch der Sinus negativ werden muß, während der Kosinus positiv ist.

$$\left\{ 2 - a\left[\frac{\Psi}{c_a} + \chi\left(\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\frac{d}{dt} + \frac{c_w}{c_a}\right)\right]\right\}\frac{\delta v}{v_0} +$$

$$+ \left\{\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\frac{d}{dt} + \frac{c_w}{c_a}\right.$$

$$\left. - b\left[\frac{\Psi}{c_a} + \left(\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\frac{d}{dt} + \frac{c_w}{c_a}\right)\chi\right]\right\}\delta\vartheta = 0 \quad (2b)$$

Diese beiden Gleichungen müssen nun integriert werden. Wir machen hierzu den Ansatz:

$$\frac{\delta v}{v_0} = A\,e^{\lambda t};\ \delta\vartheta = B\,e^{\lambda t}\ ^{4)} \ldots\ldots \quad (11)$$

wo A und B Integrationskonstanten sind. An Stelle des $\frac{d}{dt}$ in den Gleichungen (1b) und (2b) erscheint dann λ.

$$\left\{\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\lambda + 2\,\frac{c_w}{c_a} + a\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]\right\}A$$

$$+ \left\{1 + b\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]\right\}B = 0 \quad (1c)$$

$$\left\{ 2 - a\left[\frac{\Psi}{c_a} + \left(\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\lambda + \frac{c_w}{c_a}\right)\chi\right]\right\}A +$$

$$+ \left\{\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\lambda + \frac{c_w}{c_a}\right.$$

$$\left. - b\left[\frac{\Psi}{c_a} + \left(\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\,\frac{v_0}{g}\,\lambda + \frac{c_w}{c_a}\right)\chi\right]\right\}B = 0 \quad . \quad (2c)$$

Die Frequenzdeterminante.

Führt man noch für $\frac{v_0}{g}\lambda$ die dimensionslose Frequenz ν ein, so erhält man aus den Gleichungen (1c), (2c) die Frequenzdeterminante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

wo: $a_{11} = \nu\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2} + 2\,\frac{c_w}{c_a} + a\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]$

$$a_{12} = 1 + b\left[\frac{\Phi}{c_a} - \chi\right]$$

$$a_{21} = -2 - a\left[\frac{\Psi}{c_a} + \left(\nu\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2} + \frac{c_w}{c_a}\right)\chi\right]$$

$$a_{22} = \nu\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2} + \frac{c_w}{c_a} - b\left[\frac{\Psi}{c_a} + \left(\nu\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2} + \frac{c_w}{c_a}\right)\chi\right].$$

Die Determinante muß gleich Null sein, weil die Gleichungen (1c) und (2c) nur vereinbar sind, wenn sie proportional sind, d. h. sich lediglich durch einen konstanten Faktor unterscheiden, oder aber, wenn alle Koeffizienten verschwinden, was trivial ist.

Diese Determinante liefert eine quadratische Gleichung für ν:

$$[1 - b\chi]\left[1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2\right]\nu^2$$

$$+ \frac{1}{c_a}\left[3\,c_w + a\,\Phi - b\,(\Psi + 3\,c_w\,\chi)\right]\sqrt{1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2}\cdot\nu +$$

$$+ \frac{1}{c_a}\left\{2\,c_a\left[1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2\right] + a\left[\frac{c_w}{c_a}\,\Phi + \Psi\right]\right.$$

$$\left. - 2\,b\left[\frac{c_w}{c_a}\,\Psi + c_a\left[1+\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2\right]\chi - \Phi\right]\right\} = 0 \ldots \quad (13)$$

Der Koeffizient des ersten Gliedes bestimmt die Trägheit des Systems. Man erkennt, daß er nur die Aufschaltgröße b, d. h. die Lagenaufschaltung enthält. Durch die Geschwindigkeitsaufschaltung läßt sich also die Trägheit nicht ändern. Der Koeffizient des zweiten Gliedes bestimmt die Dämpfung, der des dritten die Rückstellung; diese beiden Koeffizienten können durch die Geschwindigkeits- und Lagenaufschaltung beeinflußt werden.

Bei flachen Gleitwinkeln kann man $\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2$ als klein gegen 1 vernachlässigen; diesen Fall wollen wir den weiteren Betrachtungen zugrunde legen.

$$\nu^2 + \frac{3\,c_w + a\,\Phi - b\,(\Psi + 3\,c_w\,\chi)}{c_a\,(1 - b\,\chi)}\,\nu$$

$$+ \frac{2\,c_a + a\left[\frac{c_w}{c_a}\,\Phi + \Psi\right] - 2\,b\left[\frac{c_w}{c_a}\,\Psi + c_a\,\chi - \Phi\right]}{c_a\,(1 - b\,\chi)} = 0 \quad (13a)$$

Abgekürzt läßt sich hierfür schreiben

$$\nu^2 + 2\,p\,\nu + \omega_0^2 = 0 \ldots\ldots \quad (13b)$$

und daraus erhält man:

$$\nu = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2} \ldots\ldots \quad (13c)$$

Wir nennen p die dimensionslose Dämpfung und ω_0 die dimensionslose Eigenfrequenz.

III. Deutung der Frequenzgleichung.

Der Verlauf der ungesteuerten Phygoidbewegung.

Sind a und b gleich Null, so haben wir den Fall der ungesteuerten Phygoidbewegung:

$$\nu^2 + 3\,\frac{c_w}{c_a} + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\nu = -\frac{3\,c_w}{2\,c_a} \pm \sqrt{\frac{9}{4}\left(\frac{c_w}{c_a}\right)^2 - 2} \ldots \quad (14a)$$

Da bei den vorausgesetzten kleinen Gleitwinkeln das erste Glied unter der Wurzel gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann, erhält man:

$$\nu = -\frac{3\,c_w}{2\,c_a} \pm 1{,}4\,i \ldots\ldots \quad (14b)$$

Gehen wir noch von der dimensionslosen Frequenz ν auf die Frequenz $\lambda = \frac{g}{v_0}\,\nu$ über, so erhalten wir:

$$\lambda = -\frac{3\,c_w}{2\,c_a}\,\frac{g}{v_0} \pm 1{,}4\,\frac{g}{v_0}\,i \ldots\ldots \quad (14c)$$

Die Dämpfung (dargestellt durch das erste Glied) wird also um so kleiner, je flacher der Gleitwinkel und je größer die Fluggeschwindigkeit ist; die Frequenz (dargestellt durch das zweite Glied) nimmt mit zunehmender Fluggeschwindigkeit ab.

Der Verlauf der gesteuerten Phygoidbewegung.

Wir gehen von der Gleichung (13c) aus, die wir für $\lambda = \frac{g}{v_0}\,\nu$ aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{g}{v_0}\,p \pm \frac{g}{v_0}\sqrt{p^2 - \omega_0^2} \\ \lambda &= -\varepsilon \pm \eta^* \end{aligned}\right\} \ldots \quad (13d)$$

Für den Verlauf der Bewegung sind die Größen ε und η^*, also im wesentlichen p und ω_0^2 maßgebend.

Eine Bewegung ist stabil, wenn sie bei einer Störung wieder nach dem bisherigen Gleichgewichtszustand strebt; die Voraussetzung hierfür ist, daß p und ω_0^2 positiv sind. Das ist leicht einzusehen, wenn man die Beziehung für die Störung betrachtet: $A_1\,e^{-\varepsilon+\eta^*} + A_2\,e^{-\varepsilon-\eta^*}$; A_1 und A_2 sind die Integrationskonstanten, welche die Anfangsbedingungen bestimmen. Wenn $p > 0$ ist, stellt der Anteil $e^{-\varepsilon}$ immer eine Abnahme dar; für $\omega_0^2 > 0$ sind zwei Fälle zu unterscheiden: für $\omega_0^2 > p^2$ wird η^* imaginär, dann verläuft die Bewegung schwingend und η^* liefert die Frequenz; für $p^2 > \omega_0^2$ wird η^* reell, dann verläuft die Bewegung aperiodisch kriechend, aber da η^* bei positivem ω_0^2 immer kleiner als ε bleibt, tritt auch hier in den e-Funktionen kein positiver Exponent auf, der ja einen instabilen Bewegungsablauf zum Ausdruck brächte.

---

[4] $\frac{\delta v}{v_0}$ und $\delta\vartheta$ sind die kartesischen Koordinaten eines Vektors. Um das einzusehen, schreiben wir den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in Polarkoordinaten und variieren ihn:

$$\mathfrak{v} = v\,e^{i\vartheta}$$

$$\delta\mathfrak{v} = (\delta v + i\,v_0\,\delta\vartheta)\,e^{i\vartheta} = \left(\frac{\delta v}{v_0} + i\,\delta\vartheta\right)v_0\,e^{i\vartheta} = \left(\frac{\delta v}{v_0} + i\,\delta\vartheta\right)\mathfrak{v}_0.$$

Für eine stabile Steuerung sind also die Geschwindigkeitsaufschaltung a und die Lagenaufschaltung b so zu wählen, daß p und ω_0^2 positiv werden.

Der aperiodische Grenzfall.

Wenn $\eta^* = 0$ wird, haben wir den aperiodischen Grenzfall; eine Störung verschwindet dann weder periodisch noch kriechend, sondern nach einem einfachen Exponentialgesetz. Dieser Zustand ist natürlich erstrebenswert. Die Bedingung für aperiodische Steuerung lautet also:

$$p^2 = \omega_0^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Die Beziehung (15) liefert eine quadratische Gleichung für a und b von der allgemeinen Form:

$$A\,a^2 + B\,a\,b + C\,b^2 + D\,a + E\,b + F = 0 \quad \ldots (16)$$

Die Koeffizienten A, B, C, D, E, F hängen von Φ, Ψ, χ, c_w, c_a in wenig übersichtlicher Weise ab. Eine Ausrechnung der Koeffizienten macht man daher am besten nach dem Einsetzen der Zahlenwerte in die Ausdrücke für p und ω_0^2. Die Art der Kurve läßt sich aus der Diskriminante $A\,C - \frac{B^2}{4}$ erkennen; ist sie positiv, so handelt es sich um eine Ellipse, ist sie negativ, so erhält man ein Hyperbel; wenn die Diskriminante Null wird, eine Parabel.

In einigen durchgerechneten Fällen ergaben sich Ellipsen. Deshalb legen wir auch bei den folgenden Betrachtungen eine Ellipse zugrunde. Parabeln oder Hyperbeln scheinen aber auch möglich zu sein. Grundsätzlich ändert sich dann gar nichts, denn auch diese Kurven teilen die Ebene in zwei Gebiete, ein »äußeres« und ein »inneres«; bei der Hyperbel hängen die beiden Teile des »inneren« Gebietes über das Unendliche zusammen.

Bild 1 zeigt schematisch eine derartige Ellipse über den Aufschaltgrößen a und b als Achsen aufgetragen.

Der Bereich im Innern der Ellipse enthält die Aufschaltmöglichkeiten, für welche die gesteuerte Bewegung periodisch wird, als Sonderfall die ungesteuerte Bewegung im Schnittpunkt der a-Achse und der b-Achse. Der Außenraum enthält die Aufschaltungen, für die sich eine kriechende Einstellung ergibt.

Kurven konstanter Dämpfung.

Unter Kurven konstanter Dämpfung sollen solche Kurven verstanden werden, für die p einen konstanten Wert k hat.

$$\frac{3\,c_w + a\,\Phi - b\,(\Psi + 3\,c_w\,\chi)}{2\,c_a\,(1 - b\,\chi)} = k \quad \ldots \ldots (17)$$

In der Darstellung mit a und b als Koordinatenachsen sind die Kurven konstanter Dämpfung Geraden, deren Gleichung sich aus (17) ergibt:

$$b = \frac{\Phi}{\Psi + (3\,c_w - 2\,c_a\,k)\,\chi}\,a + \frac{3\,c_w - 2\,c_a\,k}{\Psi + (3\,c_w - 2\,c_a\,k)\,\chi} \quad (18)$$

Alle Geraden, die man erhält, wenn man k die reellen Zahlen durchlaufen läßt, schneiden sich in einem Punkt. Um das zu zeigen, führen wir in (18) für $(3\,c_w - 2\,c_a\,k)$ die Abkürzung φ ein und differenzieren b nach φ. Die Änderung von b mit φ wird gleich Null gesetzt. Hierbei stellt sich dann heraus, daß auch a von φ unabhängig ist.

$$b = \frac{\Phi}{\Psi + \varphi\,\chi}\,a + \frac{\varphi}{\Psi + \varphi\,\chi} \quad \ldots \ldots \ldots (18\,a)$$

$$0 = \frac{d\,b}{d\,\varphi} = \frac{-\Phi\,\chi}{(\Psi + \varphi\,\chi)^2}\,a + \frac{\Psi + \varphi\,\chi - \varphi\,\chi}{(\Psi + \varphi\,\chi)^2} \quad \ldots (19)$$

Hieraus findet man für die Koordinate des Schnittpunktes S:

$$a_s = \frac{\Psi}{\Phi\,\chi};\quad b_s = \frac{1}{\chi} \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

Wie man sieht, sind die Schnittpunktskoordinaten unabhängig von c_w und c_a.

Dieser Schnittpunkt aller Dämpfungsgeraden ist ein singulärer Punkt, in dem der Begriff der Dämpfung seinen Sinn verliert; die Dämpfung wird dort unbestimmt. Die Ellipse muß durch diesen Punkt gehen, denn im Punkt S kann p jeden Wert annehmen, also auch den Wert $p^2 = \omega_0^2$.

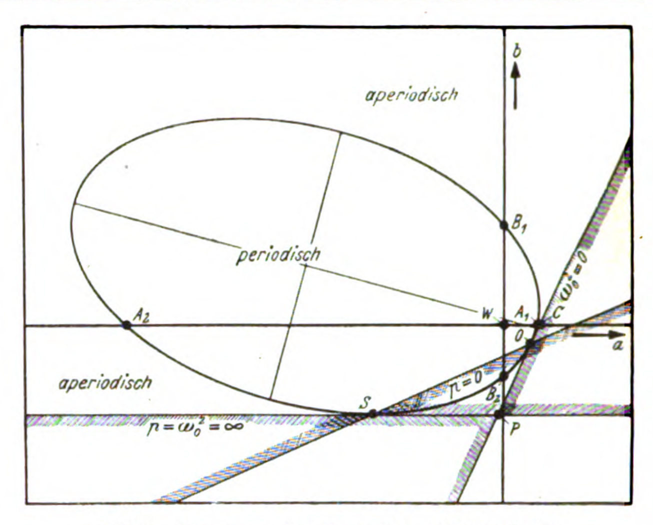


Bild 1. Steuerung der Phygoide. (Schematisch.)

Die Geraden für $p = 0$ und für $p = \pm\infty$ spielen offenbar eine besondere Rolle, weil sie die Ebene in zwei Sektorenpaare einteilen. Das eine Sektorpaar grenzt das Büschel der Geraden für positives p ein, das andere entsprechend dasjenige für negatives p; der Bereich des zweiten Sektorpaares ist für die Steuerung generell unbrauchbar, der Bereich des ersten ist brauchbar, soweit die ω_0^2-Werte positiv sind (vgl. auch Bild 1).

Die Gleichungen dieser beiden wichtigen Grenzgeraden lassen sich mit Hilfe von (18) leicht angeben. Für $k = 0$ findet man:

$$b = \frac{\Phi}{\Psi + 3\,c_w\,\chi}\,a + \frac{3\,c_w}{\Psi + 3\,c_w\,\chi} \quad \ldots \ldots (21)$$

und für $k = \pm\infty$:

$$b = \frac{1}{\chi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

Diese Gerade ist also parallel zur a-Achse.

Kurven konstanter Eigenfrequenz.

Unter Kurven konstanter Eigenfrequenz sollen solche Kurven verstanden werden, für die ω_0^2 einen konstanten Wert C hat.

$$\frac{2\,c_a + \left(\frac{c_w}{c_a}\,\Phi + \Psi\right)a + 2\left(\frac{c_w}{c_a}\,\Psi + c_a\,\chi - \Phi\right)b}{(1 - b\,\chi)\,c_a} = C \quad (23)$$

In der Darstellung mit a und b als Koordinatenachsen sind die Kurven konstanter Eigenfrequenz Geraden, deren Gleichung sich aus (23) ergibt:

$$b = \frac{\frac{c_w}{c_a}\,\Phi + \Psi}{2\left(\frac{c_w}{c_a}\,\Psi - \Phi\right) + c_a\,\chi\,(2 - C)}\,a + \frac{c_a\,(2 - C)}{2\left(\frac{c_w}{c_a}\,\Psi - \Phi\right) + c_a\,\chi\,(2 - C)} \quad \ldots \ldots (24)$$

Alle Kurven konstanter Eigenfrequenz schneiden sich in einem Punkt P. Der Nachweis kann genau so geführt werden, wie bei den Kurven konstanter Dämpfung. Man findet dann für die Schnittpunktskoordinaten:

$$a_P = \frac{2\left(\frac{c_w}{c_a}\,\Psi - \Phi\right)}{\chi\left(\frac{c_w}{c_a}\,\Phi + \Psi\right)};\quad b_P = \frac{1}{\chi} \quad \ldots (25)$$

Die Geraden für $\omega_0^2 = 0$ und $\omega_0^2 = \pm\infty$ grenzen auch hier zwei Sektorenpaare ab, von denen das eine, welches das Büschel der Geraden für negatives ω_0^2 enthält, für die Steuerung generell unbrauchbar ist, während das andere brauchbar ist, soweit die p-Werte dort positiv sind.

Die Gleichungen der Grenzgeraden findet man aus (24).

Für $C = 0$ ist:

$$b = \frac{\frac{c_w}{c_a}\Phi + \Psi}{2\left(\frac{c_w}{c_a}\Psi - \Phi + c_a\chi\right)}\, a + \frac{c_a}{\frac{c_w}{c_a}\Psi - \Phi + c_a\chi} \quad (26)$$

und für $C = \pm\infty$ ist:

$$b = \frac{1}{\chi} \quad (27)$$

Ausgezeichnete Punkte.

1. Der Punkt 0 (vgl. Bild 1).

Die aperiodische Bedingung $p^2 = \omega_0^2$ kann an dem Schnittpunkt der Geraden $p = 0$ mit der Ellipse nur erfüllt sein, wenn auch $\omega_0^2 = 0$ ist. An allen andern Ellipsenpunkten muß $\omega_0^2 > 0$ sein, d. h. die Gerade $\omega_0^2 = 0$ berührt die Ellipse im Punkt 0 als Tangente. Im Punkt 0 beeinflussen die Aufschaltgrößen a und b das Flugzeug so, als ob es keine Dämpfung und keine Rückstellung hätte, sondern nur eine Trägheit. Es kann bei jeder Geschwindigkeit durch Zuordnen einer bestimmten Lage stationär fliegen, aber wenn es durch eine Störung angestoßen wird, so entfernt es sich aus dem Ausgangszustand mit einer konstanten Änderungsgeschwindigkeit immer weiter, wie z. B. eine angestoßene Kugel auf einer glatten, ebenen Unterlage, oder ein angestoßenes, reibungsfrei gelagertes Rad. Der Punkt 0, der natürlich zur Steuerung unbrauchbar ist, liegt in der Nähe der a-Achse.

2. Der Punkt C.

Der Schnittpunkt der Geraden $\omega_0^2 = 0$ mit der a-Achse interessiert insofern, als er in der Nähe des Punktes A_1 liegt. Im Punkt C ist, wie überall auf der Geraden $\omega_0^2 = 0$, die Rückstellung gleich Null. Es ist also nur eine gewisse Trägheit und eine wegen der Nähe des Punktes 0 kleine Dämpfung wirksam. Die Steuerung im Punkte C arbeitet folgendermaßen: Bei einer Geschwindigkeitsverminderung des Flugzeuges wird der Auftriebsbeiwert so vergrößert, daß der Auftrieb seinen Wert beibehält. Das Flugzeug ist also gegenüber Geschwindigkeitsstörungen im indifferenten Gleichgewicht. Eine Steuerung im Punkt C ist unbrauchbar.

3. Der Punkt A_1.

A_1 ist der Punkt für eine aperiodische Steuerung mit reiner Geschwindigkeitsaufschaltung, an dem das Flugzeug bei zu kleiner Geschwindigkeit etwas gezogen und damit das Zustandekommen der Phygoidschwingung vermieden wird.

Wegen der unmittelbaren Nachbarschaft der Punkte 0 und C ist er für eine wirksame Steuerung ganz unbrauchbar. Gegenüber dem Punkt W der ungesteuerten Phygoide ist die Dämpfung noch verschlechtert und folglich die Einstellzeit (Halbwertszeit) sehr groß.

4. Der Punkt A_2.

Bei einer Geschwindigkeitsaufschaltung entsprechend dem Punkt A_2 wird das Flugzeug bei zu kleiner Geschwindigkeit sehr stark gedrückt. Die Rechnung zeigt aber, daß diese Aufschaltung ungeheuer groß sein muß; eine derartige Aufschaltung ist in keiner Weise zu verwirklichen, da die Linearisierungen, die durch den Ansatz der kleinen Schwingungen bedingt sind, dort nicht gelten. Der Punkt A_2 scheidet also auch aus.

Damit ist gezeigt, daß man zu einer brauchbaren Steuerung durch bloße Geschwindigkeitsaufschaltung nicht kommen kann.

5. Der Punkt B_1.

B_1 ist der Punkt für eine aperiodische Steuerung mit reiner Lagenaufschaltung, an dem das Flugzeug bei positiver Lagenabweichung gedrückt wird. Wie man sieht, ist B_1 sehr gut zur Steuerung geeignet.

6. Der Punkt B_2.

B_2 ist der Punkt mit entgegengesetzter Lagenaufschaltung. Da hier $p < 0$ ist, scheidet er für die Steuerung aus.

7. Der Punkt S.

Um zu erkennen, was es mit dem Schnittpunkt S der beiden Geraden $p = \omega_0^2 = \infty$ und $p = 0$, von dem wir ja sahen, daß er auf der Ellipse liegt, für eine Bewandtnis hat, setzen wir seine Koordinaten $a_s = \frac{\Psi}{\Phi\chi}$ und $b_s = \frac{1}{\chi}$ in die Gleichung (13) ein. Die Koeffizienten von ν^2 und ν werden dann gleich Null, das Flugzeug benimmt sich so, als ob keine Trägheit und keine Dämpfung vorhanden wären, d. h. es kehrt nach einer Störung wie eine masselose, ungedämpfte Feder momentan wieder in die Gleichgewichtslage zurück.

Betrachten wir die Sache noch etwas anders, indem wir von Gleichung (13a) ausgehen, so sehen wir, daß bei der Masse 1 die Dämpfung unbestimmt und die Eigenfrequenz unendlich groß wird.

Es bleibt noch zu klären, welche Bedeutung dem Gebiet rechts unten zukommt, das grundsätzlich ja auch für die Steuerung brauchbar sein müßte, da hier p und ω_0^2 positiv sind. Man muß bedenken, daß p der Quotient aus einer Dämpfung und einer Trägheit und ω_0^2 der Quotient aus einer Rückstellung und einer Trägheit ist. Oberhalb der Linie $b = \frac{1}{\chi}$ $(p = \omega_0^2 = \pm\infty)$ ist die Trägheit positiv, unterhalb negativ. Die vier Sektoren, die um den Punkt S bzw. P entstehen, sind folgendermaßen gekennzeichnet. In einem Sektor sind beide Glieder des Quotienten positiv; in den beiden benachbarten Sektoren ist jeweils eines der Glieder negativ geworden und damit der Quotient selbst auch. In dem Sektor, der dem zuerst betrachteten gegenüber liegt, sind beide Glieder des Quotienten negativ, der Quotient selbst wird also wieder positiv. In dem Gebiet rechts unten sind nun Trägheit, Dämpfung und Rückstellung negativ und daher p und ω_0^2 positiv.

Es macht gedankliche Schwierigkeiten sich vorzustellen, daß man ein Flugzeug, welches sich aufrichtet, durch kräftiges Ziehen wieder aperiodisch in die Sollage zurückbringen kann.

Praktische Bedeutung hat dieser Bereich aber nicht, denn das Flugzeug ist dort statisch instabil. Wir müssen ferner berücksichtigen, daß bei unserer bisherigen Betrachtung die schnelle Drehschwingung ausgeschlossen war in der Erwartung, daß das Flugzeug sie auf Grund seiner Konstruktion von allein genügend abdämpft. Bei ungeeigneter Aufschaltung der Steuerung kann natürlich die schnelle Drehschwingung angefacht sein.

Die Grenzen der Gültigkeit.

Wir wollen jetzt die Frage nach der Gültigkeit unserer Betrachtung zu klären versuchen und rufen uns deshalb unsere wesentlichen Voraussetzungen noch einmal ins Gedächtnis zurück. Die von der Massenträgheit und von der aerodynamischen Dämpfung hervorgebrachten Momente sollen gegenüber dem Luftkraftmoment vernachlässigbar sein.

Wie sieht es mit dieser Voraussetzung nun tatsächlich aus? In der Nähe des Punktes 0 vollziehen sich alle Bewegungen des Flugzeuges sehr langsam; die von Trägheit und Dämpfung hervorgebrachten Momente sind dort tatsächlich zu vernachlässigen. Je weiter wir uns aber von 0 entfernen, desto schneller verlaufen die Flugzeugbewegungen und desto weniger treffen unsere Voraussetzungen zu, ganz und gar nicht mehr in der Nähe von S; dieser Punkt hat also keinerlei praktische Realität mehr.

Für die Praxis wird man die Aufschaltgrößen immer größer wählen müssen als die abgeleiteten Beziehungen sie ergeben, da das Trägheitsmoment des Flugzeugs die errechneten Werte in ihrer Wirksamkeit heruntersetzt.

Genaue Zahlenwerte kann man nur erwarten, wenn man von den vollständigen Gleichungen ausgeht, also auch in der Momentengleichung alle Glieder berücksichtigt.

Diese Aufgabe ist für bestimmte Flugzeugmuster von verschiedenen Seiten gelöst worden, so z. B. für den Fall einer reinen Lagensteuerung von A. Klemin [2]. Diese speziellen Betrachtungen liefern spezielle, quantitativ richtige Ergebnisse. Der in der vorliegenden Arbeit gewählte Weg führt nur zu qualitativen Ergebnissen, die aber das Allgemeine klarer erkennen lassen.

IV. Zahlenbeispiel.

Steuerung der Phygoide mit dem Höhenruder.

Im folgenden wollen wir ein Zahlenbeispiel betrachten[5], und zwar zunächst für den Fall der Steuerung mit dem Höhenruder.

$$c_w = 0{,}1 \qquad c_a = 1$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} = 1{,}0 \qquad \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 18{,}5 \qquad \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} = -0{,}5$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial \eta} = 0 \qquad \frac{\partial c_a}{\partial \eta} = 2{,}0 \qquad \frac{\partial c_M}{\partial \eta} = 1{,}5$$

Hieraus können die Konstanten χ, Φ und Ψ berechnet werden.

$$\chi = -2{,}4 \qquad \Phi = -2{,}4 \qquad \Psi = 42{,}4.$$

Die Gleichung der Kurve für aperiodische Dämpfung lautet:

$$5{,}76\,a^2 + 202{,}37\,ab + 1777{,}93\,b^2 + 162{,}12\,a - 27{,}25\,b - 7{,}91 = 0.$$

Es handelt sich hierbei um eine sehr langgestreckte Ellipse, deren große Achse um $-3^0\,22'$ gegen die b-Achse geneigt ist. Die große Halbachse ist 11313,7, die kleine 23,24 Einheiten lang; der Mittelpunkt hat die Koordinaten $-11296{,}75$ und $+663{,}32$.

Wenn man diese Ellipse ganz darstellen wollte, würde der praktisch interessierende Bereich so zusammenschrumpfen, daß man nichts mehr erkennen könnte. Wir müssen also zunächst noch abschätzen, wie groß man die Aufschaltung von a und b machen kann. Wählt man a bzw. b sehr klein, so würde zu einer geringen Störung ein so kleiner Ruderausschlag gehören, daß er vom toten Gang und der Reibung im Rudermechanismus überdeckt wird. Wenn man a bzw. b sehr groß macht, so hat man praktisch den Fall der Steuerung mit unstetigem Ruderausschlag, weil das Ruder dann schon bei kleinen Störungen den größten möglichen Ausschlag annimmt. Von diesen Gesichtspunkten aus dürfte die günstigste Größe der Aufschaltung von a und b zwischen einigen Zehnteln und 5 liegen; es kommt also nur ein ganz kleiner Bereich der Ellipse in der Nähe des Nullpunktes in Frage. Dieser Bereich ist in Bild 2 dargestellt. Eine Reihe von Punkten ist durch Zahlen gekennzeichnet, die zugehörigen Werte für ν, λ und die Halbwertzeit $\tau = \frac{1}{k}$ sind in der Zahlentafel 1 zusammengestellt; unter Halbwertzeit ist dabei die Zahl verstanden, in der eine Störung auf den $e$ten Teil abklingt.

Zahlentafel 1.

Punkt Nr.	ν	λ [1/s]	τ [s]
0	$-0{,}15 \pm 1{,}4\,i$	$-0{,}008 \pm 0{,}07\,i$	125
1	$+5{,}5$	$+0{,}28$	3,6
2	$+2{,}8$	$+0{,}14$	7,2
3	$-0{,}09$	$-0{,}005$	213
4	$-1{,}5$	$-0{,}07$	13
5	$-2{,}4$	$-0{,}12$	8,4
6	$-3{,}7$	$0{,}18$	5,5
7	$-5{,}0$	$-0{,}25$	4,0
8	$-5{,}7$	$-0{,}29$	3,5
9	$-6{,}25$	$-0{,}31$	3,2

[5]) Die Werte stammen von Windkanalmessungen, die Herr Dr. Braun an einem Entwurf durchführen ließ.

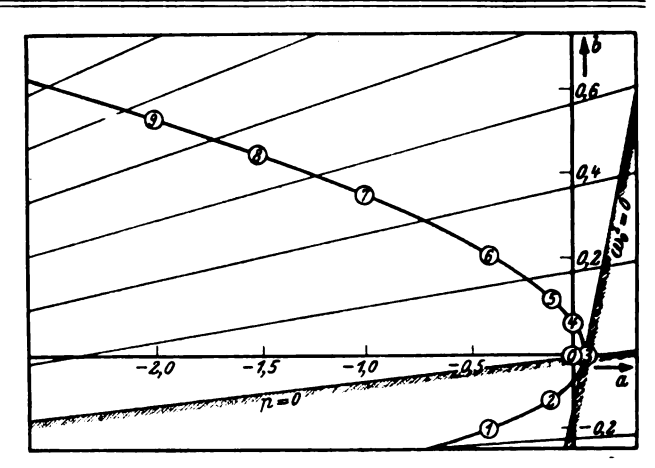


Bild 2. Steuerung der Phygoide mit dem Höhenruder.

Die zur Berechnung von λ angenommene Fluggeschwindigkeit beträgt 200 m/s.

Ferner sind in Bild 2 noch die Geraden $\omega_0^2 = 0$ und $p = 0$ sowie eine Anzahl weiterer Geraden für konstante Dämpfung eingetragen. Die Koordinaten des Punktes 0 (vgl. Bild 1) sind: 0,046; $-0{,}007$, die des Punktes S: $-7{,}361$; 0,417.

Man erkennt auch an diesem Zahlenbeispiel die schon bei der allgemeinen Betrachtung hervorgehobene Tatsache, daß sich mit einer Geschwindigkeitsaufschaltung allein nicht steuern läßt. Bei positiver Geschwindigkeitsaufschaltung kommt man für den aperiodischen Fall auf eine Halbwertszeit von 213 s, der andere Schnittpunkt der a-Achse mit der Ellipse liegt bei -30, er scheidet also wegen der Größe der Aufschaltung aus.

Ganz anders sieht hingegen die Sache bei der Aufschaltung von b aus. Für ein positives b von 0,08 erhält man eine Halbwertzeit von 13 s. Die Aufschaltung ist zwar sehr klein, aber auch wenn man zu größeren b-Werten in den Bereich der kriechenden Einstellung geht, erhält man noch durchaus brauchbare Steuerungsmöglichkeiten.

Besonders günstige Verhältnisse können durch die gleichzeitige Aufschaltung von a und b erzielt werden. Bild 2 zeigt, daß man z. B. für $a = -1$ und $b = 0{,}35$ eine Halbwertszeit von 4 s erhält. Es ist dabei aber zu bedenken, daß bei einer so kurzen Halbwertszeit die Massenträgheit und die aerodynamische Dämpfung streng genommen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, die Grundlagen der Rechnung gelten hier eigentlich nicht mehr.

Während man also, wenn man mit der Geschwindigkeit allein steuern will, das a positiv aufschalten muß, um die Phygoide zu beseitigen bzw. zu verringern, kann es, wenn das b mit aufgeschaltet ist, negativ gemacht werden. Die Automatik drückt dann bei zu geringer Geschwindigkeit das Flugzeug und erhöht so die Frequenz; die gleichzeitig aufgeschaltete Lage sorgt dafür, daß es wieder rechtzeitig abgefangen, d. h. gedämpft wird.

Steuerung der Phygoide mit Flügelklappen.

Für die Steuerung der Phygoide mit Flügelklappen wurden auf Grund der Windkanalmessungen folgende Werte ermittelt:

$$c_w = 0{,}1 \qquad c_a = 1$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} = 1{,}0 \qquad \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 18{,}5 \qquad \frac{\partial c_M}{\partial \alpha} = -0{,}5$$

$$\frac{\partial c_w}{\partial \eta_k} = -0{,}3 \qquad \frac{\partial c_a}{\partial \eta_k} = 2{,}8 \qquad \frac{\partial c_M}{\partial \eta_k} = 0{,}5$$

Hieraus erhält man für die Konstanten, χ, Φ und Ψ

$$\chi = 1 \qquad \Phi = 1{,}3 \qquad \Psi = 21{,}3.$$

Die Gleichung der Kurve für aperiodische Dämpfung lautet:

$$1{,}69\,a^2 + 29{,}56\,ab + 451{,}92\,b^2 - 84{,}94\,a + 9{,}68\,b - 7{,}91 = 0.$$

Auch bei dieser Kurve handelt es sich um eine Ellipse; ihre große Achse ist um — 1° 52′ gegen die b-Achse geneigt, die Halbachsen haben die Längen: 35,44 und 1,83 und die Koordinaten des Mittelpunktes sind: 35,33 und — 1,17.

Der in Frage kommende Bereich ist in Bild 3 dargestellt, Zahlentafel 2 enthält die Angabe für eine Reihe von Punkten.

Zahlentafel 2.

Punkt Nr.	ν	λ [1/s]	τ [s]
0	$-0{,}15 \pm 1{,}4\,i$	$-0{,}008 \pm 0{,}07\,i$	125
1	+ 1,7	+ 0,09	12
2	+ 1,3	+ 0,07	15
3	+ 0,8	+ 0,04	26
4	0,09	0,005	214
5	— 1,0	— 0,05	19
6	1,5	0,07	14
7	1,8	— 0,09	11
8	— 2,4	— 0,12	8,3
9	— 3,2	— 0,14	6,2
10	— 4,1	— 0,21	4,8
11	— 4,8	0,24	4,2
12	— 5,3	0,26	3,8

Daß die Ellipse in Bild 3 nach der anderen Seite liegt als in Bild 2, mag zunächst wunderlich scheinen; diese Tatsache ist lediglich darin begründet, daß nach DIN 100 Ruder- oder Klappenausschläge positiv gerechnet werden, wenn sich die Hinterkante nach unten bewegt. Beim Höhenruder verursacht also ein positiver Ausschlag ein Drücken des Flugzeugs, bei den Flügelklappen ein Aufrichten.

V. Die Berechnung der Bahnkurven.

1. Der allgemeine Fall.

Im allgemeinen Fall ist $\eta^* \neq 0$, so daß man für λ zwei Werte erhält: $\lambda_1 = -\varepsilon + \eta^*$ und $\lambda_2 = -\varepsilon - \eta^*$. Es müssen daher je zwei Integrationskonstanten angesetzt werden:

$$\frac{\delta v}{v_0} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \delta\vartheta = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \tag{28}$$

Diese Ausdrücke müssen die Gleichung (1b) erfüllen. Durch Einsetzen und Ordnen findet man:

$$\left\{Q_1 A_1 + B_1\right\} e^{2\eta^* t} = -\left\{Q_2 A_2 + B_2\right\} \quad . \; . \; . \tag{29}$$

wo Q_1 und Q_2 Abkürzungen für die Koeffizienten von A_1 und A_2 sind. (29) muß für alle t gelten. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$Q_1 A_1 = -B_1; \; Q_2 A_2 = -B_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \tag{30}$$

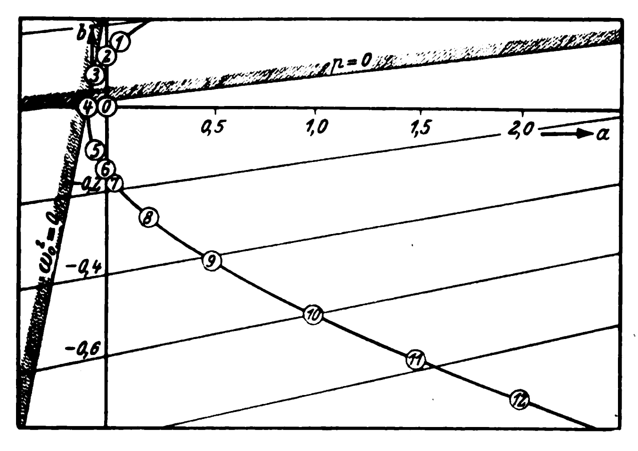


Bild 3. Steuerung der Phygoide mit Flügelklappen.

Man erhält dann in der üblichen Weise die Integrationskonstanten als Funktion der Anfangsbedingungen $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0$ und $(\delta\vartheta)_0$.

$$A_1 = \frac{Q_2 \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 + (\delta\vartheta)_0}{Q_2 - Q_1}; \quad A_2 = \frac{Q_1 \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 + (\delta\vartheta)_0}{Q_1 - Q_2} \tag{31}$$

Für die numerische Durchrechnung der ungesteuerten Phygoide wurde eine Geschwindigkeitsstörung $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0{,}3$ und eine Lagenstörung $(\delta\vartheta)_0 = 0$ angenommen. Die durch Zusammenfügen der Geschwindigkeitsvektoren gewonnene Bahnkurve ist in Bild 4 dargestellt.

2. Der aperiodische Fall.

Im aperiodischen Grenzfall ist $\eta^* = 0$. Hier lautet der Ansatz zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\frac{\delta v}{v_0} = (A_3 + A_4 t)\, e^{-\varepsilon t}; \quad \delta\vartheta = (B_3 + B_4 t)\, e^{-\varepsilon t} \tag{32}$$

Hiermit gehen wir jetzt in die Gleichung (1b) und finden:

$$Q_3 A_3 + Q_4 A_4 + B_3 = -\left\{Q_3 A_4 + B_4\right\} t \quad . \; . \tag{33}$$

Diese Beziehung muß für alle t gelten. Das ist aber nur möglich, wenn

$$Q_3 A_3 + Q_4 A_4 + B_3 = 0 \text{ und } Q_3 A_4 + B_4 = 0 \tag{34}$$

Man findet dann für den Zusammenhang zwischen Integrationskonstanten und Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= \left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0; \quad A_4 = -\frac{Q_3}{Q_4}\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 - \frac{1}{Q_4}(\delta\vartheta)_0 \\ B_3 &= (\delta\vartheta)_0; \quad B_4 = \frac{Q_3}{Q_4}(\delta\vartheta)_0 + \frac{Q_3^2}{Q_4}\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \tag{35}$$

In Bild 4 sind die Bahnkurven für eine Anfangsstörung $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0{,}3$; $(\delta\vartheta)_0 = 0$ und für eine Anfangsstörung $(\delta\vartheta)_0 = 0{,}2$; $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0$ dargestellt.

VI. Schrifttum.

[1] Fr. Haus, Aerodynamische Grundlagen der selbsttätigen Stabilisierungseinrichtungen. Jahrbuch 1938 der deutsch. Luftfahrtforschg. Erg.-Bd. S. 273 bis 306.

[2] Klemin, Pepper, Wittner, Longitudinal Stability in Relation to the Use of an Automatic Pilot. NACA Technical Note No. 666 (Sept. 1938).

Herrn Dr. von Baranoff danke ich für einige wertvolle Anregungen, Frau Scharn und Herrn cand. phys. Eldag für ihre tatkräftige Unterstützung bei den Rechnungen.

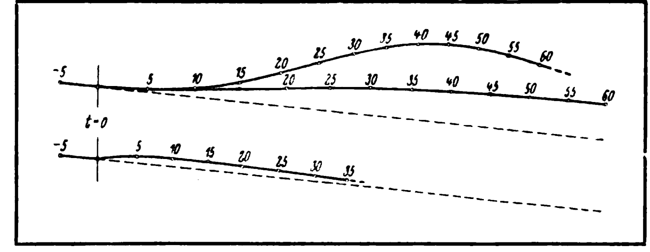


Bild 4. Obere Kurve: Ungesteuerte Phygoide, Anfangsstörung $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0{,}3$; $(\delta\vartheta)_0 = 0$.

Mittlere und untere Kurve: Mit Höhenruder bei Lagenaufschaltung gesteuerte Phygoide.

Anfangsstörung bei der mittleren Kurve: $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0{,}3$, $(\delta\vartheta) = 0$.

Anfangsstörung bei der unteren Kurve: $(\delta\vartheta)_0 = 0{,}2$, $\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)_0 = 0$.

Der Einfluß der Verformung bei der Ermittlung der inneren Kräfte von Biegeträgern mit gerader Stabachse*).

Von F. Reinitzhuber, Berlin-Treptow.

Es wird für Biegeträger mit ursprünglich gerader Stabachse, die aus zwei starken Gurten und einem dünnen Stegblech bestehen (z. B. Flugzeugholmen) der Einfluß der Verformung der Trägerachse nach der elastischen Linie auf die Ermittlung der inneren Kräfte untersucht.

Gliederung.

1. Einleitung.

Werden stabförmige Träger mit ursprünglich gerader Stabachse durch Biegemomente und Querkräfte beansprucht, so verformt sich die Stabachse und nimmt eine als elastische Linie bezeichnete Form an. Bringt man am verformten Träger in zwei benachbarten, im allgemeinen gegeneinander verdrehten Querschnitten, die nach den bekannten Regeln der technischen Biegelehre $\left(\sigma = \frac{M}{J}\,y,\ \tau = \frac{Q\,S}{J\,d}\right)$ ermittelten Spannungen an, so werden diese im allgemeinen nicht im Gleichgewicht sein, da bei der gebräuchlichen technischen Biegelehre die Spannungen auf die ursprünglich gerade Stabachse bezogen berechnet werden, ohne daß die Verformungen der Trägerachse entsprechend der elastischen Linie berücksichtigt sind.

Diese Arbeit stellt es sich zur Aufgabe, den Einfluß dieser Vernachlässigung bei der Spannungsermittlung zu untersuchen und festzustellen, inwieweit er bei der Bemessung von Trägern zu berücksichtigen ist. Hierbei werden, um die Rechnung zu vereinfachen, nur solche Träger betrachtet, die aus zwei starken Gurten und einem dünnen Stegblech bestehen, wie das bei Flugzeugholmen häufig der Fall ist.

2. Berechnung der inneren Kräfte von Biegeträgern ohne Berücksichtigung der Verformung nach der üblichen technischen Biegelehre.

Ein Biegeträger bestehe aus zwei gleichen Gurten mit der Querschnittsfläche F, die gegen die ursprünglich gerade Mittelachse um den kleinen Winkel β geneigt sind, und aus einem Stegblech von der Dicke d. Der Abstand des Schwerpunktes der Gurte, der mit Rücksicht auf die Gurtneigung veränderlich ist, sei $h = h_0 - 2\,x \cdot \operatorname{tg}\beta$, Bild 1. In einem Querschnitt des Biegeträgers wirke das Biegemoment M und die Querkraft Q, Bild 2a. Das Trägheitsmoment eines Querschnitts des Biegeträgers ist

*) A 22 22.

$$J = F'\frac{h^2}{2} + 2\,J_G + \frac{d\,h_1^3}{12},$$

wenn mit $F' = \frac{F}{\cos\beta}$ die schräggeschnittene Fläche des Gurtes und mit J_G das Trägheitsmoment eines Gurtes um eine zur Stegebene normale Achse durch den Gurtschwerpunkt bezeichnet wird. Wird angenommen, daß die Stegdicke d sehr gering $(d \to 0)$ und $J_G \ll \frac{F'\,h^2}{2}$ sei, so wird

$$J \cong F'\frac{h^2}{2}.$$

Damit findet man für die Spannung σ_G im Gurtschwerpunkt nach der üblichen technischen Biegelehre

$$\sigma_G = \frac{M}{J}\,\frac{h}{2} = \frac{M}{h\,F'}$$

und unter Berücksichtigung der Gurtneigungen für die Gurtkräfte, Bild 2b,

$$S_0 = -S_u = S = \frac{\sigma_G\,F'}{\cos\beta} = \frac{M}{h\cos\beta}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die nun allein das gesamte Biegemoment aufnehmen. Infolge der Gurtneigung ändert die Querkraft Q ihre Größe; die neue Querkraft $\overline{Q}$ wird

$$\overline{Q} = Q - 2\,S\sin\beta$$

oder unter Beachtung von Gl. (1)

$$\overline{Q} = Q - \frac{2\,M}{h}\operatorname{tg}\beta \quad \ldots\ldots \quad (2\,\mathrm{a})$$

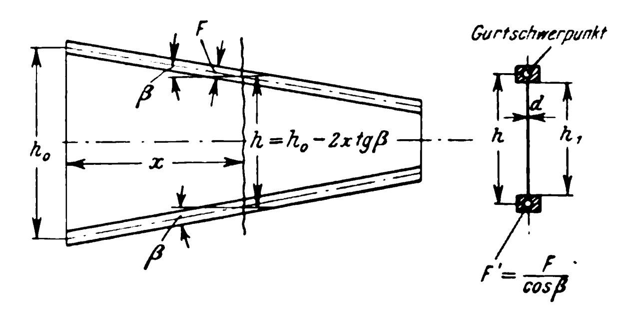


Bild 1. Biegeträger mit Systemabmessungen.

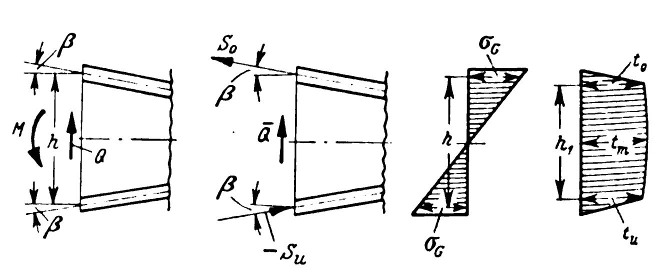


Bild 2a. Biegeträger mit positiver Querkraft und positivem Biegemoment.

Bild 2b. Unverformter Biegeträger mit inneren Kräften; Biegespannungs- und Schubflußverteilung.

Wird die Querkraft nach der üblichen technischen Biegelehre verteilt, so sind die Schubflüsse, Bild 2b,

$$t_0 = t_u = \frac{\overline{Q} F'}{J} \cdot \frac{h}{2},$$

$$t_m = \frac{\overline{Q}}{J} \frac{F' h}{2} + \frac{d h_1^2}{8},$$

woraus mit $d \to 0$ und $J = F' \frac{h^2}{2}$

$$t_0 = t_u = t_m = t = \frac{\overline{Q} F'}{J} \frac{h}{2} = \frac{\overline{Q}}{h} \quad \ldots \quad (2\text{b})$$

folgt. Die Schubflüsse im Stegblech sind also konstant und ergeben sich aus der Division der Querkraft $\overline{Q}$ durch den Schwerpunktsabstand h der Gurte.

3. Berechnung der inneren Kräfte von Biegeträgern mit Berücksichtigung der Verformung.

Ein Punkt P der ursprünglich geraden Stabachse eines Biegeträgers habe die Koordinaten x und $y = 0$. Infolge der Wirkung der Biegemomente und Querkräfte verformt sich der Biegeträger und die Stabachse nimmt die Form der elastischen Linie an. Der Punkt P verschiebt sich in der x-Richtung um den Betrag u und in der y-Richtung um den Betrag v und kommt nach P' zu liegen, Bild 3. Nimmt man an, daß der Querschnitt eben und der rechte Winkel zwischen Stabachse und Querschnitt erhalten bleibt, so muß sich die ursprünglich zur y-Achse parallele Querschnittsebene entsprechend dem Neigungswinkel φ der elastischen Linie gegen die x-Achse um den Winkel φ verdrehen.

Die Schnittkräfte, auf den Punkt P' der elastischen Linie bezogen, ergeben sich zu

$$\mathfrak{M} = M - uQ \quad \text{(Biegemoment)} \quad \ldots \quad (3\text{a})$$

$$\mathfrak{Q} = Q \cos\varphi \quad \text{(Querkraft)} \quad \ldots \quad (3\text{b})$$

$$\mathfrak{N} = Q \sin\varphi \quad \text{(Längskraft)} \quad \ldots \quad (3\text{c})$$

wenn vorausgesetzt wird, daß sich infolge der Verformung des Biegeträgers die Größe der äußeren Kräfte und die Lage ihrer Wirkungslinien nicht ändert. Schneidet man aus dem verformten Träger ein Stück heraus, das auf der Achse gemessen die differentielle Länge dl hat, und nimmt man an, daß die Trägerhöhe h im verformten Träger dieselbe ist wie im unverformten Träger, so ergibt sich Bild 4. Entsprechend der Verlängerung des Obergurtes und der Verkürzung des Untergurtes nimmt der Neigungswinkel der elastischen Linie gegen die x-Achse um das Differential $d\varphi$ zu; um denselben Betrag $d\varphi$ vergrößert sich der Neigungswinkel des Querschnitts gegen die y-Achse. Auch der Neigungswinkel β der Gurte gegen die Stabachse ändert sich, und zwar wird der Tangens des Neigungswinkels β_0 des Obergurtes

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\frac{dh}{2}}{dl + \frac{h}{2} d\varphi} = \frac{\frac{1}{2} \frac{dh}{dl} \cdot \frac{dl}{d\varphi}}{\frac{dl}{d\varphi} + \frac{h}{2}} \quad \ldots \quad (4\text{a})$$

und der Tangens des Neigungswinkels β_u des Untergurtes

$$\operatorname{tg}\beta_u = \frac{\frac{dh}{2}}{dl - \frac{h}{2} d\varphi} = \frac{\frac{1}{2} \frac{dh}{dl} \cdot \frac{dl}{d\varphi}}{\frac{dl}{d\varphi} - \frac{h}{2}} \quad \ldots \quad (4\text{b})$$

Die Schnittkräfte $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Q}$ ändern sich um die Differentiale

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{M} &= -\mathfrak{Q}\,dl = -Q\cos\varphi \cdot dl \\ d\mathfrak{Q} &= -\mathfrak{N}\,d\varphi = -Q\sin\varphi \cdot d\varphi \\ d\mathfrak{N} &= +\mathfrak{Q}\,d\varphi = +Q\cos\varphi \cdot d\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5\text{a--c})$$

wenn angenommen wird, daß innerhalb des Bereiches dl keine äußeren Kräfte angreifen.

Aus den Schnittkräften $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Q}$ findet man, entsprechend dem 2. Abschnitt und den Gleichungen (3a—c), für die Obergurtkraft

$$S_0 = \left(\frac{\mathfrak{M}}{h} + \frac{\mathfrak{N}}{2}\right) \frac{1}{\cos\beta_0} = \left[\frac{M - uQ}{h} + \frac{Q\sin\varphi}{2}\right] \frac{1}{\cos\beta_0} \quad (6\text{a})$$

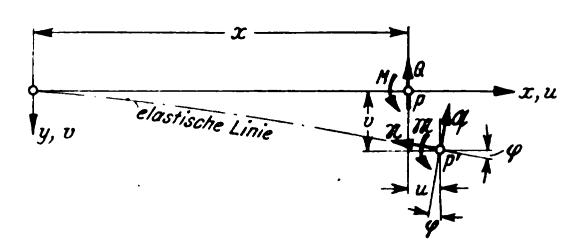


Bild 3. Trägerachse vor und nach der Verformung mit positiven Längs- und Querkräften und Biegemomenten.

für die Untergurtkraft

$$S_u = -\left(\frac{\mathfrak{M}}{h} - \frac{\mathfrak{N}}{2}\right) \frac{1}{\cos\beta_u} = -\left[\frac{M - uQ}{h} - \frac{Q\sin\varphi}{2}\right] \frac{1}{\cos\beta_u} \quad \ldots \quad (6\text{b})$$

und für die Schubkraft

$$\overline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q} - (S_0 \sin\beta_0 - S_u \sin\beta_u)$$

oder

$$\overline{\mathfrak{Q}} = Q\cos\varphi - \left[\frac{M - uQ}{h} (\operatorname{tg}\beta_0 + \operatorname{tg}\beta_u) - \frac{Q\sin\varphi}{2} (\operatorname{tg}\beta_u - \operatorname{tg}\beta_0)\right] \quad \ldots \quad (6\text{c})$$

Der differentiale Zuwachs dieser Kräfte ist beim Obergurt

$$dS_0 = \left[\left(\frac{\mathfrak{M} + d\mathfrak{M}}{h - dh} - \frac{\mathfrak{M}}{h}\right) + \frac{d\mathfrak{N}}{2}\right] \frac{1}{\cos\beta_0}$$

oder

$$dS_0 = \left[\frac{M - uQ}{h^2} dh - Q\left(\frac{dl}{h} - \frac{d\varphi}{2}\right)\cos\varphi\right] \frac{1}{\cos\beta_0}, \quad (7\text{a})$$

beim Untergurt

$$dS_u = -\left[\left(\frac{\mathfrak{M} + d\mathfrak{M}}{h - dh} - \frac{\mathfrak{M}}{h}\right) - \frac{d\mathfrak{N}}{2}\right] \frac{1}{\cos\beta_u}$$

oder

$$dS_u = -\left[\frac{M - uQ}{h^2} dh - Q\left(\frac{dl}{h} + \frac{d\varphi}{2}\right)\cos\varphi\right] \frac{1}{\cos\beta_u}, \quad (7\text{b})$$

bei der Schubkraft

$$d\overline{\mathfrak{Q}} = d\mathfrak{Q} - (dS_0 \sin\beta_0 - dS_u \sin\beta_u)$$

oder

$$d\overline{\mathfrak{Q}} = -Q\sin\varphi\,d\varphi - \left\{\left[\frac{M - uQ}{h^2} dh - Q\frac{dl}{h}\cos\varphi\right] \times (\operatorname{tg}\beta_0 + \operatorname{tg}\beta_u) + Q\frac{d\varphi}{2}(\operatorname{tg}\beta_0 - \operatorname{tg}\beta_u)\cos\varphi\right\}, \quad (7\text{c})$$

wobei für

$$\frac{1}{h - dh} = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{dh}{h}\right)$$

gesetzt wurde.

Trennt man die Gurte vom Stegblech durch Aufschneiden der Halsverbindung an den beiden Gurten, Bild 5, so muß, nach Anbringen der Schnittkräfte an den Trennstellen, jedes der drei Teile (Obergurt, Untergurt, Stegblech) für sich im

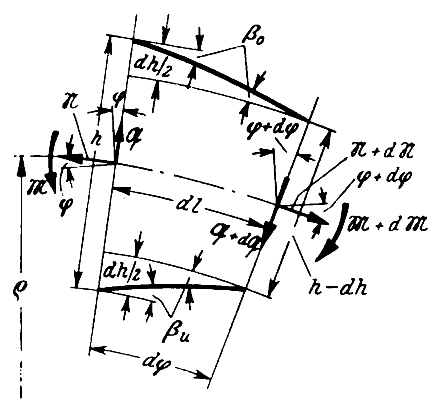


Bild 4. Verformter Trägerteil mit Systemabmessungen, Längs- und Querkräften und Biegemomenten.

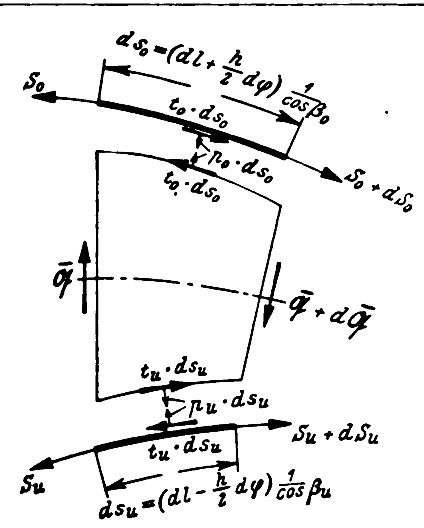


Bild 5. Verformter Trägerteil mit inneren Kräften.

Gleichgewicht sein. Die Schnittkräfte an der Trennstelle werden in zwei Komponenten t und p parallel und normal zur Schnittrichtung zerlegt. Das Gleichgewicht des Obergurtes liefert mit Berücksichtigung von Gl. (6a—b) und (7a—b)

$$t_0 = -\frac{d\,S_0 \cdot \cos\beta_0}{d\,l + \frac{h}{2}\,d\varphi} = \frac{-\frac{d\,h}{d\,l}\cdot\frac{d\,l}{d\varphi}\cdot\frac{M-uQ}{h^2} + \frac{Q}{h}\left(\frac{d\,l}{d\varphi}-\frac{h}{2}\right)\cos\varphi}{\frac{d\,l}{d\varphi}+\frac{h}{2}} \qquad (8\,a)$$

und

$$p_0 = \frac{S_0\cdot\cos\beta_0}{\frac{d\,l}{d\varphi}+\frac{h}{2}} = \frac{\frac{M-uQ}{h}+\frac{Q\sin\varphi}{2}}{\frac{d\,l}{d\varphi}+\frac{h}{2}} \qquad (9\,a)$$

und das des Untergurtes

$$t_u = \frac{d\,S_u\cdot\cos\beta_u}{d\,l-\frac{h}{2}\,d\varphi} = \frac{\frac{d\,h}{d\,l}\cdot\frac{d\,l}{d\varphi}\cdot\frac{M-uQ}{h^2}+\frac{Q}{h}\cdot\left(\frac{d\,l}{d\varphi}+\frac{h}{2}\right)\cos\varphi}{\frac{d\,l}{d\varphi}-\frac{h}{2}} \qquad (8\,b)$$

und

$$p_u = -\frac{S_u\cos\beta_u}{\frac{d\,l}{d\varphi}-\frac{h}{2}} = -\frac{\frac{M-uQ}{h}-Q\,\frac{\sin\varphi}{2}}{\frac{d\,l}{d\varphi}-\frac{h}{2}} \qquad (9\,b)$$

Die drei Gleichgewichtsbedingungen für die am Stegblech angreifenden Kräfte $\overline{\mathfrak{Q}}$, $\overline{\mathfrak{Q}} + d\,\overline{\mathfrak{Q}}$, p_0, t_0, p_u, t_u, die durch die Gl. (6c), (7c), (8a, b) und (9a, b) gegeben sind, werden, wie eine Durchrechnung zeigt, erfüllt, was einen Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichungen darstellt. Hier sei noch erwähnt, daß $\overline{\mathfrak{Q}}$ sich nicht gleichmäßig über die Höhe verteilt, sondern einen veränderlichen Schubfluß ergibt, was auch durch die Verschiedenheit von t_0 und t_u zum Ausdruck kommt.

Nun sind die Größen $\frac{d\,l}{d\varphi}$ und $\frac{d\,h}{d\,l}$ zu bestimmen, die in den bisher ermittelten Gleichungen noch unbekannt sind.

Das aus dem verformten Träger herausgeschnittene Stück von der Länge $d\,l$ möge am geraden unverformten Träger die Länge $d\,x$ haben. Die Längung $d\,l - d\,x = \Delta\,d\,x$ wird durch die Längskraft $\mathfrak{N}$ hervorgerufen. Es ist daher, Bild 6, so lange das Hookesche Gesetz gilt

$$\Delta\,d\,x = \frac{\mathfrak{N}}{2\,E\,F\cos\beta}\,d\,x, \quad \ldots\ldots \quad (10\,a)$$

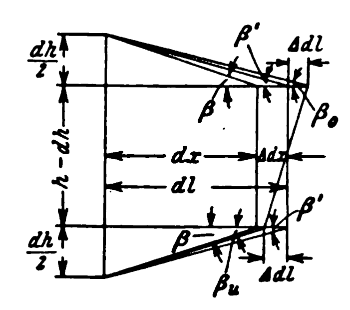


Bild 6: Verformter Trägerteil mit Längungen der Gurte und Gurtwinkel.

wenn mit E der Elastizitätsmodul des Gurtmaterials bezeichnet wird, woraus mit Hilfe von Gl. (3c)

$$d\,l = d\,x + \Delta\,d\,x = d\,x\left(1+\frac{Q\sin\varphi}{2\,E\,F\cos\beta}\right) \quad \ldots \quad (10\,b)$$

folgt. Aus der geometrischen Beziehung

$$\frac{d\,h}{2\,d\,x} = \mathrm{tg}\,\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und der Gl. (10b) erhält man für die eine gesuchte Größe

$$\frac{d\,h}{d\,l} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1+\frac{Q\sin\varphi}{2\,E\,F\cos\beta}} \cong 2\left(1-\frac{Q\sin\varphi}{2\,E\,F\cos\beta}\right)\mathrm{tg}\,\beta \quad (12)$$

Nach Bild 6 ist, wieder die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt,

$$\Delta\,d\,l = \frac{\mathfrak{M}}{h\,E\,F\cos\beta'}\,d\,l$$

oder, wenn für $\mathfrak{M}$ Gl. (3a) eingesetzt wird

$$\Delta\,d\,l = \frac{M-uQ}{h\,E\,F\cos\beta'}\,d\,l \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Der Winkel β' ist gegeben durch $\mathrm{tg}\,\beta' = \frac{d\,h}{2\,d\,l}$, woraus mit Hilfe von Gl. (12)

$$\cos\beta' \cong \left(1+\frac{Q\sin\varphi}{2\,E\,F\cos\beta}\sin^2\beta\right)\cos\beta \quad \ldots \quad (14)$$

folgt.

Aus der geometrischen Beziehung

$$\Delta\,d\,l = \frac{h}{2}\,d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und Gl. (13) und (14) erhält man für die zweite gesuchte Größe

$$\frac{d\,l}{d\varphi} = \frac{h^2\,E\,F}{2\,(M-uQ)}\left(1+\frac{Q\sin\varphi}{2\,E\,F\cos\beta}\sin^2\beta\right)\cos\beta \quad (16)$$

Die Deformationen aus den Schubspannungen bleiben unberücksichtigt.

Durch die Gleichungen (6a—c), (8a, b) und (9a, b) für S_0, S_u, $\overline{\mathfrak{Q}}$, t_0, t_u, p_0, p_u in Verbindung mit den Gleichungen (4a, b) für β_0, β_u und (12) und (16) für $\frac{d\,h}{d\,l}$ und $\frac{d\,l}{d\varphi}$ ist der Spannungszustand im Träger gegeben. Eine zahlenmäßige Auswertung ist allerdings erst dann möglich, wenn die Neigungswinkel φ der elastischen Linie gegen die ursprüngliche Trägerachse und die Verschiebungen u der Achspunkte in Richtung der Trägerachse bekannt sind. Bei der Kleinheit der durch die Berücksichtigung der Verformung der Stabachse hervorgerufenen Änderung der inneren Kräfte darf man φ im allgemeinen wohl in der üblichen Weise nach den Mohrschen Sätzen bestimmen. Die Größe u wird man meist Null setzen können. Nur bei sehr großen Durchbiegungen wird u zu berücksichtigen sein.

4. Vergleich der nach der technischen Biegelehre ohne Berücksichtigung der Verformung und der mit Berücksichtigung der Verformung berechneten inneren Kräfte eines Biegeträgers.

Die im 2. Abschnitt ohne Berücksichtigung der Verformung ermittelten inneren Kräfte können aus den im



3. Abschnitt mit Berücksichtigung der Verformung ermittelten inneren Kräften abgeleitet werden, wie im folgenden gezeigt wird.

Bleibt die Verformung bei der Kräftebestimmung unberücksichtigt, so müssen alle Größen, die eine Verformung der Stabachse zum Ausdruck bringen, Null gesetzt werden. Es ist daher in den im 3. Abschnitt abgeleiteten Gleichungen

$$u = 0 \text{ und } \varphi = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

zu setzen. Weiters muß die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Stabachse verschwinden. Nun ist aber $dl = \varrho\, d\varphi$ (s. Bild 4) oder $\varrho = \frac{dl}{d\varphi}$. Es muß daher

$$\frac{dl}{d\varphi} = \infty \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

gesetzt werden. Mit Gl. (17) erhält man aus Gl. (12)

$$\frac{dh}{dl} = 2 \operatorname{tg} \beta$$

und damit aus Gl. (4a, b)

$$\beta_0 = \beta_u = \beta.$$

Es folgt dann aus Gl. (6a, b) und (18)

$$S_0 = -S_u = \frac{M}{h} \frac{1}{\cos\beta}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (1), aus Gl. (6c)

$$\bar{\mathfrak{Q}} = Q - \frac{2M}{h} \operatorname{tg}\beta$$

und aus Gl. (8a, b)

$$t_0 = t_u = \frac{Q}{h} - \frac{2M}{h^2} \operatorname{tg}\beta$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2). Aus Gl. (9a, b) ergibt sich $p_0 = p_u = 0$. Es ist also der im 2. Abschnitt behandelte Biegeträger ein Sonderfall des im 3. Abschnitt untersuchten Trägers.

Nun ist u, φ und $\frac{1}{\varrho}$ nicht Null, sondern ein von Null verschiedener, aber meist kleiner Wert. Daher erfahren die nach dem 2. Abschnitt ohne Berücksichtigung der Verformung ermittelten Werte Änderungen, die auch klein sein werden. Eine Ausnahme hiervon machen p_0 und p_u, da diese bei der Berechnung ohne Berücksichtigung der Verformung überhaupt nicht auftreten. Sie sollen daher im folgenden Abschnitt genauer untersucht werden.

5. Die radialen Zusatzkräfte p_0 und p_u.

Nach Bild 5 verdrehen sich die Gurte zweier benachbarter Querschnitte gegeneinander, so daß die ohne Berücksichtigung der Verformung ermittelten Gurtkräfte und Schubflüsse nicht vollkommen im Gleichgewicht sind. Es bleiben Komponenten der Gurtkräfte in Richtung der Krümmungsradien der Gurte, die mit p_0 bzw. p_u bezeichnet wurden und die daher als radiale Zusatzkräfte benannt werden sollen. Es sind dies ähnliche Kräfte, wie sie bei Trägern mit von vornherein gekrümmter Stabachse, z. B. Rahmenecken, festgestellt wurden[1]). Die zusätzlichen radialen Kräfte p_0 und p_u treten an sich bei jedem Biegeträger mit ursprünglich gerader Achse auf. Ihre Größe ist von der Größe der Gurtkräfte und der Verdrehungen der Stabachse abhängig. Sie werden daher bei Trägern mit geringer Bauhöhe, wie z. B. Holmen bei weitgespannten Flugzeugen, von Bedeutung sein. Es soll nun ein einfaches Rechenverfahren angegeben werden, das es dem Konstrukteur ermöglicht, die radialen Zusatzkräfte angenähert zu ermitteln, um sie bei der Bemessung von Biegeträgern berücksichtigen zu können.

Führt man in Gl. (9a, b) die Gl. (16) für $\frac{dl}{d\varphi}$ ein, so erhält man

[1]) Kayser und Herzog, Versuche zur Klärung des Spannungsverlaufs in Rahmenecken, Stahlbau 1939 (12), S. 9 und die dort angegebenen Schrifttumshinweise. Die Wirkung ähnlicher Kräfte wurde auch bei Biegeversuchen beobachtet, die A. B. Miller in seiner Arbeit: Über die mittragende Breite, Luftfahrtforschung 1929 (4), S. 22, beschrieben hat.

$$p_0 = -\frac{S_0 \cos\beta_0}{\frac{h}{2}\left(\frac{hEF}{M-uQ}\cos\beta' + 1\right)} = -\frac{\frac{M-uQ}{h} + \frac{Q}{2}\sin\varphi}{\frac{h}{2}\left(\frac{hEF}{M-uQ}\cos\beta' + 1\right)} \quad \ldots \quad (19\text{a})$$

$$p_u = -\frac{S_u \cos\beta_u}{\frac{h}{2}\left(\frac{hEF}{M-uQ}\cos\beta' - 1\right)} = -\frac{\frac{M-uQ}{h} - \frac{Q}{2}\sin\varphi}{\frac{h}{2}\left(\frac{hEF}{M-uQ}\cos\beta' - 1\right)} \quad \ldots \quad (19\text{b})$$

wobei $\cos\beta'$ durch Gl. (14) gegeben ist. Setzt man, da u und φ meist klein sind, in Gl. (19a, b) $u = 0$ und $\varphi = 0$ und beachtet man, daß

$$\frac{hEF}{M-uQ}\cos\beta' \gg 1$$

ist, so erhält man die einfache Formel

$$\underline{p = p_0 = p_u \cong -\frac{2M^2}{h^3 EF \cos\beta}} \quad \ldots \quad (20\text{a})$$

oder nach Berücksichtigung von Gl. (1)

$$\underline{p \cong -\frac{2S^2}{hEF}\cos\beta} \quad \ldots \ldots \quad (20\text{b})$$

Sind die beiden Gurte des Biegeträgers parallel zur Trägerachse ($\beta = 0$), so wird

$$\underline{p \cong -\frac{2M^2}{h^3 EF} = -\frac{2S^2}{hEF}} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Die radialen Zusatzkräfte sind immer Druckkräfte, wie an dem negativen Vorzeichen der Gl. (19—21) und aus Bild 5 zu erkennen ist.

Die Gl. (20) und (21) kann man auch unmittelbar aus Gl. (1) ableiten, dadurch daß man die gegenseitige Verdrehung zweier benachbarter Gurtteile berücksichtigt und die Gleichgewichtsbedingungen anschreibt.

Vergleicht man die radialen Zusatzkräfte von zwei Trägern mit denselben Systemabmessungen h und β und mit denselben Gurtkräften S, deren Gurte aus zwei verschiedenen Werkstoffen bestehen, die gekennzeichnet seien durch die Elastizitätsmodule E_1, E_2 und durch die Bruchfestigkeit $\sigma_{B,1}$, $\sigma_{B,2}$, so ergibt sich aus Gl. (20b)

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{2S^2}{hE_1F_1}\cos\beta \\ p_2 &= -\frac{2S^2}{hE_2F_2}\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Nimmt man an, daß die Gurtspannungen σ_1, σ_2 bei beiden Trägern denselben Bruchteil $\frac{1}{\nu}$ von der zugehörigen Bruchfestigkeit beträgt und im elastischen Bereich liegen, so kann man für

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{S}{\sigma_1} = \frac{\nu S}{\sigma_{B,1}} \\ F_2 &= \frac{S}{\sigma_2} = \frac{\nu S}{\sigma_{B,2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

schreiben. Wird Gl. (23) in (22) eingesetzt, so erhält man

$$p_1 = -\frac{2S}{\nu h}\frac{\sigma_{B,1}}{E_1}\cos\beta$$

$$p_2 = -\frac{2S}{\nu h}\frac{\sigma_{B,2}}{E_2}\cos\beta$$

woraus das gesuchte Verhältnis $\frac{p_1}{p_2}$ der radialen Zusatzkräfte folgt:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sigma_{B,1}}{\sigma_{B,2}}\frac{E_2}{E_1}.$$

Wird $E_1 = 700$ t/cm² und $E_2 = 2100$ t/cm² entsprechend den Elastizitätsmodulen von Dural und Stahl gesetzt, so wird

$$\frac{p_1}{p_2} = 3\,\frac{\sigma_{B,1}}{\sigma_{B,2}},$$

woraus folgt, daß, wenn das Verhältnis $\frac{\sigma_{B,1}}{\sigma_{B,2}}$ der Bruchfestigkeit $\sigma_{B,1}$ des Durals zu der Bruchfestigkeit $\sigma_{B,2}$ des Stahls größer als $^1/_3$ ist, die radialen Zusatzkräfte p_1 beim Duralgurt größer sind als die radialen Zusatzkräfte p_2 des Stahlgurtes und wenn das Verhältnis $\frac{\sigma_{B,1}}{\sigma_{B,2}}$ kleiner als $^1/_3$ ist, die radialen Zusatzkräfte beim Stahlgurt größer sind als beim Duralgurt. Ist das Verhältnis von $\frac{\sigma_{B,1}}{\sigma_{B,2}}$ gleich $^1/_3$, so sind die radialen Zusatzkräfte beim Stahl- und Duralgurt gleich. Da $\sigma_{B,1} \cong 40$ kg/mm² ist, muß $\sigma_{B,2} > 120$ kg/mm² sein, damit die Zusatzspannungen beim Stahlgurt gleich oder größer als beim Duralgurt werden. Diese Bruchfestigkeiten werden von den Stählen gerade erreicht und zum Teil auch überschritten. Es werden daher im elastischen Bereich die Duralgurte größere Zusatzkräfte ergeben, wenn die Vergleichsstahlgurte Bruchfestigkeiten haben, die unter 120 kg/mm² sind und kleiner, wenn der Vergleichsstahlgurt Bruchfestigkeiten über 120 kg/mm² hat.

6. Zahlenbeispiel.

Der Querschnitt eines Holmes habe folgende Abmessungen:

Systemhöhe $h = 40$ cm
Gurtfläche $F = 10$ cm²

Die Gurte bestehen aus Stahl mit dem Elastizitätsmodul $E = 2100$ t/cm². Die Gurtneigung betrage $\beta = 1^0$ ($\operatorname{tg} \beta = 0{,}01746$). Auf den Querschnitt wirke das Biegemoment $M = 4000$ tcm und die Querkraft $Q = 10$ t. Die Neigung der elastischen Linie zur ursprünglichen Stabachse sei mit Hilfe der Mohrschen Sätze mit $\varphi = 4^0$ ermittelt worden. Die Verschiebung in Richtung der Trägerachse sei klein, so daß $u = 0$ gesetzt werden kann.

Zuerst werden die Hilfsgrößen $\frac{dh}{dl}$ und $\frac{dl}{d\varphi}$ bestimmt.
Aus Gl. (12) ergibt sich

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dh}{dl} = 0{,}01746$$

und aus Gl. (16)

$$\frac{dl}{d\varphi} = 4199{,}4 \text{ cm}.$$

Diese Werte in Gl. (4a) und (4b) eingesetzt liefern für

$$\operatorname{tg} \beta_0 = 0{,}01738; \quad \beta_0 = 0^0\ 59{,}7'$$
$$\operatorname{tg} \beta_u = 0{,}01754; \quad \beta_u = 1^0\ 0{,}3'$$

Damit lassen sich die inneren Kräfte ermitteln, die in Zahlentafel 1 zusammengestellt sind.

Die radialen Zusatzkräfte p_0 und p_u sind in Zahlentafel 1 sowohl nach den Gl. (9a, b) als auch nach der Näherungsgleichung (20) errechnet worden. Der Unterschied ist klein, er beträgt nur 0,13%. Die absolute Größe der radialen Zusatzkräfte ist 14,6% des gleichzeitig auftretenden Schubflusses. Hätte man an Stelle des Stahlgurtes einen Duralgurt mit dem Elastizitätsmodul $E_D = 700$ t/cm² und der Gurtfläche $F = 25$ cm² angenommen, so ergäbe sich nach Gl. (20) für die radialen Zusatzkräfte $p = 28{,}58$ kg/cm; dieser Wert ist größer als beim Stahlgurt. Dadurch erhöht sich das Verhältnis von p/t auf 17,7%. In Zahlentafel 1 sind auch die ohne Berücksichtigung der Verformung nach dem 2. Abschnitt ermittelten inneren Kräfte eingetragen. Vergleicht man die Werte, so sieht man, daß der Unterschied außerordentlich gering ist, übersteigt er doch nicht 2%. Nur bei den radialen Zusatzkräften ist der Fehler groß, da diese ohne Berücksichtigung der Verformung überhaupt nicht auftreten.

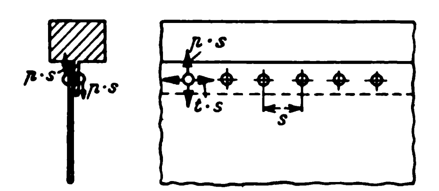


Bild 7. Biegeträger mit Halsnieten.

Nimmt man eine Entfernung der senkrecht zur Stabachse stehenden Stegblech-Aussteifungen von 40 cm an, so ergibt sich aus den radialen Zusatzkräften eine zusätzliche Druckkraft in den Aussteifungen von $P = 23{,}81 \cdot 40 = 950$ kg beim Stahlgurt und $P = 28{,}6 \cdot 40 = 1150$ kg beim Duralgurt, das sind 14,6% bzw. 17,7% der gleichzeitig wirkenden Querkraft $\bar{\mathfrak{Q}} = 6{,}50$ t.

Man kann also, wie das Beispiel zeigt, die inneren Kräfte mit Ausnahme der radialen Zusatzkräfte ohne wesentlichen Fehler nach den üblichen Regeln der technischen Biegelehre mit den einfachen Gleichungen des 2. Abschnittes bestimmen. Die radialen Zusatzkräfte, die eine beachtliche Größe erreichen können, dürfen dagegen nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Ihre Bestimmung mit Hilfe der Gl. (20) bringt Ergebnisse, die für den praktischen Gebrauch als genügend genau zu bezeichnen sind.

7. Die Berücksichtigung der radialen Zusatzkräfte beim Entwurf von Biegeträgern.

Die radialen Zusatzkräfte können, wie das Zahlenbeispiel des 6. Abschnittes zeigte, recht groß werden. Sie sind daher bei dem Entwurf eines Biegeträgers zu beachten. Ihr Einfluß erstreckt sich auf die folgenden Teile des Biegeträgers:

a) Stegblech samt Aussteifungen,
b) Verbindungsmittel zwischen Stegblech und Gurt,
c) Gurt.

a) Wirkung auf das Stegblech und dessen Aussteifungen.

Sind die radialen Zusatzkräfte so klein, daß sie zusammen mit dem gleichzeitig wirkenden Schubfluß Spannungen ergeben, die nicht über der kritischen Beulspannung des Stegbleches liegen, so werden sie von diesem aufgenommen. Es ist dann zu überprüfen, ob die reduzierte Hauptnormalspannung nicht über der zulässigen Spannung liegt. Ergeben sich hingegen die aus den Zusatzkräften und dem Schubfluß ermittelten Spannungen größer als die Beulspannung des Stegbleches, so muß der über der Beulspannung des Stegbleches liegende Spannungsanteil von den senkrecht zur Holmenachse verlaufenden und auf dem Stegblech aufgesetzten Aussteifungen aufgenommen werden. Diese Stegblechaussteifungen sind daher außer auf die aus der üblichen Berechnung sich ergebenden Kräfte, z. B.

Zahlentafel 1.

Kraft	S_o		S_u		$\bar{\mathfrak{Q}}$		t_o		t_u		p_o		p_u	
	Gl.	Tonnen	Gl.	Tonnen	Gl.	Tonnen	Gl.	kg/cm	Gl.	kg/cm	Gl.	kg/cm	Gl.	kg/cm
Mit Berücksichtigung der Verformung	(6 a)	+ 100,364	(6 b)	— 99,666	(6 c)	6,484	(8 a)	160,1	(8 b)	164,1	(9 a) (20)	— 23,78 — 23,81	(9 b) (20)	— 23,84 — 23,81
Ohne Berücksichtigung der Verformung	(1)	+ 100,015	(1)	— 100,015	(2 a)	6,508	(2 b)	162,7	(2 b)	162,7	—	0	—	0
Fehler in % . . .	—	+ 0,35	—	+ 0,35	—	— 0,37	—	— 1,60	—	+ 0,86	—	—	—	—

Druckkräfte aus dem Zugfeld des Steges, auch noch für die radialen Zusatzkräfte auf Druck zu bemessen.

Bestehen die Stegblechaussteifungen aus in das Stegblech eingepreßten Sicken, so wird es sich empfehlen, die Spannungen aus radialen Zusatzkräften und Schubfluß so niedrig zu halten, daß die Beulspannung der zwischen den Sicken liegenden Stegblechfelder nicht wesentlich überschritten wird, um ein Aufziehen und Ausknicken der Sicken zu verhindern.

b) Wirkung auf die Verbindungsmittel zwischen Stegblech und Gurt.

Die Verbindungsmittel zwischen Stegblech und Gurt werden bei der üblichen Berechnung nach den am Stegrand wirkenden Schubfluß bemessen. Tatsächlich haben sie aber auch noch die radialen Zusatzkräfte aufzunehmen, Bild 7, die eine meist geringe Mehrbeanspruchung mit sich bringen.

c) Wirkung auf die Gurte.

Liegt der Schwerpunkt der Gurte in der Stegebene, dann sind die radialen Zusatzkräfte für die Gurte ohne wesentliche Bedeutung. Fällt die Stegebene mit der durch die Schwerpunkte der Gurte bestimmten Ebene nicht zusammen, so sind die radialen Zusatzkräfte zu berücksichtigen. Durch den außermittigen Anschluß der Gurte treten Torsionsmomente in den Gurten auf, Bild 8, die im Ober- und Untergurt gleich groß und entgegengesetzt drehend wirken, vorausgesetzt, daß die Exzentrizität am Ober- und Untergurt gleich ist. Ist dies nicht der Fall, so treten horizontale Kräfte auf, die den Träger um die lotrechte Schwerachse biegen, wenn nicht andere Konstruktionsteile vorhanden sind, z. B. horizontale Träger oder Beplankungsbleche, die diese Kräfte aufnehmen.

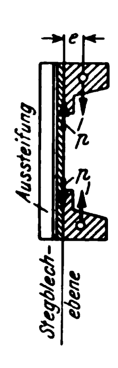


Bild 8. Querschnitt eines Biegeträgers mit außermittig an das Stegblech angeschlossenen Gurten.

Die entgegengesetzt drehenden Momente am Ober- und Untergurt gleichen sich am besten dann aus, wenn im Steg biegefeste Aussteifungen vorgesehen werden, die an die Gurte entsprechend angeschlossen sind. Zwischen den Stegblechaussteifungen werden die Gurte auf Verdrehen beansprucht.

8. Zusammenfassung.

Prüft man bei einem stabförmigen Biegeträger, der aus zwei starken Gurten und einem dünnen Stegblech besteht und ursprünglich eine gerade Stabachse hat, den Einfluß der Verformung der Stabachse auf die inneren Kräfte, so ergibt sich, daß die nach den üblichen Methoden bestimmten Gurtkräfte und Schubflüsse keiner wesentlichen Korrektur bedürfen. Zu diesen Kräften kommen noch radial wirkende als radiale Zusatzkräfte bezeichnete Kräfte, die sich bei der üblichen Rechnung nicht ergeben. Sie entstehen dadurch, daß die Gurte im belasteten Zustand gekrümmt sind und daher die Gurtkräfte zweier benachbarter Querschnitte nicht mehr im Gleichgewicht sind, so daß eine Komponente in Richtung der Krümmungsradien übrig bleibt; ähnliche Kräfte treten auch bei Trägern mit ursprünglich gekrümmter Achse auf. Für diese radialen Zusatzkräfte läßt sich eine Näherungsformel Gl. (20) ableiten, die es ermöglicht, in einfacher Weise ihre Größe zu bestimmen. An einem Zahlenbeispiel wird gezeigt, daß die radialen Zusatzkräfte einen beachtlichen Wert annehmen können und dann, insbesondere bei der Bemessung des Stegbleches und dessen Aussteifungen, zu berücksichtigen sind.

Messung von Richtung, Geschwindigkeit und Druck in einer dreidimensionalen Strömung*).

Von G. Jegorow.

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen.

Im folgenden wird ein auf dem Prinzip der Druckmessung beruhendes Verfahren zur Vermessung räumlicher Strömung mit unzugänglich angeordneter Kugelsonde angegeben. Die Bestimmung der gesuchten Größen erfolgt mit Hilfe der Konstanten, die sich durch Eichung auf Grund der abgeleiteten Beziehungen zwischen den von der Kugelsonde angezeigten Drücken und den zu bestimmenden Größen ergeben.

Gliederung.

I. Aufgabe.

Auf den verschiedensten Gebieten der Technik besteht der Bedarf nach einem exakten Verfahren zur Ausmessung einer dreidimensionalen Strömung. Die Messung in einer räumlichen Strömung besteht im wesentlichen in der Ermittlung:

1. der Strömungsrichtung,
2. der Geschwindigkeit (Staudruck) und
3. des statischen Druckes.

Die normalen Staugeräte erfüllen diese Aufgabe entweder überhaupt nicht oder sehr unvollkommen. Das bis jetzt auf dem Gebiete der räumlichen Strömungsmessung als das vollkommenste bekannte Meßgerät ist die Staukugel nach Dr. van der Hegge-Zijnen [1], die in ihrem Aufbau im wesentlichen die von Taylor [2] für die Bestimmung der Strömungsrichtung im Raum benutzte Kugel darstellt.

Das Meßverfahren nach van der Hegge-Zijnen besteht darin, daß die Kugel durch eine Drehung mit ihren Druckentnahmestellen in eine Lage gebracht wird, in der die Messung wie eine solche in der zweidimensionalen Strömung[1]) durchgeführt wird. Das Verfahren ist einfach und exakt, hat jedoch den Nachteil der begrenzten Verwendungsmöglichkeit, da die Messung nur dann möglich ist, wenn der Geber für die Drehung zugänglich angeordnet werden kann. Diese Forderung ist in vielen Fällen und besonders bei Flugversuchen kaum zu erfüllen.

Das im weiteren beschriebene Verfahren für die Messungen in einer dreidimensionalen Strömung mit der Kugelsonde erfüllt diese Forderung.

II. Beschreibung der Kugelsonde und des Meßverfahrens.

Der Geber besteht aus einer Kugel *a* mit fünf Bohrungen, die auf zwei zueinander senkrechten Meridianen angeordnet sind, dem Schaft zur Halterung der Kugelsonde *b* und den fünf Druckanschlüssen *c* zur Verbindung der Drucköffnungen der Kugel mit dem Anzeigegerät, Bild 1.



*) C 3.

[1]) Die Ausmessung der zweidimensionalen Strömung wird mit Zylindersonden durchgeführt.

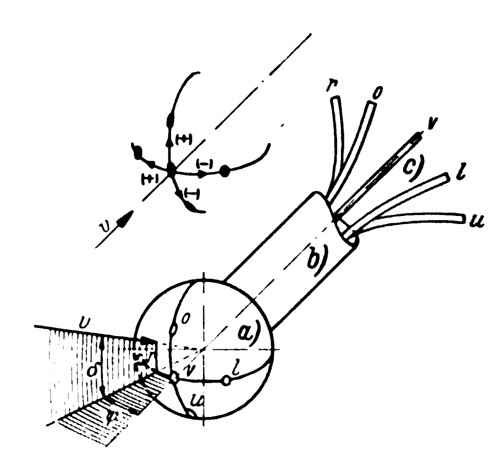


Bild 1. Kugelsonde zur Messung der Richtung, Geschwindigkeit und Druck in räumlicher Strömung.
a Kugel, *b* Schaft, *c* Druckanschluß.

Beim Messen wird die Schaftachse und die Meridianebene *o v u* nach einem zweckmäßig gewählten Bezugssystem eingestellt und verbleibt während der Dauer der Messung fest in dieser Lage. Die Festlegung der Winkel zur Ermittlung der Strömungsrichtung wird in Anlehnung an das Erdglobusnetz getroffen. Mit ψ werden die Längenwinkel und mit δ die Breitenwinkel bezeichnet, wobei die ψ- bzw. δ-Winkel, die eine von rechts bzw. von oben auf die Kugel zu gerichtete Strömungsrichtung ergeben, als positiv angenommen werden.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_v}{q} &= \frac{h_v}{h_q} = k_v \\ \frac{p_o}{q} &= \frac{h_o}{h_q} = k_o \\ \frac{p_u}{q} &= \frac{h_u}{h_q} = k_u \text{ usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1, 2, 3, 4, 5)$$

worin p die Drücke bei der jeweiligen Druckbohrung, q der Staudruck der Strömung, $h_{v,\,o,\,u,\,r,\,l}$ mit h_q die entsprechenden Ausschläge an den mit Meßbohrungen verbundenen Manometern und k_v, k_o usw. die Koeffizienten der einzelnen Bohrungen bedeuten.

Der bei Umströmung der Kugel am Ort der jeweiligen Meßbohrung auftretende Druck ist eine Funktion der Anströmungsrichtung und damit auch die Funktion der beiden Winkel:

$$K_{v,\,o,\,u,\,r,\,l} = f(\psi;\delta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Aus dieser Abhängigkeit ist es möglich, durch Aufstellung zweckmäßig gewählter Beziehungen beide Winkel ψ und δ und damit also die Anströmrichtung eindeutig zu bestimmen. Darüber hinaus ist es noch möglich, den Staudruck der Strömung q und den statischen Druck p_{st} am Ort der Kugelsonde zu ermitteln.



Dabei muß natürlich angenommen werden, daß die Bohrungskoeffizienten und damit auch sämtliche daraus abgeleiteten Größen von der Größe der Anströmgeschwindigkeit unabhängig sind. Sie müssen also unabhängig von der Kennzahl sein.

Die zur Ermittlung der Anströmrichtung erforderlichen Beziehungen werden wie folgt abgeleitet.

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich für den Breitenwinkel δ bei $\psi =$ konst., Bild 1:

$$\frac{p_v}{q} - \frac{p_0}{q} = \frac{h_v}{h_q} - \frac{h_0}{h_q} = k_v - k_0 = f(\delta) \quad . . . (7)$$

$$\frac{p_v}{q} - \frac{p_u}{q} = \frac{h_v}{h_q} - \frac{h_u}{h_q} = k_v - k_u = f(\delta) \quad . . . (8)$$

Dividieren wir (7) durch (8), so bekommen wir:

$$\frac{p_v - p_0}{p_v - p_u} = \frac{h_v - h_0}{h_v - h_u} = \frac{k_v - k_0}{k_v - k_u} = K_\delta = f(\delta) \quad . . (9)$$

eine neue Größe, den Breitenwinkelkoeffizienten K_δ, der bei $\psi =$ konst. nur die Funktion des δ-Winkels ist.

Für einen beliebigen Punkt der Kugelsonde ($\psi \neq$ konst.) wird dann der Breitenwinkelkoeffizient:

$$K_\delta = \frac{h_v - h_0}{h_v - h_u} = f(\delta; \psi) \quad . . . . . . (10)$$

und analog für den Längenwinkelkoeffizienten zur Bestimmung des Winkels ψ:

$$K_\psi = \frac{h_v - h_r}{h_v - h_l} = f(\psi; \delta) \quad . . . . . . (11)$$

In einem bestimmten Winkelmeßbereich, der von der Anordnung der vier Bohrungen um die Vordere abhängig ist, sind diese Winkelkoeffizienten absolut eindeutige Funktionen der beiden Winkel ψ und δ, und zwar sowohl der Größe nach als auch nach dem Vorzeichen.

Zur Ermittlung des Staudruckes können wir aus den Beziehungen in der Form der Gleichungen (7) und (8) folgende vier Staudruckkoeffizienten ableiten:

$$\Delta k_{v0} = \frac{h_v - h_0}{h_q} = f(\delta; \psi) \quad . . . . . (12)$$

$$\Delta k_{vu} = \frac{h_v - h_u}{h_q} = f(\delta; \psi) \quad . . . . . (13)$$

$$\Delta k_{vr} = \frac{h_v - h_r}{h_q} = f(\psi; \delta) \quad . . . . . (14)$$

$$\Delta k_{vl} = \frac{h_v - h_l}{h_q} = f(\psi; \delta) \quad . . . . . (15)$$

die ebenfalls eindeutige Funktionen des Breiten- und Längenwinkels sind.

Für die Bestimmung des statischen Druckes in der Strömung am Ort der Kugelsonde wird ein Koeffizient des statischen Druckes abgeleitet, der für alle fünf Bohrungen der Kugel gebildet werden kann. Dieser Koeffizient ist:

$$\left.\begin{aligned} k_{st_r} &= \frac{p_v - p_{st}}{q} = \frac{h_v - h_{st}}{h_q} = f(\delta; \psi) \\ k_{st_0} &= \frac{p_0 - p_{st}}{q} = \frac{h_0 - h_{st}}{h_q} = f(\delta; \psi) \text{ usw.} \end{aligned}\right\} (16, 17, 18, 19, 20)$$

Aus dem Angeführten folgt, daß es möglich ist, unter Benutzung entsprechender Konstanten und der an Meßbohrungen der Kugelsonde entnommenen Drücke die Beziehungen abzuleiten, die die Abhängigkeit dieser Konstanten von der Strömungsrichtung wiedergeben. In Bild 2 ist die Abhängigkeit der Winkelkoeffizienten K_δ und K_ψ vom Breitenwinkel δ und Längenwinkel ψ wiedergegeben. Die Kurven gelten für eine Sonde mit dem Kugeldurchmesser von 15 mm und einem Winkel für seitliche Anbohrungen von 45° von der vorderen Drucköffnung aus gemessen. In Bild 3 sind Staudruckkoeffizienten für die Vertikalebene Δk_{v0} als Funktion von δ und ψ für dieselbe Sonde dargestellt. Und schließlich wurde im Bild 4 der Koeffizient für den statischen Druck k_{stv} für die vordere Meßbohrung ebenfalls als Funktion der beiden die Strömungsrichtung bestimmenden Winkel aufgetragen. Sämtliche Koeffizienten sind als Parameter dargestellt. Die Zwischenwerte sind durch Interpolation zu bestimmen.

III. Eichung der Kugelsonde.

Die praktische Anwendung der Kugelsonde nach dem beschriebenen Meßverfahren bedingt eine hinreichend genaue Aufstellung der Koeffizienten für die Kugelsonde. Die Kenntnis der nach Potentialtheorie gerechneten oder sogar gemessenen Druckverteilung bei Umströmung einer Kugel

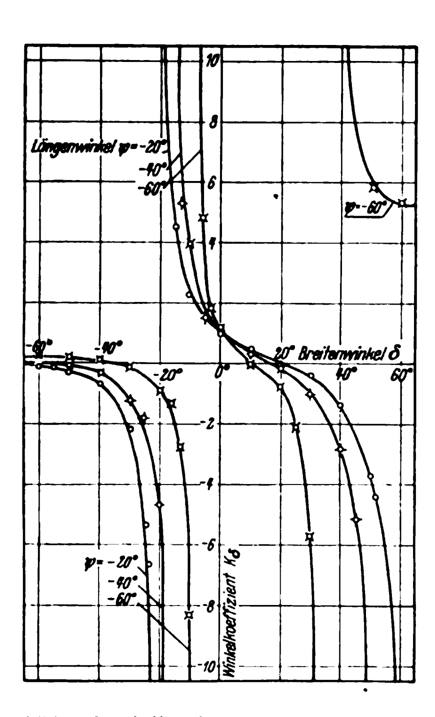


Bild 2. Winkelkoeffizienten K_δ und K_ψ in Abhängigkeit von der Anströmrichtung der Kugelsonde.

$$K_\delta = \frac{h_v - h_0}{h_v - h_u}; \qquad K_\psi = \frac{h_v - h_r}{h_v - h_l}.$$

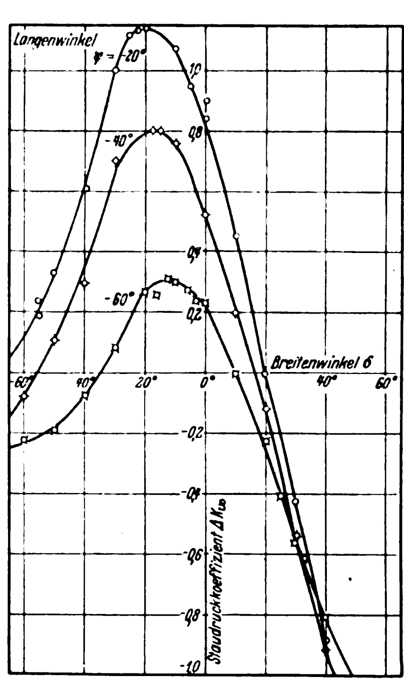


Bild 3. Staudruckkoeffizient Δk_{v0} in Abhängigkeit von der Anströmrichtung der Kugelsonde.

$$\Delta k_{v0} = \frac{h_v - h_0}{h_q}$$

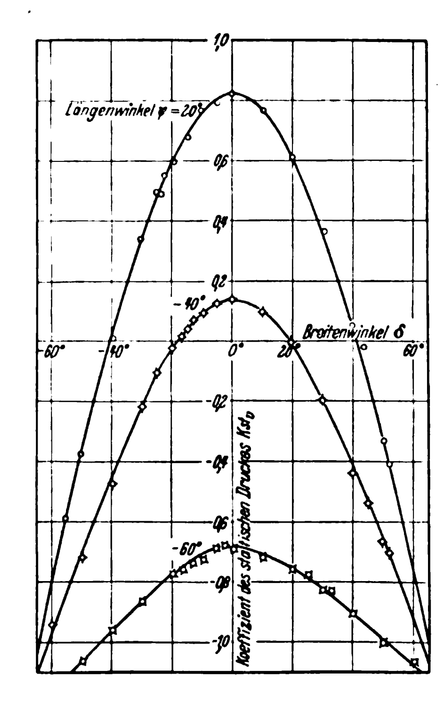


Bild 4. Koeffizient für statischen Druck k_{stv} für die vordere Meßbohrung der Kugelsonde.

$$k_{st_v} = \frac{h_v - P_{st}}{h_q}$$

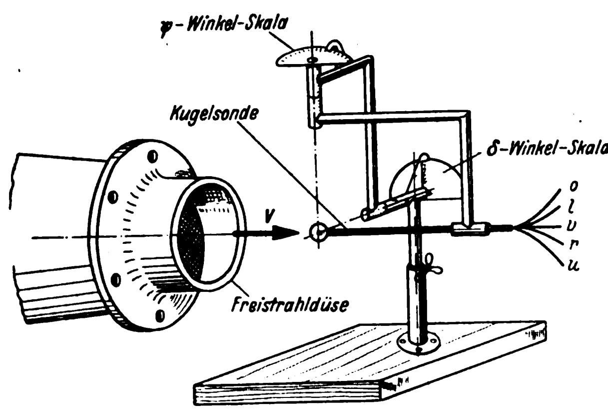


Bild 5. Vorrichtung zum Eichen von Kugelsonden.

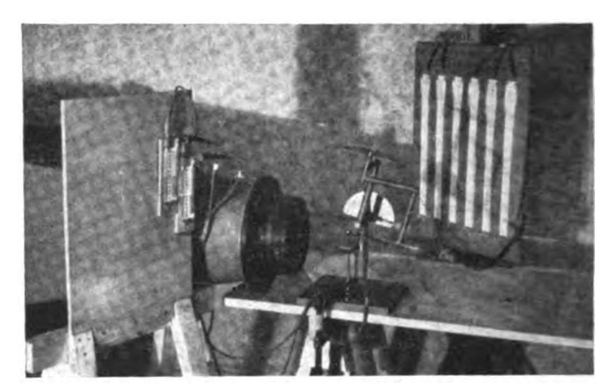


Bild 6. Versuchsanordnung bei der Durchführung der Mustersonden-Eichung.

gibt uns zwar die Möglichkeit, die Tendenz dieser Beiwerte in Abhängigkeit von den Winkeln δ und ψ darzustellen, für die Verwendung der Kugel im Meßbereich muß jedoch unbedingt eine Eichung der Kugelsonde durchgeführt werden. Denn nur bei einer Eichung kann der Einfluß des Schaftes der Kugelsonde und die unvermeidlichen Ungenauigkeiten in der Herstellung der Kugel und der Anordnung der Meßbohrungen berücksichtigt werden.

Die an der ersten Mustersonde[2]) durchgeführte Eichung erfolgte im Freistrahl einer am Radialgebläse angeschlossenen Düse von 180 mm Dmr. Um im Meßquerschnitt eine geordnete Strömung zu bekommen, wurde der Düse ein Wabengleichrichter vorgeschaltet. Die Luftgeschwindigkeit im Strahl betrug im Mittel 26,6 m/s. Das entspricht einer Reynoldsschen Zahl von

$$R_e \approx 2{,}57 \cdot 10^4.$$

Die Eichung lag also in einem Kennzahlbereich, in dem die Konstanz der ermittelten Koeffizienten als gewährleistet erscheint [3], [4].

Für die Veränderung der Anblasrichtung wurde die Kugelsonde in eine Eichvorrichtung[3]) eingespannt, die eine genaue Einstellung der Breiten- und Längenwinkel δ und ψ gewährleistet (Bild 5). Das charakteristische Merkmal der Vorrichtung bestand darin, daß die beim Eichen in den Strahl eingebrachte Kugelsonde den Mittelpunkt der Kugel im Raume beibehielt und die verschiedenen räumlichen Winkel durch Verstellung der kreuzgelenkartig ausgebildeten Halterung eingestellt wurden.

Die bei der Eichung gemessenen Größen waren:

1. die an fünf Meßbohrungen auftretenden Drücke, angezeigt durch die Flüssigkeitssäulen der fünf U-Rohrmanometer:
$$h_v, h_o, h_u, h_r \text{ und } h_l,$$
2. der im Strahl herrschende Staudruck q, angezeigt durch den Ausschlag gleicher Flüssigkeit h_q und
3. der statische Druck im Strahl p_{st} h_{st}.

Die Messung der beiden letzten Größen erfolgte mit Hilfe eines Staurohres nach Prandtl, das an der Eichvorrichtung befestigt war. Die gesamte Versuchsanordnung zeigt Bild 6.

Die Eichung der Mustersonde wurde durchgeführt bei verschiedenen Längenwinkeln ψ und veränderlichen Breitenwinkeln δ. Die ausgewerteten Punkte für die gesuchten Koeffizienten wurden über Winkel δ bei ψ als Parameter aufgetragen, mit Ausnahme vom Winkelkoeffizienten K_ψ, der über ψ bei δ = konst. aufgetragen wurde. In Bild 7 bis 9 ist nur ein Teil der aufgetragenen Kurven wiedergegeben, um den Verlauf der Kurven und die erzielbare

[2]) Durchmesser $D = 15$ mm, Bohrungswinkel $\sphericalangle = 45°$.

[3]) Die konstruktive Gestaltung der Eichvorrichtung wurde von Herrn E. Schaefer, WT-Versuchsgruppe, der Bau in der feinmechanischen Werkstatt, Gruppe Meßtechnik (Mustererprobung), durchgeführt.

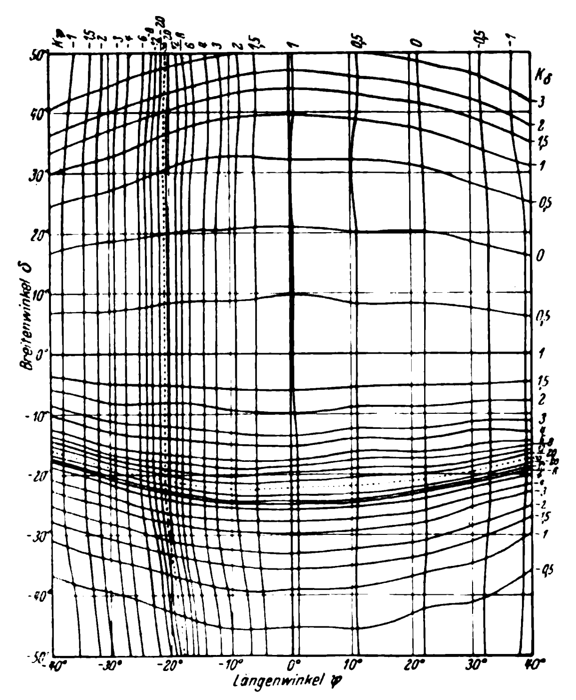


Bild 7. Eichkurven für den Winkelkoeffizienten K_δ in Abhängigkeit von der Anströmrichtung der Kugelsonde.

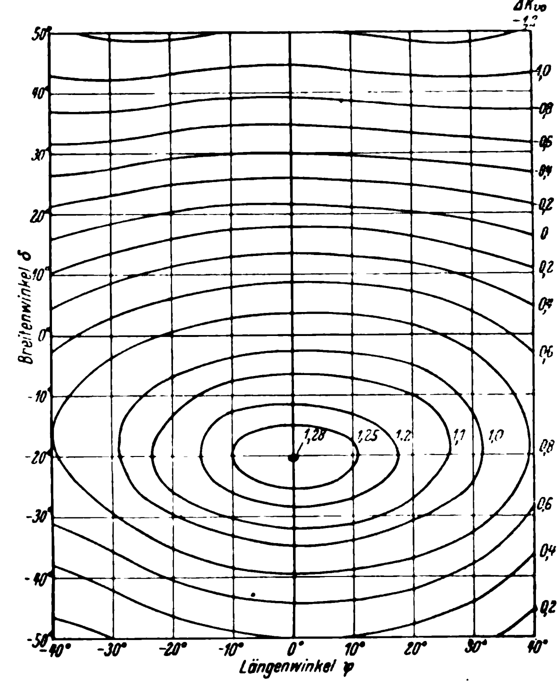


Bild 8. Eichkurven für den Staudruckkoeffizienten Δk_{vo} in Abhängigkeit von der Anströmrichtung der Kugelsonde.

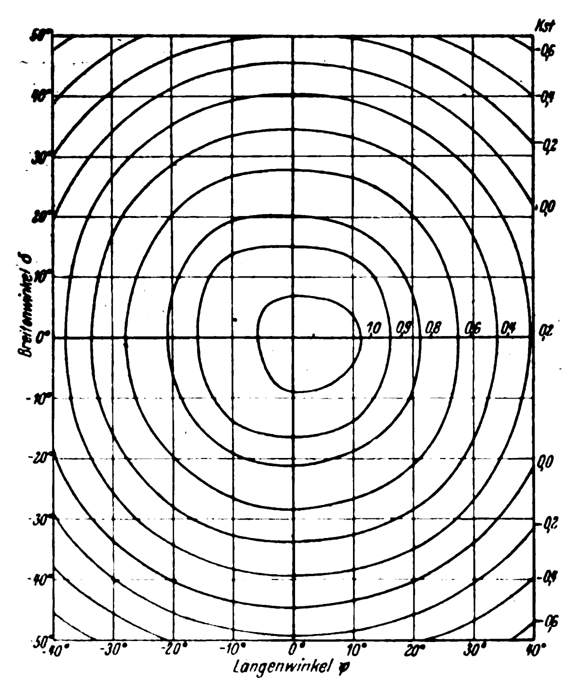


Bild 9. Eichkurven für den Koeffizienten des statischen Druckes k_{st}, in Abhängigkeit von der Anströmrichtung der Kugelsonde.

Genauigkeit der Eichmessung durch die Auftragung der einzelnen Meßpunkte zu veranschaulichen.

Die auf diese Weise ermittelte Abhängigkeit der einzelnen Koeffizienten von den Winkeln δ und ψ erlaubt dann die endgültige Auftragung der Eichkurven im δ-ψ-Diagramm mit den als Parameter aufgetragenen Koeffizienten (Bild 2, 3 und 4).

IV. Messung mit der Kugelsonde.

Die Messung mit der Kugelsonde beruht also auf der Messung der Drücke an den Meßbohrungen der Kugel, die durch Druckleitungen mit den Druckanzeigegeräten verbunden werden. Bei Verwendung der U-Rohrmanometer ist eine Differenzdruckschaltung einer Einzeldruckschaltung vorzuziehen, Bild 10, da dadurch ein Teil der Auswertungsarbeit eingespart wird.

Durch die Quotientenbildung Gleichung (10) und (11) bekommen wir die beiden Winkelkoeffizienten K_δ und K_ψ, mit deren Hilfe die beiden Winkel δ und ψ aus Bild 2 (Eichkurvenblatt) im Winkelbereich von rd. $\pm$ 22,5° sofort eindeutig bestimmt werden. Außerhalb dieses Bereiches ist das Vorzeichen zuerst unbestimmt, ergibt sich aber dann ganz eindeutig, sobald man zur Staudruckermittlung übergeht (siehe weiter).

Sind die beiden Winkel δ und ψ bekannt, so entspricht diesen nach Bild 3 im Winkelbereich von $\pm$ 22,5° (für Sonde mit einem Bohrungswinkel $\sphericalangle = 45°$) ein bestimmter Staudruckkoeffizient Δk_{vo}. Der gesuchte Staudruck ist dann aus Gleichung (12) zu ermitteln:

$$h_q = \frac{h_v - h_0}{\Delta k_{v0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$q = \gamma_{Fl} \cdot h_q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

wobei γ_{Fl} das spezifische Gewicht der verwendeten Meßflüssigkeit bedeutet. Bei Wasser als Meßflüssigkeit wird also $h_q = q$ sein. Bei einer Anströmung der Kugel, für die $\Delta k_{vo} = 0$ ist, wird q einen unbestimmten Ausdruck ergeben. Für diesen Fall wird man ein weiteres Bild, und zwar $\Delta k_{vu} = f(\delta; \psi)$ aufstellen müssen.

Konnte der eine von den Winkeln in der vorhergehenden Winkelbestimmung nicht eindeutig bestimmt werden, d. h. es gab nach Bild 2 für einen der zu bestimmenden Winkel ψ oder δ ein positives oder negatives Vorzeichen, so wird die Frage nach dem Vorzeichen sofort gelöst, wenn man für den Winkel mit beiden Vorzeichen die zugehörigen Stau-

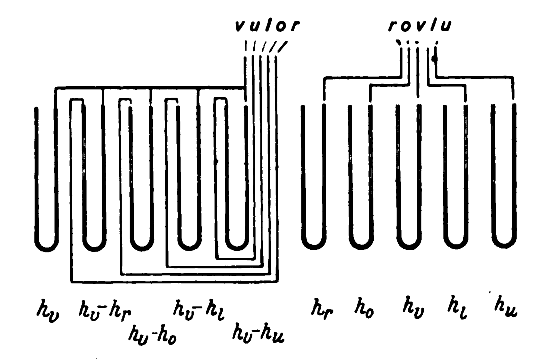


Bild 10. Manometerschaltungen für die Messungen mit der Kugelsonde.
rechts: Einzeldruckschaltung
links: Differenzdruckschaltung

druckkoeffizienten aus Bild 3 entnimmt und den Staudruck ermittelt. Für die Feststellung des Vorzeichens ist die Tatsache maßgebend, daß die Staudruckgröße stets einen positiven Wert ergeben muß.

Der statische Druck ist für die ermittelten Winkel ψ und δ bei dem aus Bild 4 entnommenen Koeffizienten für den statischen Druck k_{stv} nach Gleichung (16)

$$h_{st} = h_v - k_{st_v} \cdot h_q \quad \ldots\ldots \quad (16a)$$

d. h.

$$p_{st} = \gamma_{Fl} \cdot h_{st} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

V. Meßbereich, Meßgenauigkeit und die Anwendungsgebiete für die Kugelsonde.

Nach dem Obengesagten ergibt sich, daß das Verfahren für die Messung in einer dreidimensionalen Strömung grundsätzlich geeignet ist. Die Durchführung und Auswertung der Messung ist relativ einfach. Als Meßbereich für die Winkel kann rd. $\pm$ 50° angenommen werden. Er kann bis zu etwa $\pm$ 70° noch erweitert werden. Darüber hinaus dürfte die Messung kaum mit genügender Meßgenauigkeit möglich sein, was in der Unbeständigkeit der Druckverteilung an der Kugel begründet liegt.

Der Geschwindigkeitsmeßbereich ist in erster Linie durch die Konstanz der Koeffizienten gegeben.

Diese Konstanz ist in einem Bereich:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = 2 \cdot 10^3 \div 1{,}5 \cdot 10^5$$

gegeben [3]. Danach ergibt sich etwa folgender Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Größe der Kugel für die Messungen in der Luft bzw. im Wasser.

Kugeldurchmesser d	Luft 760 mm Q S; 15 °C	Wasser 15 °C
mm	m/s	m/s
5	~ 6 ÷ 430	~ 0,5 ÷ 34
10	~ 3 ÷ 220	~ 0,25 ÷ 17
15	~ 2 ÷ 140	~ 0,15 ÷ 12

Daraus ersieht man, daß der Meßbereich so groß ist, daß die untere Grenze sich etwa an der untersten Grenze des meßtechnisch (Anzeige) möglichen befindet, während die obere so weit liegt, daß bei Luftmessungen in absehbarer Zeit kaum eine Verwendungsmöglichkeit vorhanden sein wird. Bei der Festlegung der oberen Grenze wird gegebenenfalls eine Erweiterung der Untersuchung notwendig sein, die die Klärung des Einflusses der Machschen Zahl auf die Koeffizienten zum Gegenstand hat.

Die Meßgenauigkeit für die Strömungsrichtung ist etwa $\pm$ 0,3° und kann gegebenenfalls durch Aufstellung umfangreicherer Eichkurven noch wesentlich erhöht werden. Für die Staudruckermittlung kann eine Meßgenauigkeit bis auf $\pm$ 1% angenommen werden. Die Genauigkeit für die Bestimmung der Geschwindigkeit ergibt sich demnach bis auf $\pm$ 0,5%. Die Meßgenauigkeit für die Ermittlung des statischen Druckes liegt bei etwa $\pm$ 1%.

Als Fehlerquellen bei der Messung mit der Kugelsonde ergeben sich hauptsächlich:

1. keine punktförmige Messung, sondern eine solche von größerer Fläche,
2. Änderung der Beiwerte bei Messung in Wandnähe,
3. Möglichkeit des unterschiedlichen Turbulenzgrades in der Eich- und Versuchsanlage.

Dazu ist zu bemerken, daß bei den kleinsten baulich möglichen Abmessungen der Kugel[4]) die Messungen mit sehr starkem Geschwindigkeitsgradienten (Krümmerströmung) schon möglich sind. Die Fehler, die sich durch die Wandnähe ergeben, sind bei kleinen Abmessungen der Kugel ebenfalls sehr gering; sie können gegebenenfalls durch eine zusätzliche Eichung eliminiert werden. Was den Einfluß des Turbulenzgrades angeht, so dürfte daraus auch keine grundsätzliche Schwierigkeit erwachsen; denn die Unterschiede im Turbulenzgrad ergeben nur die Unterschiede in der effektiven Reynoldschen Zahl, und wie es schon festgestellt war, ist der Kennzahlbereich, bei dem die Koeffizienten konstant bleiben, sehr groß. Ganz allgemein kann man aber sagen, daß alle diese Fehlerquellen für jede Art von Staudruckgeräten Gültigkeit besitzen.

Die Kugelsonde kann dank ihren geringen Abmessungen auf den verschiedensten Gebieten der Technik erfolgreich verwendet werden. Als Anwendungsgebiete kommen beispielsweise Strömungsuntersuchungen im Flugzeugbau, Luftschiffbau, Schiffbau, Wasserbau und Strömungsmaschinen (Turbinen, Ventilatoren, Gebläse usw.) in Betracht.

[4]) Die kleinste jemals gebaute Staukugel hatte einen Durchmesser von 3 mm [5].

VI. Zusammenfassung.

Das entwickelte Meßverfahren stellt ein brauchbares Verfahren zur Messung der Drücke und Geschwindigkeiten in einer dreidimensionalen Strömung dar. Die Messung ist verhältnismäßig leicht durchzuführen und ergibt sehr große Meßgenauigkeit. Die Anwendungsgebiete für das Meßgerät sind sehr vielseitig.

VII. Schrifttum.

[1] Van der Hegge-Zijnen, Improved instrument for the simultaneous determination of the static pressure, the magnitude and the direction of the velocity fluids. Proc. Roy. Acad. Amsterdam, Bd. 32 (1929) Nr. 5.

[2] Winkel, Stauröhren zur Messung des Druckes und der Geschwindigkeit im fließenden Wasser. Z. VDI., Bd. 67 (1923) S. 568.

[3] Krisam, Über die Messung von Geschwindigkeit und Druck in einer dreidimensionalen Strömung. Z. Flugtechn., Bd. 23 (1932) S. 369.

[4] Wieselsberger, Über den Luftwiderstand von Kugeln. Z. Flugtechn., Bd. 5 (1914) S. 140.

[5] Strauß, Eine Kugelsonde mit kleinem Durchmesser für Druck- und Geschwindigkeitsmessung. Z. VDI., Bd. 82 (1938) S. 52.

Luftfahrt-Forschung

Band 19 | 11. Januar 1943 | Lfg. 10/12

Festigkeit, Durchhärtung und Zähigkeit der Austauschstähle*).

Von Alfred Krisch.

Mitteilung aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung.

Untersuchungen an 12 Kohlenstoff-, Mangan-, Mangan-Silizium, Chrom, Chrom-Mangan, Chrom-Vanadin und Mangan-Vanadin-Stählen über die Durchvergütung und über die erreichbare Festigkeit unter Berücksichtigung einer ausreichenden Zähigkeit.

Gliederung.

I. Werkstoffe.

Während im Ausland für hochbeanspruchte Teile noch vielfach der in früheren Jahren auch in Deutschland bestens bewährte nickellegierte Stahl verwendet wird, fand in Deutschland mit Beginn der Aufrüstung eine Umstellung auf Werkstoffe statt, die auch im Kriegsfalle zu beschaffen sein würden. Als Austausch für die hochwertigen nickellegierten Stähle ging man zunächst auf die Chrom-Molybdänstähle über; trotz anfänglicher Schwierigkeiten gelang es, die meisten in Flugzeug und Motor gebrauchten Stahlteile aus einem ganz oder fast ganz nickelfreien Stahl herzustellen.

Mit der Einführung des Chrom-Molybdänstahles war zwar der Devisenaufwand vermindert, aber nicht die gewünschte Unabhängigkeit vom Ausland erzielt worden, da Molybdän größtenteils aus Übersee bezogen werden muß. Mit Kriegsausbruch war daher eine neue Umstellung der für den Flugzeugbau erforderlichen Stähle notwendig, wobei der Nickel- und der Molybdänverbrauch zu vermindern war. Damit standen für die Legierung von hochwertigen Flugzeugstählen im wesentlichen noch Chrom und Vanadin neben Mangan und Silizium zur Verfügung.

Die Beschränkung auf diese Legierungsmetalle bedeutete für die Stahlhersteller nicht die Schaffung neuer Stähle; vielmehr lagen auch über die jetzt als Fliegwerkstoffe eingeführten Stähle bereits eine Reihe von Erfahrungen aus der Zeit vor, in der z. B. Molybdän als Stahllegierungselement noch nicht üblich war. So konnte sofort nach Kriegsausbruch vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute ein Vorschlag für diese Austauschstähle ausgearbeitet werden, der für die Aufstellung der späteren Fliegwerkstoffblätter von großem Nutzen war.

Die Anforderungen, die im Flugzeugbau an diese Stähle gestellt werden sollten, liegen aber hinsichtlich der Festigkeit weit höher, als es für andere Verwendungszwecke der Fall ist; anderseits sind die Abmessungen im Flugzeug verhältnismäßig gering. Es galt daher zunächst festzustellen, welche Grenzen für diese neuen Stähle bestehen, wobei einmal eine gute Durchhärtung, d. h. möglichst gleichmäßige Festigkeit in Rand und Kern des Teiles, und dann eine genügende Zähigkeit trotz hoher Festigkeit einzuhalten waren.

*) E 211

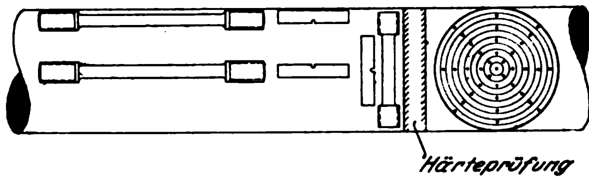


Bild 1. Probenentnahme.

Über die Arbeiten des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Eisenforschung auf diesem Gebiet soll im folgenden berichtet werden.

Im allgemeinen wurden für diese Untersuchungen von je drei Stahlwerken Stangen aus den vorgesehenen nickel- und molybdänfreien Stählen betriebsmäßig in verschiedenen Abmessungen hergestellt und vergütet; diese Stangen wurden dann vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung durch Härtemessungen, Zerreiß- und Kerbschlagproben untersucht, wobei die Probenentnahme schematisch in Bild 1 dargestellt ist. Zur Ermittlung der Durchvergütung wurden neben den üblichen Härtemessungen an der Oberfläche der Stangen solche über den Querschnitt vorgenommen, wie es rechts im Bild angedeutet ist. Die Zerreiß- und Kerbschlagversuche wurden ausgeführt an Proben, die teils aus dem Rand der Stangen, teils aus deren Kern entnommen waren. Außerdem wurden bei Stangen von 60 mm Dicke und mehr Stäbe aus der Querrichtung geprüft.

Die Untersuchung[1] [2] (Zahlentafel 1) umfaßte zwei Kohlenstoffstähle mit 0,45 bzw. 0,60% C (Flw. 1130 und 1150), die als die DIN-Stähle St C 45.61 und St C 60.61 seit langem in dieser Zusammensetzung bekannt sind. Es

[1]) A. Pomp u. A. Krisch, Die mechanischen Eigenschaften von molybdänfreien Einsatz- und Vergütungsstählen. Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 23 (1941), S. 135/85. A. Krisch, Festigkeitseigenschaften molybdänfreier Einsatz- und Vergütungsstähle. Stahl u. Eisen Bd. 62 (1942), S. 48/53.

[2]) A. Pomp u. A. Krisch, Weitere Untersuchungen über die Durchhärtung von molybdänfreien Ve[illegible]ngsstählen. Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 24 (1942), S. 145/58.

Zahlentafel 1.

Bezeichnung Flw.	DIN	C	Si	Mn	Cr	V	Mo
1130	StC 45.61	0,45	–	–	–	–	–
1150	StC 60.61	0,60	–	–	–	–	–
–	VM 125	0,32	–	1,4	–	–	–
1267	VM 175	0,36	–	1,7	–	–	–
1265	–	0,16	–	2,2	–	–	–
–	VMS 135	0,37	1,3	1,3	–	–	–
1253	VC 135	0,34	–	–	1,1	–	–
–	VMC 140	0,39	–	1,2	1,2	–	–
1610	VCV 150	0,50	–	–	1,1	0,2	–
1620	–	0,29	–	–	2,5	0,3	–
1310	–	0,42	–	1,8	–	0,2	–
1604	–	0,27	–	1,2	0,8	0,2	–
1452	VCMo 125	0,25	–	–	1,1	–	0,2

folgen drei Manganstähle mit 1,4, 1,7 und 2,2% Mn, von denen damals die zwei letzten als die Fliegwerkstoffe 1267 und 1265 genormt wurden; der an erster Stelle genannte ist der Stahl VM 125. Der Flw. 1265 mit dem höchsten Mangangehalt hat mit Rücksicht auf die Anforderungen in der Schweißbarkeit nur einen Kohlenstoffgehalt von 0,16%. Der nächste Stahl VMS 135 hat bei etwa 0,37% C gleich hohe Silizium- und Mangangehalte von etwa 1,3%.

Die dritte Stahlgruppe ist mit Chrom bzw. Vanadin oder mit mehreren Elementen legiert. Der Flw. 1253 mit 0,34% C und 1,1% Cr ist als der Stahl VC 135 bereits lange bekannt, während der nächste Stahl, der Chrom-Manganstahl 140, VMC erst mit Kriegsausbruch in die Normen aufgenommen wurde. Die beiden Chrom-Vanadinstähle Flw. 1610 und 1620 mit 1,1 bzw. 2,5% Cr unterscheiden sich obendrein durch ihren Kohlenstoffgehalt (0,50 und 0,29%). Der Flw. 1310 ist ein Mangan-Vanadinstahl, während der letzte Stahl (Flw. 1604) dieser Gruppe mit Mangan, Chrom und Vanadin legiert ist. Der zum Schluß aufgeführte Flw. 1452 gehört eigentlich nicht in dieses Untersuchungsprogramm, an ihm wurden einige Ergänzungen zu früheren Versuchsreihen vorgenommen.

II. Durchhärtungsmessungen an betriebsmäßig vergüteten Stangen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen, soweit es sich um ein Urteil handelt, wie weit damals die Werke die an sie gestellten Anforderungen erfüllt hatten, sollen in den folgenden Bildern zusammengestellt werden. Bild 2 zeigt die Festigkeitsgrenzen und Durchmesser, für die bei den einzelnen Vergütungsstählen eine befriedigende Durchhärtung gefunden wurde. Diese Grenzen sind dabei nicht als starr anzusehen, sie sind hauptsächlich durch die den einzelnen Stahlwerken gestellten Aufgaben gegeben, eine Stange bestimmter Abmessung auf eine bestimmte Festigkeit zu vergüten. Dabei wurden meistens diese Anforderungen sowohl hinsichtlich der Abmessung als auch der Festigkeit auf das wahrscheinlich Erreichbare beschränkt, so daß die eingetragenen Felder weder in der Richtung der Festigkeit noch der Dicke der Stange die Grenze zu sein brauchen. Das Bild 2 zeigt aber, daß für die Abmessungen bis 60 mm Dmr. je nach der geforderten Festigkeit eine ganze Reihe von Stählen zur Verfügung steht, die teils Kohlenstoffstähle sind, teils einen erhöhten Mangangehalt haben oder mit Chrom und Vanadin legiert sind, also besonders von den für die Kriegszeit kaum greifbaren Metallen Nickel und Molybdän frei sind.

In gleicher Auftragung sind in Bild 3 die Ergebnisse einer früheren gleichartigen Untersuchung[3]) von Chrom-Molybdänstählen wiedergegeben. Dieses Bild sieht zunächst wegen der kleineren Anzahl von Werkstoffen übersichtlicher aus; da damals auch größere Durchmesser in die Untersuchung einbezogen wurden, sind die gegebenen Grenzen für die Abmessungen vielfach günstiger. Dagegen fehlen aber vergleichbare Werte für die höheren Festigkeiten. Auf die Zähigkeit der Werkstoffe bei diesen Festigkeiten, die hier nicht berücksichtigt ist, soll später noch eingegangen werden; es sei noch einmal betont, daß die eingezeichneten Grenzen meist sich aus dem Programm und nicht aus den Versuchswerten ergaben.

Bei den Einsatzstählen wurde die Untersuchung[1]) etwas anders geführt, um vergleichbare Werte zu erhalten. Das Material wurde von den Stahlwerken im geschmiedeten oder gewalzten Zustand geliefert; im Institut wurden dann Abschnitte verschiedener Dicke blind gehärtet und entspannt und aus diesen Zerreiß- und Kerbschlagproben wie vorher entnommen. Da aus den beiden Chrom-Mangan-Einsatzstählen Flw. 1207, Flw. 1208 und dem noch zusätzlich mit Molybdän legierten Einsatzstahl ECMo 200 je sechs Schmelzungen vorlagen, konnte auf diese Weise für die drei Stähle ein Streugebiet für Zugfestigkeit und Streckgrenze

[3]) A. Pomp u. A. Krisch, Vergleichende Untersuchungen über die Durchhärtung von Chrom-Molybdän-Vergütungsstählen. Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 20 (1938), S. 103/23.

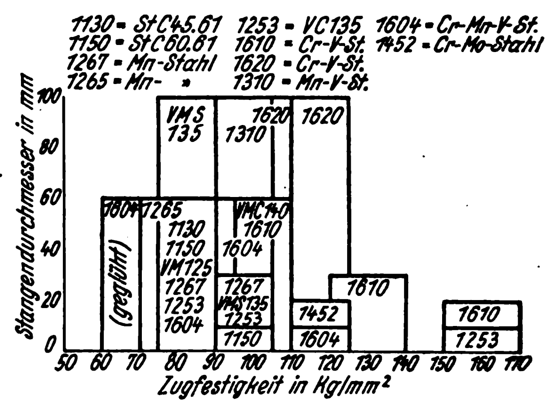


Bild 2. Grenzen für die Durchvergütung von Chrom-Molybdänstählen.

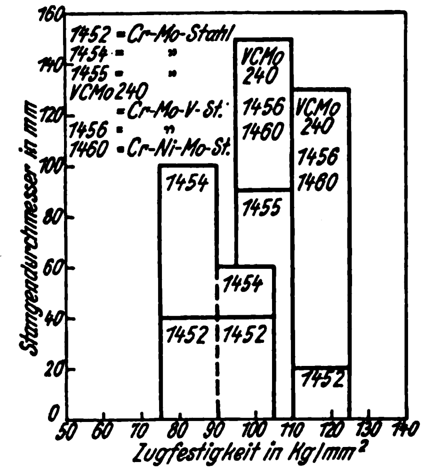


Bild 3. Grenzen für die Durchvergütung von Austauschstählen.

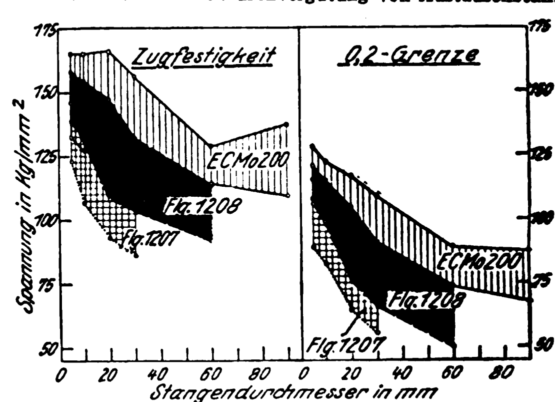


Bild 4. Höchste und niedrigste Werte für Zugfestigkeit und Streckgrenze (Kernwerte) von Einsatzstählen.

des Kernes ermittelt werden (Bild 4), während die Werte für Dehnung, Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit so gleichmäßig und günstig waren, daß auf sie nicht weiter eingegangen zu werden braucht. Es zeigt sich nun, daß sowohl bei der Zugfestigkeit als auch bei der 0,2-Grenze sich der Flw. 1208 mit ganz geringen Überschneidungen an den Flw. 1207 nach oben anschließt. Für die größeren Durchmesser erhalten wir wieder den unmittelbaren Anschluß von ECMo 200 an Flw. 1208. Bei 30 mm Dmr. findet noch eine gewisse Überschneidung statt, und von 5 bis 20 mm sind die Werte von ECMo 200 nicht höher als für Flw. 1208. Einen Vorteil bringt die Anwendung des molybdänhaltigen Stahles ECMo 200 gegenüber dem Flw. 1208 also nur für Durchmesser von 60 mm und mehr, vielleicht auch noch für 30 mm.

Bild 5 enthält die gleiche Auftragung für die molybdänhaltigen Einsatzstähle Flw. 1407, 1408 und 1409[4]). Auch

[4]) A. Pomp u. A. Krisch, Die Durchhärtung von Chrom-Molybdän- und Chrom-Nickel-Einsatzstählen. Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 21 (1939), S. 309/26.



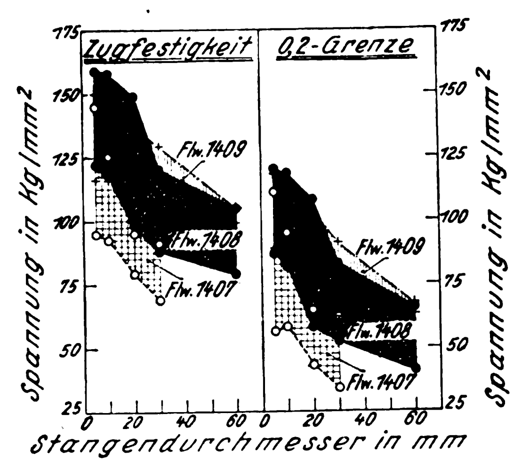


Bild 5. Höchste und niedrigste Werte für Zugfestigkeit und Streckgrenze (Kernwerte) von Einsatzstählen.

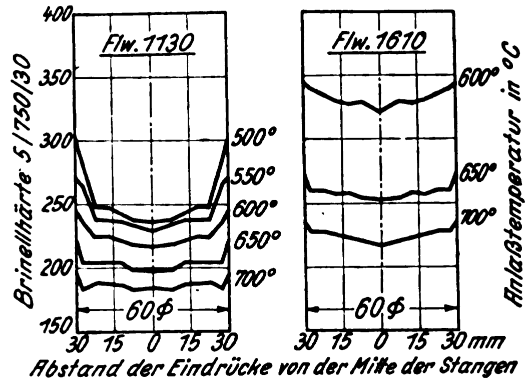


Bild 6 und 7. Verlauf der Härte über den Querschnitt für Flw. 1130 und Flw. 1610.

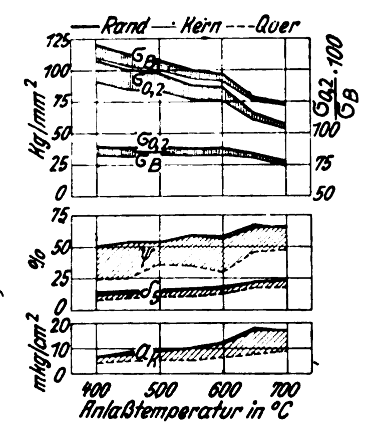


Bild 8. Mechanische Eigenschaften von Flw. 1310 (60 mm Dmr.).

hier finden wir den gleichen Anschluß von Flw. 1408 an 1407 nach oben, während der Chrom-Nickel-Molybdän-Einsatzstahl 1409 sich im großen und ganzen mit Flw. 1408 deckt. Vergleicht man nun die molybdänfreien und die molybdänhaltigen Einsatzstähle miteinander, so erhält man die niedrigsten Werte für den Chrom-Molybdänstahl 1407, dann folgen der Chrom-Manganstahl 1207 mit dem Chrom-Molybdänstahl 1408 und schließlich wieder ein Chrom-Manganstahl 1208. Die Chrom-Mangan-Einsatzstähle sind also im Kern härter als die Chrom-Molybdänstähle mit etwa gleichem Kohlenstoffgehalt.

III. Anlaßversuche.

Diese Untersuchung der von den Stahlwerken zum größten Teil fertig vergüteten Stangen erschien für eine Beurteilung der einzelnen Stähle nicht ganz befriedigend, da die den Lieferwerken gestellten Forderungen hinsichtlich der Festigkeit zu eng begrenzt waren. Infolgedessen war wohl eine Bewertung der nach Bild 2 gleichwertigen Stähle nach dem Kerbschlagversuch möglich, doch konnte man noch keine Angaben machen, ob an die einzelnen Stähle auch höhere Anforderungen gestellt werden konnten. Es wurde daher von allen Vergütungsstählen je eine Stange von 60 mm Dmr. ausgewählt; diese Stangen wurden entsprechend den Angaben der Lieferwerke in einzelnen Abschnitten gehärtet und diese Anschnitte auf verschiedene Temperaturen angelassen[6]). Für einzelne Stähle wurde dabei zusätzlich der Einfluß der Wasser- und Ölabschreckung untersucht, während andere Stähle, bei denen der Durchmessereinfluß besonders wichtig erschien, auch in der Abmessung 30 mm neu vergütet wurden. Wieder wurden an den einzelnen Abschnitten die Härte an der Oberfläche und über den Querschnitt gemessen und Zerreiß- und Kerbschlagproben aus Rand, Kern und bei den 60-mm-Abschnitten auch in der Querrichtung entnommen, wie es im ersten Bild angedeutet war.

Die Messung der Härte, namentlich die Messung der Härte über den Querschnitt gibt bereits einen interessanten Überblick über die Durchhärtung der einzelnen Werkstoffe, doch sollen hier einige Beispiele genügen. Bild 6 zeigt, wie bei dem unlegierten Stahl Flw. 1130 (links im Bild) bei einer Anlaßtemperatur von 700° (unterste Kurve) kaum Unterschiede der Härte von der Mitte bis zum Rand gefunden wurden. Je niedriger die Anlaßtemperatur ist, desto höher steigt die Durchschnittshärte, aber desto größer werden auch die Unterschiede, die zwischen Rand und Kern gefunden werden. Hervorzuheben ist dabei der besonders starke Anstieg der Härte unmittelbar am Rand; infolgedessen wird man mit einem Zerreißstab gewöhnlicher Abmessung diese großen Unterschiede zwischen Rand und Kern gar nicht finden können. Im Gegensatz dazu erhalten wir bei einem Chrom-Vanadinstahl nach Flw. 1610 (rechts) auch bei wesentlich höheren Härten noch keine nennenswerten Unterschiede zwischen der Härte am Rand und im Kern der Stange (Bild 7).

Über die Ergebnisse der Zerreiß- und Kerbschlagversuche soll ebenfalls nur in einzelnen Beispielen berichtet werden. Die beiden folgenden Bilder zeigen die Werte des Mangan-Vanadinstahles Flw. 1310, und zwar Bild 8 für Abschnitte von 60 mm Dmr. Die Abschnitte sind von 840° in Wasser gehärtet und auf Temperaturen von 700 bis 400° angelassen worden. Aufgetragen sind über der Anlaßtemperatur von oben nach unten die Zugfestigkeit, die 0,2-Grenze, das Streckgrenzenverhältnis, die Einschnürung, die Bruchdehnung δ_5 und die Kerbschlagzähigkeit. Jede Kurve ist für Stäbe aus der Rand- und aus der Kernzone gezeichnet, der Raum zwischen den Kurven wurde schraffiert. Bei den Verformungswerten Einschnürung, Dehnung und Kerbschlagzähigkeit ist außerdem das Ergebnis von Querproben eingetragen, die nur in diesen Werten nennenswert von den Kernproben abweichen.

Mit der angegebenen Wärmebehandlung kann man also die Festigkeit des Flw. 1310 von 74 bis 120 kg/mm² verändern, und zwar gilt dies, wie ausdrücklich hinzugefügt werden muß, für die Randzone der untersuchten 60-mm-Stange. Sobald die chemische Zusammensetzung oder die Abmessung geändert werden, verschieben sich auch diese Zahlen. Für den Kern dieser Stange lauten sie bereits anders, danach konnte eine Festigkeit von 72 bis 110 kg/mm² erzielt werden. Namentlich für die höchste Festigkeit haben wir also beachtliche Unterschiede zwischen Rand und Kern, die 10 kg/mm² erreichen. Noch breiter ist dieses Band für die Streckgrenze, hier werden Unterschiede bis zu 17 kg/mm² gemessen. Infolgedessen werden auch für das Streckgrenzenverhältnis nicht die gleichen Werte für die Rand- und Kernzone bestimmt. Im Gegensatz dazu werden für die Verformungswerte nur kleine Unterschiede zwischen Rand und Kern gefunden, die Verformungswerte sind vielmehr für Rand und Kern etwa gleich. Dehnung und Einschnürung

[6]) A. Krisch u. W. Puzicha, Einfluß der Anlaßtemperatur auf die mechanischen Eigenschaften molybdänfreier Vergütungsstähle. Mitt. K.-Wilh.-Inst. Eisenforschg. Bd. 24 (1942), S. 249.

ändern sich nicht erheblich mit der Festigkeit, wohl aber die Kerbschlagzähigkeit; doch ist auch für die höchste Festigkeit noch immer ein ausreichender Wert von 7 mkg/cm² gemessen worden. Die Verformungswerte der Querproben stehen gegen die der Längsproben, wie zu erwarten war, zurück, doch wird auch bei der höchsten Festigkeit noch eine Querkerbschlagzähigkeit von 4 mkg/cm² erreicht.

Wie stark diese mechanischen Eigenschaften von der Abmessung der Probe abhängig sind, zeigt das nächste Bild 9, in dem die gleichen Werte für eine 30 mm-Stange aus der gleichen Schmelzung aufgetragen sind. An dieser sollte hauptsächlich das Verhalten bei hoher Festigkeit verfolgt werden, weshalb niedrigere Anlaßtemperaturen gewählt wurden. Wieder sind von oben nach unten über der Anlaßtemperatur Zugfestigkeit, 0,2-Grenze, Streckgrenzenverhältnis, Einschnürung, Dehnung und Kerbschlagzähigkeit für Rand- und Kernproben aufgetragen; Querproben waren aus einer 30-mm-Stange nicht herzustellen. Zum Vergleich ist die Zugfestigkeit der 60-mm-Stange auch in dieses Bild gestrichelt eingetragen worden. Für eine Anlaßtemperatur von 500° erhalten wir sowohl für die 60- als auch für die 30-mm-Stange praktisch die gleiche Festigkeit. Bei 400° erreicht die 30-mm-Stange aber fast 140 kg/mm² gegenüber nur 120 kg/mm² der 60-mm-Stange, und obendrein sind die Unterschiede zwischen Rand und Kern trotz der höheren Festigkeit beträchtlich kleiner. Bei weiter erniedrigter Anlaßtemperatur (350°) wurden sogar mit diesem Stahl und dieser Abmessung 158 kg/mm² bei geringen Unterschieden zwischen Rand und Kern und noch beachtlichen Kerbschlagwerten erreicht. Auch die Streckgrenzen-, Dehnungs- und Einschnürungswerte sind für die hohe Festigkeit als günstig anzusprechen.

Aus den gleichartigen Untersuchungen an 12 Vergütungsstählen, für die diese Beispiele angeführt wurden und die bei den durch den Krieg bedingten Rohstoffverhältnissen für den Flugzeugbau u. a. in Frage kamen, ergab sich, daß man für den Vergleich der Stähle untereinander drei Größen beachten muß: einmal die überhaupt mit diesen Stählen erreichbare Festigkeit, dann die bei den verschiedenen Festigkeiten bestehende Verformungsfähigkeit, für welche meistens die Kerbschlagzähigkeit als Maß genommen wird, und schließlich die Durchhärtefähigkeit. Die letzte Größe ist nicht nur für die Festigkeit, sondern auch für die Streckgrenze zu untersuchen; faßt man den Begriff »erreichbare Festigkeit« etwas weiter und bezieht ihn nicht nur auf die Randprobe, so ist die Durchhärtefähigkeit auch ein Maß für die im Kern erreichbare Festigkeit. Die Untersuchung der Dehnung und Einschnürung erscheint dagegen nicht so wichtig, da in fast allen Fällen die Werte ausreichend sind und nicht zu einem Vergleich zwischen den einzelnen Stählen anregen.

IV. Zugfestigkeit und Kerbschlagzähigkeit.

Für die mit einem Stahl erreichbare Festigkeit kann als Maß die nach dem Abschrecken gemessene Härte gelten; hiernach sind die in Wasser abgeschreckten Abschnitte stets den in Öl abgeschreckten überlegen[5]). Für die Verwendung als Vergütungsstahl wird man aber stets im Zusammenhang mit der Festigkeit die Verformungsfähigkeit beachten. Für den Vergleich der einzelnen Stähle wurde daher in den folgenden Bildern die Änderung der Kerbschlagzähigkeit mit der Zugfestigkeit der Randzone aufgetragen. Um die Übersicht zu erleichtern, wurde die Auftragung jedoch nach Stahlgruppen unterteilt und auf die 60-mm-Abschnitte beschränkt. Aus Bild 10 ergibt sich, daß bei gleicher Zugfestigkeit die Kerbschlagzähigkeit des Flw. 1130 beträchtlich höher ist als die des Flw. 1150 (links oben). Vermöge des höheren Kohlenstoffgehaltes erreicht allerdings der Flw. 1150 höhere Festigkeiten, die man aber kaum wird ausnutzen können. Das nächste Bild 11 (links unten) zeigt die gleiche Auftragung für drei Manganstähle und für einen Mangan-Siliziumstahl, z. T. in verschiedenartiger Wärmebehandlung. Unter den Manganstählen zeigen sich keine größeren Unterschiede. Wie aus Kohlenstoff- und Mangangehalt zu erwarten

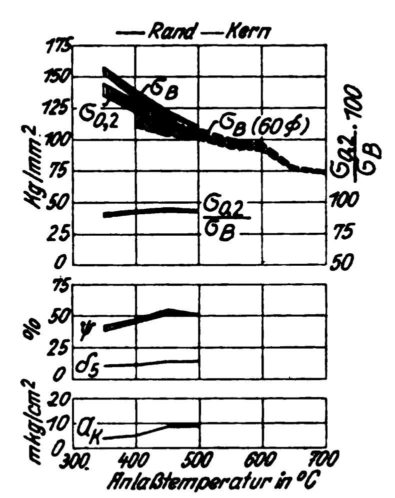


Bild 9. Mechanische Eigenschaften von Flw. 1310 (30 mm Dmr.).

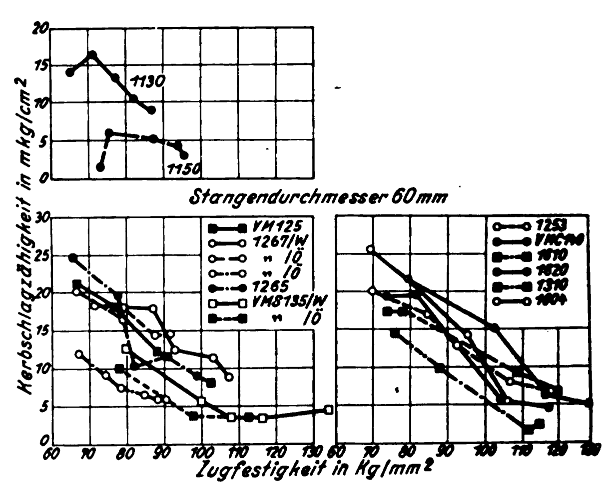


Bild 10 bis 12. Abhängigkeit der Kerbschlagzähigkeit von der Zugfestigkeit (Randproben).
Bild 10: links oben. Bild 11: links unten.
Bild 12: rechts.

ist, hat der Manganstahl Flw. 1267 im wassergehärteten Zustand bei entsprechenden Anlaßtemperaturen die höchste Zugfestigkeit; er besitzt dann aber auch die beste Kerbschlagzähigkeit. Bei Ölhärtung werden diese Werte nicht erreicht. Es ist zu betonen, daß der Manganstahl VM 125 mit niedrigerem Mangangehalt und der Manganstahl 1265 mit niedrigerem Kohlenstoff-, aber erhöhtem Mangangehalt nur wenig unter den besten Werten des Flw. 1267 liegen.

Gegenüber diesen Manganstählen fällt der Mangan-Siliziumstahl VMS 135 heraus. Seine Kerbschlagzähigkeit ist stets um einige mkg/cm² niedriger, doch kann man mit diesem Stahl weit höhere Festigkeiten — über 130 kg/mm² bei Kerbschlagzähigkeiten von fast 5 mkg/cm² — erreichen.

Im nächsten Bild 12 (rechts) sind die Ergebnisse der Versuche an den mit Chrom, Mangan-Chrom, Chrom-Vanadin, Mangan-Vanadin- und Mangan-Chrom-Vanadin legierten Stählen wiedergegeben. Bis zu Zugfestigkeiten von 100 kg/mm² sind die Kerbschlagzähigkeiten dieser Stähle kaum besser als die im vorhergehenden Bild behandelten Stähle. Allerdings ist immer dabei hinzuzufügen, daß diese Auswertungen sich nur auf die Randproben ohne Berücksichtigung der Kernwerte beziehen. Oberhalb 100 kg/mm² zeigt sich dann für einige Werkstoffe der letzten Gruppe, daß mit diesen höhere Festigkeiten und bessere Kerbschlagzähigkeiten zu erreichen sind, als es mit den Manganstählen möglich ist. Hervorzuheben sind dabei der Chrom-Vanadinstahl Flw. 1620 und der Mangan-Vanadinstahl Flw. 1310.

Bei den 30-mm-Stangen (Bild 13 und 14) erhalten wir teilweise ein günstigeres Bild. Einmal konnten diese Stangen, die den gleichen Schmelzungen entstammen wie die im vorigen Bild gezeigten 60-mm-Stangen, auf merklich höhere

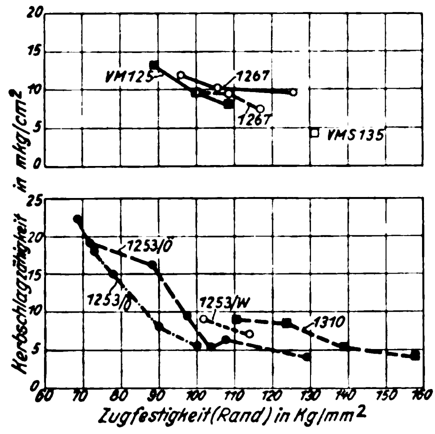


Bild 13 (oben), Bild 14 (unten). Abhängigkeit der Kerbschlagzähigkeit von der Zugfestigkeit (Randproben, 30 mm Dmr.).

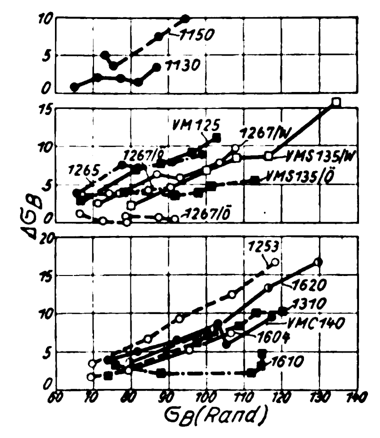


Bild 15 bis 17. Festigkeitsunterschiede zwischen Rand und Kern (60 mm Dmr.)

Bild 15: oben. Bild 16: Mitte. Bild 17: unten.

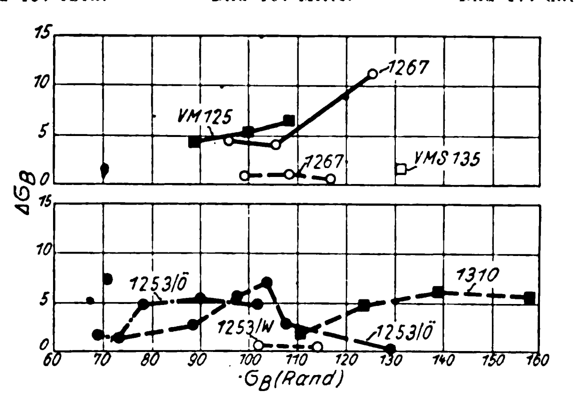


Bild 18 (oben), Bild 19 (unten). Festigkeitsunterschied zwischen Rand und Kern (30 mm Dmr.).

Zugfestigkeiten vergütet werden. Zum Beispiel wurden mit dem Flw. 1267 125 kg/mm² gegen vorher 108 kg/mm² bei gleicher Vergütung erreicht, es fand also eine ähnliche Festigkeitssteigerung statt, wie sie vorher für den Flw. 1310 gezeigt worden ist. Für diese erhöhten Festigkeiten sind aber die Kerbschlagwerte ebenso hoch oder höher, als sie bei den 60-mm-Stangen für gleiche Anlaßtemperaturen gefunden worden sind. Dies besagt, daß man einen Stahl in dünnen Abmessungen oft bis zu wesentlich höheren Festigkeiten anwenden kann, als es bei dicken Stücken möglich ist; weiter ist daraus zu folgern, daß man diese Beziehungen zwischen Kerbschlagzähigkeit und Zugfestigkeit für eine Reihe von Abmessungen aufstellen müßte.

V. Festigkeitsunterschiede in den Stangen.

Wie schon gesagt, gelten diese Kurven nur für die Randschicht. Wie verhält sich nun hierzu der Kern? Die Festig. keit des Kernes ist fast stets geringer als die der Randzone. In den folgenden Bildern ist für die einzelnen Stähle dieser Unterschied zwischen Rand- und Kernfestigkeit in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit am Rand aufgetragen. Bei den unlegierten Stählen (Bild 15) erweist sich bei gleichen Festigkeiten auch hier der Flw. 1130 mit dem niedrigeren Kohlenstoffgehalt dem Flw. 1150 überlegen; man hätte den Flw. 1130 vielleicht besser noch bei einer etwas höheren Festigkeit geprüft. Zwar kann man mit dem Flw. 1150 in der Randzone noch Festigkeiten von 95 kg/mm² erzielen, aber der Kern weist dabei eine um fast 10 kg/mm² niedrigere Festigkeit auf. Wollte man also mit einem solchen Stahl die übliche Vorschrift der Fliegwerkstoff-Leistungsblätter, die Festigkeit innerhalb 15 kg/mm² zu halten, für Rand- und Kernzone erfüllen, so bleibt für den Rand nur ein Spielraum von 5 kg/mm² übrig, wenn der Kern in den gleichen Bereich fallen soll. Das ist aber für den Hersteller eine kaum einhaltbare Vorschrift.

Bei der nächsten Gruppe, den Mangan- und Mangan-Siliziumstählen in Bild 16 sind z. T. schon etwas günstigere Kurven für die Durchvergütung vertreten. Zwar sind die Stähle mit niedrigerem Mangangehalt, VM 125 und Flw. 1265, nur wenig besser als Flw. 1150; bei dem Flw. 1267 bleibt aber, wenigstens bei Wasserhärtung, bis zu einer Randzugfestigkeit von 115 kg/mm² die Kernfestigkeit um nicht mehr als 10 kg/mm² zurück. Bei Ölhärtung sind die Kurven für diese Unterschiede scheinbar günstiger, doch wurden nur Festigkeiten von etwa 90 kg/mm² erreicht, die, wie aus der Härtemessung am gehärteten Abschnitt zu vermuten ist, nicht wesentlich gesteigert werden können. Dagegen weist eine etwas bessere Durchhärtung als Flw. 1267 der Mangan-Siliziumstahl VMS 135 auf. Die Grenze für einen Unterschied zwischen Rand und Kern von 10 kg/mm² wird bei der wassergehärteten Stange erst bei etwa 120 kg/mm² Randfestigkeit erreicht; für höhere Festigkeiten dürfte bei dem starken Anstieg der Kurve der Stahl aber kaum in dieser Abmessung brauchbar sein, da der Kern nur noch in geringem Maße der Festigkeitssteigerung der Randzone folgt. Für Festigkeiten bis 110 kg/mm² sieht die Kurve der ölgehärteten Stange günstiger aus; hier ist aber auf die geringere Kerbschlagzähigkeit, die bei der Ölhärtung gefunden wird, hinzuweisen.

In dem nächsten Bild 17 sind die entsprechenden Werte für die mit Chrom oder Vanadin legierten Stähle wiedergegeben. Die beste Kurve für die Durchvergütung zeigt der Flw. 1610; doch ist hier wieder die geringe Kerbschlagzähigkeit dieses Stahles zu betonen. Für Festigkeiten über 110 kg/mm² folgen der Stahl VMC 140 und der Stahl Flw. 1310, die sich nur wenig unterscheiden. Bei 120 kg/mm² Zugfestigkeit am Rand beträgt der Unterschied zwischen Rand und Kern etwa 10 kg/mm². Bei dem Chrom-Vanadinstahl Flw. 1620 beträgt dieser Unterschied fast 14 kg/mm², noch mehr bei dem Chromstahl Flw. 1253. Es ist freilich darauf hinzuweisen, daß für den Flw. 1620 auch erheblich günstigere Werte bekannt sind[1]). Die Ursache für diese Abweichung in den Versuchsergebnissen wurden nicht weiter verfolgt.

Um nicht den Eindruck zu erwecken, diese Stähle wären bei diesen hohen Festigkeiten stets ungleichmäßig, sind in den Bildern 18 und 19 einige entsprechende Kurven für Abschnitte von 30 mm Dmr. wiedergegeben. Alle untersuchten Stähle können in dünneren Abmessungen auf höhere Festigkeiten gebracht werden, als es bei den 60-mm-Stangen erreicht wurde, ohne daß dabei, wie schon gesagt, die Kerbschlagzähigkeit besonders abnimmt. Der Unterschied in der Festigkeit von Rand und Kern ist dabei bedeutend geringer; so liegt für den Mangan-Siliziumstahl VMS 135 ein Wert von 131 kg/mm² mit einem $\Delta\sigma$-Wert von weniger als 2 kg/mm² vor, während der Mangan-Vanadinstahl Flw. 1310 von 130 bis 160 kg/mm² Zugfestigkeit keine größeren Unterschiede zwischen Rand und Kern als 6 kg/mm² aufweist. Auch diese Beziehung: Zugfestigkeit von Kern und Randzone ist also durchaus querschnittsabhängig.

VI. Die Streckgrenze in Beziehung zur Zugfestigkeit.

Vorher war schon angedeutet worden, daß man bei der Beurteilung der Durchvergütung eines Stahles nicht nur

die Zugfestigkeit, sondern auch die Streckgrenze betrachten muß. Wenn Unterschiede über den Querschnitt gemessen werden, so sind sie meistens bei der Streckgrenze größer als bei der Zugfestigkeit. Um auch über dieses Maß einen Überblick zu bekommen, wurde nun nicht die den oben gezeigten Bildern entsprechende Auswertung vorgenommen, sondern es wurde die Streckgrenze der Kernzone in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit am Rand aufgetragen (Bild 20). Dieses für die unlegierten Stähle Flw. 1130 und 1150 gültige Bild (oben) enthält also die Mindeststreckgrenze für den 60-mm-Abschnitt; entnimmt man die Probe weiter von der Mitte entfernt, so wird man eine höhere Streckgrenze finden. Die in das Bild eingezeichneten, mit 50, 60 und 70% beschrifteten Geraden geben das Verhältnis der beiden Koordinaten an, nämlich das Verhältnis Streckgrenze des Kernes zur Zugfestigkeit der Randzone. Es handelt sich also nicht um das an einem Zerreißstab gefundene Streckgrenzenverhältnis, sondern hier ist das Streckgrenzenverhältnis des Kernes mit dem Quotienten Zugfestigkeit des Kernes zu der des Randes multipliziert worden $\left(\frac{\sigma_{SK}}{\sigma_{BK}} \cdot \frac{\sigma_{BK}}{\sigma_{BR}}\right)$. Selbstverständlich gelten auch diese Bilder nur für die eine Stangenabmessung 60 mm.

Für die beiden unlegierten Stähle Flw. 1130 und 1150 erhalten wir für das Verhältnis Streckgrenze im Kern zur Zugfestigkeit am Rand 60 bzw. 50%, und zwar liegt dieses Verhältnis für den höher kohlenstoffhaltigen Stahl deutlich niedriger. Demgegenüber werden am herausgearbeiteten Stab Streckgrenzenverhältnisse bestimmt, die fast 10% höher liegen.

Bei den Mangan- und Mangan-Siliziumstählen (Bild 21) erhalten wir jedoch höhere Verhältniszahlen von etwa 70%, selbst bei Festigkeiten über 100 kg/mm². Nur der Manganstahl VM 125 fällt hier unter 65% herab. Bei dem Mangan-Siliziumstahl VMS 135 werden diese 70% auch noch für 130 kg/mm² Zugfestigkeit der Randzone eingehalten. Bei den chrom- und vanadinhaltigen Stählen (Bild 22) liegen nun diese Verhältniszahlen noch höher als bei den Manganstählen; als Mittelwert könnte man — von dem Chromstahl Flw. 1253 abgesehen — etwa 78% angeben. Da die Kurven für die einzelnen Stähle sehr dicht zusammenliegen, erübrigt es sich, auf Einzelheiten einzugehen. Der Vorteil der Legierung mit Chrom und Vanadin zeigt sich also bei diesen Stählen einmal in der Erreichung einer höheren Festigkeit der Randzone, dann in einer etwas besseren Kerbschlagzähigkeit und in einer höheren Streckgrenze, besonders im Kern der Stange.

Für kleinere Abmessungen, z. B. 30 mm Dmr., liegt leider nicht so umfangreiches Material vor. Doch sieht man in den Bildern 23 und 24, daß sowohl für die Mangan- und Mangan-Siliziumstähle einerseits, als auch für die chrom- und vanadinlegierten Stähle anderseits die genannten Verhältniszahlen um etwa 10% höher liegen, als sie für 60-mm-Stangen gefunden wurden, daß also auch für diesen Wert eine merkliche Querschnittsabhängigkeit besteht. Diese Zahlen können natürlich nicht über das am Einzelstab bestimmte Streckgrenzenverhältnis ansteigen.

In dem abgegebenen Bericht wurde versucht, einen Überblick über ein Gebiet zu geben, für das das Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung in den letzten Jahren ein großes Zahlenmaterial zusammengetragen hat. Es ließ sich dabei nicht umgehen, einige Werte ganz fortzulassen und von anderen nur wenige Beispiele anzuführen. Als wesentlicher Punkt ist festzustellen, daß es auch trotz der kriegsbedingten Sparmaßnahmen den deutschen Stahlwerken möglich gewesen ist, Werkstoffe zu erzeugen, die in vielen Eigenschaften den Vorkriegsstählen nahekommen.

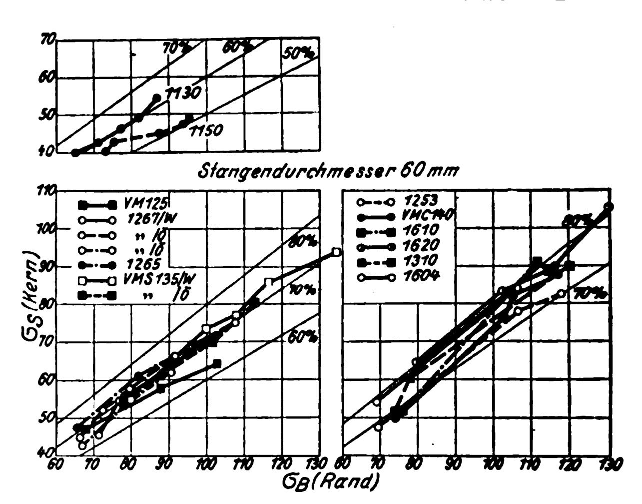


Bild 20 bis 22. Abhängigkeit der Streckgrenze der Kernprobe von der Zugfestigkeit der Randprobe (60 mm Dmr.).
Bild 20: oben links. Bild 21: unten links.
Bild 22.: unten rechts.

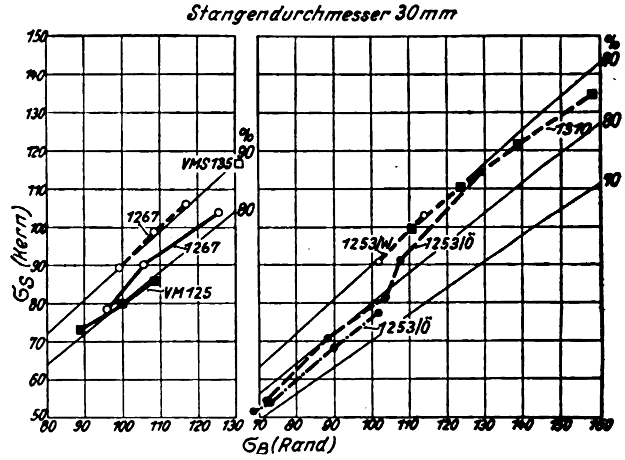


Bild 23 (links) und 24 (rechts). Abhängigkeit der Streckgrenze der Kernproben von der Zugfestigkeit der Randproben (30 mm Dmr.).

VII. Zusammenfassung.

An 12 molybdänfreien und 6 molybdänhaltigen Stählen wurden die Grenzen für eine gute Durchvergütung bestimmt. In Anlaßversuchen an Abschnitten von 60 und 30 mm Dmr. wurden die Beziehungen zwischen Zugfestigkeit und Kerbschlagzähigkeit, zwischen der Zugfestigkeit der Rand- und der Kernzone der Stangen und zwischen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit ermittelt. Hierbei zeigten sich die Stähle mit Chrom- und/oder Vanadinzusätzen den Stählen, die nur mit Mangan legiert oder unlegiert waren, durch eine bessere Kerbschlagzähigkeit sowie durch höhere Streckgrenzen überlegen, wenn sie auf gleiche Zugfestigkeit vergütet waren.

Untersuchungen an Al-Zn-Mg-Knetlegierungen*).

III. Festigkeitseigenschaften und Spannungskorrosionsverhalten im warmausgehärteten Zustand[1]).

Von A. Mühlenbruch und H. J. Seemann, Berlin.

(Mitteilung aus der Forschungsanstalt der Dürener Metallwerke A. G., Berlin-Borsigwalde.)

Es wird über den Einfluß von Anlaßbehandlungen bei Temperaturen von 20 bis 200° auf die Festigkeitseigenschaften und das Spannungskorrosionsverhalten von zwei Al-Zn-Mg-Legierungen mit 6% Zn, 2% Mg und 4% Zn, 2% Mg berichtet; die Legierungen lagen dabei im wasserabgeschreckten bzw. luftgekühlten Zustand nach dem Lösungsglühen vor.

Gliederung.

I. Einleitung.

Unsere Untersuchungen an Al-Zn-Mg-Legierungen zielten zunächst darauf ab, über die Festigkeitseigenschaften und das Spannungskorrosionsverhalten nach Kaltaushärtung sowie über die Beeinflussung dieser Eigenschaften durch die vorangehende Wärmebehandlung (Lösungsglühung und Abkühlungsart) ausführliche Unterlagen zu erhalten. Wir arbeiteten dabei in dem Legierungsbereich, der sich etwa von 2 bis 7% Zn und von 0 bis 6% Mg erstreckt, wobei die Mehrzahl der untersuchten Legierungen — insgesamt 33 — dem Zustandsfeld $\alpha + T$ angehört[2]). Die Legierungen enthielten neben Fe und Si nur Zusätze von Mn, wie sie in den technischen Al-Legierungen üblich sind. Der Versuch einer Hochzüchtung durch Sonderzusätze u. dgl. erschien uns erst nach Erlangung genauerer Kenntnis der grundlegenden Legierungszusammenhänge geboten.

Wie unsere Versuche ergaben, läßt sich im Hinblick auf die Abhängigkeit des Spannungskorrosionsverhaltens von der Wärmebehandlung, insbesondere von der Abkühlungsgeschwindigkeit — Wasserabschreckung bzw. Luftabkühlung — eine Zweiteilung des untersuchten Legierungsbereiches vornehmen, wobei die Summe der Mg + Zn-Gehalte eine maßgebliche Rolle spielt[3]). Kaltausgehärtete Legierungen mit einem Zn + Mg-Gehalt bis maximal etwa 6% sind unabhängig von den Abkühlungsbedingungen und auch unabhängig von der Lösungsglühtemperatur spannungskorrosionsbeständig. Kaltausgehärtete Legierungen mit höheren Gehalten an Zn + Mg werden dagegen nach Wasserabschreckung in steigendem Maße empfindlich gegen Spannungskorrosionsangriff; um ausreichende Spannungskorrosionsbeständigkeit zu erzielen, muß man bei diesen höher legierten Werkstoffen die Abkühlungsgeschwindigkeit nach dem Lösungsglühen herabsetzen, was am einfachsten durch Luftabkühlung geschieht.

Entsprechend diesem unterschiedlichen Spannungskorrosionsverhalten sowie unter Berücksichtigung unserer systematischen Festigkeitsprüfungen[4]) haben wir für die weiteren Entwicklungsarbeiten zwei Legierungen — mit MZ 6 und MZ 8[5]) bezeichnet — ausgewählt. Legierung MZ 6 liegt mit 4% Zn und 2% Mg[6]) an der oberen Grenze des erstgenannten Bereiches, in dem man mit Wasserabschrecken nach dem Lösungsglühen noch ausreichende Spannungskorrosionsbeständigkeit im kaltausgehärteten Zustand erzielt, während man bei Legierung MZ 8, die 6% Zn und ebenfalls 2% Mg enthält, zur Luftabkühlung übergehen muß.

An diesen beiden Legierungen wurde die Veränderung der Festigkeitseigenschaften durch Anlassen — die Warmaushärtung — und im Zusammenhang damit das Spannungskorrosionsverhalten systematisch untersucht. Über die Ergebnisse dieser Versuche wird nachfolgend berichtet.

II. Versuchsdurchführung.

Die Versuche wurden mit betriebsmäßig hergestellten, 1 mm starken Blechen durchgeführt. Um eine umfassendere Kenntnis der Anlaßwirkungen zu erhalten, wurden beide Legierungen nach Wasserabschreckung und nach Luftabkühlung untersucht. Die aus den walzharten Blechen entnommenen Proben wurden generell 20 min bei 440° C im Salzbad geglüht (Homogenisierungsbehandlung) und anschließend in Wasser abgeschreckt bzw. an ruhender Luft abgekühlt. Die Anlaßbehandlung erfolgte:

a) unmittelbar nach dem Lösungsglühen, d. h. ohne Vorlagerung, bei Temperaturen zwischen 20 und 200° C in Stufen von 20° mit Anlaßzeiten von jeweils 5 h, 1 Tag, 5 Tagen, 14 Tagen und 25 Tagen.
b) nach 14- bzw. 28tägiger Raumtemperatur-Vorlagerung bei 100° C mit Anlaßzeiten wie unter a).

Bei der Versuchsreihe b) wurde zusätzlich noch der Einfluß einer möglichst kurz nach dem Lösungsglühen vorgenommenen Kaltverformung (2; 5 und 10%) auf das Spannungskorrosionsverhalten untersucht (Vorlagerungszeit: 28 Tage).

Geprüft wurden Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dehnung (δ_{10}) mit je drei Einzelwerten für jeden Versuchspunkt. Die Prüfung auf Spannungskorrosion erfolgte mittels Schlaufenproben im Wechseltauchgerät[7]) mit 3% NaCl-Lösung; die Schlaufen wurden innerhalb von 24 h nach beendigter Anlaßbehandlung, je 10 Schlaufen für jeden Zustand, in das Prüfgerät eingehängt. Die verschiedenen Anlaßzustände wurden mikroskopisch untersucht.

III. Ergebnisse.

1. Die Festigkeitseigenschaften im warmausgehärteten Zustand.

Versuchsreihe a). In den Bildern 1 bis 8 ist für die Legierungen mit 6% Zn, 2% Mg (Legierung MZ 8) und mit 4% Zn, 2% Mg (Legierung MZ 6) der Verlauf von Zug-

*) E 22 1.
[1]) Mitteilung I ist erschienen in Metallwirtschaft Bd. 19 (1940), S. 535/538. Mitteilung II ist erschienen in Aluminium Bd. 22 (1940), S. 442/458.
[2]) α = Al-reicher Mischkristall, T = intermediäre Phase der Basiszusammensetzung $Al_2Mg_3Zn_3$.
[3]) M. Hansen, A. Mühlenbruch u. H. J. Seemann, Metallwirtschaft Bd. 19 (1940), S. 535/538.
[4]) M. Hansen, A. Mühlenbruch u. H. J. Seemann, Aluminium Bd. 22 (1940), S. 442/458.
[5]) Eine frühere, im Zusammenhang mit Erprobungsarbeiten angewandte Bezeichnung war: »Leg. 41« für MZ 8, »Leg. 42« für MZ 6.
[6]) Hierunter ist der nicht an Si gebundene »freie« Mg-Gehalt zu verstehen.
[7]) Periodisch mit 5 min Tauch- und 25 min Trockendauer.



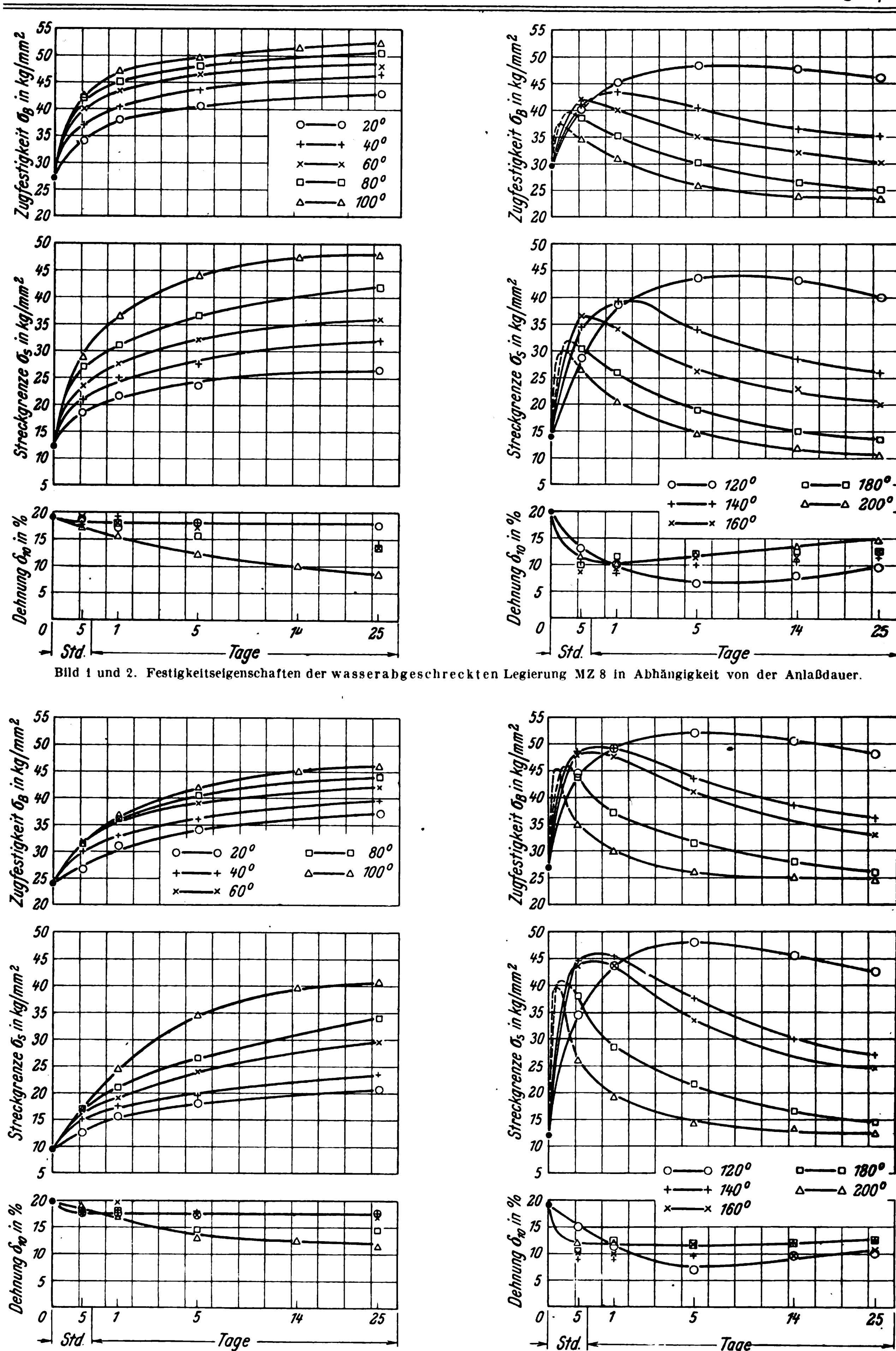


Bild 1 und 2. Festigkeitseigenschaften der wasserabgeschreckten Legierung MZ 8 in Abhängigkeit von der Anlaßdauer.

Bild 3 und 4. Festigkeitseigenschaften der luftgekühlten Legierung MZ 8 in Abhängigkeit von der Anlaßdauer.

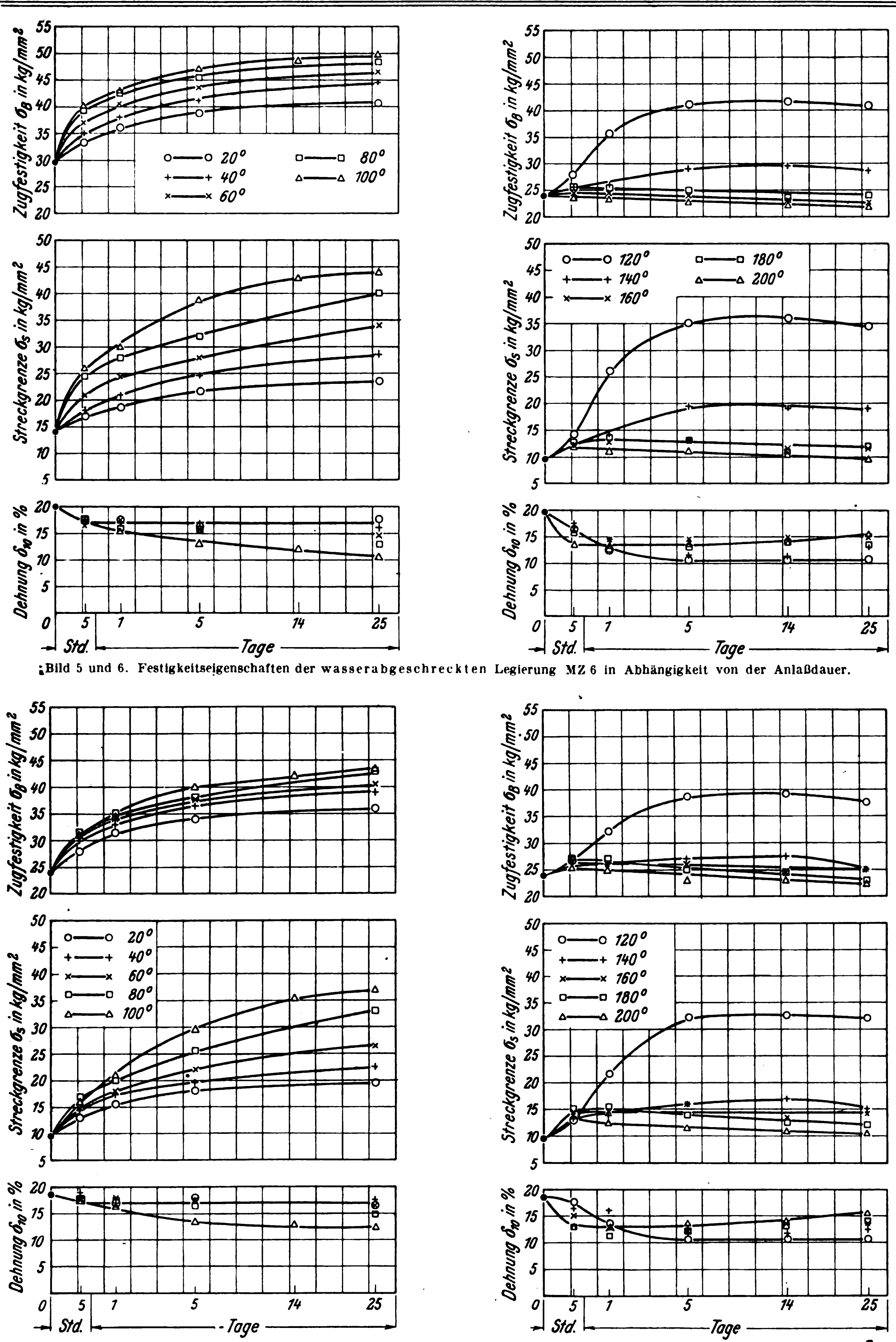


Bild 5 und 6. Festigkeitseigenschaften der wasserabgeschreckten Legierung MZ 6 in Abhängigkeit von der Anlaßdauer.

Bild 7 und 8. Festigkeitseigenschaften der luftgekühlten Legierung MZ 6 in Abhängigkeit von der Anlaßdauer.

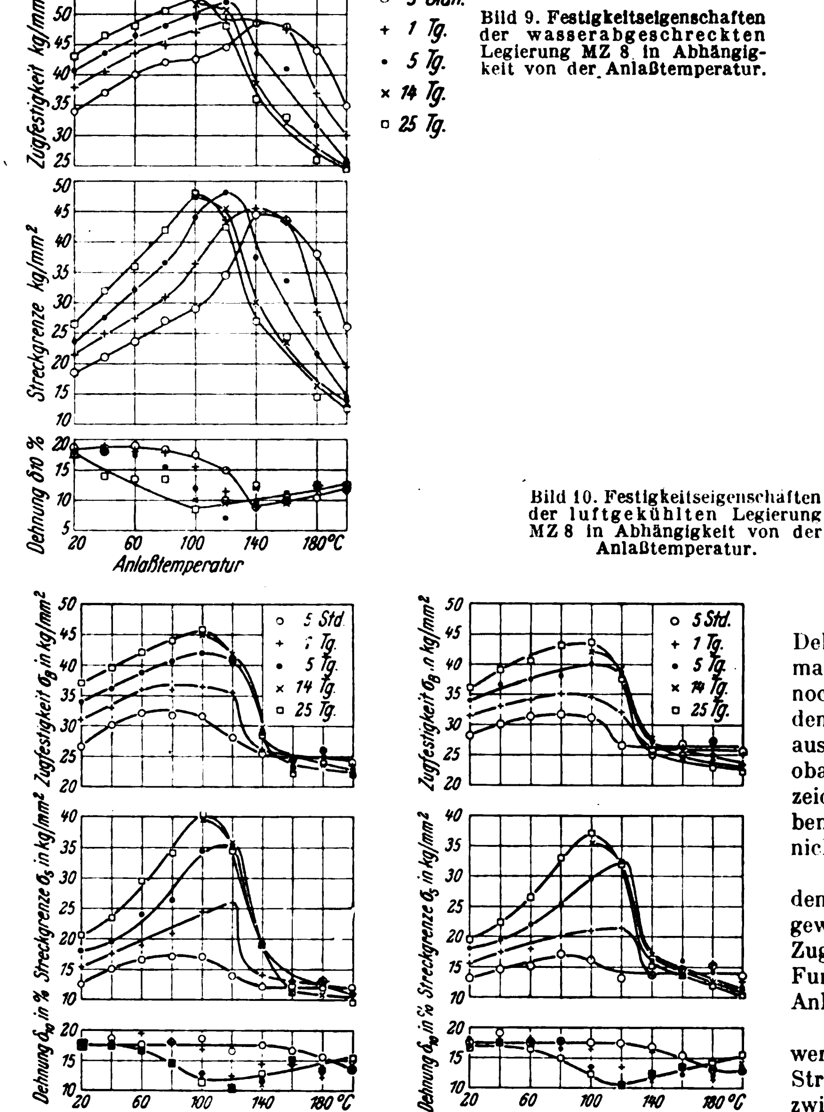


Bild 9. Festigkeitseigenschaften der wasserabgeschreckten Legierung MZ 8 in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

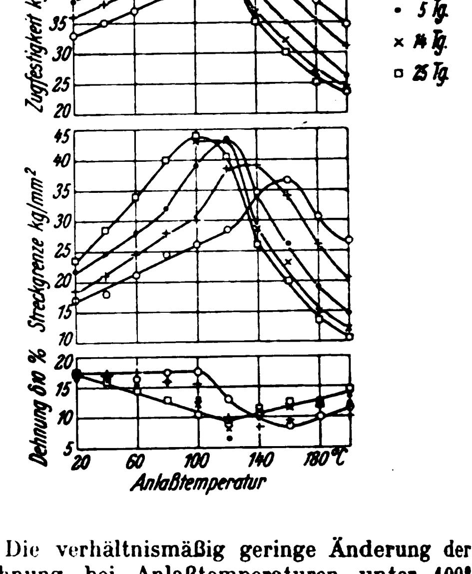


Bild 10. Festigkeitseigenschaften der luftgekühlten Legierung MZ 8 in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

Bild 11. Festigkeitseigenschaften der wasserabgeschreckten Legierung MZ 6 in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

Bild 12. Festigkeitseigenschaften der luftgekühlten Legierung MZ 6 in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

festigkeit, Streckgrenze und Dehnung als Funktion der Anlaßdauer bei den gewählten Anlaßtemperaturen wiedergegeben (Warmaushärtungskinetik). Bemerkungswert ist, daß sowohl die Streckgrenze als auch die Zugfestigkeit durch Warmaushärtung ganz erheblich gesteigert werden können. Es lassen sich für beide Legierungen zwei Gruppen von Festigkeits- und Streckgrenzenkurven unterscheiden:

Bis 100° Anlaßtemperatur ist bei beiden Legierungen ein stetiger Anstieg der Zugfestigkeits- und Streckgrenzenkurven festzustellen.

Bei Anlaßtemperaturen oberhalb von 100° zeigen die für Legierung MZ 8 erhaltenen σ_B- und σ_S-Kurven ein deutlich ausgeprägtes Maximum, das sich mit zunehmender Anlaßtemperatur zu kürzeren Anlaßzeiten verschiebt. (Die gestrichelten Anfangskurventeile für Anlaßtemperaturen von 180 und 200°, bei denen der Anstieg der Festigkeit und Streckgrenze zum Maximum innerhalb der ersten fünf Anlaßstunden erfolgt, sind in Analogie zu den entsprechenden Härtekurven eingetragen.) Bei Legierung MZ 6 zeigen nur die σ_B- und σ_S-Kurven für 120° einen ähnlichen Verlauf wie bei Legierung MZ 8. Für Anlaßtemperaturen oberhalb von 120° weisen dagegen die Kurven im allgemeinen nur noch eine geringe Veränderung der mechanischen Eigenschaften auf.

Die verhältnismäßig geringe Änderung der Dehnung bei Anlaßtemperaturen unter 100° macht es wahrscheinlich, daß in diesem Gebiet noch Kaltaushärtung vorherrscht. Erst bei den höheren Anlaßtemperaturen, und zwar im ausgeprägten Maße bei Legierung MZ 8, beobachtet man den für Warmaushärtung kennzeichnenden Dehnungsverlauf. Im übrigen ist bemerkenswert, daß die Dehnungswerte meist nicht unter 10% absinken.

Einen geeigneten Überblick über die mit den untersuchten Legierungen erreichten Werte gewinnt man aus den Bildern 9 bis 12, die Zugfestigkeit, Streckgrenze und Dehnung als Funktion der Anlaßtemperatur für konstante Anlaßdauer wiedergeben.

Bei Legierung MZ 8 (Bild 9 und 10) werden Höchstwerte der Zugfestigkeit und Streckgrenze durch 5- bis 25tägiges Anlassen zwischen 100 und 120° erhalten. Diese liegen im wasserabgeschreckten Zustand bei rd.

52 kg/mm² für σ_B
48 » » σ_S
7 bis 10% » δ_{10}

im luftgekühlten Zustand bei rd.

48 bis 50 kg/mm² für σ_B
44 » » σ_S
7 bis 12% » δ_{10}

Längeres Anlassen bei 100° (14 bzw. 25 Tage) hat dabei gegenüber kürzerem Anlassen bei 120° (5 Tage) den Vorteil, daß man im ersteren Falle höhere Dehnungswerte bei gleichen Festigkeits- und Streckgrenzenwerten und damit günstigere Gesamtwerte erzielt.

Bei Legierung MZ 6 (Bild 11 und 12) lassen sich Höchstwerte nur durch längeres Anlassen (14 bzw. 25 Tage) bei 100° erzielen. Es werden folgende Werte erreicht:

für den wasserabgeschreckten Zustand

σ_B = 45 bis 46 kg/mm²
σ_S = 40 »
δ_{10} = 12%

für den luftgekühlten Zustand

σ_B = 42 bis 43 kg/mm²
σ_S = 36 » 37 »
δ_{10} = 12 » 13%

Versuchsreihen b). Läßt man nach einer Raumtemperatur-Vorlagerung von 14 bzw. 28 Tagen bei 100° C

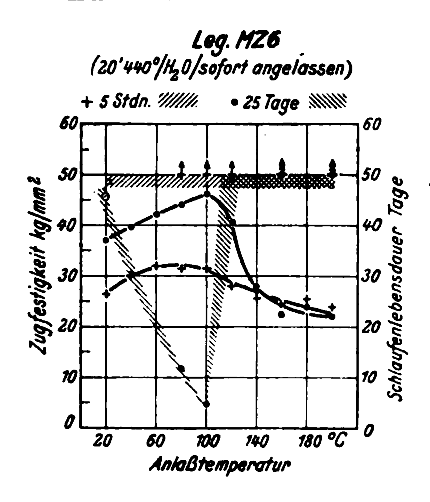


Bild 13. Legierung MZ 6 wasserabgeschreckt und sofort angelassen. Spannungskorrosionsverhalten und Festigkeitseigenschaften in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

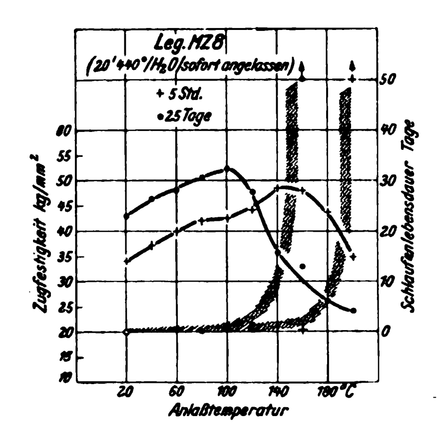


Bild 14. Legierung MZ 8 wasserabgeschreckt und sofort angelassen. Spannungskorrosionsverhalten und Festigkeitseigenschaften in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur.

Zahlentafel 1. Einfluß von Anlaßbehandlungen auf das Spannungskorrosionsverhalten der Legierung MZ 6.

Anlaß-behandlung	20' 440°/Wasser		20' 440°/Luft	
	Streubereich (10 Proben)	Mittelwert	Streubereich (10 Proben)	Mittelwert
20° 13 Tage	24 — > 50 Tage	> 45,4 Tage	—	> 50 Tage
80° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	2,4 — 23 Tage	11,6 Tage	—	> 50 Tage
100° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
1 Tag	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
3 Tage	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
5 Tage	12 28 Tage	17,1 Tage	—	> 50 Tage
14 Tage	5 — 10 Tage	7,2 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	4 — 9 Tage	4,7 Tage	—	> 50 Tage
120° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	44 — > 50 Tage	> 48,8 Tage	—	> 50 Tage
160° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
200° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage

Zahlentafel 2. Einfluß von Anlaßbehandlungen auf das Spannungskorrosionsverhalten der Legierung MZ 8.

Anlaß-behandlung	20' 440°/Wasser		20' 440°/Luft	
	Streubereich (10 Proben)	Mittelwert	Streubereich (10 Proben)	Mittelwert
20° 13 Tage	3,5 — 4,5^h	4^h	—	> 50 Tage
80° 5 Stunden	1,5 — 2,0^h	1,65^h	—	> 50 Tage
25 Tage	0,5 — 1,0^h	0,85^h	19 — > 50 Tage	> 32 Tage
100° 5 Stunden	—	16,5^h	—	> 50 Tage
1 Tag	15 — 36^h	29,7^h	27 — > 50 Tage	> 44,8 Tage
5 Tage	16,5 — 40,5^h	30,9^h	—	> 50 Tage
14 Tage	16,5 — 27^h	22,8^h	—	> 50 Tage
25 Tage	27 — 72^h	40,9^h	23 — > 50 Tage	> 47,4 Tage
120° 5 Stunden	6 — 24^h	10,5^h	48 — > 50 Tage	> 49,8 Tage
25 Tage	24 — 72^h	35^h	36 — > 50 Tage	> 47,2 Tage
160° 5 Stunden	6 — 24^h	9,1^h	43 — > 50 Tage	> 49 Tage
25 Tage	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
200° 5 Stunden	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage
25 Tage	—	> 50 Tage	—	> 50 Tage



an, so erhält man in Abhängigkeit von der Anlaßdauer folgenden Verlauf der mechanischen Eigenschaften: Nach einem anfänglichen Rückgang der Zugfestigkeits- und Streckgrenzenwerte (Rückbildung der Kaltaushärtung!) innerhalb der ersten fünf Anlaßstunden verändern sich diese mit zunehmender Anlaßdauer in der gleichen Weise wie für die ohne Vorlagerung angelassenen Proben, wobei der weitere Verlauf unabhängig vom Ausgangszustand durch jeweils identische Kurven wiedergegeben werden kann.

2. Spannungskorrosion und Anlaßbehandlung.

Für eine Reihe von Anlaßzuständen beider Legierungen wurde das Spannungskorrosionsverhalten geprüft.

Die in den Zahlentafeln 1 und 2 nebst den zugehörigen Daten mitgeteilten Ergebnisse beziehen sich auf Proben, die ohne vorherige Kaltverformung sowie ohne Vorlagerung angelassen wurden. Für die nach Wasserabschreckung durch kurz- und langzeitiges Anlassen erhaltenen Zustände sind außerdem die Schlaufenlebensdauern als Funktion der Anlaßtemperatur mit den zugehörigen Festigkeitskurven in den Bildern 13 und 14 wiedergegeben.

Besonders bemerkenswert ist das Ergebnis für die wasserabgeschreckte Legierung MZ 6 mit 4% Zn, 2% Mg gemäß Bild 13 und Zahlentafel 1. Wie oben betont wurde, erzielt man bei dieser Legierung mit Wasserabschreckung nach dem Lösungsglühen ausreichende Spannungskorrosionsbeständigkeit im kaltausgehärteten Zustand (vgl. »Anlaßbehandlung« 20° 13 Tage in Zahlentafel 1). Kurzzeitiges Anlassen bei Temperaturen bis 200° ändert daran noch nichts; die Lebensdauern betragen durchweg mehr als 50 Tage. Langzeitiges Anlassen bewirkt dagegen in einem bestimmten Anlaßtemperaturbereich eine ausgeprägte Empfindlichkeit gegen Spannungskorrosion. Wie Bild 13 zeigt, fällt die Schlaufenlebensdauer nach 25tägiger Anlaßbehandlung mit zunehmender Anlaßtemperatur stark ab und erreicht bei 100° ein Minimum mit nicht mehr ausreichender Beständigkeit; erst oberhalb von 100° steigt die Schlaufenlebensdauer wieder rasch auf ausreichende Beträge an. Die für die kritische Temperatur von 100° ausführlicher untersuchte Abhängigkeit der Schlaufenlebensdauer von der Anlaßdauer ist im einzelnen aus Zahlentafel 1 zu ersehen. Läßt man nach Vorlagerung an, so erhält man die gleiche Beeinflussung des Spannungskorrosionsverhaltens wie durch Anlassen ohne Vorlagerung.

Es ergibt sich somit, daß die nach Wasserabschreckung im kaltausgehärteten Zustand bestehende gute Spannungskorrosionsbeständigkeit der Legierung MZ 6 durch längeres Anlassen im Temperaturgebiet um 100° C verlorengeht. Um Anlaßbeständigkeit zu erzielen, muß man auch bei dieser Legierung Luftabkühlung anwenden. Wie man aus Zahlentafel 1 ersieht, erreicht man dann für Legierung MZ 6 im gesamten untersuchten Anlaßbereich ausreichende Spannungskorrosionsbeständigkeit (Schlaufenlebensdauer: mehr als 50 Tage), man gibt damit allerdings wiederum die Vorteile der Wasserabschreckung auf.

Bei Legierung MZ 8 mit 6% Zn, 2% Mg ist das Spannungskorrosionsverhalten im wasserabgeschreckten Zustand nach Kaltaushärtung völlig unzureichend. Daran wird durch Anlassen bis zu Temperaturen von etwa 100° C praktisch nichts geändert. Immerhin kann man aus Zahlentafel 2 ersehen, daß bei 100° mit zunehmender Anlaßdauer eine an sich geringfügige, aber deutliche Zunahme der Schlaufenlebensdauer erfolgt. Eine Erhöhung der Anlaßtemperatur bewirkt dann aber eine außerordentliche Verbesserung der Spannungskorrosionsbeständigkeit. Wie man insbesondere aus Bild 14 ersieht, wird dabei der Beginn des Anstiegs der Schlaufenlebensdauer mit zunehmender Anlaßdauer zu tieferen Temperaturen verlagert in entsprechendem Sinne wie die Verschiebung des Maximums der Warmaushärtung (vgl. die in Bild 14 eingezeichneten Festigkeitskurven). Eine durchgreifende Verbesserung des Spannungskorrosionsverhaltens ist aber nur unter Anlaßbedingungen zu erreichen, unter denen die Festigkeitswerte bereits stark abfallen; insgesamt betrachtet, ist also eine

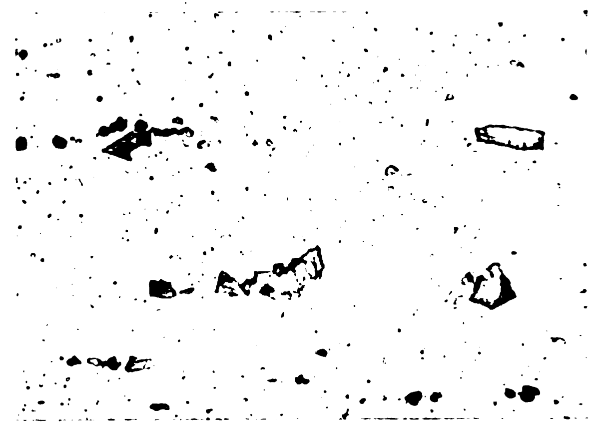


Bild 15. 20 bis 100°.

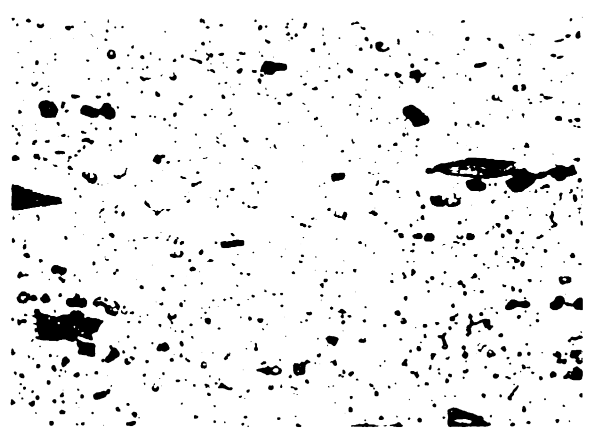


Bild 16. 120°.

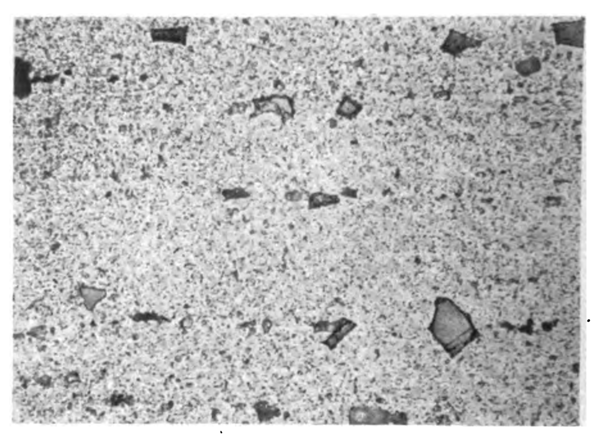


Bild 17. 200° wasserabgeschreckt.

praktisch wertvolle Verbesserung auf diese Weise nicht zu erzielen. Man ist somit bei Legierung MZ 8 auf die Luftkühlung angewiesen, mit der man sowohl im kaltausgehärteten als auch im warmausgehärteten Zustand eine ausreichende Spannungskorrosionsbeständigkeit erzielt; unsere Beobachtungen (s. Zahlentafel 2) lassen zwar eine gewisse Beeinträchtigung der Lebensdauern im Anlaßgebiet um 100° erkennen, die jedoch noch tragbar erscheint.

Weitere Versuche über den Einfluß einer Anlaßbehandlung auf das Spannungskorrosionsverhalten wurden mit Proben durchgeführt, die nach dem Lösungsglühen im wasserabgeschreckten bzw. luftgekühlten Zustand eine zusätzliche Kaltverformung von 2; 5 und 10% erhielten und nach 28tägiger Raumtemperaturlagerung 5 h bis 25 Tage bei 100° angelassen wurden. Es wurden im wesentlichen die gleichen Ergebnisse wie bei den Anlaßversuchen ohne Kaltverformung erhalten. Kaltverformungen von den angewandten Beträgen sind danach bei den untersuchten

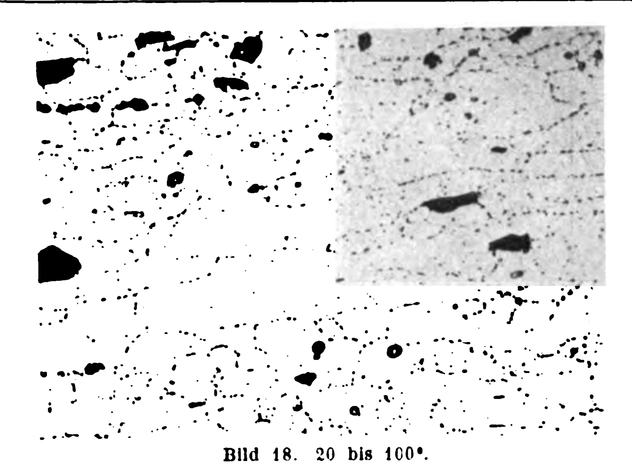


Bild 18. 20 bis 100°.

Bild 19. 120°.

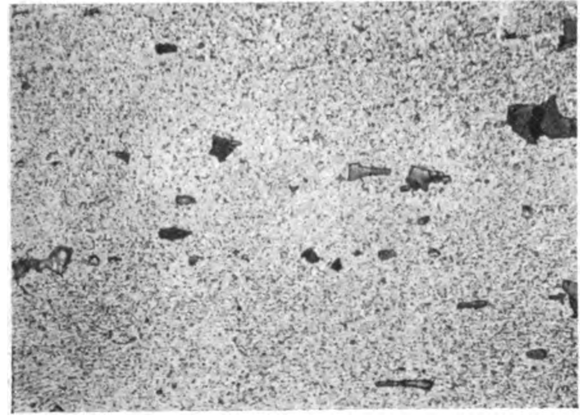


Bild 20. 200° luftgekühlt.

Bild 15 bis 20. Legierung MZ 8. Abhängigkeit der Gefügeausbildung von der Anlaßtemperatur bei einer 25tägigen Glühdauer.

Legierungen ohne Einfluß auf das Spannungskorrosionsverhalten nach Anlaßbehandlungen bei 100°.

3. Gefügeausbildung.

Bei der mikroskopischen Untersuchung der Anlaßzustände konnten Gefügeänderungen infolge von Ausscheidung übersättigt gelöster Gefügebestandteile erst oberhalb von 100° C festgestellt werden; die bei tieferen Temperaturen (unterhalb von 100°) angelassenen Proben ließen dagegen keine Veränderung gegenüber dem nicht angelassenen Ausgangszustand erkennen. Die bei Anlaßtemperaturen oberhalb von 100° beobachteten Gefügeänderungen lassen sich in Zusammenhang mit den Veränderungen der Festigkeitseigenschaften bringen. In ausgeprägtem Maße trifft dies wiederum bei der Legierung MZ 8 zu. In den Anlaßgebieten, in denen nach Bild 9 und 10 ein Abfall der Festigkeitswerte eintritt, konnte eine starke Zunahme der Feinausscheidungen festgestellt werden. Einige Gefügebilder von Legierung MZ 8, wasserabgeschreckt bzw. luftgekühlt, sind in den Bildern 15 bis 20 wiedergegeben.

IV. Zusammenfassung.

An zwei Al-Zn-Mg-Legierungen mit 6% Zn, 2% Mg (Legierung MZ 8) und mit 4% Zn, 2% Mg (Legierung MZ 6) wurde der Einfluß verschiedener Anlaßbehandlungen auf die Festigkeitseigenschaften und das Spannungskorrosionsverhalten untersucht. Die Versuche beziehen sich in der Hauptsache auf Anlaßbehandlungen, die unmittelbar nach dem Lösungsglühen im wasserabgeschreckten bzw. luftgekühlten Zustand bei Temperaturen zwischen 20 und 200° C verschieden lange (5 h bis 25 Tage) vorgenommen wurden.

Mit beiden Legierungen lassen sich durch Anlassen beträchtliche Steigerungen der Zugfestigkeit und Streckgrenze erzielen, wobei die Dehnung meist nicht unter 10% absinkt. Als geeignet zur Erreichung von Höchstwerten der mechanischen Eigenschaften erweist sich bei beiden Legierungen eine genügend lange Anlaßbehandlung bei etwa 100°. Anlassen bei 100° nach 14- bzw. 28tägiger Vorlagerung bei Raumtemperatur führt in Abhängigkeit von der Anlaßdauer zu den gleichen Werten wie Anlassen ohne Vorlagerung, unter anfänglichem Rückgang der Ausgangswerte.

Die Spannungskorrosionsbeständigkeit der Legierung mit 4% Zn, 2% Mg, die im kaltausgehärteten Zustand auch nach Wasserabschreckung vorhanden ist, geht durch Anlassen bis etwa 100° C verloren und stellt sich erst bei höheren Temperaturen wieder ein. Der Werkstoff ist danach im wasserabgeschreckten Zustand nicht anlaßbeständig. Um dies zu erreichen, muß man Luftabkühlung wählen, was für die Legierung mit 6% Zn, 2% Mg unter allen Umständen erforderlich ist. Eine Kaltverformung bis zu 10% beeinflußt das Spannungskorrosionsverhalten beider Legierungen nicht wesentlich.

Herrn Versuchsingenieur Otto Freyer danken wir herzlich für seine Mitarbeit.

Zündverzugsmessungen an flüssigen Kraftstoffen für Otto-Motoren*).

Von Ernst Lonn.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.
Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik.

Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Klopfneigung und Zündverzug werden an einer Bombe Zündverzugsmessungen an verschiedenen Kraftstoffen durchgeführt. Der folgende Bericht enthält die ersten Ergebnisse.

Gliederung.

Durch das Klopfen wird beim Ottomotor sowohl die erzielbare Leistung als auch, entsprechend dem zulässigen Verdichtungsverhältnis, der erreichbare Kraftstoffverbrauch begrenzt. Um mit Erfolg an einer Verminderung der Klopfneigung arbeiten zu können, ist es zunächst nötig, Klarheit über die beim Klopfen auftretenden Vorgänge zu schaffen. Weiterhin benötigt man Methoden und Verfahren, um die Klopfeigenschaften der verschiedenen Kraftstoffe eindeutig festlegen zu können.

Die schon seit langem bekannte und heute fast allgemein anerkannte Erklärung für den Klopfvorgang ist die, daß in dem verdichteten, noch unverbrannten Gemisch Selbstzündung stattfindet. Zur Kennzeichnung und Untersuchung der Klopfeigenschaften verschiedener Kraftstoffe können Messungen über den Zündverzug herangezogen werden, da für den Zündungsvorgang sowohl beim Zündverzug als auch beim Klopfen gemeinsame Gesetzmäßigkeiten vorhanden sind und die aus den Zündverzugsmessungen ermittelten Werte auch Aufschluß über die Klopfeigenschaften geben, wie F. A. F. Schmidt gezeigt hat[1]). Zur Aufklärung des Einflusses der chemischen und der thermischen Vorgänge wurden im Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik der DVL sowohl Messungen in einer Verdichtungsapparatur als auch Messungen bei Einspritzung flüssigen Kraftstoffes in eine Bombe durchgeführt. Über letztere Untersuchungen wird im folgenden berichtet[2]). Da der Reaktionsverlauf in verschiedenen Temperaturbereichen verschieden sein kann, ist es nötig, die Untersuchungen etwa im Bereich derjenigen Temperaturen und Drücke durchzuführen, die beim Ottomotor im Zeitpunkt des Klopfstoßes auftreten. Die Messungen erfassen einen Temperaturbereich von etwa 450 bis 630° C; sie wurden im allgemeinen bei Drucken von 10, 20, 30 und 40 atü durchgeführt. Die Fortführung der Versuche bei höheren Drucken und Temperaturen ist geplant.

*) G 11.

[1]) F. A. F. Schmidt, Theoretische Untersuchungen und Versuche über den Zündverzug und den Klopfvorgang. VDI-Forschungsheft 392 (1938).

Derselbe, Gegenseitige Beeinflussung von Gemischbildung und Zündungsvorgängen im Verbrennungsmotor, Heft 9 der Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung (1939).

[2]) Ähnliche Bombenversuche zur Aufklärung dieser Fragen hat bereits Lindner auf Anregung der DVL an Benzinen und Dieselkraftstoffen durchgeführt; s. W. Lindner, Schriften dtsch. Akad. Luftfahrtforschg., H. 9, S. 339 ff. (1939); einige seiner Ergebnisse sind eingehender (mit den einzelnen Meßpunkten) wiedergegeben bei H. Zeise, Ztschr. Elektrochem. Bd. 47 (1941), S. 786, Rundschau d. Forschg.-Geb. Ing.-Wesen, Jan./Febr. 1942, S. 43. Die in vorliegender Arbeit beschriebenen Zündverzugsmessungen wurden mit einer verbesserten Apparatur durchgeführt.

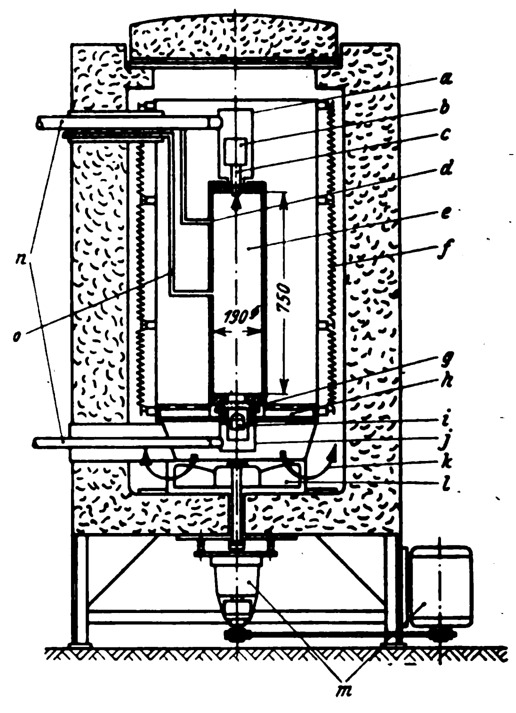


Bild 1. Anlage zur Messung des Zündverzuges von Kraftstoffen.

a) Kühlmantel,
b) Einspritzmeßgerät,
c) Einspritzdüse,
d) Thermoelement,
e) Versuchsbombe,
f) Heizwicklung,
g) Quarzplatte,
h) Rost,
i) Fotozelle,
j) Kühlmantel,
k) Luftbewegung,
l) Ventilator,
m) Ventilatorantrieb,
n) gekühlte Zuleitungen
o) Fülleitung.

1. Ausführung der Messungen.

Einen schematischen Schnitt durch die Versuchsanlage zeigt Bild 1[3]). In einem elektrischen Ofen mit Luftumwälzung wird ein zylindrisches Druckgefäß aus Stahl (Durchmesser 190 mm, Höhe 750 mm) aufgeheizt und mit Druckluft gefüllt. Nach Temperaturausgleich wird durch eine Zapfendüse (meist benutzt: Bosch DN 15 S 2) der Kraftstoff in flüssiger Form in die heiße Druckluft eingespritzt (Kraftstoffmenge: etwa 1 cm^3).

Als »Zündverzug« gilt die Zeit vom Beginn der Einspritzung bis zum Beginn der Flammenerscheinung. Beides wird mit Hilfe eines Zweistrahl-Kathodenstrahl-Oszillographen registriert, die Einspritzung über ein Einspritzmeßgerät, Bauart DVL, die Flamme über eine Front-Fotozelle. Anfänglich wurden infrarot-empfindliche Fotozellen benutzt (Preßler, Schicht »Spezial I«); da bei diesen aber bei höheren Temperaturen die Strahlung der Ofenwände usw.

[3]) Die Anlage ist von Dipl.-Ing. W. Franke gebaut worden und wurde auf Grund der im Laufe der Versuche gewonnenen Erfahrungen weiterentwickelt.



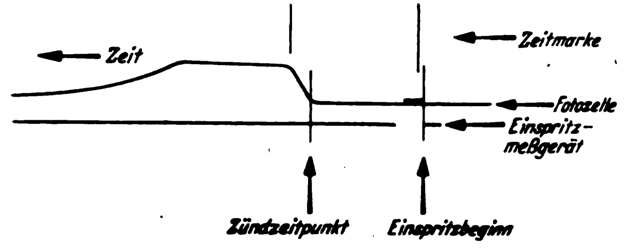


Bild 2. Aufgenommenes Diagramm. Zeitmarke: 500 Hz.

sehr störte, wurde weiterhin mit gelbempfindlichen Zellen (Preßler, Schicht »Cs K«) gearbeitet.

Bild 2 zeigt eines der aufgenommenen Diagramme. Die Anlage ist auch mit einem Quarzgeber zur piezoelektrischen Druckmessung ausgerüstet, da vielfach der »Zündzeitpunkt« nicht durch den Beginn der Flammenerscheinung, sondern durch den Beginn des Druckanstieges gekennzeichnet wird. Da jedoch bei der hier verwendeten Anlage infolge des großen Luftüberschusses (λ etwa zwischen 10 und 40) nur eine sehr geringe Drucksteigerung auftritt, wurde die Registrierung mit Fotozelle bevorzugt.

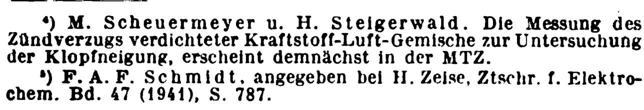
2. Ergebnisse.

Untersucht wurden bisher eine Reihe von technischen Kraftstoffen, ferner die Bezugskraftstoffe der Oktanzahldefinition, Normal-Heptan und Iso-Oktan.

Bild 3 zeigt als Beispiel die mit einem verbleiten Flugmotoren-Benzin (Oktanzahl 87) erhaltenen Ergebnisse. Über der Temperatur (in °C angegeben) sind die in Millisekunden gemessenen Zündverzüge z aufgetragen. In diesem wie in allen Fällen nehmen die Zündverzüge stark ab, wenn die Temperatur oder der Druck erhöht wird. Übereinstimmend mit Zündverzugsmessungen derselben Kraftstoffe in gasförmigem Zustand in einer Versuchseinrichtung zur annähernd adiabatischen Verdichtung[4]) von Kraftstoffdampf-Luftgemischen läßt sich die Abhängigkeit des Zündverzuges vom Druck etwa durch

$$z \sim p^{-1,35}$$

darstellen. Bei Normal-Heptan ist die Druckabhängigkeit erheblich geringer. Im übrigen zeigt sich stets — wie auch aus früheren Untersuchungen bekannt ist[5]) —, daß nach tiefen



[4]) M. Scheuermeyer u. H. Steigerwald. Die Messung des Zündverzugs verdichteter Kraftstoff-Luft-Gemische zur Untersuchung der Klopfneigung, erscheint demnächst in der MTZ.

[5]) F. A. F. Schmidt, angegeben bei H. Zeise, Ztschr. f. Elektrochem. Bd. 47 (1941), S. 787.

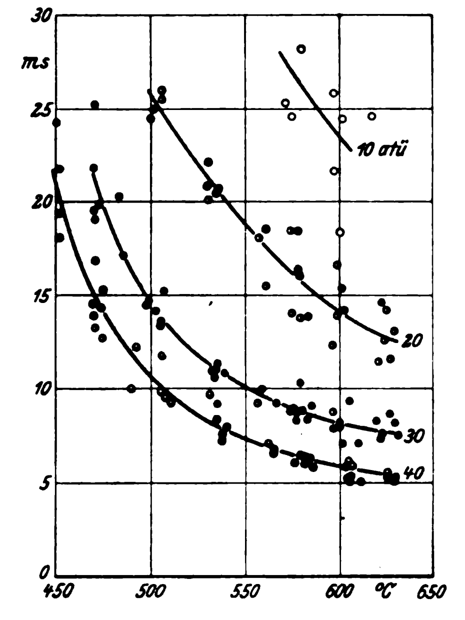


Bild 3. Zündverzüge eines Bleibenzins bei verschiedenen Temperaturen und Drucken.

Temperaturen hin die Druckabhängigkeit der Zündverzüge im Verhältnis geringer wird.

Zur genaueren Untersuchung der Abhängigkeit von der Temperatur wurde in bekannter Weise eine Auftragung mit ungleichförmigen Maßstäben benutzt, nämlich log z über 1000:T. (Beispiel Bild 4). Würden sich die Zündverzüge durch eine Formel

$$z = \frac{a}{p^n} \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

darstellen lassen, so müßten sich bei dieser Auftragung parallele gerade Linien ergeben. Tatsächlich ergab sich in allen Fällen (ausgenommen Iso-Oktan, bei dem aber noch zu wenig Messungen vorliegen) ein Verlauf nach Art von Bild 4. Dies zeigt, daß innerhalb eines nicht zu großen Temperaturbereiches — z. B. von 500 bis 570°C — die oben genannte Formel wohl als Interpolationsformel brauchbar ist, daß man jedoch für den Exponenten b einen um so größeren Betrag einzusetzen hat, je niedrigere Temperaturen in Betracht kommen. Für den Temperaturbereich von 500 bis 570°C liegen die Werte von b etwa bei 3000 bis 4500°

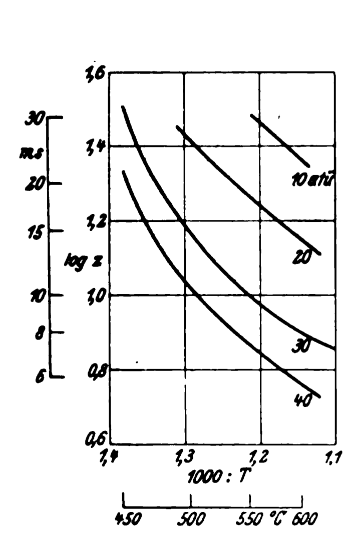


Bild 4. Zündverzüge eines Bleibenzins (Oktanzahl 87).

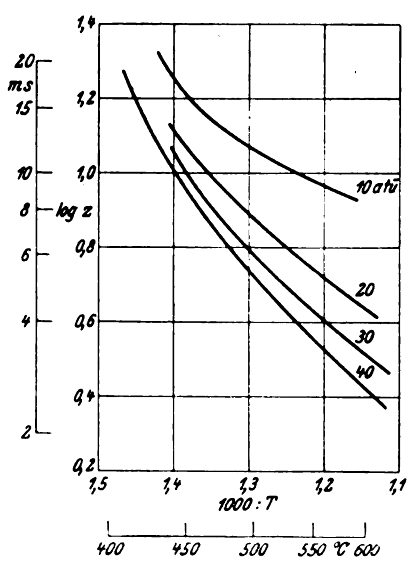


Bild 5. Zündverzüge von Normalheptan.

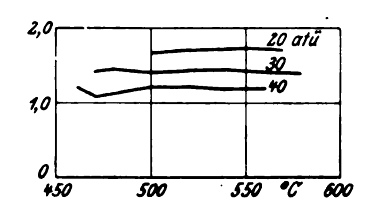


Bild 6. Wirkung des Zusatzes von Bleitetraäthyl auf einen Kraftstoff. Ordinate: Verhältnis der Zündverzüge von verbleitem zu unverbleitem Kraftstoff.



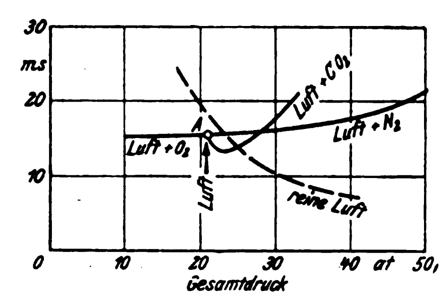


Bild 7. Zündverzüge von Bleibenzin, eingespritzt in Luft mit Gasbeimengungen. Die ausgezogenen Kurven sind sämtlich bei gleichbleibendem Sauerstoff-Teildruck (4,3 at) gemessen, während sich längs der gestrichelten Kurve (reine Luft) der Sauerstoff-Teildruck verändert. Temperatur: rd. 560° C.

Diese Betrachtungen geben noch keinen Aufschluß über die chemischen Vorgänge, da die thermischen Vorgänge mit in den Ergebnissen enthalten sind.

Bild 5 zeigt dasselbe für Normal-Heptan. Hier ist besonders deutlich erkennbar, daß die Kurven im Gebiet niederer Temperaturen mehr und mehr zusammenlaufen, entsprechend der obenerwähnten Tatsache, daß die Druckabhängigkeit bei tieferen Temperaturen geringer wird.

3. Vergleich der verschiedenen Kraftstoffe.

Vergleichen wir nun die verschiedenen Kraftstoffe miteinander[6]), so zeigt sich allgemein, daß der klopffestere Kraftstoff den längeren Zündverzug hat. Die Abhängigkeit von Druck und Temperatur ist allerdings bei den einzelnen Kraftstoffen nur qualitativ, nicht quantitativ dieselbe, und so wird es vorkommen können, daß die Reihenfolge der Kraftstoffe, nach steigendem Zündverzug geordnet, je nach dem betrachteten Druck- und Temperaturbereich verschieden ausfällt — entsprechend der aus Motorenversuchen gewonnenen Erkenntnis, daß das Klopfverhalten sich durch eine einzige Kenngröße — z. B. die Oktanzahl — nicht genau beschreiben läßt[7]).

Den Einfluß des Zusatzes von Bleitetraäthyl auf den Zündverzug zeigt Bild 6. Die Oktanzahl des Kraftstoffes erhöhte sich in diesem Falle durch den Zusatz von Bleitetraäthyl von 73 auf 87.

4. Wirkung von Fremdgaszusätzen.

An einem Kraftstoff wurden auch die Zündverzüge gemessen, die sich ergeben, wenn nicht in reine Luft, sondern in Luft mit Zusätzen von Stickstoff, Sauerstoff oder Kohlendioxyd eingespritzt wird. Die Ergebnisse sind in Bild 7 eingetragen. (Die Kurve für reine Luft sollte gleichfalls durch den Punkt A gehen; daß dies nicht geschicht, liegt z. T. an der Streuung der Meßresultate, z. T. wohl an geringen Veränderungen des Kraftstoffes, da die Messungen für diese Kurve um einige Monate älter sind als die übrigen).

Als wesentlichen Inhalt entnehmen wir Bild 7:

1. Bei Sauerstoff-Stickstoff-Gemischen ist übereinstimmend mit theoretischen Erwartungen der Zündverzug nicht durch den Gesamtdruck bestimmt, sondern in erster Linie durch den Sauerstoff-Teildruck. (Bei sehr großen Stickstoffzusätzen werden die Zündverzüge etwas länger).

2. Bei größeren Zusätzen von Kohlendioxyd werden die Zündverzüge erheblich länger. Kleinere Zusätze von CO_2 scheinen dagegen die entgegengesetzte Wirkung zu haben. Leider ist die Abnahme nicht viel größer als die Streuung der Meßresultate. Daher kann dieses Verhalten, das zum Verständnis gewisser Erfahrungen am Motor von Bedeutung ist, nicht als vollkommen bewiesen gelten.

[6]) Voraussetzung bei diesen vergleichenden Betrachtungen ist, daß die untersuchten Kraftstoffe sich in ihrem Siedeverhalten nicht allzu sehr unterscheiden, so daß der Einfluß der thermischen Vorgänge jeweils angenähert derselbe ist.

[7]) Vgl. F. A. F. Schmidt, Fußnote 1.

Die Biegedauerhaltbarkeit von Kurbelwellenverbindungen*).

Von F. Gauß, Stuttgart.

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Techn. Hochschule Stuttgart.

Die geteilte Kurbelwelle hat sich besonders bei Sternmotoren eingeführt. Im Betrieb wird sie hauptsächlich von Biegekräften beansprucht. Für die Betriebsbewährung ist damit die Biegedauerhaltbarkeit der Kurbelwellenverbindung von wesentlichem Einfluß.

Zu ihrer Untersuchung wurden an verschieden gestalteten Hirth-Verbindungen, einfachen Preß- und Klemm-Verbindungen Biegedauerversuche durchgeführt. Über das Verhalten und die Haltbarkeit dieser Verbindungen bei umlaufender Biegewechselbeanspruchung wird berichtet.

Gliederung.

1. Einleitung.

Bei hochbeanspruchten Kurbeltrieben bringt eine Teilung der Wellen verschiedene Vorteile. Zunächst ist die Herstellung einzelner Bauglieder einfacher als die einer ganzen gekröpften Welle. Der ausschlaggebende Grund für die Verwendung geteilter Wellen liegt aber meist darin, daß eine geteilte Welle eine zweckmäßigere Gestaltung anderer Bauteile ermöglicht. So kann z. B. bei Sternmotoren das Hauptpleuel mit einem ungeteilten Hubzapfenlager ausgeführt werden. Deshalb findet man gerade bei dieser Triebwerksart in der Regel zusammengebaute Kurbelwellen, wobei Preß- und Klemmverbindungen häufig Anwendung finden. Eine weitere im Flugmotorenbau benutzte Möglichkeit zur Verbindung zweier Wellenteile ist durch die von Hirth eingeführte Stirnverzahnung gegeben. Der Zweck der vorliegenden Untersuchung war, Aufschluß über das Dauerverhalten dieser Verbindungen, im besonderen der Hirth-Verbindung, unter den im Motor auftretenden Beanspruchungen zu erhalten.

Die überwiegende Beanspruchung einer Sternmotoren-Kurbelwelle rührt von den in der Kröpfungsebene wirkenden, nach der Wellenachse gerichteten Biegekräften her. Für die Betriebsbewährung ist damit die Biegedauerhaltbarkeit von wesentlichem Einfluß. Die genannten Verbindungsarten wurden im Hinblick auf diese Beanspruchung Biegedauerversuchen mit einer reinen Schwingungsbelastung, d. h. einer wechselnden Belastung mit dem Mittelwert Null unterworfen. Die Ergebnisse der Versuche sollten einen Vergleich der Verbindungen ermöglichen und Näherungswerte für die zulässigen Biegeschwingungsbeanspruchungen liefern.

2. Hirth-Verbindung.

a) Gestaltung.

Die beiden Wellenteile, die kraft- und formschlüssig verbunden werden sollen, erhalten eine Stirnverzahnung und werden mit einem Spannbolzen zusammengespannt, Bild 1. Bei den Verzahnungen unterscheidet man die doppelt schräge und die einfach schräge Verzahnung. Die Zähne der doppelt schrägen Verzahnung sind in beiden Wellenteilen gleich und haben eine zur Wellenachse schräge Kante, Bild 2a. Die einfach schräge Verzahnung, die hier allein untersucht wurde, hat in einem der Wellenteile Zähne, deren Kanten in einer zur Wellenachse senkrechten Ebene liegen, Bild 2b. Diese Verzahnungsart kann auch bearbeitet werden, wenn sie unmittelbar neben einem Wellenabsatz angeordnet wird.

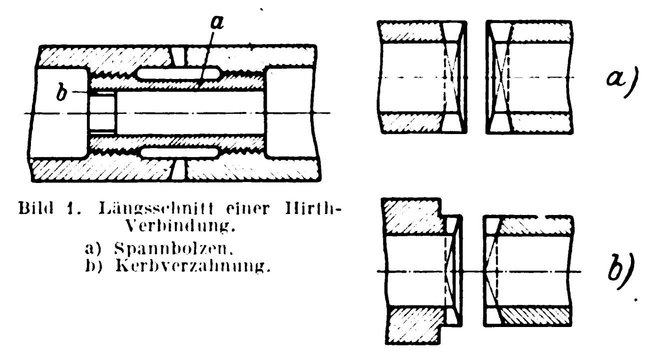


Bild 1. Längsschnitt einer Hirth-Verbindung.
a) Spannbolzen.
b) Kerbverzahnung.

Bild 2. Arten der Verzahnung.
a) doppelt schräge Verzahnung.
b) einfach schräge Verzahnung.

Die Verzahnungen lassen sich kennzeichnen durch die Zähnezahl und den Verzahnungswinkel 2β, vgl. Bild 3. Der bisher gebräuchliche Verzahnungswinkel, der auch bei den vorliegenden Versuchen Verwendung fand, beträgt $2\beta = 60^0$. Es wurde jedoch schon darauf hingewiesen [1], daß für Verdrehbeanspruchung ein Winkel von 90^0 hinsichtlich der Spannungsübertragung in den Zahnflächen günstiger ist. Die Zähne, die geschliffen werden, tragen nur an den Flächen und zentrieren die beiden Wellenteile selbst; die Zahnkanten werden gebrochen und der Zahngrund wird ausgerundet.

Für den Spannbolzen gibt es zwei Ausführungsmöglichkeiten, entweder als Gewindebolzen mit Spannkopf oder als Differentialgewindebolzen mit zwei Gewinden verschiedener Steigung. Ein Differentialgewindebolzen hat den Vorteil, daß er sich in Hohlwellen gut einbauen läßt und nicht gesichert werden muß. Zum Anspannen haben die bisher gebräuchlichen Hohlbolzen, vgl. Bild 1, innen eine Kerbverzahnung. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurden Bolzen mit besonderem Spannkopf verwendet, vgl. Bild 7.

Der Einfluß der Gestaltung auf die Biegedauerhaltbarkeit wurde an Prüfverbindungen mit 60 bzw. 50 mm Außendurchmesser geprüft. Verändert wurde die Wellenwandstärke zwischen 6 und 10 mm, die Spannlänge, d. h. Bolzenlänge zwischen 30 und 80 mm, und die Gestalt der Bolzen, die alle Gewindesteigungen von 1,5 und 2 mm bei einer Gewindelänge von ungefähr 20 mm hatten. Die untersuchten Verbindungen hatten 48 und 24 Zähne. Für die Prüfwellen wurde ein Stahl St C 45.61 verwendet und zu Vergleichsversuchen ein auf 100 bis 110 kg/mm² Festigkeit vergüteter Chrom-Molybdänstahl. Die Spannbolzen waren aus einem auf 115 bis 130 kg/mm² Festigkeit vergüteten Chrom-Nickel-Molybdän-Stahl.

*) K 331.

Bild 3. Spannungszustand in der Verzahnung.
a) Spannungen wie am ungeteilten Körper,
b) schubspannungsfreie Übertragung in der Trennfläche.

b) Spannungsverteilung.

Einen wesentlichen Einfluß auf das Betriebsverhalten der Verzahnung hat die Vorspannung. Sie ist so groß zu wählen, daß die Zähne durch die wechselnde Betriebsbelastung nicht zum Abheben kommen. Wenn man außerdem fordert, daß keine Reiboxydation in den Zahnflächen durch ein gegenseitiges Arbeiten der Zähne auftritt, darf die Gleitgrenze in den Zahnflächen nicht überschritten werden. Dazu müssen alle Normal- und Schubspannungen, die von der wechselnden Belastung herrühren, in den Zahnflächen so übertragen werden, wie wenn keine Trennfläche vorhanden wäre, d. h. ohne Rutschen der Zähne. Einen Zusammenhang zwischen der Vorspannung und der Biegespannung findet man mit den Beziehungen für den ebenen Spannungszustand, die hier als gute Näherung angewandt werden dürfen.

Zunächst wird die Spannungsverteilung nach dem Zusammenspannen der Verbindung betrachtet. Eine einfache Zerlegung der auf eine Zahnfläche fallenden Axialkraft in eine auf die Zahnfläche wirkende Normal- und eine Schubkraft und ein Vergleich der sich ergebenden Spannungen σ und τ, Bild 3a, zeigt sofort, daß bei spitzen Zahnwinkeln die Reibung zwischen glatten Zahnflächen nicht ausreicht, um die Schubspannung zu übertragen, da die Reibungszahl $\mu \geqq \frac{\tau}{\sigma} \geqq \operatorname{cotg} \beta$, d. h. für $\beta = 30^0$ $\mu > 1$ sein müßte. Unter der axialen Vorspannung allein wird die Gleitgrenze in der Verzahnung überschritten, und die Zähne verschieben sich etwas gegeneinander, bis sich das der Reibungszahl μ entsprechende Verhältnis zwischen Normal- und Schubspannung eingestellt hat.

Wenn sich nun diesen Vorspannungen (Fußzeichen $_v$) die wechselnden Biegespannungen (Fußzeichen $_b$) überlagern, setzt sich dieser Vorgang der Verschiebung der Zähne gegeneinander zunächst fort. Dabei wird die von der Vorspannung herrührende Schubspannung abgebaut und die Normalspannung nimmt zu. Die Vorspannung ist richtig gewählt, wenn eine Spannungsverteilung erreicht wird, bei der die Wechselbeanspruchung ohne Verschiebung der Zähne entsprechend der Zerlegung in Bild 3a (wobei $\sigma_x = \sigma_b$ zu setzen ist) übertragen wird. Die dazu notwendige zusätzliche Normalspannung in der Zahnfläche kommt von der Vorspannung und erreicht in dem gerade noch erlaubten Grenzfall an der Gleitgrenze ihren Größtwert, wenn die von der Vorspannung herrührende Schubspannung ganz abgebaut ist und die ganze Vorspannung nur durch Normalkräfte übertragen wird, Bild 3b. Durch Zusammensetzen der Spannungszustände für die Wechselbeanspruchung nach Bild 3a und die Vorspannung nach Bild 3b findet man für die Spannungsverteilung in der Zahnfläche

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_v + \sigma_b \sin^2 \beta \\ \tau &= \sigma_b \sin \beta \cos \beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Mit der Reibungszahl μ zwischen den Zahnflächen muß noch

$$\tau \leqq \mu \, \sigma \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

sein und es ergibt sich für die Vorspannung die Bedingung

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_b} \geqq \frac{\sin 2 \beta}{2 \mu} - \sin^2 \beta \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Zur Abkürzung wird im folgenden die Vorspannzahl $k = \frac{\sigma_v}{\sigma_b}$ eingeführt. Die Beziehung (3) für die Gleitgrenze gilt für die höchstbeanspruchte Randfaser und ist unabhängig von der Zähnezahl und von der Größe der tragenden Zahnfläche, die zwar den Betrag der Spannungen, aber nicht die Verhältniszahl k beeinflussen.

Zur Untersuchung der Verteilung der Belastung auf Welle und Bolzen kann man annehmen, daß die Verbindung des Bolzens mit der Welle durch die Gewinde starr sei, außerdem sollen die beiden Werkstoffe dieselbe Elastizitätszahl haben. Man findet mit den äußeren Halbmessern r, den Querschnitten f, den äquatorialen Trägheitsmomenten J, den Momenten M, wenn die Fußzeichen W und B Welle und Bolzen und v und b Vorspannung und Biegespannung bedeuten, die Wellenspannung

$$\sigma_W = \sigma_{vW} \pm \sigma_{bW} = (k \pm 1) \cdot \frac{r_W}{J_W + J_{Bm}} M_{ges} \quad \ldots \quad (4)$$

und die Bolzenspannung

$$\sigma_B = \sigma_{vB} \pm \sigma_{bB} = \frac{f_W}{f_B} k \frac{r_W}{(J_W + J_{Bm})} M_{ges} \pm \frac{r_B}{J_B} \cdot \frac{J_{Bm}}{(J_W + J_{Bm})} M_{ges} \quad \ldots \quad (5)$$

In dieser Beziehung, die für alle belasteten Bolzenquerschnitte mit den jeweiligen Werten für r_B und J_B gilt, ist J_{Bm} ein mittleres Bolzenträgheitsmoment, das sich für abgesetzte und ausgerundete Bolzen näherungsweise durch Zusammensetzen aus zylindrischen Teilstücken bestimmen läßt. Dabei wird die gedachte Einspannebene des Bolzens in den zweiten bis dritten Gewindegang gelegt. Dadurch wird berücksichtigt, daß der Bolzen nicht im ersten Gewindegang eingespannt zu denken ist, sondern auch ein Teil der Gewindelänge gebogen wird.

Aus Gl. (5) ist ersichtlich, daß für zylindrische Bolzen ($J_{Bm} = J_B$) die Bolzenwechselspannung $\pm \sigma_{bB}$ dem Halbmesser r_B nahezu verhältig ist, da sich bei den praktisch gebräuchlichen Abmessungen der Wert ($J_w + J_{Bm}$) nur wenig von J_w unterscheidet. Es ist bekannt, daß bei Gewindebolzen der Gewindeansatz die empfindlichste Stelle ist [2]; hier läßt sich die Wechselspannung herabsetzen, wenn der Durchmesser des Bolzenteils zwischen den Gewinden und damit das mittlere Trägheitsmoment verringert wird. Bei diesen zusammengesetzten Bauteilen wird ein voller, nicht hohl gebohrter Bolzen wegen seines kleineren Durchmessers durch ein geringeres Biegemoment belastet als ein Hohlbolzen gleichen Querschnitts.

c) Versuchsdurchführung.

Die Versuche wurden auf einer großen Umlaufbiegemaschine von Schenck, Darmstadt [3] durchgeführt. Die Prüflinge sind zusammengesetzte Bauteile, bei denen die unvermeidlichen kleinen Verschiedenheiten der Paßflächen, wie sie die Bearbeitung ergibt, beträchtliche Unterschiede in der örtlichen Spannungsverteilung beim Zusammensetzen verursachen können. Die Vorspannung wurde aus der Zusammendrückung der Welle mit Hilfe von Dehnungsmessern bestimmt. Gleichzeitige Messungen an zwei gegenüberliegenden Meßstellen am verspannten Wellenteil neben der Verzahnung zeigten, daß Streuungen bis zu ungefähr 10% auftreten. Die Versuchsbedingungen sind damit von vornherein nicht so gleichmäßig wie bei einteiligen Prüflingen und es treten in den Ergebnissen noch größere Streuungen auf als bei einfachen Prüfstäben. Man kann deshalb mit wenigen Versuchspunkten keine ganze Wöhler-Linie aufzeichnen, sondern nur aus einem gewissen Streubereich annähernd einen unteren Grenzwert für die Dauerfestigkeit angeben.

Die Frage, wie weit die beim Zusammenbau der Verbindung aufgebrachte Vorspannung erhalten bleibt, ist von ausschlaggebender Bedeutung. Zur Nachprüfung der Veränderung der Vorspannung wurden statische Biegeversuche in die Dauerversuche eingeschaltet, bei denen mit Dehnungsmessern die Längenänderungen des verzahnten Wellenabschnitts auf der Zug- und Druckseite gemessen wurden. Beim ersten Biegeversuch vor den Dauerversuchen traten schon bei Belastungen, die unter der Dauerprüfbelastung lagen, bleibende Formänderungen auf der Druckseite auf. Daraus ist zu schließen, daß bei Hirth-Verbindungen mit den ersten Lastspielen die Druckwechselfließgrenze durch die hohen Kerbspannungsspitzen überschritten wird, wodurch mit den



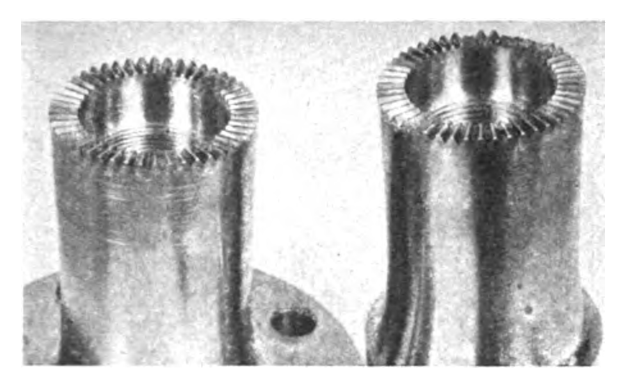


Bild 4. Abgescherte Zähne.

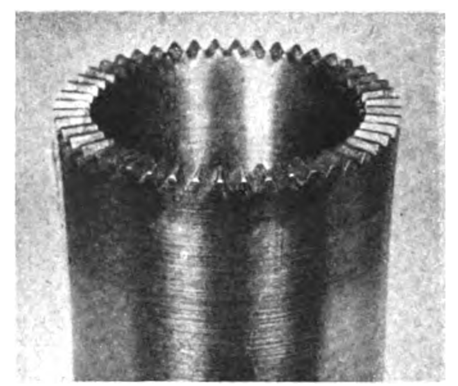


Bild 5. Längsanrisse in der Verzahnung.

zunehmenden bleibenden Formänderungen die Vorspannung etwas kleiner wird. Nach dem Abbau der Spannungsspitzen zeigten die statischen Dehnungsmessungen, ob die Zähne unter der Prüflast zum Abheben kommen. Für den Fall des Abhebens kann durch eine einfache geometrische Betrachtung die zusätzliche Bolzenkrümmung bestimmt werden und damit auf eine Erhöhung der Bolzenbeanspruchung geschlossen werden. Diese erweist sich als recht beträchtlich und kann die Ursache für vorzeitige Bolzenbrüche sein.

d) Die Verzahnung.

Die ersten Brüche traten bei Biegspannungen von ungefähr $\pm$ 18 kg/mm² und mehr durch Abscheren einzelner Zähne, Bild 4, an Prüfverbindungen auf, die sich bei einer Spannlänge von 30 mm im wesentlichen durch die Wellenwandstärke (6 bis 10 mm) unterschieden. Ein anderes Bruchbild zeigt eine Verbindung mit 6 mm Wandstärke und 80 mm Spannlänge; hier traten vom Zahngrund ausgehende Längsanrisse auf, die auf der Innenseite der Welle begannen, Bild 5. Beide Anrißarten ergaben sich nebeneinander bei der Vergleichsverbindung aus dem höherwertigen Chrom-Molybdänstahl mit 8 mm Wanddicke und 36 mm Spannlänge. Alle Anrisse traten erst nach mehreren Millionen Lastspielen auf, nachdem ein langsam zunehmendes Abheben der Zähne vorhergegangen war.

Nun wurden Verbindungen geprüft, bei denen ein kleiner die Verzahnung enthaltender Wellenabschnitt im Vergleich zur übrigen verspannten Welle stark geschwächt war, so daß die Verzahnung bei großer Vorspannung hohen Wechselbeanspruchungen unterworfen wurde. Die Versuche wurden mit gleichbleibender, sowie mit stufenweise gesteigerter Belastung durchgeführt, wobei der Bolzen nachgespannt wurde, sobald die Zähne durch ein Nachlassen der Vorspannung zum Abheben kamen. Der Bruch trat durch Abscheren der Zähne ein, nachdem zusammen mit einer Vergrößerung des Verzahnungsdurchmessers das Abheben so rasch zunahm, daß ein Nachspannen unmöglich wurde. Die Vergrößerung des Verzahnungsdurchmessers wird bei einer axialen Belastung durch eine nach außen gerichtete Kraftkomponente hervorgerufen, die sich, wie eine räumliche Kräftezerlegung zeigt, durch die Neigung der Zahnflächen der Zähne mit schräger Kante ergibt. Brüche der Verzahnung konnten auch nach Überschreiten der Fließgrenze solange nicht festgestellt werden, wie die Vorspannung genügend groß war und alle Zähne zum Tragen kamen. Das kommt daher, daß die Zähne durch die Biegebeanspruchung der Verbindung im Gegensatz zur Drehbeanspruchung nahezu symmetrisch belastet werden und der Kraftfluß von den Kerben kaum beeinflußt wird.

Die Zahnbrüche bei Biegebeanspruchung der Welle sind eine Folgeerscheinung der nachlassenden Vorspannung. Die Längsanrisse sind so zu erklären, daß bei kleinen Wandstärken oder kerbempfindlichen Werkstoffen, anscheinend begünstigt durch eine größere Spannlänge und biegeweiche Bolzen, die örtliche Spannungsanhäufung auf der Druckseite der stark abhebenden Verzahnung die Welle aufschlitzt, ehe die Zähne zum Abscheren kommen. Für die Verzahnung selbst ist, wenn nicht der Bolzen die Entspannung der Verbindung einleitet, die größte zulässige Biegebeanspruchung durch die Druckwechselfließgrenze bestimmt. Diese wird zuerst in der Verzahnung erreicht, in der eine erhöhte Spannung herrscht, da durch die Ausrundungen den Querschnitt schwächende Lücken entstehen. Wie oben bei den statischen Messungen erwähnt wurde, führen diese Spannungsspitzen schon bei niederen Belastungen zu kleinen Formänderungen, die ihrerseits eine Erhöhung der Fließgrenze zur Folge haben.

Die höchste zulässige Druckbeanspruchung ergab sich neben der Verzahnung gemessen, für den Werkstoff St C 45.61 zu 35 bis 40 kg/mm². Die Dauerhaltbarkeit ist dadurch begrenzt, daß durch Vorspannung und Wechselspannung zusammen diese Druckspannungsbeträge nicht überschritten werden dürfen. Die Vergleichsverbindung mit der kleineren Zähnezahl 24 zeigte den Einfluß der Zähnezahl nicht, da die Anrisse in der Welle lagen. Es ist denkbar, daß an den größeren Zähnen bei kleinerer Zähnezahl ein kritischer Spannungszustand erst später, d. h. etwa bei stärkerem Abheben eintritt als bei kleinen Zähnen.

Da durch die langsame Entspannung der Verbindung Zahnbrüche noch nach 10^7 Lastspielen auftreten können, reicht diese Grenzlastspielzahl zur Beurteilung der Bruchwahrscheinlichkeit der Verzahnung allein nicht aus. Um trotzdem zur Abkürzung der Versuche diese Grenze beibehalten zu können, wurde bei den Versuchen eine zusätzliche Bedingung aufgestellt und die Dauerfestigkeit als die Grenzbeanspruchung festgelegt, bei der nach 10^7 Lastspielen keine beim statischen Biegeversuch merkbare Änderung der Spannungsverteilung, d. h. kein Abheben der Zähne eingetreten war.

Für den praktischen Betrieb wird gefordert, daß keine Reiboxydation in den Paßflächen entsteht. Wenn das Verhältnis von Vorspannung zu Wechselbiegespannung $\frac{\sigma_{vw}}{\sigma_{bw}} \geq$ 2,5 war, zeigten sich nur geringe Reiboxydationserscheinungen an den Zahnrändern. Damit findet man nach Gl. (3) eine mittlere Reibungszahl von ungefähr 0,2 für die Übertragung von Schubwechselspannungen in den Zahnflächen.

e) Der das Gewinde umfassende Wellenabschnitt.

Eine weitere Bruchstelle der Verbindung lag in der Welle und ging — von der Verzahnung aus gesehen — von den letzten tragenden Gewindegängen aus, Bild 6. Da ungeteilte nicht verzahnte Vergleichswellen nicht im Gewinde, sondern in der daneben liegenden Ausrundung brachen, ist anzunehmen, daß der Bolzen die Bruchstelle bestimmt. Es müssen also wohl auch die letzten Gewindegänge des Bolzens Kräfte übertragen. Dies läßt sich damit erklären, daß durch die Wechselbeanspruchung die zunächst stark belasteten ersten Gewindegänge durch bleibende Verformungen etwas entlastet werden und in gewissem Umfang ein Belastungsausgleich auf alle Gewindegänge erfolgt.

Die Beanspruchung des Wellengewindes setzt sich zusammen aus der Spannung, die sich aus dem durch die Welle geleiteten Biegemoment und der durch den Bolzen eingeleiteten Vorspannung ergibt, die zum Vergleich auf eine das Gewinde ersetzende Zylindermantelfläche bezogen werden

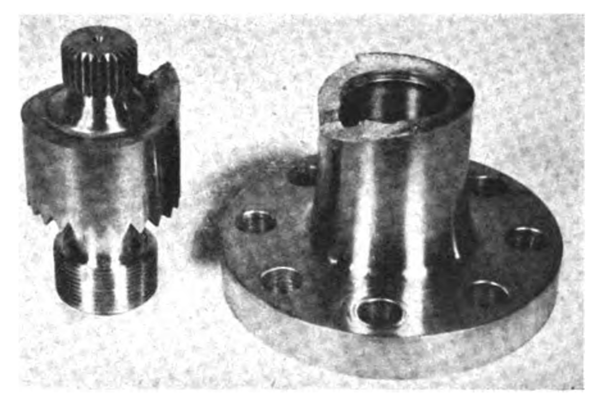


Bild 6. Bruch in der Welle vom Gewinde ausgehend.

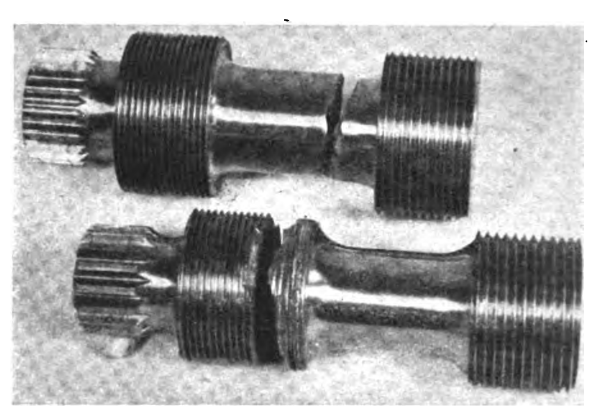


Bild 7. Spannbolzenbrüche.

kann. Wenn man das vom Bolzen in die Welle eingeleitete Biegewechselmoment ebenfalls sinngemäß auf dieselbe zylindrische Ersatzfläche für das Gewinde bezieht, findet man, daß dieser Spannungsanteil klein ist und die Belastung im wesentlichen durch die vorher genannten Spannungen bestimmt ist. Im Wellengewinde wurden Wechselspannungen von ± 9 bis ± 13 kg/mm² nahezu unabhängig von der auf die Vergleichsfläche umgerechneten Vorspannung bis zu ungefähr 16 kg/mm² ertragen. Der Vorspannungswert ist von der Gewindelänge abhängig und gilt, da die wirkliche Spannungsverteilung auf die einzelnen Gewindegänge nicht bekannt ist, nur für die untersuchten Abmessungen. Der Wechselbeanspruchung im Wellengewinde entspricht eine Randfaserbeanspruchung der Welle von ungefähr ± 17 bis ± 20 kg/mm². Bei einer Welle aus dem Chrom-Molybdän-Stahl wurde eine Wechselspannung von ± 23 kg/mm² erreicht. Diese Werte für die Bruchstelle im Gewinde ergaben sich für die 60 mm-Wellen mit Bohrungen von 40 und 44 mm und Gewinden von 39 und 42 mm Außendurchmesser. Bei einer Welle mit 48 mm Bohrung und einem Gewinde von 36 mm führte die Kerbspannung im ausgerundeten Übergang den Bruch außerhalb des Gewindes herbei.

f) Der Bolzen.

Die bisher verwendeten Bolzen, vgl. Bild 1, bei denen der Schaftdurchmesser nahezu gleich dem Gewindekerndurchmesser ist, brechen, von der Bolzenmitte aus gesehen, im ersten tragenden Gewindegang. Da, wie oben gezeigt wurde, Bolzen mit im Verhältnis zur Querschnittsfläche kleinem Trägheitsmoment weniger beansprucht sind, wurde der Bolzenschaft nicht hohl gebohrt, sondern im Durchmesser so lange geschwächt, bis der Anriß von dem ausgerundeten Übergang zum Gewinde ausging, Bild 7. Auf diese Weise wurde versuchsmäßig mit einem Verhältnis von ungefähr 0,8 zwischen Bolzenschaft- und Gewindekerndurchmesser ein Bolzen annähernd gleicher Festigkeit gefunden. Eine weitere Entlastung des gefährdeten ersten Gewindegangs wurde, wenn der Durchmesserunterschied es zuließ, durch Hinterdrehen erzielt, vgl. Bild 7, wobei besonders günstig ist, daß die hinterdrehten Gewindegänge auf Druck vorgespannt sind. Die ertragbaren Wechselbeanspruchungen waren im Bolzenschaft ungefähr ± 11 kg/mm² nahezu unabhängig von der Vorspannung bis zu 60 kg/mm². Die zulässige Beanspruchung im Gewinde betrug ± 5 kg/mm². Diese Spannung ist auf den Gewindekernquerschnitt bezogen und ist für die Bruchstelle eine brauchbare Vergleichsgröße, da hier — im Gegensatz zu den obengenannten Gewindebrüchen in der Welle — die Spannungsspitze von der Gewindelänge nicht wesentlich beeinflußt sein dürfte.

Unterschiede zwischen Gewinden verschiedener Steigung waren nicht bemerkbar. Eine wesentlich größere Festigkeit hatten nitrierte Bolzen, die jedoch wegen der Neigung zum Ausbrechen einzelner Gewindegänge nicht verwendbar sind.

Ein Abscheren aller Gewindegänge, besonders in der Welle, trat bei sehr hohen Vorspannungen ein, z. B. nach kurzer Versuchsdauer bei einer auf den Gewindekernquerschnitt bezogenen Belastung von 32,5 ± 4,7 kg/mm².

Zum Vergleich eines günstig gestalteten Bolzens mit einem üblichen Bolzen wurde an einer bestimmten Verbindung ohne Rücksicht auf Reiboxydationserscheinungen bei gleicher Vorspannung ein unmittelbarer Vergleichsversuch durchgeführt. Dabei ergab sich für die 10^7-Lastspielgrenze eine Wechselfestigkeit von ± 8,3 kg/mm², bezogen auf die Randfaser der Welle, und es brach der Bolzen. Dagegen wurden mit einem Vollbolzen ± 16,3 kg/mm², also etwa das Doppelte, erreicht, wobei die Festigkeit durch die Welle bestimmt war.

g) Die Biegedauerhaltbarkeit der Hirth-Verbindung.

Die Versuche haben die zulässige Wechselbeanspruchung für die Verzahnung und für die durch Kerbwirkung geschwächten Querschnitte der Welle und des Bolzens ergeben. Die gefährliche Kerbwirkung ist durch die Gestaltung bedingt und tritt entweder in einem Gewinde selbst oder in einem durch ein Gewinde bedingten Querschnittsübergang auf. Die wesentlichen zahlenmäßigen Ergebnisse sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Die Zahlenwerte gelten für Bauteile von Hirth-Verbindungen, die hinsichtlich der Werkstoffe, ihrer Bearbeitungsgüte und der Größenordnung der Abmessungen bei möglichst stark ausgerundeten Querschnittsübergängen den untersuchten Verbindungen entsprechen.

Die Verbindung ist so zu bemessen, daß die gefundenen Näherungswerte für die Dauerhaltbarkeit an den gefährdeten Stellen nicht überschritten werden. Man findet dann für 60 mm Wellendurchmesser einen Bestwert für das übertragbare Biegemoment bei 9 mm Wanddicke und 40 mm Gewindeaußendurchmesser mit einer höchsten Dauerbelastung von ± 11 kg/mm² in der Randfaser der Welle, wenn durch ein Verhältnis von 2,5 zwischen Vorspannung und Wechselspannung Reiboxydationserscheinungen verhindert werden. Wird diese Vorspannzahl zu 1,3 gewählt, so kann eine durch die Wirkung der Reiboxydation zeitlich begrenzte Beanspruchung von ± 17 kg/mm² übertragen werden, wobei dann noch ± 9 kg/mm² ohne Reiboxydationserscheinungen zulässig sind. Bei der Vorspannung, die aufzubringen ist, muß die geringe Entspannung bei den ersten Lastspielen berücksichtigt werden, und bei Ausnützung der größten zulässigen Spannungen ist ein Nachspannen des Bolzens nach dem Einlaufen zweckmäßig.

Zum Vergleich mit den verzahnten Wellen wurden gleichausgebildete aber ungeteilte Wellen ohne Vorspannung untersucht. Der Anriß lag auf der Innenseite am Übergang zum abgesetzten Gewinde, und die Dauerfestigkeit betrug ± 21 kg/mm², bezogen auf die Randfaser der Welle. Die Hirth-Verbindung hat damit im Vergleich zur ungeteilten Welle ungefähr eine Festigkeit von 50% bzw. von 40% mit einer zeitlich begrenzten Belastbarkeit von 80%.

Die gefundenen Zahlenwerte gelten für eine reine Schwingungsbeanspruchung mit dem Mittelwert Null. Im praktischen Betrieb wird meistens eine Wechselbeanspruchung zwischen einem oberen und einem unteren Grenzwert mit

Zahlentafel 1. Zusammenstellung der zulässigen Spannungen bei Biegewechselbeanspruchung.

	Abmessungen	Schwachstellen	Beanspruchungsart	Höchstbeanspruchg. kg/mm²	Werkstoff
Hirth-verbindung	Wellendurchmesser außen 60 (50) mm, innen 40 bis 48 mm, Zähnezahl 48 (24), Zahnwinkel 60°, Gewindedurchmesser 32 bis 42 mm, Gewindelänge ungefähr 20 mm	Verzahnung	Betrag der Druckspannung	35 bis 40[1]	StC 45.61
		Welleninnen-gewinde	Vorspannung	(16)[2]	
			Wechselspannung	±9 bis ±13	
		Bolzenschaft	Vorspannung	bis 60	Cr-Ni-Mo-Stahl
			Wechselspannung	±11	
		Bolzengewinde	Wechselspannung	±5	
Preß-verbindung	Sitzdurchmesser 50 mm	Einspannstelle	Wechselspannung	±11	StC 45.61
Doppeltreib-kegel-verbindung	Sitzlänge 35 mm	Einspannstelle	Wechselspannung	±13[3]	
Klemm-verbindung		Einspannstelle	Wechselspannung	±11	

[1] Bezogen auf den Wellenquerschnitt neben der Verzahnung.
[2] Bezogen auf eine das Gewinde ersetzende Zylindermantelfläche.
[3] Versuch mit stufenweise zunehmender Last.

einem von Null verschiedenen Mittelwert auftreten. Deshalb ist im einzelnen Fall zu prüfen, an welcher Stelle sich die dadurch erhöhten Spannungen auswirken; im allgemeinen werden, besonders wegen der Druckwechselfließgrenze, die zulässigen Wechselbeanspruchungen kleiner.

8. Die Preß- und Klemmverbindung.

a) Gestaltung.

Als Preßverbindung wurden zwei Hohlwellen mit einem Sitzdurchmesser von 50 mm und mit einem Kegel 1:30 ineinandergepreßt, wobei Ausführungen mit und ohne Bronze-Zwischenbuchse geprüft wurden, Bild 8. Da diese Verbindungen eine kleine Baulänge haben sollen, wurde eine Sitzlänge von 35 mm gewählt.

Die Doppeltreibkegelverbindung, Bild 9, ist eine dreiteilige Preßverbindung, die in zwei Fügungsstufen zusammengesetzt wird. Zuerst wird die innere Welle in die äußere mit geringer Pressung eingesetzt und dann werden beide durch den Treibkegel aufgetrieben.

Die Preßspannungen wurden aus der meßbaren Änderung des Außendurchmessers $2\,\delta$ der äußeren Welle über dem Sitz berechnet. Wenn man annimmt, daß die Randstörungen rasch abklingen, darf man die Wellen als dickwandige Rohre betrachten. Mit der Randbedingung, daß in der äußersten Faser der Außenwelle die Radialspannung Null wird, findet man, vgl. etwa [4], mit den Bezeichnungen aus Bild 8 und der Elastizitätszahl E die Preßspannung

$$\sigma_r = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{2\,r_2^2\,r_3}\,E\,\delta$$

und die Tangentialspannung

$$\sigma_t = \frac{(r_2^2 + r_3^2)}{2\,r_2^2\,r_3}\,E\,\delta$$

in der Bohrung der äußeren Welle.

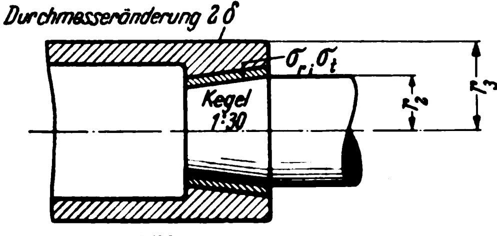


Bild 8. Preßverbindung.

Bei der Doppeltreibkegelverbindung ist $\delta = \delta_I + \delta_{II}$, d. h. die Summe der Verschiebungen aus beiden Fügungsstufen. Mit den vorliegenden Abmessungen ergibt eine Meßgenauigkeit von $\pm$ 0,005 mm die Preßspannungen auf $\pm$ 1 kg/mm² genau.

Zur Untersuchung von Klemmverbindungen wurde eine einseitig geschlitzte Klemmhülse, Bild 10, benutzt, die zwei fluchtende Wellen miteinander verband. Für die Klemmspannung wurde aus der Längung der Spannschrauben die Spannkraft bestimmt und mit einer Momentbetrachtung eine mittlere Klemmspannung berechnet, die auf die Projektion der Klemmfläche bezogen ist. Diese Klemmspannung kann nicht mit der Preßspannung verglichen werden. Als Grenzlastspielzahl wurden wiederum 10^7 Lastspiele gewählt, wobei zur Abkürzung auch Versuche mit stufenweise ansteigender Belastung durchgeführt wurden. Bei diesen Verbindungen ist der Spannungszustand an der Einspannstelle dem in Kröpfungen ähnlich, obwohl der Kräftefluß im ganzen nicht getreu wiedergegeben ist; dagegen ist ein Vergleich der Verbindungen untereinander möglich.

b) Ergebnisse der Dauerbiegeversuche.

Die Dauerversuche wurden wieder auf der Umlaufbiegemaschine durchgeführt. Bei den Preßkegelverbindungen war eine bestimmte Mindestpressung notwendig, damit die Verbindung sich nicht sofort löste. Da die Neigung zum Lösen mit zunehmender Sitzlänge und wachsender Preßspannung abnimmt, sind die Verhältniszahlen zwischen Sitzlänge und Durchmesser (Sitzverhältnis) und zwischen Preßspannung und Biegespannung (Sitzspannungsverhältnis) geeignete Vergleichsgrößen.

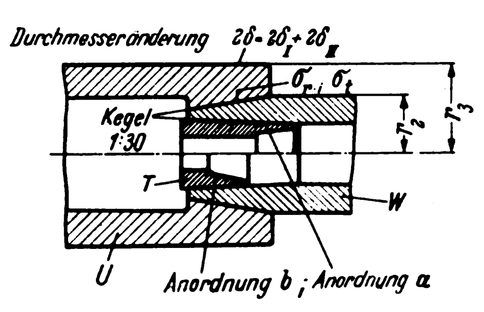


Bild 9. Doppeltreibkegelverbindung.
U äußere Welle, W innere Welle, T Treibkegel.

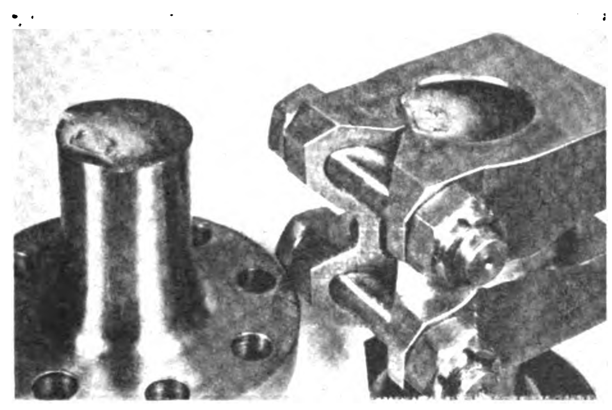


Bild 10. Klemmverbindung.

Das notwendige Sitzspannungsverhältnis war im Mittel ungefähr 1 bei Sitzverhältnissen von 0,5 bis 0,7. Dieses Ergebnis stimmt mit früher veröffentlichten Versuchen [5] gut überein. Außerdem ist bekannt [6], daß nach einem zunächst starken Abfall der Dauerbiegefestigkeit einer Einspannstelle mit der Preßspannung von ungefähr 4 kg/mm² ab die Abnahme nur gering ist. Damit dürfte der Einfluß der im vorliegenden Fall notwendigen Einspannpressungen auf die Streuung der Ergebnisse nicht sehr groß sein. Die Brüche gingen von der Kraftangriffstelle aus und die Dauerbiegefestigkeit betrug mit und ohne Zwischenbuchse ungefähr ± 11 kg/mm². Bei den Verbindungen mit Zwischenbuchse wurde diese aufgewalzt und ausgeschlagen und der Anriß erfolgte weiter innen.

Die Doppeltreibkegelverbindung wurde in zwei Anordnungen geprüft. Durch die Verschiebung des Treibkegels wird in der Einspannebene die Pressung herabgesetzt. Die Dauerfestigkeit nimmt damit von ± 13 kg/mm² bei gleichmäßiger Sitzspannung, Bild 9a, auf ± 16 kg/mm² bei von der Kraftangriffsstelle an langsam zunehmender Sitzspannung, Bild 9b, zu. Da die Doppeltreibkegelverbindung mit ansteigender Belastung geprüft wurde, sind wegen der Trainierwirkung die gefundenen Festigkeitswerte im Vergleich zu den anderen Verbindungsarten zu günstig. Die Dauerhaltbarkeit der Klemmverbindung war ungefähr ± 11 kg/mm². Die Bruchanrisse gingen gleichzeitig von verschiedenen Stellen des Umfangs aus. Wenn die mittlere Klemmspannung unter ungefähr dem 0,8fachen der Biegespannung lag, verdrehte sich die Welle in der Klemmhülse. Mit einer Klemmspannung, die das 2,4fache der Biegespannung betrug, trat ein Bruch bei ± 7,6 kg/mm² ein.

Die Beobachtung der Reiboxydation in der Nähe der Einspannung ließ vermuten, daß die Oxydation mit zunehmendem Sitzspannungsverhältnis abnimmt. Wenn durch zweckmäßige entlastende Gestaltung der Kraftangriffsstelle (vgl. Bild 9b) die Dauerfestigkeit erhöht wird, so wird gleichzeitig mit der geringeren Einspannpressung die Reiboxydation begünstigt.

Obwohl bei Preßsitzen noch nach 10^7 Lastspielen Brüche auftreten können, wird doch die mit dieser Grenzlastspielzahl festgestellte Festigkeit bei Berücksichtigung der übrigen Streuungen eine brauchbare Näherung darstellen, zumal die Wöhler-Linie bei Reiboxydation durch Luftzutritt bei diesen Lastspielzahlen eine geringe Neigung hat [7].

4. Zusammenfassung.

Drei verschiedene Arten von Verbindungen, die bei Kurbelwellen angewandt werden, wurden in natürlicher Größe mit 50 bis 60 mm Wellendurchmesser Biegeschwingungsbelastungen unterworfen, um ihr Verhalten im Dauerbetrieb bis zum Bruch zu prüfen.

An Hirth-Verbindungen traten Zahnbrüche auf mit einer Bruchausbildung, die von den baulichen Abmessungen und von der Kerbempfindlichkeit des Werkstoffs abhängig war; sie sind die Folge einer Vorspannungsminderung während des Betriebs, die von den Gewinden und der Verzahnung eingeleitet werden kann. Die zulässige Belastung der Verzahnung selbst wird durch die Druckwechselfließgrenze, die Festigkeit der Welle durch die Kerbwechselfestigkeit des Welleninnengewindes bestimmt. Mit der Beobachtung der Reiboxydation in den Zahnflächen wurde durch Rechnung und Versuch gefunden, daß der wirksame Reibungswert zwischen den Zahnflächen ungefähr 0,2 beträgt und damit die Vorspannung mindestens das 2,5fache der größten Biegespannung sein muß.

Der Spannbolzen hat eine günstige Form, wenn er im Schaft einen kleineren Durchmesser als im Gewinde hat und nicht hohl gebohrt ist.

Bei den untersuchten Preßverbindungen mit ihrer Sonderform, der Doppeltreibkegelverbindung und bei den Klemmverbindungen war es, um ein Lösen der Verbindung zu verhindern, erforderlich, daß die Preß- bzw. Klemmspannung von ungefähr derselben Größe wie die Biegespannung war.

Für die geprüften Verbindungen und ihre Einzelteile ergaben sich Näherungswerte für die Biegeschwingungsfestigkeit an den gefährdeten Kerbstellen, die zeigen, daß die praktische Dauerhaltbarkeit von Hirth-Verbindungen und Preß- und Klemmverbindungen bei Dauerbiegebeanspruchung annähernd gleich ist. Sie beträgt für den Werkstoff StC 45.61, bezogen auf die Randfaser der Welle, ungefähr ± 11 kg/mm².

5. Schrifttum.

[1] G. Schemberger, Untersuchung über die Spannungsverteilung, Drehsteifigkeit und Drehwechselfestigkeit der Hirth-Verzahnung. Diss. Stuttgart 1937.

[2] H. Jehle, Polarisationsoptische Spannungsuntersuchungen an einer Schraubenverbindung und an einzelnen Gewindezähnen. Forsch. Ing.-Wesen Bd. 7 (1936), S. 19.

[3] E. Erlinger, Dauerprüfmaschinen für große Proben. Luftwissen Bd. 8 (1941). S. 177.

[4] S. Timoshenko u. J. M. Lessells, Festigkeitslehre. Berlin: Julius Springer 1928, S. 230.

[5] T. V. Buckwalter u. O. J. Horger, Investigation of fatigue strength of axles pressfits, surface rolling and effect of size. Trans. Amer. Soc. Met. Bd. 25 (1937) S. 229.

[6] F. Wunderlich, Die Dauerbiegefestigkeit von Konstruktionsteilen an Einspannungen, Nabensitzen und ähnlichen Kraftangriffsstellen. Diss. Darmstadt 1933, S. 59.

[7] A. Thum u. F. Wunderlich, Die Reiboxydation an festen Paarverbindungsstellen und ihre Bedeutung für den Dauerbruch. Z. Metall-Kde. Bd. 27 (1935), S. 277.

Über die Beziehungen zwischen Form, Spektrum und Herstellungsgenauigkeit von Steuernocken*).

Von K. Schlaefke, Berlin.

Ventilfederschwingungen bilden das Anfangsglied einer Kette von Störungen, die über den Bruch der Ventilfeder zu Unregelmäßigkeiten der Ventilbewegung, zum Aufschlagen des Ventils auf den Kolbenboden, zum Ventil- und Kolbenbruch und schließlich zum Ausfall des Motors führen kann. Außer durch Werkstoff- und Herstellungsfehler[1]) werden Federbrüche besonders durch zusätzliche Schwingungsbeanspruchungen hervorgerufen, die vom Nocken her erregt werden. Im allgemeinen kann man diese Zusatzbeanspruchungen durch Wahl geeigneter Nockenformen beherrschen und damit die genannten Schäden vermeiden[2]), doch sind auch Ventilfederbrüche beobachtet worden, die mit Hilfe der bisherigen Erkenntnisse nicht erklärt werden konnten. Das Forschen nach der Quelle dieser Störungen führte zu den Ungenauigkeiten beim Herstellen der Nockenform und zur Nachgiebigkeit der Steuerungsteile, worüber im folgenden berichtet werden soll.

Durch Vermessen mehrerer Einlaßnocken eines bestimmten Motorenmusters wurde die in Bild 1 dargestellte durchschnittliche Fehlerkurve erhalten. Die Meßwerte Δ_s stellen den Unterschied zwischen dem Ist- und dem Sollwert des Ventilhubes in Abhängigkeit vom Nockenwinkel α dar. Da doch nur die Größenordnung der zusätzlichen Federbeanspruchung bestimmt werden soll, durfte die Rechnung dadurch vereinfacht werden, daß die Mittelwerte auch zwischen An- und Ablauf des Nockens gebildet wurden. Diese symmetrischen Mittelwerte erlauben eine besonders einfache harmonische Analyse[3]).

Um die Herstellungsgenauigkeit eines Nockens beurteilen zu können, muß man beachten, daß kurzzeitige Störungen durch Bearbeitungsfehler sich infolge der Elastizität der Steuerungsteile nicht bemerkbar machen. Stören werden Zusatzbeschleunigungen erst dann, wenn sie eine gewisse Zeit hindurch wirken. Dies bedeutet aber, daß für die Größe der Störungen weniger die Zusatzbeschleunigungen als vielmehr die Zusatzgeschwindigkeiten maßgebend sind. So hat sich als Toleranzvorschrift die Forderung bewährt, daß Δ_s eine bestimmte Grenze, z. B. $\pm 0{,}1$ mm, nicht überschreiten darf, während der Unterschied zweier um einen gewissen Nockenwinkel, z. B. 5°, auseinanderliegender Δ_s-Werte unter einem festgelegten Grenzwert, beispielsweise 0,040 mm, bleiben soll.

Die harmonische Analyse der zusätzlichen Erhebungskurve ergibt das in Bild 2 dargestellte Spektrum. Man erkennt, daß in dem für die Federberechnung wichtigen Bereich von $\mu = 8$ bis $\mu = 18$ zusätzliche Amplituden von etwa $5 \cdot 10^{-3}$ mm zu erwarten sind.

Auch die Elastizität der Steuerungsteile zwischen Nocken und Ventil ruft Abweichungen der wirklichen von der theoretischen Ventilbewegung hervor, die die Federbeanspruchung

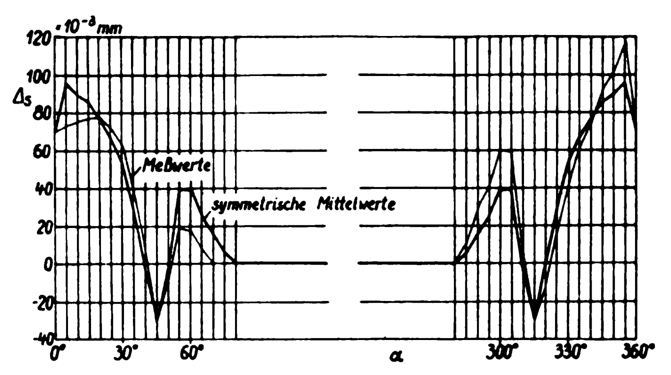


Bild 1. Zusätzliche Erhebungskurve durch Bearbeitungsungenauigkeiten.

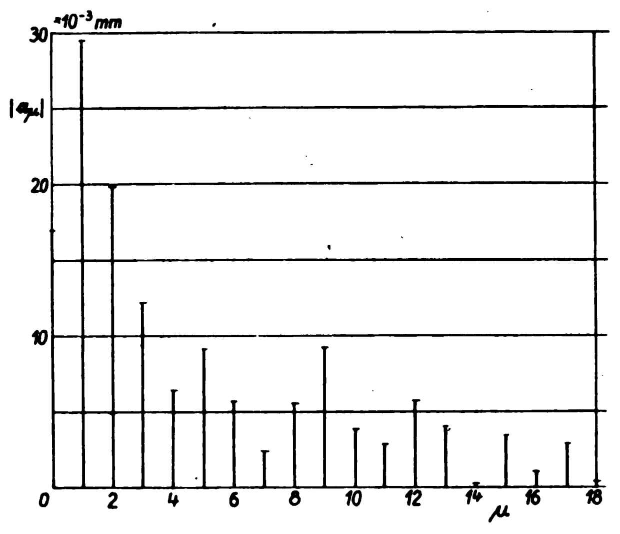


Bild 2. Zusätzliches Spektrum durch Bearbeitungsungenauigkeiten.

erhöhen. Im einzelnen sind die Zusammenhänge wegen der mannigfaltigen Formen und Abmessungen der genannten Teile ziemlich verwickelt, doch lassen sie sich wenigstens der Größenordnung nach leicht überschauen.

Für Flugmotoren mit im Zylinderkopf gelagerten Nockenwellen ergibt sich im allgemeinen eine Eigenschwingungszahl des Antriebs von $n_{eA} = 16000$ bis 25000 1/min und eine Eigenschwingungszahl der Ventilfedern von $n_{eF} = 10000$ bis 12000 1/min, während die größte Amplitude der zusätzlichen Ventilbewegung $e \approx 0{,}2$ mm ist. Ähnliche Werte von n_{eA} finden sich mehrfach im Schrifttum angegeben[4]). Nimmt man an, daß die zusätzliche Ventilbewegung sinusförmig verläuft und gerade im Nockenscheitel ihren Größtwert hat, so läßt sich die Untersuchung ähnlich wie die

*) K 35.

[1]) R. Hünlich u. W. Püngel, Untersuchungen über die Bruchursachen von Ventilfedern. Jahrb. 1938 d. deutsch. Luftfahrtforschung S. II 134.

[2]) A. Hußmann, Schwingungen in schraubenförmigen Ventilfedern. Jahrb. 1938 d. deutsch. Luftfahrtforschung, S. II 119.

[3]) A. Hußmann, Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese. J. Springer, Berlin 1938.

[4]) V. C. Young, Aircraft-engine valve mechanisms. S.A.E.J. Bd. 44 (1939), S. 109; E. H. Olmstead u. E. S. Taylor, Poppet valve dynamics. J. Aeronaut. Sci. Bd. 6 (1939), S. 370.

von symmetrischen Ventilerhebungskurven durchführen[3]). Fraglich bleibt, wie die zusätzliche Ventilbewegung beim Übergang vom Grundkreis zum Nocken in der angenommenen Weise entstehen kann, doch darf man diese Unsicherheit bei einer nur grundsätzlichen Betrachtung außer acht lassen.

Mit den Angaben des Bildes 3 erhält man die harmonischen Beiwerte a_μ aus der Gleichung

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos \mu \alpha \cdot d\alpha \quad . . . . (1)$$

Von $\alpha = -\alpha_2$ bis $\alpha = +\alpha_2$ gilt

$$f_1(\alpha) = e \cos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\alpha\right) = e \cos(c\mu\alpha), \quad . . . . (2)$$

während zwischen $\alpha = \alpha_2$ und $\alpha = 2\pi - \alpha_2$

$$f_2(\alpha) = 0 \quad . . . . (3)$$

ist. Damit ergibt sich

$$a_\mu = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_2}^{+\alpha_2} e \cos(c\mu\alpha) \cos \mu\alpha \cdot d\alpha$$

$$= \frac{e}{\pi\mu}\left[\frac{\sin((c-1)\mu\alpha_2)}{c-1} + \frac{\sin((c+1)\mu\alpha_2)}{c+1}\right] \quad (4)$$

Werden in dieser Gleichung beide Sinuswerte gleich Eins, so nimmt a_μ seinen überhaupt möglichen Größtwert

$$a_{\mu\,\max} = \frac{2ec}{\pi\mu(c^2-1)} \quad . . . . (5)$$

an. Für $c = 1$ führt die Grenzwertbildung in Gl. (4) zum Resonanzbeiwert

$$a_{\mu\,\mathrm{res}} = \frac{e}{\pi\mu}(\mu\alpha_2 + 0{,}5 \sin 2\mu\alpha_2) \quad . . . . . (6)$$

Nach den vorliegenden Angaben über n_{eA} und n_{eF} liegt c praktisch zwischen etwa 1,2 und 2,5. Mit $c = 2$ und $\alpha_2 = 76^0$ wurde Gl. (4) ausgewertet; die Ergebnisse sind in Bild 4 eingetragen. Die wahrscheinlichen Werte betragen rd. $^2/_3$ der möglichen Größtwerte nach Gl. (5), so daß man also allgemein mit

$$\frac{|a_\mu|}{e} \approx \frac{0{,}4}{\mu} \frac{c}{c^2-1} \quad . . . . (7)$$

rechnen muß. Die Harmonischen für einen weichen Antrieb ($c = 1{,}2$) sind also fast 6mal so groß wie die für einen starren Antrieb ($c = 2{,}5$). Im Mittel wird man zwischen $\mu = 8$ und $\mu = 18$ für $e = 0{,}2$ mm mit Zusatzharmonischen von $3 \cdot 10^{-3}$ bis $6 \cdot 10^{-3}$ mm rechnen müssen.

Die vorliegende Betrachtung lehrt, daß durch Bearbeitungsungenauigkeiten und Elastizität der Antriebsteile in dem in Frage kommenden Drehzahlbereich leicht Zusatzharmonische von insgesamt 0,01 mm auftreten können. Da Harmonische in dieser Größenordnung aber bereits als schädlich anzusehen sind[2]), werden so die obenerwähnten Federbrüche erklärt.

Die Frage der richtigen Nockenform muß also wesentlich von der Herstellerseite aus betrachtet werden. Dabei ist es günstig, daß Maßnahmen, die das Betriebsverhalten des Nockens verbessern, auch die Herstellungsgenauigkeit des Nockens zu steigern gestatten. Je stetiger nämlich die Beschleunigung einer Nockenkurve verläuft, um so genauer wird sich diese Form herstellen lassen, da beim Bearbeiten der Nocken auf der Schleifmaschine der gleiche Beschleunigungsverlauf wie im Motorenbetrieb auftritt. Man erkennt dies auch aus Bild 1, wo die größte Unstetigkeit der Fehlerkurve gerade in der Nähe der Nockenwinkel $\alpha = 48^0$ und 312^0 liegt, bei denen die Beschleunigung der theoretischen Nockenkurve umspringt. Bei einem stetigeren Beschleunigungsverlauf werden aber auch die Ventilfederschwingungen dadurch kleiner, daß das Spektrum der Ventilerhebungskurve niedriger und ausgeglichener wird.

Schließlich ist für die Herstellung von Nocken mit hohlen Flanken noch der kleinste Krümmungshalbmesser dieser Flanken zu bestimmen, da von ihm der Durchmesser

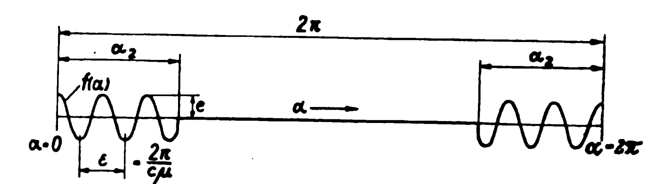


Bild 3. Zusätzliche Erhebungskurve durch Antriebsfederung.
μ = Ordnungszahl der Harmonischen = $\frac{n_{eF}}{n}$,
$c = \frac{n_{eA}}{n_{eF}} = \frac{\text{Eigenschwingungszahl des Antriebs}}{\text{Eigenschwingungszahl der Feder}}$,
n = Nockenwellendrehzahl.

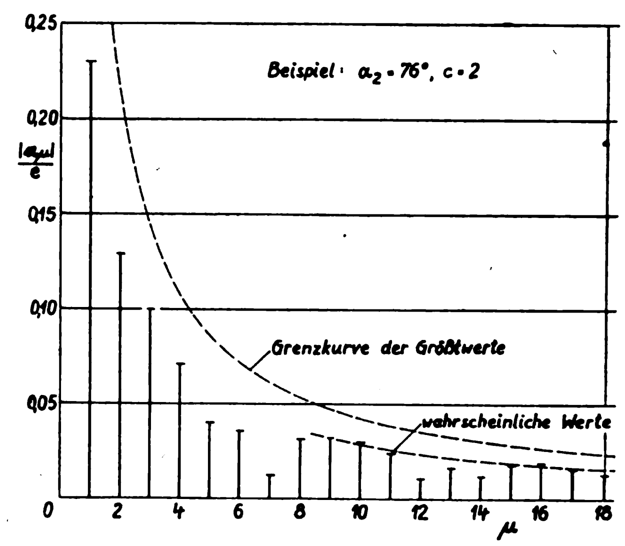


Bild 4. Zusätzliches Spektrum durch Antriebsfederung.

der Schleifscheibe abhängt. Ein kleiner Schleifscheibendurchmesser aber setzt die Genauigkeit der Nockenform herab.

In Bild 5 ist die Ermittlung des kleinsten Krümmungshalbmessers für den Nocken des bisherigen Beispiels dargestellt. Der Krümmungshalbmesser folgt der Gleichung

$$\varrho = \frac{1}{i} \frac{\left[((R_g + R_r)\,i + s)^2 + \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2\right]^{3/2}}{((R_g + R_r)\,i + s)^2 + 2\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 - ((R_g + R_r)\,i + s)\frac{d^2 s}{d\alpha^2}} \pm R_r \quad . . . . . (8)$$

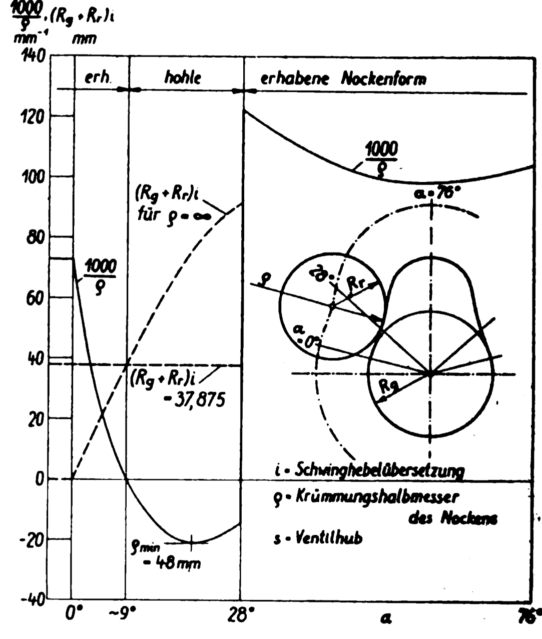


Bild 5. Die Krümmung hohler Nockenflanken (Beispiel).

Die Bezeichnungen dieser Gleichung gehen aus Bild 5 hervor; das Pluszeichen vor dem letzten Glied gilt für hohle, das Minuszeichen für erhabene Nockenformen. Da für eine Nockenberechnung der Ventilhub s sowie seine beiden Ableitungen nach α sowieso ermittelt werden müssen, macht die Berechnung des Krümmungshalbmessers keine große Mühe. Man erkennt, daß für das vorliegende Beispiel der kleinste Krümmungshalbmesser der hohlen Nockenform 48 mm beträgt, so daß man eine Schleifscheibe von höchstens 80 mm Dmr. verwenden muß.

Die gestrichelte Kurve in Bild 5 zeigt die Werte von $(R_g + R_r)\, i$, die für einen unendlichen Krümmungshalbmesser nötig sind. Diese Kurve schneidet sich mit der Geraden $(R_g + R_r)\, i = 37{,}875$ bei demselben Winkel α, für den die Kurve der Krümmung die Abszissenachse schneidet ($\approx 9^0$). Wollte man bei diesem Nocken hohle Flanken vermeiden, müßte mit $R_r = 11{,}5$ mm und $i = 1{,}5$ der Grundkreisdurchmesser $R_g = 49{,}5$ mm betragen, was aber konstruktiv nicht möglich ist. Man muß also bereits beim Entwurf des Nockens hierauf achten. Am wichtigsten jedoch ist ein möglichst stetiger Beschleunigungsverlauf; mindestens darf er niemals Sprünge aufweisen[5]).

Von mehreren in diesem Sinne geeigneten Nockenformen verdient diejenige den Vorzug, die mit möglichst einfachen rechnerischen Mitteln durchgeführt werden kann. Die gründliche Untersuchung verschiedener Beschleunigungsverläufe führte schließlich zu einem aus Parabeln zusammengesetzten Beschleunigungsverlauf nach Bild 6. Dieser Nocken hat sich in jeder Beziehung bewährt, insbesondere alle nach den bisherigen Betrachtungen dieser Arbeit zu stellenden Ansprüche erfüllt. Im folgenden wird daher zunächst seine Entstehung erläutert, dann eine praktische Anweisung zur Berechnung gegeben und schließlich ein Beispiel gebracht. Gleichzeitig damit wird der neue Nocken mit dem bisher verwendeten verglichen.

Aus Bild 6 geht hervor, daß die Rechnung bis zum vollen Ventilhub in zwei Abschnitten durchzuführen ist. Mit den Bezeichnungen des Bildes 6 gilt für den Beschleunigungsverlauf von $t = 0$ bis $t = t_1$

$$b_I = 4\, b_{max} \left[\frac{t}{t_1} - \left(\frac{t}{t_1}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

Im zweiten Abschnitt, von $t = t_1$ bis $t = t_2$ folgt die Beschleunigung dem Gesetz

$$b_{II} = b_{min} \left[\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right]^3 \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

Die Beschleunigung $b_I = f''(t)$ ist eine Parabel mit dem Scheitel im Punkt $b_I = b_{max}$, $t = \frac{1}{2} t_1$, die symmetrisch zur Achse $t = \frac{1}{2} t_1$ verläuft und in den Punkten $t = 0$ bzw. $t = t_1$ die Steigung

$$\frac{4\, b_{max}}{t_1} \text{ bzw. } -\frac{4\, b_{max}}{t_1}$$

aufweist.

Die Beschleunigung $b_{II} = f''(t)$ ist eine kubische Parabel mit dem Scheitel im Punkt $b_{II} = 0$, $t = t_1$ und den Steigungen $-\infty$ im Punkt $t = t_1$ bzw. $\frac{b_{min}}{3\,(t_2 - t_1)}$ im Punkt $b_{II} = b_{min}$, $t = t_2$.

Für den Geschwindigkeitsverlauf im ersten Abschnitt gilt

$$v_I = \int_0^t b_I\, d\,t = 4\, b_{max}\, t_1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{t_1}\right)^3\right] \quad . \; . \; (11)$$

Mit $t = t_1$ wird

$$v_{I\,(t=t_1)} = v_1 = v_{max} = \frac{2}{3}\, b_{max}\, t_1, \quad \ldots \ldots (12)$$

eine Gleichung, die einfacher aus der Formel für den Flächeninhalt eines Parabelsegments abgeleitet werden kann.

[5]) K. Schlaefke, Zur harmonischen Analyse von Nockenkurven. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 87.

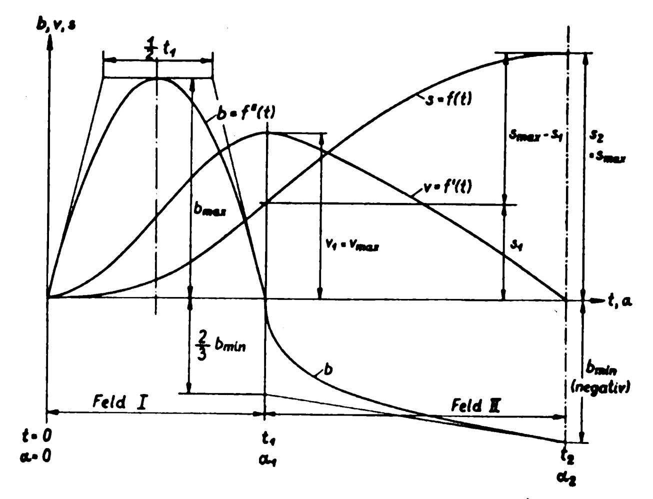


Bild 6. Ventilerhebungskurve s mit einem aus Parabeln zusammengesetzten Beschleunigungsverlauf.

Zwischen $t = t_1$ und $t = t_2$ ist

$$v_{II} = v_1 + \int_{t_1}^{t} b_{II}\, d\,t = \frac{2}{3}\, b_{max}\, t_1 + \frac{3}{4}\, b_{min}\,(t_2 - t_1) \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)^{4/3} \quad \ldots \ldots (13)$$

Für $t = t_1$ muß $v_{II} = v_1$ und für $t = t_2$ $v_{II} = 0$ sein. Die erste Forderung ist durch den Einsatz der Integrationsgrenzen erfüllt, während sich aus der zweiten die Bedingungsgleichung

$$\frac{2}{3}\, b_{max}\, t_1 + \frac{3}{4}\, b_{min}\,(t_2 - t_1) = 0 \quad \ldots \ldots (14)$$

oder

$$b_{max} = -\frac{9}{8}\, b_{min}\, \frac{t_2 - t_1}{t_1} \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

ergibt.

Für die Ventilerhebungskurve im ersten Abschnitt, d. h. zwischen $t = 0$ und $t = t_1$, erhält man

$$s_I = \int_0^t v_I\, d\,t = \frac{2}{3}\, b_{max}\, t_1^2 \left[\left(\frac{t}{t_1}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^4\right] \quad . \; . \; (16)$$

Mit $t = t_1$ wird

$$s_1 = \frac{1}{3}\, b_{max}\, t_1^3 \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

und allgemein

$$\frac{s_I}{s_1} = 2\left(\frac{t}{t_1}\right)^3 - \left(\frac{t}{t_1}\right)^4 = f_1 \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

Zwischen $t = t_1$ und $t = t_2$ gilt

$$s_{II} - s_1 = \int_{t_1}^{t} v_{II}\, d\,t = \frac{2}{3}\, b_{max}\, t_1\,(t - t_1) + \frac{9}{28}\, b_{min}\,(t_2 - t_1)^2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)^{7/3}, \quad . \; . \; (19)$$

woraus sich mit der Bedingungsgleichung (15)

$$s_{II} - s_1 = -b_{min}\,(t_2 - t_1) \left[\frac{3}{4}\,(t - t_1) - \frac{9}{28}\,(t_2 - t_1) \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)^{7/3}\right] \quad . \; . \; (20)$$

ergibt.

Für $t = t_2$ wird

$$s_{II\,(t=t_2)} - s_1 = s_{max} - s_1 = -\frac{3}{7}\, b_{min}\,(t_2 - t_1)^2 \quad (21)$$

oder, mit Gl. (17) und (15),

$$s_{max} = -b_{min}\,(t_2 - t_1) \left[\frac{3}{8}\, t_1 + \frac{3}{7}\,(t_2 - t_1)\right] \quad . \; . \; (22)$$

Schließlich erhält man

$$\frac{s_{II} - s_1}{s_{max} - s_1} = \frac{7}{4}\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)^{7/3} = f_2 \quad . \; . \; (23)$$

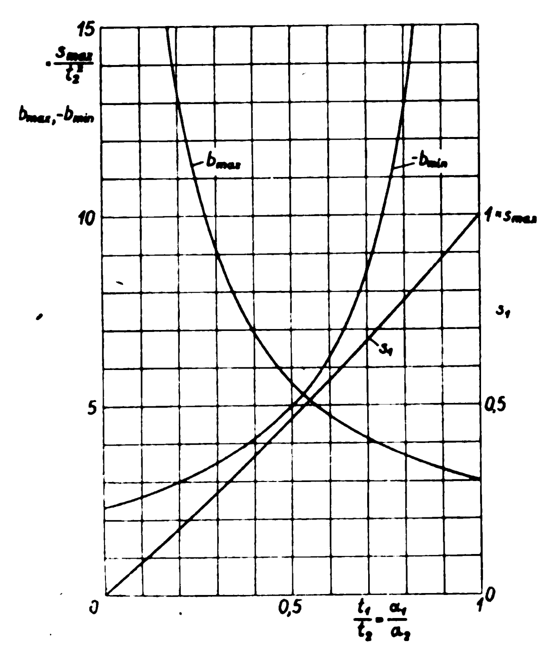


Bild 7. Tafel zum Bestimmen von b_{max}, b_{min} und s_1 für verschiedene Wendepunktswinkel α_1.

und

$$\frac{s_1}{s_{max}} = \frac{7}{8\frac{t_2}{t_1} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (24)$$

Aus Gleichung (15), (22) und (24) ergibt sich ein Verlauf von $-\frac{b_{min}\,t_2^2}{s_{max}}$, $\frac{b_{max}\,t_2^2}{s_{max}}$ und $\frac{s_1}{s_{max}}$ in Abhängigkeit von t_1/t_2 bzw. α_1/α_2, wie er in Bild 7 dargestellt ist. Dabei gilt für Viertaktmotoren

$$t = \frac{\alpha}{3\,n_{Motor}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (25)$$

Mit Hilfe dieser Kurventafel wird die Lage des Wendepunktes in der Hubkurve, d. h. α_1 bzw. t_1 so gewählt, daß der Größtwert der Verzögerung und der Ventilhub im Wendepunkt aufeinander abgestimmt sind. Diese Werte müssen den jeweiligen Anforderungen entsprechen, wie sie durch die Ventilfedern, Krümmung der Nockenflanke, Ventilhub im ersten Teil der Hubkurve usw. gestellt werden.

Als Beispiel für die Anwendung der Berechnung zeigt Bild 8 für den schon mehrfach erwähnten Einlaßnocken gestrichelt gezeichnet den bisherigen Verlauf von Beschleunigung, Ventilgeschwindigkeit und Ventilhub. Auffallend ist der Sprung in der Beschleunigungslinie bei $\alpha = 28°$, der Anlaß zu Ventilfederbrüchen gab. Hierauf ist oben bei der Besprechung von Bild 1 schon hingewiesen worden.

Der neue Nocken, der die Störungen des alten Nockens vermeiden soll, wurde so gewählt, daß dieselbe Ventilfeder beibehalten werden konnte, d. h., daß der Höchstwert der Verzögerung unverändert bleibt. Für $\alpha_2 = 76°$, $s_{max} = 18$ mm und $n_{Motor} = 2640$ U/min ergibt sich

$$-\frac{b_{min}\,t_2^2}{s_{max}} = \frac{820 \cdot 9{,}209}{0{,}018 \cdot 10^5} \approx 4{,}2 \quad \ldots\ldots\ (26)$$

Für diesen Wert liest man aus Bild 7 $\alpha_1/\alpha_2 = 0{,}42$ ab, womit sich $\alpha_1 = 76 \cdot 0{,}42 = 31{,}9°$ ergibt. Mit dem nun gewählten Wert $\alpha_1 = 32°$ erhält man $b_{min} = -832$ m/s² und $b_{max} = 1286$ m/s². Nach Bild 7 bzw. Gl. (24) wird $s_1 = 7{,}000$ mm. Der Verlauf der Hubkurve in Bild 8 zeigt, daß gerade bei kleinen Ventilhüben der Hub in vorteilhafter Weise durch den neuen Nocken vergrößert wird. Oberhalb etwa 40° ist der Verlauf praktisch unverändert. Wenn der neue Nocken aus irgendeinem Grunde geändert werden muß, so wandert der Wendepunkt der Hubkurve auf der in Bild 8 strichpunktiert eingetragenen Linie, deren Verlauf sich aus Gl. (24) ergibt.

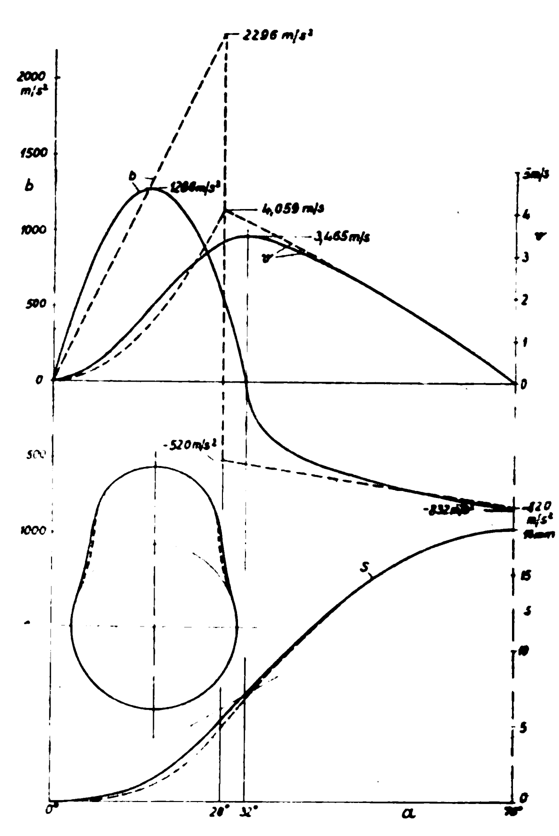


Bild 8. Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskurve sowie Form des alten und des neuen Nockens.
------- alter Nocken, ——— neuer Nocken;
gegeben: s_{max} = 18 mm,
α_2 = 76°,
n_{Motor} = 2640 U/min.

Den Nocken zeigt ebenfalls Bild 8. Man erkennt, daß der Krümmungshalbmesser der hohlen Flanke größer geworden ist, so daß man statt der bisher verwendeten Schleifscheibe von 80 mm Dmr. eine solche von etwa 125 mm Dmr. nehmen kann. Daraus ergibt sich ein weiterer Vorteil des neuen Nockens.

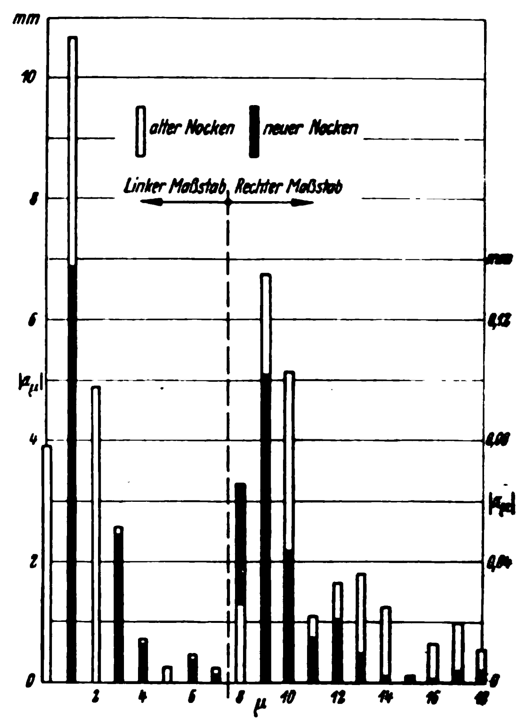


Bild 9. Spektrum der Nockenkurven nach Bild 8.

Bild 9 zeigt das Ergebnis der harmonischen Analyse. Diese wurde für den neuen Nocken mit Hilfe der Tafeln von Hußmann[3]) durchgeführt, während sie für den alten Nocken schon vorlag[5]). Von einer einzigen Ausnahme bei $\mu = 8$ abgesehen, sind die harmonischen Beiwerte des neuen Nockens im wichtigen Bereich von $\mu = 8$ bis $\mu = 18$ erheblich niedriger als die des alten. Man sieht aus diesem Vergleich, wie sehr ein Spektrum durch einen sprungfreien und möglichst stetigen Beschleunigungsverlauf erniedrigt wird.

Zum Schluß sei bemerkt, daß für f_1 in Gl. (18) und für f_2 in Gl. (23) Zahlentafeln aufgestellt wurden, die diese Funktionen in Abhängigkeit von α/α_1 bzw. $\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ enthalten[6]). Damit kann der Ventilhub von Grad zu Grad in einfachster Weise auch von ungeübten Kräften berechnet werden.

[6]) Auskunft über den Bezug erteilt die Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen, Berlin-Adlershof.

Der Einfluß des Dichtegradienten der Atmosphäre auf die Längsbewegung des Flugzeugs.

Berichtigung.

Herr Dipl.-Ing. Mewes, Bremen hat mich freundlicherweise auf einen Rechenfehler in meinem Aufsatz in Luftf.-Forschung Band 19 (1942), Lfg. 4, Seite 136 aufmerksam gemacht, wofür ich ihm auch an dieser Stelle danken möchte.

Auf Seite 136 ist der Zusammenhang zwischen der Änderung des Belastungsgrades mit der Luftdichte $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho}$ und der Änderung der Motorleistung mit der Luftdichte $\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varrho}$ falsch angegeben. Es ist $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = \frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varrho} - 1$. Damit ist für einen Bodenmotor oder einen Höhenmotor über seiner Volldruckhöhe $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} \approx + 0{,}333$, für einen idealen Höhenmotor $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = -1$. Mit diesen Werten ergibt die Zahlenrechnung:

Zahlenwerte des Realteils 2 $\mathfrak{R}$ (Dämpfungsfaktor) der Bahnschwingung.
(1. Näherung aus der Gleichung 3. Grades.)

	$H = 0$ m; $v = 150$ m/s		$H = 6500$ m; $v = 179$ m/s	
$10^3 \cdot \frac{dT}{dh} =$	$-6{,}5$	$+50$	$-6{,}5$	$+10$ °/m
ohne Berücksichtigung des Dichtegradienten	8,4	8,4	8,4	8,4
mit Berücksichtigung des Dichtegradienten, ohne Berücksichtigung des Triebwerks	7,627	6,426	7,262	6,721
mit Berücksichtigung des Dichtegradienten, mit Berücksichtigung des Triebwerks, Bodenmotor, $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = 0{,}333$	7,426	5,914	6,943	6,250
mit Berücksichtigung des Dichtegradienten, mit Berücksichtigung des Triebwerks, idealer Höhenmotor $\frac{\partial \ln c_s}{\partial \ln \varrho} = -1$	8,229	7,963	8,219	8,134

F. N. Scheubel, Darmstadt.



Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Freistrahl im unterkritischen Gebiet*).

Von Ernst Lamla.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für Gasdynamik.

Nach der Näherungsmethode von Janzen und Lord Rayleigh wird die ebene symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder, der sich auf der Mittellinie eines ebenen Freistrahls befindet, in zweiter Näherung untersucht. Die Geschwindigkeit am Profilrand und die Ausbauchung des Freistrahls werden genauer erörtert. Der Einfluß der Kompressibilität wird mit dem entsprechenden Einfluß bei der Umströmung des Kreiszylinders im Kanal verglichen.

Vor einiger Zeit hat Verfasser[1]) den Einfluß der Kompressibilität auf die symmetrische Umströmung eines Kreiszylinders im Kanal in zweiter Näherung nach der Methode von Janzen und Lord Rayleigh berechnet. Später sind von anderer Seite[2]) exakte Lösungen desselben Problems für die Umströmung ellipsenähnlicher Zylinder angegeben worden. Im folgenden soll die entsprechende Aufgabe für die symmetrische Umströmung des Kreiszylinders im Freistrahl behandelt werden. Wir führen dabei, zum Teil noch etwas weitergehend, als es sonst geschieht, komplexe Variable ein. Ähnlich wie beim Problem der Kanalströmung benutzen wir eine Spiegelungsmethode; die dadurch bedingten Abweichungen des Zylinders von der strengen Kreisform sind, falls der Freistrahl im Verhältnis zum Profil nicht gar zu schmal ist, im Rahmen der hier befolgten Näherung durchaus zu vernachlässigen.

Es seien x und y die ebenen kartesischen Koordinaten, φ und ψ Potential und Stromfunktion, ϱ und p Dichte und Druck, $\mathfrak{w}$ und a die Geschwindigkeit und die zugehörige Schallgeschwindigkeit. Der Index 0 bezeichne Zustände im ruhenden Gas, der Index ∞ Zustände in sehr großer Entfernung, wo die Geschwindigkeit gleich der Anströmgeschwindigkeit U ist. U habe die Richtung der positiven X-Achse. Der Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{w}_x}{U} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varrho_\infty}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\mathfrak{w}_y}{U} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\varrho_\infty}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

erfüllt die Bedingungen der Wirbellosigkeit und der Kontinuität. Dazu kommt die Bernoulli-Gleichung, die bei adiabatischem Verhalten die Form hat

$$\frac{1}{2}\mathfrak{w}^2 + \int \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{2}\mathfrak{w}^2 + \frac{a^2}{\varkappa - 1} = \frac{a_0^2}{\varkappa - 1} \quad \ldots \quad (2\text{a})$$

Dabei ist in üblicher Weise das Verhältnis der spezifischen Wärmen $c_p/c_v = \varkappa$ gesetzt. Da allgemein

$$a^2 = a_0^2 \frac{p}{\varrho}\frac{\varrho_0}{p_0} = a_0^2 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa - 1}$$

ist, ergibt sich aus (2 a)

$$\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa - 1} = 1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{w^2}{a_0^2}.$$

Hieraus folgt die andere Form der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty} = \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{w^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} : \left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{U^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \quad (2\text{b})$$

oder, wenn wir (2 b) nach dem binomischen Satz entwickeln und nach Potenzen von $U/a_0 = \alpha$ ordnen:

$$\frac{\varrho}{\varrho_\infty} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \frac{w^2}{U^2}\right) + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (2\text{c})$$

Das Gleichungssystem (1) und die Bernoulli-Gleichung in einer der Formen (2 a), (2 b) oder (2 c) bestimmen zusammen mit den Grenzbedingungen die Aufgabe physikalisch vollkommen. φ, ψ, ϱ und die Geschwindigkeitskomponenten sind als Funktionen der reellen Veränderlichen x und y zu ermitteln.

Für die weitere mathematische Behandlung der Aufgabe sehen wir zunächst ganz und gar davon ab, daß x und y reelle Veränderliche sind; nur wenn wir die erhaltenen Gleichungen physikalisch deuten, werden wir uns jeweils dieses Charakters der Größen x und y erinnern. Im übrigen sollen x und y für die mathematischen Operationen beliebige komplexe Größen sein. Legen wir diese Vereinbarung zugrunde und führen wir jetzt die folgenden Größen ein

$$\left\{\begin{aligned} z &= x + i\,y; \quad \omega = \varphi + i\,\psi, \\ \bar{z} &= x - i\,y; \quad \bar{\omega} = \varphi - i\,\psi, \end{aligned}\right. \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

so dürfen wir für die mathematische Rechnung z und $\bar{z}$ als unabhängige Variable auffassen. In dem für die physikalische Ausdeutung allein wichtigen Gebiet, in dem x und y reell sind, sind z und $\bar{z}$ derart miteinander gekoppelt, daß sie konjugiert komplex sind. Ähnliches gilt für ω und $\bar{\omega}$, die wir an Stelle von φ und ψ als abhängige Variable auffassen. Aus (1) und (3) folgt nun

$$\left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} - i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{w_x - i\,w_y}{U}\left(1 + \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right) \\ 2\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} + i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{w_x + i\,w_y}{U}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\right) \end{aligned}\right. \quad (4)$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}}$ und $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}$ gehen, wie man leicht nachprüft und wie auch aus (1) und (3) unmittelbar folgt, aus den Gl. (4) dadurch hervor, daß man auf der rechten Seite i durch $-i$, auf der linken Seite z und ω durch $\bar{z}$ und $\bar{\omega}$ ersetzt. Addiert man die zweite bzw. die erste der so entstehenden Gleichungen zur ersten bzw. zweiten Gl. (4), so folgt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\omega}}{dz} &= \frac{w_x - i\,w_y}{U} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}} &= \frac{w_x + i\,w_y}{U} \end{aligned}\right. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Man kann aus (4) und (5) durch Kombination mit einer der Formen (2) der Bernoulli-Gleichung in mannigfacher Weise Differentialgleichungen für ω und $\bar{\omega}$ herleiten. Für den folgenden Zweck kombinieren wir die zweite Gl. (4) mit (5) und (2 c):

*) A 35/25.

[1]) E. Lamla, Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), S. 329/331; Bd. 18 (1941), S. 37.

[2]) W. Hantzsche u. H. Wendt, Luftf.-Forschg. Bd. 18 (1941), S. 311/316.

$$2\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\bar z}\right)\times\left\{\frac{\alpha^2}{2}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}+\frac{\overline{\omega}}{\partial\bar z}\right)-1\right]+\dots\right\}\quad(6)$$

(Die in (6) weggelassenen Glieder enthalten höhere Potenzen von α als α^2.)

Wir denken uns nunmehr, gemäß dem Verfahren von **Janzen** und Lord **Rayleigh**, ω in eine nach Potenzen von $\alpha = U/a_0$ fortschreitende Reihe entwickelt:

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha^2\omega_1+\dots;\ \overline{\omega}=\overline{\omega}_0+\alpha^2\overline{\omega}_1+\dots\\ \alpha=U/a_0\end{cases}\quad(7)$$

Setzen wir (7) in (6) ein, so ergibt der Vergleich der Glieder ohne α:

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial\bar z}=0;\ \omega_0=\omega_0(z)\quad\dots\dots\dots(8)$$

ω_0 entspricht als erste Näherung der inkompressibeln Strömung und hängt, wie selbstverständlich ist, nur von z ab. Ist $\omega_0=f(z)$, so folgt aus den Gl. (3) $\overline{\omega}_0=\bar f(\bar z)$; hierbei bedeutet der Strich über dem f, daß die in f auftretenden Zahlenkoeffizienten durch ihre konjugiert komplexen Werte zu ersetzen sind.

Vergleichen wir in der durch Einsetzen von (7) in (6) erhaltenen Gleichung die Koeffizienten von α^2, so bekommen wir

$$4\frac{\partial\omega_1}{\partial\bar z}=\frac{d\overline{\omega}_0}{d\bar z}\left(\frac{d\omega_0}{dz}\frac{d\overline{\omega}_0}{d\bar z}-1\right)$$

oder

$$4\omega_1=\frac{d\omega_0}{dz}\int\left(\frac{d\overline{\omega}_0}{d\bar z}\right)^2d\bar z-\overline{\omega}_0+g(z)\quad\dots\dots(9)$$

Hierin ist g eine Funktion von z allein. Sie ist so zu bestimmen, daß die Grenzbedingungen erfüllt sind.

(9) ist eine besonders einfache Form der Bestimmungsgleichung für $\omega_1=\varphi_1+i\,\psi_1$. Sie liefert unmittelbar φ_1 und ψ_1 und gemäß (5) auch die Geschwindigkeitskomponenten. Wir gehen bei der folgenden Betrachtung von dieser Gleichung aus.

Bei der Umströmung eines Profils im Freistrahl ist, auch schon im Fall der Inkompressibilität, die Grenzbedingung an der äußeren Grenze des Freistrahls ($w = U =$ konst.) unbequem zu erfüllen. Zur Bestimmung von ω_0 benutzen wir eine Spiegelungsmethode in folgender Art. Die Ebene des umströmten Zylinders sei die z-Ebene. Außerdem betrachten wir eine Hilfsebene (ζ-Ebene). Die Gleichung

$$\omega_0=\zeta+\frac{C^2}{\zeta}\quad\dots\dots\dots\dots(10)$$

stellt die inkompressible Strömung um einen Kreis vom Radius C in der Hilfsebene dar, und zwar die Umströmung im freien Raum. Für den komplexen Geschwindigkeitswert erhalten wir aus (10), wenn wir noch ω_0 an Stelle von ζ als unabhängige Variable einführen:

$$\begin{cases}\dfrac{d\omega_0}{d\zeta}=1+f(\omega_0)\\ f(\omega_0)=-\dfrac{C^2}{\zeta^2}=1-\dfrac{\omega_0^2}{2C^2}\left[1-\sqrt{1-\dfrac{4C^2}{\omega_0^2}}\right]\end{cases}\quad(11)$$

Wir betrachten nun einen Freistrahl der Breite $2h$ in der z-Ebene, auf dessen Mittellinie der Mittelpunkt des umströmten (sehr angenähert kreisförmigen) Profils liegt. Sein Radius hat den noch zu bestimmenden Wert R. Es ist leicht zu zeigen, daß der komplexe Geschwindigkeitswert der zugehörigen Strömung gegeben wird durch

$$\frac{d\omega_0}{dz}=(1+f(\omega_0))\prod_{n=1}^{\infty}[1+f(\omega_0+2nhi)]^{(-1)^n}\times[1+f(\omega_0-2nhi)]^{(-1)^n}\quad(12)$$

Hierin hat $f(\omega_0)$ die durch die zweite Gl. (11) gegebene Bedeutung. Die Produktbildung entspricht einer Spiegelung an den Grenzen des Freistrahls in der ω_0-Ebene. Läßt man h und damit die Breite des Freistrahls über alle Grenzen wachsen, so nehmen nach der zweiten Gl. (11) alle Faktoren des unendlichen Produktes den Wert 1 an; (12) geht in die erste Gl. (11) über mit $\zeta = z$: wir erhalten die Umströmung des Kreises im freien Raum.

Schreiben wir bei endlichem h die Faktoren des unendlichen Produktes (12) ausführlich hin, so stehen die Glieder mit geradzahligem n im Zähler, die mit ungeradzahligem n im Nenner des Bruches. Wir betrachten nun die eine Grenze des Freistrahls, setzen also $\omega_0=\varphi_0+hi$. Zu einem Faktor, der $\omega_0+2nhi=\varphi_0+(2n+1)hi$ als Argument von f enthält, gibt es stets einen, der $\omega_0-2(n+1)hi=\varphi_0-(2n+1)hi$ als Argument von f enthält. Da sich die absoluten Beträge der beiden Werte n gerade um 1 unterscheiden, tritt der eine Faktor im Zähler, der andere im Nenner auf. Das heißt, da wir es ja hier nur mit reellen Werten x und y, φ_0 und ψ_0 zu tun haben: Zu jedem Faktor, der im Zähler auftritt, erscheint der konjugiert komplexe im Nenner; der absolute Betrag des ganzen Ausdrucks (12) hat also für $\psi_0=\pm h$ den Wert 1, die Geschwindigkeit daher den Wert U. Die Stromlinien $\psi_0=\pm h$ sind also in der Tat Freistrahlgrenzen. (12) stellt also wirklich die symmetrische Umströmung eines Profils in einem Freistrahl dar, der im Unendlichen die Breite $2h$ hat. Daß dieses Profil in sehr guter Annäherung ein Kreis ist, ist noch zu zeigen.

Für den Fall $\omega_0\gg C$ folgt aus der zweiten Gl. (11) nach dem binomischen Satz

$$\begin{cases}1+f(\omega_0)=1-\dfrac{C^2}{\omega_0^2}-2\dfrac{C^4}{\omega_0^4}-5\dfrac{C^6}{\omega_0^6}\dots\dots\\ \log(1+f)=-\dfrac{C^2}{\omega_0^2}-\dfrac{5}{2}\dfrac{C^4}{\omega_0^4}-\dfrac{22}{3}\dfrac{C^6}{\omega_0^6}\dots\dots\end{cases}\quad(13)$$

Für die Faktoren des unendlichen Produktes in (12) ist die Entwicklung (13) **stets** zulässig, für den vor dem Produktzeichen stehenden Faktor nur dann, wenn $\omega_0\gg C$ ist. Schreiben wir zur Abkürzung für den Ausdruck (12)

$$\frac{d\omega_0}{dz}=1+F(\omega_0)=(1+f(\omega_0))(1+P(\omega_0)),\quad(14)$$

so ist $1+P$ gleich dem unendlichen Produkt in (12). Wir logarithmieren diese Beziehung und setzen die Werte (13) ein. Das unendliche Produkt verwandelt sich dann in eine Reihe von unendlichen Summen; diese Summen haben wohl bekannte Werte[3]). Führen wir noch zur Abkürzung die Größe δ ein, die das Verhältnis von Profilbreite zu Freistrahlbreite charakterisiert, so können wir schreiben

$$\pi C/h=\delta;\quad\dots\dots\dots\dots(15)$$

$$\log(1+P)=\frac{1}{4}\delta^2\left[\frac{\cos\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}{\sin^2\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}+\frac{4h^2}{\pi^2\omega_0^2}\right]+\frac{5}{32}\delta^4\left[\frac{1}{6}\frac{\cos\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}{\sin^2\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}-\frac{\cos\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}{\sin^4\frac{\pi\omega_0 i}{2h}}+\frac{16h^4}{\pi^4\omega_0^4}\right]+\dots\quad(16)$$

Es folgen Glieder, die höhere Potenzen von δ als Faktoren enthalten.

Für Punkte in der Nähe der Kontur ist der Bruch $\pi\omega_0/2h$ sehr klein gegen 1. Wir dürfen daher die in (16) auftretenden trigonometrischen Funktionen durch ihre Reihenentwicklungen ersetzen; es ergibt sich

$$\log(1+P)=-\frac{\delta^2}{24}+\left(\frac{7}{2304}+\frac{7}{1920}\frac{\omega_0^2}{C^2}\right)\delta^4+\dots\quad(16a)$$

[3]) Aus der bekannten, z. B. mit Hilfe des Mittag-Lefflerschen Satzes der Funktionentheorie herzuleitenden Formel

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n-z}-\frac{1}{n+z}\right)$$

folgt durch einmaliges Differenzieren

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(n-z)^2}+\frac{1}{(n+z)^2}\right]=\frac{\pi^2\cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}-\frac{1}{z^2}.$$

Diese Gleichung selbst und die, die aus ihr durch zwei weitere Differentiationen zu gewinnen ist, sind in (16) für $z=\omega_0 i/2h$ benutzt worden.

Wir benutzen jetzt wieder die durch (10) definierte Hilfsgröße ζ. Aus (11) und (14) folgt

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1/(1+P).$$

Aus (16 a) errechnen wir mit Hilfe der Exponentialreihe den Wert $1/(1+P)$ und integrieren. Es wird

$$z = \left(1+\frac{\delta^2}{24}-\frac{109}{11520}\delta^4\right)\zeta+\frac{7}{1920}\delta^4\left(\frac{C^2}{\zeta}-\frac{1}{3}\frac{\zeta^3}{C^2}\right)+\dots \quad (17)$$

Der Ansatz $\zeta = C e^{i\vartheta}$ liefert nach (10) den Wert $\psi_0 = 0$, also die Kontur des umströmten Profils. Es wird

$$\left(\frac{z}{C}\right)_{\text{Profil}} = \left(1+\frac{\delta^2}{24}-\frac{109}{11520}\delta^4\right)e^{i\vartheta}+\frac{7\delta^4}{1920}\left(e^{-i\vartheta}-\frac{1}{3}e^{3i\vartheta}\right)+\dots \quad (17\text{a})$$

Das umströmte Profil ist also zwar kein mathematisch genauer Kreis; aber die Abweichungen von der Kreisform sind von der Größenordnung $7\,\delta^4/1920$, also außerordentlich klein, wie auch die folgende Zahlentafel zeigt. In ihr bedeuten r_0, r_{45} und r_{90} die Werte des Radiusvektors nach denjenigen Punkten des Profilrandes, die zu $\vartheta = 0^0$, 45^0 und 90^0 gehören. Das Achsenverhältnis beträgt

$$r_{90}/r_0 = 1-\frac{7}{1440}\delta^4\dots \quad (18)$$

h/C	r_0/C	r_{45}/r_0	r_{90}/r_0
3	1,03724	0,99718	0,99436
5	1,01535	0,99963	0,09925
10	1,00404	0,99998	0,99995
20	1,00102	1,00000	1,00000

Die beiden letzten Spalten der Zahlentafel lassen erkennen, daß die Abweichung des Profils von der Kreisform praktisch völlig bedeutungslos ist. Selbst in dem extremen Fall, daß das Profil ⅓ der Freistrahlbreite einnimmt, ist seine Dicke nur etwa ½% kleiner als die Breite. Die zweite Spalte gibt die Beziehung zwischen C und dem Kreisradius $R = r_0$.

Für die Geschwindigkeit ergibt sich nach (14) und (16 a)

$$\frac{d\omega_0}{dz} = \frac{w_x - i\,w_y}{U} = \left(1-\frac{C^2}{\zeta^2}\right)\left[1-\frac{\delta^2}{24}+\left(\frac{1}{256}+\frac{7}{1920}\frac{\omega_0^2}{C^2}\right)\delta^4\dots\right].$$

Insbesondere wird die Maximalgeschwindigkeit am Profilrand ($\vartheta - 90^0$)

$$\frac{w_{\max}}{U} = 2\left(1-\frac{\delta^2}{24}+\frac{\delta^4}{256}\dots\right) \quad (19)$$

Bei Beschränkung auf die Glieder mit δ^2 erhalten wir das bekannte Ergebnis, daß die Geschwindigkeitsverminderung gegenüber der Strömung im freien Raum halb so groß ist wie die Vermehrung der Maximalgeschwindigkeit in einem Kanal gleicher Breite.

Wir fragen noch nach der Ausbauchung des Freistrahls infolge der Anwesenheit des Profils. An der Grenze des Freistrahls ist überall $\omega_0 \gg C$; wir können daher die Entwicklung (13) auch auf den vor dem Produktzeichen in (12) stehenden Faktor anwenden; es folgt

$$\log\frac{d\omega_0}{dz} = \frac{1}{4}\delta^2\frac{\cos t}{\sin^2 t}-\frac{5}{32}\delta^4\left(\frac{\cos t}{\sin^4 t}-\frac{1}{6}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\dots$$

$$\text{mit } t = \frac{\pi\,\omega_0\, i}{2\,h}.$$

Wir errechnen hieraus $dz/d\omega_0$ und finden danach durch Integration

$$\frac{z}{C} = \frac{\omega_0}{C}-\frac{i\,\delta}{2}\frac{1}{\sin t}+\frac{i\,\delta^3}{48}\left(\operatorname{cotg}^3 t+\frac{5}{\sin^3 t}-\frac{5}{2\sin t}\right)\dots \quad (20)$$

Für den Punkt der Freistrahlgrenze, der auf dem zur Mittellinie des Strahls senkrechten Profildurchmesser liegt, ist

$\omega_0 = h i$, $t = -\frac{\pi}{2}$; daher

$$x = 0;\quad \frac{y_{\max}}{C} = \frac{h}{C}+\frac{\delta}{2}-\frac{5}{96}\delta^3\dots$$

oder

$$\left(\frac{y-h}{h}\right)_{\max} = \frac{\delta^2}{2\pi}-\frac{5\,\delta^4}{96\,\pi}\dots = \frac{\pi}{2}\left(\frac{C}{h}\right)^2-\frac{5}{96}\pi^3\left(\frac{C}{h}\right)^4\dots \quad (21)$$

Die zweite Näherung.

Um die zweite Näherung zu finden, haben wir das komplexe Zusatzpotential ω_1 aus Gl. (9) zu errechnen. Da z nach (12) eine Funktion von ω_0 ist, können wir statt z und $\bar{z}$ auch ω_0 und $\overline{\omega}_0$ als unabhängige Variable einführen. Das soll im folgenden geschehen. Aus (11), (12) und (13) ersehen wir ferner, daß $\frac{d\omega_0}{dz}$ eine Funktion von ω_0 mit reellen Koeffizienten ist; daher schließen wir aus (12) und (14)

$$\frac{d\overline{\omega}_0}{d\bar{z}} = 1+F(\overline{\omega}_0).$$

Wir erhalten damit aus (9), (12) und (14)

$$4\,\omega_1 = (1+F(\omega_0))\int[1+F(\overline{\omega}_0)]\,d\overline{\omega}_0-\overline{\omega}_0+g(\omega_0) \quad (22)$$

g ist eine Funktion von ω_0 allein. Aus (22) ist ω_1 als Funktion von ω_0 und $\overline{\omega}_0$ zu errechnen. Die wesentliche Aufgabe besteht in der Ermittlung der Funktion g. Folgende Grenzbedingungen sind zu erfüllen:

1. Für den Profilrand, für den $\zeta = Ce^{i\vartheta}$ und $\psi_0 = 0$ ist, muß auch $\psi_1 = 0$ werden.
2. In sehr großer Entfernung vom Profil, also für $\zeta \to \infty$, muß ω_1 gegen null gehen.
3. Am Strahlrand ($\psi = \psi_0 + \varkappa^2\psi_1 = \pm h$) muß die Geschwindigkeit den Betrag U haben.

Nach (5) ist nun in zweiter Näherung

$$\frac{w_x - i\,w_y}{U} = \frac{d\omega_0}{dz}+\varkappa^2\frac{\partial(\omega_1+\overline{\omega}_1)}{\partial z}.$$

Am Strahlrand (SR) ist $\omega = \varphi + ih = \omega_0 + \varkappa^2\omega_1$, also $\omega_0 = \varphi + ih - \varkappa^2\omega_1$. Beachten wir nun, daß das Zusatzglied mit dem Faktor $\varkappa^2$ klein ist gegen das vorhergehende Glied, so folgt aus dem Taylorschen Satz in der hier betrachteten Näherung

$$\left(\frac{w_x - i\,w_y}{U}\right)_{SR} = \frac{d\omega_0}{dz}+\varkappa^2\left[\frac{\partial(\omega_1+\overline{\omega}_1)}{\partial z}-\omega_1\frac{d}{d\omega_0}\left(\frac{d\omega_0}{dz}\right)\right]$$

$$\text{für } \omega_0 = \varphi \pm i\,h \text{ oder } \psi_0 = \pm h.$$

Benutzen wir die Schreibweise (12), so erhalten wir mit Hilfe von (22) für den Wert des Faktors von $\varkappa^2$ in der letzten Gleichung, wenn noch die Ableitung nach ω_0 durch einen Strich gekennzeichnet wird:

$$\frac{1+F(\omega_0)}{4}\left\{\left[(1+F(\omega_0))\,(1+F(\overline{\omega}_0))-1\right]+\frac{dg}{d\omega_0}+(\overline{\omega}_0-g)\frac{F'}{1+F}\right\}.$$

Für $\psi_0 = \pm h$ ist aber, wie früher gezeigt,

$$[1+F(\omega_0)]\,[1+F(\overline{\omega}_0)] = \left|\frac{d\omega_0}{dz}\right|^2 = 1.$$

Daher wird

$$\left(\frac{w_x - i\,w_y}{U}\right)_{SR} = \frac{d\omega_0}{dz}\left[1+\frac{\varkappa^2}{4}\left(\frac{dg}{d\omega_0}+(\overline{\omega}_0-g)\frac{F'}{1+F}\right)\right]$$

$$\text{mit } \psi_0 = \pm h \quad (23)$$

Nach der dritten Grenzbedingung muß nun der Betrag des Ausdrucks (23) den Wert 1 haben. Das bedeutet, da der vor der eckigen Klammer stehende Faktor für sich den Betrag 1 hat, daß der Koeffizient von $\varkappa^2/4$ rein imaginär sein muß; denn dann und nur dann fallen im Ausdruck für den Betrag der Geschwindigkeit die Glieder mit $\varkappa^2$ weg. Die dritte Grenzbedingung verlangt also, daß

$$S = \frac{dg}{d\omega_0}+(\overline{\omega}_0-g)\frac{F'}{1+F} \quad (24)$$

für $\varphi_0 = \pm h$ rein imaginär wird. Wir ersetzen, um einen bequemer zu handhabenden Ausdruck zu erhalten, die noch unbekannte Funktion $g(\omega_0)$ durch die Funktion $G(\omega_0)$ gemäß

$$g = -\omega_0 + (1+F)\int \frac{d\omega_0}{1+F} + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Damit lautet die dritte Grenzbedingung: Es muß

$$S = (\omega_0 + \overline{\omega}_0)\frac{F'}{1+F} + \frac{dG}{d\omega_0} - G\frac{F'}{1+F} \quad \text{für } \varphi_0 = \pm h$$

rein imaginär sein. Der erste Summand von S ist aber, wie sich leicht zeigen läßt, schon für sich allein rein imaginär. Nehmen wir nämlich in (12) den vor dem Produktzeichen stehenden Faktor in das Produkt hinein und ersetzen in den zweiten Faktoren des Produktes n durch $n+1$, so können wir schreiben

$$\frac{d\omega_0}{dz} = 1 + F(\omega_0) = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + f(\omega_0 + 2nhi)\right]^{(-1)^n} \times \left[1 + f(\omega_0 - 2(n+1)hi)\right]^{-(-1)^n}.$$

Da das Produkt im vorliegenden Fall absolut konvergiert, dürfen wir gliedweise logarithmisch differenzieren:

$$\frac{F'}{1+F} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{f'(\omega_0 + 2nhi)}{1 + f(\omega_0 + 2nhi)} - \frac{f'(\omega_0 - 2(n+1)hi)}{1 + f(\omega_0 - 2(n+1)hi)}\right].$$

Für $\varphi_0 = h$ sind nun die beiden Teile jedes Summanden konjugiert komplex; der ganze Ausdruck ist rein imaginär. Für $\varphi_0 = -h$ ist es ähnlich. Die Summe $\omega_0 + \overline{\omega}_0$ ist für $\varphi_0 = \pm h$ stets reell. Daher reduziert sich die dritte Grenzbedingung auf die Forderung

$$S_1 = \frac{dG}{d\omega_0} - G\frac{F'}{1+F} \quad \text{rein imaginär für } \varphi_0 = \pm h \quad (26)$$

Im Hinblick auf das bekannte Ergebnis für die Umströmung des Kreiszylinders im freien Raum liegt es nahe, G als Potenzreihe für das Argument $\omega_0 - z$ mit ungeradzahligen Exponenten anzusetzen. Allein auf diese Weise läßt sich die Bedingung (26) nicht erfüllen. Wir fügen daher zu jeder Potenz von $\omega_0 - z$ noch weitere Glieder derart hinzu, daß sich die in S_1 sonst auftretenden reellen Glieder gerade wegheben. Wollen wir z. B. (26) bis zu Gliedern der Ordnung δ^4 erfüllen, so genügt der Ansatz

$$G = A\left[z - \omega_0 + C\,i\,\delta^3\left(a\frac{\cos\frac{\pi z i}{2h}}{\sin^3\frac{\pi z i}{2h}} + b\,\mathrm{cotg}^3\frac{\pi z i}{2h}\right)\cdots\right] + B\frac{(z-\omega_0)^3}{C^2} + \ldots \quad . \quad . \quad (27)$$

Darin sind a, b, A, B reelle Konstante. Unter Benutzung des Wertes (20) für z und der dort eingeführten Abkürzung t erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$S_1 = A\left\{-\frac{\delta^2}{4}\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{5}{96}\delta^4\left(\frac{3\cos t}{\sin^4 t} - \frac{\cos t}{2\sin^2 t}\right) + \frac{\delta^4}{32}\left[(5 + 48a + 48b)\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} + \frac{16a + 2}{\sin^2 t}\right]\cdots\right\} + \frac{3}{16}\delta^4 B\frac{\cos t}{\sin^4 t}\ldots\,.$$

Für $\varphi_0 = h$ wird $t = \frac{\varphi_0 \pi i}{2h} - \frac{\pi}{2}$; es ist also $\cos t$ rein imaginär und $\sin t$ reell. Damit S_1 rein imaginär wird, muß der Inhalt der eckigen Klammer verschwinden; das ergibt

$$a = -\frac{1}{8}; \quad b = \frac{1}{48}.$$

Damit wird aus (27) der Ansatz

$$G = A\left[z - \omega_0 + C\frac{i\,\delta^3}{8}\left(\frac{1}{6}\,\mathrm{cotg}^3\frac{\pi z i}{2h} - \frac{\cos\frac{\pi z i}{2h}}{\sin^3\frac{\pi z i}{2h}}\right)\cdots\right] + B\frac{(z-\omega_0)^3}{C^2} + \ldots \quad (27\,\mathrm{a})$$

Dieser Ansatz genügt also der dritten Grenzbedingung bis zu den Gliedern mit δ^4. Die Zufügung einer reellen Konstanten zu G würde daran nichts ändern; denn da $F'/(1+F)$ für $\varphi_0 = \pm h$ rein imaginär ist, bleibt (26) auch dann erfüllt.

Der Ansatz (27 a) genügt auch der zweiten Grenzbedingung. Denn für $\varphi_0 \to \infty$ oder $x \to \infty$ verschwindet $z - \omega_0$ nach (20). Der Faktor von A in (27 a) enthält nun zwar wegen des Auftretens des Cotangens den Summanden $\frac{1}{48}C\delta^3$, dessen Vorzeichen durch das Vorzeichen von x bzw. φ_0 bestimmt ist. Es handelt sich aber hierbei nur um eine zu G hinzutretende reelle Konstante, die nach dem, was soeben gesagt worden ist, belanglos ist und weggelassen werden darf.

Es bleibt also nur noch die Aufgabe übrig, A und B so zu bestimmen, daß auch die erste Grenzbedingung erfüllt wird. Für die Umgebung des Profils ist $z \ll h$. Aus (27 a) folgt daher unter Benutzung der bekannten trigonometrischen Reihen

$$G = A\left[z - \omega_0 + \frac{C^4}{z^3}\left(\frac{5}{6} - \frac{\pi^2 z^2}{24h^2} - \frac{\pi^4 z^4}{144h^4}\right)\cdots\right] + B\frac{(z-\omega_0)^8}{C^2}\ldots\,.$$

An Stelle von z führen wir wieder die Hilfsgröße ζ gemäß (10) und (17) ein. Wir wollen uns ferner, um die Zahlenrechnung zu vereinfachen, im folgenden mit den Gliedern bis zur Ordnung δ^2 begnügen. (Grundsätzlich läßt sich aber nach der angegebenen Methode eine beliebige Genauigkeit in bezug auf die Abhängigkeit von δ erreichen.) Wir erhalten nach einfacher Umrechnung

$$\frac{G}{C} = A\left[-\frac{C}{\zeta} + \frac{5}{6}\frac{C^3}{\zeta^3} + \frac{\delta^2}{24}\left(\frac{\zeta}{C} - \frac{C}{\zeta} - \frac{5}{2}\frac{C^3}{\zeta^3}\right)\cdots\right] + B\left[-\frac{C^3}{\zeta^3} + \frac{\delta^2}{8}\frac{C}{\zeta}\right]\ldots\,. \quad (27\,\mathrm{b})$$

Aus (22), (10) und (17) erhalten wir für das Zusatzpotential ω_1 den Ausdruck

$$4\frac{\omega_1}{C} = \left(1 - \frac{C^2}{\zeta^2}\right)\left(\frac{\overline{\zeta}}{C} + 2\frac{C}{\overline{\zeta}} - \frac{1}{3}\frac{C^3}{\overline{\zeta}^3}\right)\left(1 - \frac{\delta^2}{12}\right) - \frac{\overline{\zeta}}{C} - \frac{C}{\overline{\zeta}} - \frac{2C}{\zeta} + \frac{G}{C} \quad (28)$$

Für G ist dabei der Wert (27 b) einzusetzen. An der Kontur, das heißt für $\zeta = Ce^{i\vartheta}$, muß φ_1 verschwinden. Setzen wir für ζ den Wert $Ce^{i\vartheta}$ ein, so treten in dem Ausdruck für φ_1 Glieder mit $\sin\vartheta$ und mit $\sin 3\vartheta$ auf. Die Forderung, daß die beiden zugehörigen Koeffizienten verschwinden, liefert 2 Bestimmungsgleichungen für die beiden Konstanten A und B. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} A &= -\frac{16}{3} + \frac{1}{12}\delta^2 \\ B &= -\frac{46}{9} + \frac{49}{72}\delta^2 \end{aligned}\right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Die Werte A und B sind in (22), (25) und (27) bzw. für kleine z/h, d. h. für Punkte in der Nähe des Profils, in (28) einzusetzen. Wir betrachten zunächst den zuletzt genannten Fall (Punkte in der Nähe des Profils) und erhalten dafür aus (28):

$$\frac{\omega_1}{C} = \frac{5}{6}\frac{C}{\zeta} + \frac{1}{6}\frac{C^3}{\zeta^3} + \frac{1}{4}\frac{C}{\overline{\zeta}} - \frac{1}{12}\frac{C^3}{\overline{\zeta}^3} - \frac{1}{4}\frac{C\,\overline{\zeta}}{\zeta^2} - \frac{1}{2}\frac{C^3}{\zeta^2\,\overline{\zeta}} + \frac{1}{12}\frac{C^5}{\zeta^2\,\overline{\zeta}^3} - \delta^2\left[\frac{1}{48}\left(1 - \frac{C^2}{\zeta^2}\right)\left(\frac{\overline{\zeta}}{C} + 2\frac{C}{\overline{\zeta}} - \frac{1}{3}\frac{C^3}{\overline{\zeta}^3}\right) + \frac{1}{18}\frac{\zeta}{C} + \frac{1}{8}\frac{C}{\zeta} + \frac{1}{72}\frac{C^3}{\zeta^3}\right] \ldots \quad (30)$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit benutzen wir (5); dabei ist zu beachten, daß für den hier benutzten Genauigkeitsgrad nach (17) $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{24}\right)$ ist. Für den Profilrand selbst, an dem $\zeta = C e^{i\vartheta}$ ist, erhalten wir

$$\frac{\partial(\omega_1 + \overline{\omega}_0)}{dz} = (1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta + \delta^2\left(-\frac{25}{288} + \frac{1}{16}\cos 2\vartheta\right)\right] \quad (31)$$

Da nach (14) und (16 a) $\frac{d\omega_0}{dz} = \left(1 - \frac{C^2}{\zeta^2}\right)\left(1 - \frac{\delta^2}{24}\right)$ ist, wird also für Punkte des Profilrandes

$$\frac{w_x - i w_y}{U} = (1 - \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) \times \left\{1 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right)\alpha^2 - \frac{\delta^2}{24}\left[1 + \left(\frac{25}{12} - \frac{3}{2}\cos 2\vartheta\right)\alpha^2\right]\right\} \quad (32)$$

Insbesondere wird für $\vartheta = 90^0$:

$$\frac{w_{\max}}{U} = 2\left(1 + \frac{7}{12}\alpha^2\right) - \frac{\delta^2}{12}\left[1 + \frac{43}{12}\alpha^2\right] \quad (33)$$

Diese Formel zeigt gegenüber der für die Umströmung des Kreises im Kanal nur einen Unterschied: der zweite Summand, der die Abhängigkeit von der Breite des Kanals bzw. des Freistrahls enthält, hat hier den Faktor $-\delta^2/12$, im Fall des Kanals den Faktor $+\delta^2/6$.

Wir fragen jetzt noch, wie die Ausbauchung, die der Freistrahl durch das Profil erfährt, durch die Kompressibilität beeinflußt wird. Wir können die Frage so formulieren: Wie groß ist an der Stelle $x = 0$ derjenige Wert y, für den $\psi = \psi_0 + \alpha^2 \psi_1 = h$ ist? Es muß also $h - \psi_0 = \alpha^2 \psi_1$ sein.

An der Stelle $x = 0$ ist $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Daher wird nach (22), (25) und (27 a) bei Beschränkung auf die Glieder, die δ^1 als Faktor enthalten

$$\psi_1 = \frac{5\delta}{12}\frac{C}{\sin t}, \quad (34)$$

wobei $t = \frac{\pi\omega_0 i}{2h} = -\frac{\pi\psi_0}{2h}$ ist.

Die Gleichung $h - \psi_0 = \alpha^2\psi_1$ geht über in $h - \psi_0 = \frac{5}{12} C \frac{\delta\alpha^2}{\sin t}$. Hieraus folgt in der hier befolgten Näherung

$$\psi_0 = h + \frac{5}{12}\delta\alpha^2 C \quad (35)$$

Mit Hilfe von (20) ergibt sich jetzt

$$z = \omega_0 - \frac{i\delta}{2}\frac{C}{\cos t}; \quad y_{\max} = h + \frac{5}{12}\delta\alpha^2 C + \frac{\delta}{2} C$$

oder

$$\frac{y_{\max} - h}{h} = \frac{\delta^2}{2\pi}\left(1 + \frac{5}{6}\alpha^2\right) \quad (36)$$

Wir ersehen aus (33), daß die Kompressibilität die Maximalgeschwindigkeit am Profil weiter verringert, und aus (36), daß sie die Ausbauchung des Freistrahls an der Stelle, wo er das Profil umströmt, weiter vergrößert.

Einige einfache Formeln aus der Tragflügeltheorie*).

Von H. B. Helmbold, München.

Bericht aus der Entwurfsabteilung der Ernst Heinkel Flugzeugwerke, Rostock-Marienehe.

O. Schrenk hat eine einfache Abschätzung der Auftriebsverteilung am Tragflügel angegeben, für die eine theoretische Begründung gesucht wurde. Bei dieser Gelegenheit wurden die einfachsten Ergebnisse der Traglinientheorie für Entwurfszwecke zusammengestellt. Zugrundegelegt ist der älteste Lösungsansatz der Traglinientheorie von 1913. Zunächst wird der unverwundene Tragflügelumriß für die vorgegebene Auftriebsverteilung bestimmt. Danach wird die umgekehrte Aufgabe näherungsweise mit einer verbesserten Streifenmethode behandelt. Der gleiche Lösungsansatz wird auf den Verwindungsanteil der Auftriebsverteilung angewendet. Schließlich werden besonders einfache Sonderfälle untersucht.

Gliederung.

1. Einleitung (Grundlagen).

Der Zusammenhang zwischen der geometrischen Gestalt des Flügels und seinen aerodynamischen Eigenschaften ist im allgemeinen nicht so durchsichtig, wie es für die Anwendung zu wünschen wäre. Deshalb erscheint es nützlich, diejenigen Fälle einmal etwas näher zu betrachten, wo die Beziehungen zwischen Geometrie und Aerodynamik des Tragflügels offener zutage liegen. Hierfür stellen wir zunächst die von der Tragflügeltheorie in ihrer ursprünglichen Gestalt[1]) gelieferten Ergebnisse mit den heute gebräuchlichen dimensionslosen Bezeichnungen dar.

Die Gestalt des Flügels ist gegeben durch den Umriß $\frac{t(\xi)}{t(0)} = \frac{t}{t_0}$ und den Verlauf des (geometrischen) Anstellwinkels $\alpha(\xi)$. Mit ξ ist der auf die Halbspannweite bezogene Abstand von Flügelmitte bezeichnet und α ist der Winkel zwischen Nullauftriebsrichtung und Flugrichtung. Zwischen der örtlichen Auftriebszahl $c_a(\xi)$ und dem örtlichen Profilanstellwinkel $\alpha_p(\xi)$ besteht Proportionalität: $c_a = c'_{ap}\,\alpha_p$. Dabei ist α_p definiert als Winkel zwischen Nullauftriebsrichtung und Anblasrichtung. Der Unterschied zwischen Anblasrichtung und Flugrichtung heißt induzierter Anstellwinkel $\alpha_i = \alpha - \alpha_p$. Die Integralgleichung der Tragflügeltheorie lautet für den Eindecker

$$\alpha_p(\xi) + \frac{(c'_{ap})_0\, t_0}{4\pi b}\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dx}\left(\alpha_p\frac{\varkappa t}{t_0}\right)\frac{dx}{\xi - x} = \alpha(\xi) \quad . \quad . \quad (1)$$

mit

$$\varkappa = \frac{c_{ap}(\xi)}{c'_{ap}(0)} = \frac{(c'_{ap})_0}{c'_{ap}}.$$

Zur Lösung benutzen wir den Ansatz[1])

$$\alpha_p(\xi) = \frac{c_{a0}}{(c'_{ap})_0}\,\frac{t_0}{\varkappa t}\sqrt{1-\xi^2}\,(1 + k_1\xi^2 + k_2\xi^4 + \dots) \quad . \quad . \quad (2)$$

*) P 3111.
[1]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie I. 15 (1918. Neudruck Göttingen 1927, S. 31).

und erhalten, wenn wir nur die angeschriebenen Glieder der Reihenentwicklung beibehalten, für den induzierten Anstellwinkel

$$\alpha_i(\xi) = \frac{c_{a0}\, t_0}{4b}\left[1 - k_1\left(\frac{1}{2} - 3\xi^2\right) - k_2\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\xi^2 - 5\xi^4\right)\right] \quad (3)$$

für die Auftriebszahl des gesamten Tragflügels

$$\bar c_a = \frac{b\,t_0}{2F}\int_{-1}^{+1} c_a\frac{t}{t_0}\,d\xi = \frac{\pi}{4}c_{a0}\frac{b\,t_0}{F}\left(1 + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{8}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und für die induzierte Widerstandszahl

$$\bar c_{wi} = \frac{b\,t_0}{2F}\int_{-1}^{+1}\alpha_i\, c_a\frac{t}{t_0}\,d\xi$$

$$= \frac{\pi}{16}\frac{(c_{a0}\,t_0)^2}{F}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1^2}{4} + \frac{11}{32}k_1 k_2 + \frac{k_2}{4} + \frac{9}{64}k_2^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4\,a)$$

2. Der unverwundene Tragflügel.

Liegen die Nullauftriebsrichtungen aller Flügelprofile parallel, so ist α = konst. $= \bar\alpha = \alpha_p(0)$ oder wegen Gl. (2) und (3)

$$\bar\alpha = \frac{c_{a0}}{(c'_{ap})_0} + \frac{c_{a0}\,t_0}{4b}\left(1 - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{8}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hieraus folgt mit Gl. (2) die örtliche Auftriebszahl

$$c_a(\xi) = \frac{\alpha_p}{\bar\alpha}\,c'_{ap}\,\bar\alpha$$

$$= \frac{\varkappa t}{t_0}\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{1 + k_1\xi^2 + k_2\xi^4}{1 + \frac{(c'_{ap})_0\,t_0}{4b}\left(1 - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{8}\right)}\,c'_{ap}\,\bar\alpha \quad (6)$$

Eine etwas andere Form erhält man, wenn man $\alpha_p(\xi) + \alpha_i(\xi) = \bar\alpha$ verlangt, nämlich wieder wegen Gl. (2) und (3)

$$c_a(\xi) = \frac{c'_{ap}\,\bar\alpha}{1 + \frac{\alpha_i(\xi)}{\alpha_p(\xi)}}$$

$$= \frac{c_{ap}\,\bar\alpha}{1 + \frac{(c'_{ap})_0\,t_0}{4b}\,\frac{\varkappa t}{t_0\sqrt{1-\xi^2}}\,\frac{1 - k_1\left(\frac{1}{2} - 3\xi^2\right) - k_2\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\xi^2 - 5\xi^4\right)}{1 + k_1\xi^2 + k_2\xi^4}} \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

Die erste Form ist schneller zu berechnen, die zweite Form hat ein gewisses theoretisches Interesse, worauf wir noch zurückkommen. Die mittlere Auftriebszahl ergibt sich aus Gl. (4) und (5) und beträgt

$$\bar c_a = \frac{\pi}{4}\frac{b\,t_0}{F}\,\frac{1 + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{8}}{1 + \frac{(c'_{ap})_0\,t_0}{4b}\left(1 - \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{8}\right)}\,(c'_{ap})_0\,\bar\alpha \quad (7)$$

Der Umriß des unverwundenen Tragflügels, der die nach Gl. (2) vorausgesetzte Auftriebsverteilung zustande bringt, ergibt sich aus der Bedingung $\alpha_p(\xi) + \alpha_i(\xi) = \alpha_p(0) + \alpha_i(0)$. Man erhält mit Hilfe der Gl. (2), (3) und (5)

$$\frac{\varkappa t}{t_0} = \frac{1 + k_1 \xi^2 + k_2 \xi^4}{1 - \frac{(c'_{a\,p})_0\, t_0}{4\,b}\left[3\left(k_1 - \frac{k_2}{2}\right)\xi^2 + 5\,k_2\,\xi^4\right]}\sqrt{1-\xi^2} \quad (8)$$

(Ähnliche Formen findet man bei A. Betz in W. F. Durand, Aerodynamic Theory, Vol. IV, Div. J, S. 58f., Berlin 1935). Gewöhnlich hat man es aber mit der umgekehrten Aufgabe zu tun, zu einem vorliegenden Tragflügelumriß die zugehörige Auftriebsverteilung zu ermitteln. Dann erzielt man meistens schon eine ganz gute Näherung, wenn man die Konstanten k_1 und k_2 so bestimmt, daß $\frac{\varkappa t}{t_0}$ nach Gl. (8) an zwei geeignet gewählten Punkten der Halbspannweite (etwa $\xi_1 = 0{,}5$ und $\xi_2 = 0{,}9$) die vorgeschriebenen Werte annimmt[2]). Diesen Weg wollen wir hier jedoch nicht weiterverfolgen, sondern gehen aus von dem vereinfachten Fall, daß $k_2 = 0$ ist. Dann ist k_1 die einzige, zunächst unbekannte Konstante, die sich aus Gl. (8) einfach bestimmen läßt,

$$k_1 = \frac{\frac{\varkappa t}{t_0} - \sqrt{1-\xi^2}}{3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\, t_0}{4\,b}\,\frac{\varkappa t}{t_0} + \sqrt{1-\xi^2}}\,\frac{1}{\xi^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

und die Formel für die örtliche Auftriebszahl lautet entsprechend Gl. (6)

$$c_a(\xi) = \frac{t_0}{\varkappa t}\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{1 + k_1 \xi^2}{1 + \frac{(c'_{a\,p})_0\, t_0}{4\,b}\left(1 - \frac{k_1}{2}\right)}\, c'_{a\,p}\,\bar{\alpha} \quad (10)$$

[2]) Amstutz, Schweiz. Bauzeitung (1930,) S. 181. Quellenangabe nach J. Hueber, Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933), S. 249, 269.

Zahlentafel 1.

ξ	k_1	$\frac{c_a}{4\lambda\alpha}$ geschätzt	genau
0,0	0,286	0,206	0,208
0,1	0,286	0,205	0,207
0,2	0,292	0,204	0,206
0,3	0,301	0,202	0,204
0,4	0,315	0,199	0,202
0,5	0,332	0,194	0,198
0,6	0,358	0,187	0,192
0,7	0,398	0,178	0,181
0,8	0,463	0,163	0,164
0,9	0,587	0,137	0,135
1,0	1,333	0	0

Da $\frac{\varkappa t}{t_0}$ positiv sein muß, ist k_1 auf den Bereich zwischen 1 und $\frac{4\,b}{3\,(c'_{a\,p})_0\, t_0}$ beschränkt.

Häufig hat man nun den Wunsch, binnen kürzester Zeit sich eine einigermaßen zutreffende Vorstellung über den Verlauf der Auftriebszahl längs der Spannweite eines beliebigen unverwundenen Tragflügels zu bilden. Hierfür kann man so vorgehen, daß man die rechte Seite der Gl. (9), die wir mit $a(\xi)$ bezeichnen wollen, berechnet. Ist diese Größe konstant, so ist Gl. (10) eine exakte Lösung der Aufgabe, ist sie jedoch längs der Spannweite veränderlich, so erhält man auch dann noch eine ziemlich brauchbare Abschätzung durch Einsetzen von $a(\xi)$ an Stelle von k_1 in Gl. (10), solange $a(\xi)$ keine allzu großen Abweichungen gegenüber einem Mittelwert aufweist, solange es also vor allem nirgends unendlich wird. Um dies auszuschließen, muß sich in Flügelmitte $\frac{\varkappa t}{t_0} - \sqrt{1-\xi^2} \sim \xi^n\ (n \geqq 2)$ verhalten. Viele Flügelumrisse, wie Dreiecke und Doppeltrapeze weisen nun gerade in Flügelmitte theoretisch einen Knick auf. Dieser tritt jedoch in Wirklichkeit so gut wie nie auf, weil die Flügelmitte im Rumpf verschwindet. Es bedeutet also keinen unzulässigen Zwang, wenn man vorschreibt, daß der Umriß in Flügelmitte so abzuändern ist, daß a dort nicht unendlich wird (Abrundung oder rechteckiges Mittelstück von Rumpfbreite). Als Beispiel dafür, wie unempfindlich bei den gebräuchlichen Seitenverhältnissen das Ergebnis gegenüber bereits beträchtlichen Abweichungen der Größe a von der Konstanz ist, zeigt Bild 1 mit Zahlentafel 1 den Vergleich der nach Gl. (9) und (10) abgeschätzten c_a-Verteilung mit der genauen Verteilung für den unverwundenen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\frac{b}{t_0} = (c'_{a\,p})_0 \approx 5{,}5$. (In extremen Fällen, wo von vornherein mit dem Versagen der Methode zu rechnen ist, liefert die halbempirische Abschätzungsmethode von O. Schrenk[3]) die besseren Ergebnisse.) Im Gegensatz zur sog. Streifenmethode ist hier der Wert der örtlichen Auftriebszahl nicht ganz unabhängig von Größen, die anderen

[3]) Luftwissen 7 (1940), S. 118.

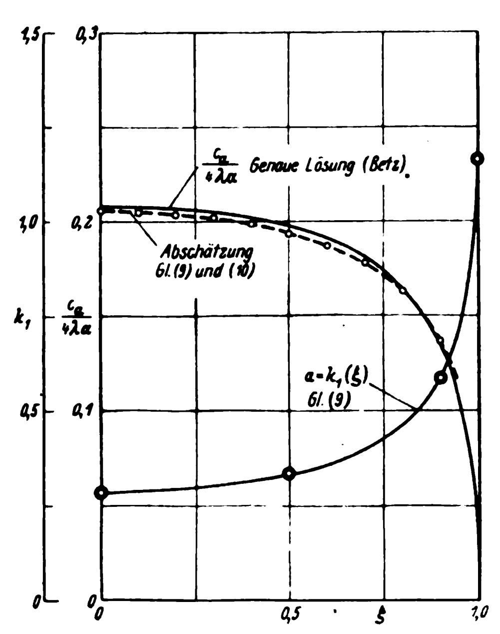


Bild 1 (links) zeigt für einen unverwundenen Rechteckflügel den Verlauf der Funktion $a(\xi)$ und den Vergleich der geschätzten Verteilung $c_a(\xi)$ mit der genauen Lösung. Die auf der Kurve $a(\xi)$ hervorgehobenen Punkte entsprechen den Werten $k_1(\xi^*)$ von Bild 2.

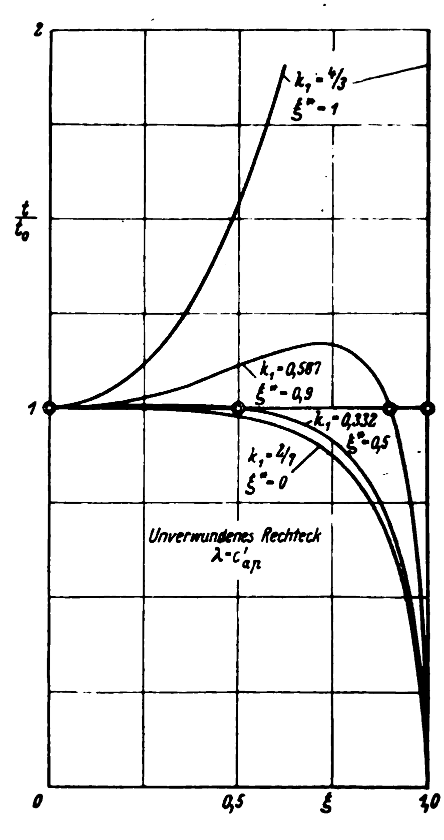


Bild 2 (rechts) veranschaulicht am Beispiel des Rechteckflügels von Bild 1 den der Abschätzung zugrunde liegenden Gedanken: Um c_a an der Stelle ξ^* zu berechnen, wird der gegebene Umriß $\left(\text{hier } \frac{t}{t_0} = 1\right)$ jeweils durch einen Umriß nach Gl. (8) mit $k_1(\xi^*) = $ const und $k_2 = 0$ ersetzt. Die Abbildung zeigt vier solche Umrisse für vier verschiedene ξ^*.

Stellen ξ zugehören, insofern $t(\xi)$ auf $t_0 = t(0)$ bezogen ist. Das dem Verfahren zugrunde liegende Gedankenschema veranschaulicht Bild 2. Das Schema ist so lange physikalisch sinnvoll, als der gegebene Umriß folgende Bedingung erfüllt:

$$\frac{(1-\xi^2)^{3/2}}{1+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\,t_0}{4\,b}\,\xi^2} \leqslant \frac{t}{t_0} \leqslant \frac{1+\frac{4\,b}{3\,(c'_{a\,p})_0\,t_0}\,\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Die Flügeltiefe ist dann überall positiv. Ecken im Flügelumriß bilden sich im c_a-Verlauf ab, ein Mangel der Abschätzung, der praktisch bedeutungslos bleibt.

3. Der verwundene Flügel.

Da die Integralgleichung (1) einen linearen Zusammenhang zwischen α_p und α herstellt, kann die Problemlösung für einen verwundenen Tragflügel aufgespalten werden in einen zu $\bar{\alpha}$ proportionalen Anteil, der dem unverwundenen Tragflügel entspricht, und einen von $\bar{\alpha}$ unabhängigen Anteil, der von der Verwindung herrührt[4]) und insgesamt keinen Beitrag zum Auftrieb liefert[5]). So entspricht der Aufspaltung des Anstellwinkels $\alpha(\xi) = \bar{\alpha} + \vartheta(\xi)$ in mittleren Anstellwinkel und Verwindung eine Aufspaltung der Auftriebszahl $c_a(\xi) = c_{a\,\alpha}(\xi) + c_{a\,\vartheta}(\xi)$ in Umrißanteil und Verwindungsanteil, wobei $c_{a\,\alpha}$ nur von $\bar{\alpha}$ und $c_{a\,\vartheta}$ nur von ϑ abhängt. Der Umrißanteil $c_{a\,\alpha}$ wurde im vorigen Abschnitt bereits behandelt — Gl. (6) und (6 a). Für den Verwindungsanteil setzen wir entsprechend Gl. (2)

$$c_{a\,\vartheta}(\xi) = c'_{a\,p}\cdot\vartheta_p(\xi)\,c_{a\,\mathrm{I}}\,\frac{t_0}{t}\sqrt{1-\xi^2}\,(1+k_{\mathrm{I}}\,\xi^2+k_{\mathrm{II}}\,\xi^4+\ldots.) \quad \ldots \quad (11)$$

und erhalten mit Gl. (3)

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(\xi) = \vartheta_p(\xi)+\vartheta_i(\xi) &= \frac{c_{a\,\mathrm{I}}}{(c'_{a\,p})_0}\,\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}\,(1+k_{\mathrm{I}}\,\xi^2+k_{\mathrm{II}}\,\xi^4)\\ &+\frac{c_{a\,\mathrm{I}}\,t_0}{4\,b}\left[1-k_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{2}-3\,\xi^2\right)-k_{\mathrm{II}}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\,\xi^2-5\,\xi^4\right)\right]\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

An Stelle von Gl. (4) tritt

$$0 = \frac{\pi}{4}\,c_{a\,\mathrm{I}}\,\frac{b\,t_0}{F}\left(1+\frac{k_{\mathrm{I}}}{4}+\frac{k_{\mathrm{II}}}{8}\right) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Hieraus folgt $k_{\mathrm{II}} = -8\left(1+\frac{k_{\mathrm{I}}}{4}\right)$. Die verbleibenden Konstanten $c_{a\,\mathrm{I}}$ und k_{I} ergeben sich aus der Forderung, daß an zwei Stellen ξ_1 und ξ_2 der Halbspannweite die Differenzen $\vartheta(0) - \vartheta(\xi_1)$ und $\vartheta(0) - \vartheta(\xi_2)$ nach Gl. (12) die gegebenen Werte $\alpha(0) - \alpha(\xi_1)$ und $\alpha(0) - \alpha(\xi_2)$ annehmen sollen.

Setzen wir nun auch hier $k_{\mathrm{II}} = 0$, so erhalten wir aus Gl. (13) $k_{\mathrm{I}} = -4$ und damit aus Gl. (12)

$$\vartheta(\xi) = c_{a\,\mathrm{I}}\left(\frac{1}{(c'_{a\,p})_0}\,\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}+\frac{3}{4}\,\frac{t_0}{b}\right)(1-4\,\xi^2) \quad (14)$$

Die Gesamtverwindung $\Delta\vartheta = \vartheta(0) - \alpha(0) - \alpha(1)$ ist demnach

$$\Delta\vartheta = \vartheta(0)-\vartheta(1) = \frac{c_{a\,\mathrm{I}}}{(c'_{a\,p})_0}\left(1+3\lim_{\xi\to 1}\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}\right)+3\,c_{a\,\mathrm{I}}\,\frac{t_0}{b} \quad \ldots \quad (15)$$

Hierdurch ist $c_{a\,\mathrm{I}}$ bestimmt und es ergibt sich

$$\vartheta(\xi) = \frac{\left(\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\,t_0}{4\,b}\right)(1-4\,\xi^2)}{1+3\lim_{\xi\to 1}\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}+3\,(c'_{a\,p})_0\,\frac{t_0}{b}}\,\Delta\vartheta \quad (16)$$

Der Verwindungsanteil der Auftriebszahl beträgt nach Gl. (11) und (14)

$$c_{a\,\vartheta}(\xi) = \frac{c'_{a\,p}\,\vartheta(\xi)}{1+\frac{\vartheta_i(\xi)}{\vartheta_p(\xi)}} = \frac{c'_{a\,p}\cdot\vartheta(\xi)}{1+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\,t_0}{4\,b}\,\frac{\varkappa\,t}{t_0\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (17)$$

Auf den mit $c_{a\,\alpha}(\xi)$ nach Gl. (6 a) sehr verwandten Bau dieses Ausdrucks sei besonders hingewiesen. Setzt man Gl. (16) in Gl. (17) ein, so folgt

$$c_{a\,\vartheta}(\xi) = \frac{\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}\,(1-4\,\xi^2)}{1+3\lim_{\xi\to 1}\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}+3\,(c'_{a\,p})_0\,\frac{t_0}{b}}\,c'_{a\,p}\cdot\Delta\vartheta \quad (18)$$

Es sei nun wieder ein beliebiger Tragflügel gegeben, dessen Auftriebsverteilung abgeschätzt werden soll. Zunächst muß von der gegebenen Anstellwinkelverteilung $\alpha(\xi)$ der Umrißanteil $\bar{\alpha}$ abgespalten werden. Aus Gl. (16) folgt

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha(0) - \vartheta(0)\\ &= \alpha(0) - \frac{1+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\,t_0}{4\,b}}{1+3\lim_{\xi\to 1}\frac{t_0}{\varkappa\,t}\sqrt{1-\xi^2}+3\,(c'_{a\,p})_0\,\frac{t_0}{b}}\,[\alpha(0)-\alpha(1)]\end{aligned} \quad \ldots \quad (19)$$

Für den Verwindungsanteil der Auftriebszahl liefert Gl. (17) eine brauchbare Abschätzung auch in Fällen, wo die Verwindung $\vartheta(\xi)$ durchaus nicht die in Gl. (14) vorausgesetzte Gestalt hat. Allerdings muß man die bei unstetiger Verwindung (Landeklappenausschläge) auftretenden Unstetigkeiten in der Auftriebszahl durch stetige Übergänge vom Betz-Petersohnschen Typus abrunden.

4. Der verwundene Ellipsenflügel.

Besonders übersichtlich gestalten sich die Zusammenhänge bei elliptischem Flügelumriß mit $\varkappa = 1$. Wir behandeln zwei typische Verwindungsverläufe, die parabolische und die sog. »Endverwindung«.

Bei elliptischem Umriß geht Gl. (16) über in die Formel für parabolische Verwindung

$$\vartheta(\xi) = \Delta\vartheta\left(\frac{1}{4}-\xi^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Ihr entspricht nach Gl. (18) der Verwindungsanteil der Auftriebszahl

$$c_{a\,\vartheta}(\xi) = \frac{(c'_{a\,p})_0\,\Delta\vartheta}{1+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0\,t_0}{4\,b}}\left(\frac{1}{4}-\xi^2\right) = \frac{(c'_{a\,p})_0}{1+3\,\frac{(c'_{a\,p})_0}{\pi\,\lambda}}\,\vartheta(\xi). \quad (21)$$

oder

$$c_{a\,\vartheta}(\xi) = \Delta c_a\left(\frac{1}{4}-\xi^2\right) \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{a})$$

In Gl. (21) ist berücksichtigt, daß bei der Ellipse die Völligkeit des Umrisses $\frac{F}{b\,t_0} = \frac{\pi}{4}$ und folglich die Streckung $\lambda = \frac{b^2}{F} = \frac{4\,b}{\pi\,t_0}$ ist. Mit

$$\Delta c_a = \frac{c'_{a\,p}\cdot\Delta\vartheta}{1+3\,\frac{c_{a\,p}}{\pi\,\lambda}} \quad \ldots\ldots \quad (21\,\mathrm{b})$$

ist der »Auftriebsabfall« $c_a(0) - c_a(1)$ eingeführt, der von $\bar{\alpha}$ unabhängig bleibt, während der Umrißanteil beim Ellipsenflügel nach Gl. (9) und (10) mit $k_1 = 0$ längs der Spannweite konstant

$$c_{a\,\alpha} = \frac{(c_{a\,p})_0\,\bar{\alpha}}{1+\frac{(c'_{a\,p})_0}{\pi\,\lambda}} = \bar{c}_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

ist. Hervorzuheben ist, daß beim parabolisch verwundenen Ellipsenflügel der Verwindungsanteil der Auftriebszahl die gleiche (parabolische) Verteilung wie die Verwindung selbst hat. Ferner zeichnet sich dieser Flügeltypus dadurch aus, daß diejenige Stelle der Halbspannweite, wo die Nullauftriebsrichtung des Profils mit der Nullauftriebsrichtung des gesamten Flügels übereinstimmt, unabhängig von der Streckung λ ist, und zwar befindet sie sich bei $\xi = \frac{1}{2}$. Eine besondere Eigenschaft des verwundenen Ellipsenflügels überhaupt ist, daß sich auch der induzierte Widerstand in

---

[4]) Diese Überlegung liegt der Darstellung bei J. Hueber, Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933), S. 397, zugrunde.

[5]) A. Lippisch, Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 89.

Umrißanteil und Verwindungsanteil aufspalten läßt. Da $k_1 = k_2 = \ldots = 0$ und nach Gl. (4) $c_{a0} = \bar{c}_a$ ist, erhält man

$$\bar{c}_{wi} = \frac{\bar{c}_a^2}{\pi \lambda} + \frac{\pi}{16} \frac{(c_{a\,\mathrm{I}}\, t_0)^2}{F} \left(1 + \frac{k_\mathrm{I}}{2} + \frac{k_\mathrm{I}^2}{4} + \frac{k_\mathrm{II}}{4} + \frac{11}{32} k_\mathrm{I} k_\mathrm{II} + \frac{9}{64} k_\mathrm{II}^2\right) \quad \ldots (23)$$

Nach G. Schulz ist wegen $k_\mathrm{II} = -8\left(1 + \frac{k_\mathrm{I}}{4}\right)$

$$\bar{c}_{wi} = \frac{1}{\pi \lambda}\left[\bar{c}_a^2 + c_{a\,\mathrm{I}}^2 \left(8 + \frac{7}{4} k_\mathrm{I} + \frac{k_\mathrm{I}^2}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi \lambda}\left[\bar{c}_a^2 + c_{a\,\mathrm{I}}^2 \left(3 - \frac{3}{8} k_\mathrm{II} + \frac{k_\mathrm{II}^2}{32}\right)\right] \quad \ldots (23\,\mathrm{a})$$

ferner

$$\Delta c_a = c_{a\,\mathrm{I}}\,(8 + k_\mathrm{I}) = c_{a\,\mathrm{I}}\left(4 - \frac{k_\mathrm{II}}{2}\right)$$

und

$$\Delta \vartheta = \frac{\Delta c_a}{c'_{a\,p}}\left(1 + 4\, \frac{c'_{a\,p}}{\pi \lambda}\, \frac{7 + k_\mathrm{I}}{8 + k_\mathrm{I}}\right).$$

Im vorliegenden Falle ist $k_\mathrm{II} = 0$, $k_\mathrm{I} = -4$ und nach Gl. (15) und (21) $c_{a\,\mathrm{I}} = \frac{\Delta c_a}{4}$. So ergibt sich

$$\bar{c}_{wi} = \frac{\bar{c}_a^2}{\pi \lambda} + \Delta \bar{c}_{wi} = \frac{\bar{c}_a^2}{\pi \lambda} + \frac{3}{16} \frac{(\Delta c_a)^2}{\pi \lambda} \quad \ldots (24)$$

Bei festem $\Delta \vartheta$ besitzt $\Delta \bar{c}_{wi}$ ein sehr flaches Minimum $(\Delta c_{wi})_{\min} = \frac{c'_{a\,p}}{64} (\Delta \vartheta)^2$ für $\lambda = \frac{3 c'_{a\,p}}{\pi}$, also gerade im praktisch interessierenden Bereich.

Da der Verwindungswiderstand $\Delta \bar{c}_{wi}$ von $\bar{c}_a$ unabhängig ist, spielt er die Rolle eines Zuschlages zum Profilwiderstand.

Ebenfalls von Bedeutung ist ein anderer Verwindungstypus, bei dem sich die Verwindung im wesentlichen auf das Flügelende konzentriert und der deshalb als »Endverwindung« bezeichnet werden mag. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß in der Reihenentwicklung Gl. (11) alle Koeffizienten außer k_II gleich Null werden. Die Einzelheiten der Rechnung, die ganz analog der für den parabolisch verwundenen Ellipsenflügel verläuft, können übergangen werden. Man erhält folgende Ergebnisse:

$$c_{a\vartheta}(\xi) = \Delta c_a \left(\frac{1}{8} - \xi^4\right) \quad \ldots (25)$$

$$\vartheta(\xi) = \frac{\Delta c_a}{8}\left(\frac{1 - 8\xi^4}{c'_{a\,p}} + 2\, \frac{1 + 6\xi^2 - 20\xi^4}{\pi \lambda}\right) \quad (26)$$

$$\Delta c_a = \frac{c_{a\,p} \cdot \Delta \vartheta}{1 + \frac{7}{2} \frac{c'_{a\,p}}{\pi \lambda}} \quad \ldots (27)$$

$$\bar{c}_{wi} = \frac{\bar{c}_a^2}{\pi \lambda} + \Delta \bar{c}_{wi} = \frac{\bar{c}_a^2}{\pi \lambda} + \frac{1}{8} \frac{(\Delta c_a)^2}{\pi \lambda} \quad \ldots (28)^{6)}$$

Der Vergleich der Gl. (24) und (28) zeigt, daß der endverwundene Ellipsenflügel bei gleichem Auftriebsabfall den geringeren induzierten Verwindungswiderstand hat. Der Unterschied ist noch stärker ausgeprägt, wenn man auf Grund der Gl. (21 b) und (27) bei gleicher Gesamtverwindung vergleicht. Man beachte, daß bereits hier $c_{a\vartheta}$ und ϑ verschiedenartig verteilt sind.

Zusammenfassung.

Für alle praktisch vorkommenden, einfachen Flügelumrisse und Verwindungen liefern die Gl. (9) und (10) — Umrißanteil — und die Gl. (17) und (19) — Verwindungsanteil — eine bequeme und genügend genaue Abschätzung für die Auftriebsverteilung. Ein Höchstmaß an Einfachheit und Anschaulichkeit weisen die exakten Ergebnisse für den parabolisch verwundenen Ellipsenflügel auf. Fast ebenso einfach, aber widerstandsmäßig günstiger ist der endverwundene Ellipsenflügel.

[6] Bei festem $\Delta \vartheta$ ist $(\Delta \bar{c}_{wi})_{\min} = \frac{c'_{a\,p}}{112} (\Delta \vartheta)^2$ für $\lambda = \frac{7 c'_{a\,p}}{2\pi}$.

Der Abwind auf der Längsachse des Flügels bei Betzscher Zirkulationsverteilung*).

Von G. Schulz, Rostock.

Bericht der Ernst Heinkel Flugzeugwerke, Seestadt Rostock.

Der Betzsche Zirkulationsansatz $\Gamma(\xi) = \Gamma_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \times (1 + k_1 \cdot \xi^2 + k_2 \cdot \xi^4 + \ldots)$ ist unter Beibehaltung von drei Gliedern gut geeignet, mit verhältnismäßig einfachen Formeln die meisten praktisch vorkommenden Zirkulationsverteilungen darzustellen. Dieser Bericht fußt auf einer Arbeit von Helmbold, (»Einige einfache Formeln aus der Tragflügeltheorie«) die mit Hilfe des obigen Ansatzes sowohl den unverwundenen Flügel bei verschiedenen Umrissen als auch besonders verschiedene Typen der Verwindung nach der Theorie der tragenden Linie behandelt. Als besonders einfache Spezialfälle sind der parabolisch verwundene und der sogenannte endverwundene Ellipsenflügel dargestellt.

Im Folgenden wird zunächst ganz allgemein der Abwind für die angeführte Zirkulationsverteilung berechnet und dann die allgemeinen Ergebnisse sowohl auf verschiedene Flügelumrißformen als auf die Helmboldschen Verwindungstypen angewendet.

Der Abwind wird berechnet unter Vernachlässigung der Absenkung des Wirbelbandes hinter dem Flügel. Das Wirbelband wird ferner als vollständig unaufgerollt angenommen. Dieser Zustand kommt nach Bemerkungen von Muttray[1]) und Multhopp[2]) in seiner Wirkung der Wirklichkeit ziemlich nahe. Es ist der von Helmbold und Muttray als obere Grenze bezeichnete Zustand.

Da es notwendig sein kann, den Abwindanteil des gebundenen Wirbels und den der freien Wirbel getrennt zu berechnen, ist dies im Folgenden immer geschehen. Auch in den Schaubildern sind beide Anteile dargestellt.

Gliederung.

Bezeichnungen:

$x =$ Entfernung eines Punktes von der Symmetrieebene des Flügels, quer zur Strömungsrichtung; dimensionslos: $\xi = \frac{2x}{b}$,

$y =$ Entfernung eines Punktes von der tragenden Linie in Strömungsrichtung; dimensionslos: $\eta = \frac{2y}{b}$,

$b =$ Spannweite; $F =$ Flügelfläche,

$\lambda = \frac{b^2}{F} =$ Streckung,

$v =$ Anströmgeschwindigkeit,

$w =$ Abwärts-, bzw. Aufwärtskomponente der örtlichen Geschwindigkeit,

$\alpha_w = \frac{w}{v} =$ Abwind- bzw. Aufwindwinkel

$c_a =$ Auftriebsbeiwert
$t =$ Flügeltiefe
$\Gamma = \frac{c_a \cdot v \cdot t}{2} =$ Zirkulation
$\vartheta =$ Verwindungswinkel gegen die Nullauftriebsrichtung

(die vier letzten Größen: Funktionen von ξ)

$\Delta\vartheta =$ $\vartheta(\xi = 1) - \vartheta(\xi = 0) =$ Gesamtverwindung

$\Delta c_a =$ $c_a =$ Abfall längs des Flügels infolge Verwindung,

$c'_{a\,p} = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha_\infty} =$ Auftriebsanstieg bei unendlicher Flügelstreckung,

$g =$ auf $\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}$ bezogener Abwindwinkelanteil des gebundenen Wirbels,

$f =$ auf $\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}$ bezogener Abwindwinkelanteil der freien Wirbel,

$h =$ auf $\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}$ bezogener Gesamtabwindwinkel

$k_1, k_2 =$ Konstanten, die für den unverwundenen Flügel (bzw. den »Umrißanteil« des verwundenen Flügels) den Verlauf der Zirkulation längs der Spannweite bestimmen,

$k_I, k_{II} =$ die entsprechenden Konstanten für den Verwindungsanteil.

Indices: $\Gamma =$ auf den gebundenen Wirbel bezüglich,
$E =$ auf die freien Wirbel bezüglich,
$0 =$ in Flügelmitte ($\xi = 0$),
$\vartheta =$ auf die Verwindung bezüglich.

[k bedeutet 1. den Modul der elliptischen Integrale,
2. das Verhältnis $\frac{b'}{b}$ beim ganz aufgerollten Wirbelband].

I. Grundlegende Ansätze und allgemeine Rechnungen.

Der allgemeine Zirkulationsansatz

$$\Gamma(\xi) = \Gamma_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \cdot (1 + k_1 \xi^2 + k_2 \cdot \xi^4 \ldots) \quad . . (1)$$

wird sowohl für den sog. Umrißanteil als für den Verwindungsanteil eines Flügels benutzt, wobei die Parameter k_1 und k_2 beim Umrißanteil bzw. k_I und k_{II} beim Verwindungsanteil den speziellen Typ charakterisieren. (Sie können sowohl positive wie negative Werte annehmen.) Der von der Zirkulation Γ der tragenden Linie, also eines gebundenen Wirbels, induzierte Abwind für einen Punkt y der Flügelsymmetrielinie ist nach dem Biot-Savartschen Gesetz:

$$w_\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{-d\Gamma}{dx} \cdot \frac{x\,dx}{y \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \quad . . . . (2)$$

Der von den freien Wirbeln herrührende Abwind ist:

$$w_F = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{-d\Gamma}{dx} \cdot \frac{dx}{x} \left[1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \quad . . (3)$$

---

*) P 3111.
1) Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 101.
2) Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 463.

Oder mit der Halbspannweite dimensionslos gemacht:

$$w_\Gamma = \frac{-1}{2\pi b\eta}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{d\Gamma}{d\xi}\cdot\frac{\xi\cdot d\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \quad \ldots\ldots (4)$$

$$w_E = \frac{-1}{2\pi b}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{d\Gamma}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{\xi}\left[1+\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right] \quad (5)$$

Weiter ist die Ableitung des allgemeinen Zirkulationsansatzes (Gl. (1)):

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \Gamma_0\cdot\Big[\sqrt{1-\xi^2}\,(2k_1\xi+4k_2\xi^3) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,(1+k_1\xi^2+k_2\xi^4)\Big] \quad \ldots (6)$$

Dieser Ausdruck in die Gl. (4) und (5) eingesetzt, ergibt:

$$w_\Gamma = \frac{-\Gamma_0}{2\pi b\eta}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\Big[\sqrt{1-\xi^2}\,(2k_1\xi+4k_2\xi^3) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,(1+k_1\xi^2+k_2\cdot\xi^4)\Big] \quad \ldots (7)$$

$$w_E = \frac{-\Gamma_0}{2\pi b}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{d\xi}{\xi}\left[1+\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right] \times\left\{\sqrt{1-\xi^2}\,(2k_1\xi+4k_2\xi^3) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot(1+k_1\xi^2+k_2\xi^4)\right\} \quad \ldots (8)$$

Setzt man nun weiter

$$\xi = \cos\varphi;\quad d\xi = -\sin\varphi;\quad \sqrt{1-\xi^2} = \sin\varphi$$

und führt die vollständigen elliptischen Integrale ein:

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}\,d\varphi;\quad Y_\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2\mu}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}}.$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3\ldots$$

wobei $k^2 = \frac{1}{1+\eta^2}$ gesetzt ist, so ergeben sich nach längerer Rechnung, die im Anhang wiedergegeben wird, folgende allgemeine Formeln für die Abwindanteile:

$$w_\Gamma = \frac{\Gamma_0}{2b}\,[A_\Gamma - k_1 B_\Gamma - k_2\cdot C_\Gamma] \quad \ldots\ldots (9)$$

und

$$w_E = \frac{\Gamma_0}{2b}\,[A_E - k_1 B_E - k_2\cdot C_E] \quad \ldots\ldots (10)$$

Der gesamte Abwind ist:

$$w = w_\Gamma + w_E = \frac{\Gamma_0}{2b}\,[A - k_1 B - k_2 C].$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise ist gesetzt worden:

$$\frac{2(Y_0-Y_1)}{\pi\cdot\eta\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = A_\Gamma;\quad \frac{2(4Y_1-Y_0-3Y_2)}{\pi\cdot\eta\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = B_\Gamma;$$

$$\frac{2(7Y_1-Y_0-11Y_2+5Y_3)}{\pi\cdot\eta\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = C_\Gamma;$$

$$1+\frac{2\eta\cdot Y_0}{\pi\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = A_E;\quad \frac{1}{2}+\frac{2\eta\cdot(3Y_1-Y_0)}{\pi\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = B_E;$$

$$\frac{1}{8}+\frac{2\eta\cdot(6Y_1-5Y_2-Y_0)}{\pi\cdot\sqrt{1+\eta^2}} = C_E.$$

In diesen Formeln sind die elliptischen Integrale und damit auch die Größen $(A, B, C)_{\Gamma, E}$ nur Funktionen von $\eta = \frac{2y}{b}$ dem dimensionslosen Abstand des Aufpunktes für den Abwind von der tragenden Linie. Diese wird, wie üblich, durch die Viertelpunkte der Flügeltiefen gehend angenommen.

Die Größen $(A, B, C)_{\Gamma, E}$ sind für den praktisch notwendigen Bereich von η in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Aus den Formeln (9) und (10) und der Zahlentafel 1 sind in den folgenden Abschnitten die Sonderfälle einfach zu berechnen. Braucht man in besonderen Fällen, beispielsweise bei der Behandlung der Rumpfstabilität, einmal den Aufwind **vor** dem Flügel, so kann man die Größen $(A, B, C)_{\Gamma, E}$ für **negative** Werte von $\eta = \frac{2y}{b}$ einfach durch folgende Rekursionsformeln berechnen (s. Anhang):

$$(A_\Gamma, B_\Gamma, C_\Gamma)(-\eta) = -(A_\Gamma, B_\Gamma, C_\Gamma)(+\eta);$$

$$A_E(-\eta) = 2 - A_E(+\eta);\quad A(-\eta) = 2 - A(+\eta);$$

$$B_E(-\eta) = 1 - B_E(+\eta);\quad B(-\eta) = 1 - B(+\eta);$$

$$C_E(-\eta) = \frac{1}{4} - C_E(+\eta);\quad C(-\eta) = \frac{1}{4} - C(+\eta).$$

II. Abwind beim allgemeinen Fall des unverwundenen Tragflügels.

1. Allgemeine Formeln.

Der Abwind des unverwundenen Flügels und der Umrißanteil des verwundenen Flügels werden wie üblich, mit

$$\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda} = \frac{\bar{c}_a\cdot F}{\pi b^2}$$

dimensionslos gemacht. Nach Gl. (9) und (10) ist der Abwindwinkel $\alpha_w = \frac{w}{v}$

$$\alpha_{w\Gamma} = \frac{c_{a0}\cdot t_0}{4b}\,[A_\Gamma - k_1 B_\Gamma - k_2 C_\Gamma] \quad \ldots (9a)$$

$$\alpha_{wE} = \frac{c_{a0}\cdot t_0}{4b}\,[A_E - k_1 B_E - k_2 C_E] \quad \ldots (10a)$$

Der mittlere Auftriebsbeiwert $\bar{c}_a$ ist:

$$\bar{c}_a = \int_{-1}^{+1} c_a\,d\xi = c_{a0}\cdot\frac{\pi b t_0}{4F}\cdot\left(1+\frac{k_1}{4}+\frac{k_2}{8}\right) \quad \ldots (11)$$

Dies, in die Formeln (9a) und (10a) eingeführt, ergibt:

$$\frac{\alpha_{w\Gamma}}{\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{1+\frac{k_1}{4}+\frac{k_2}{8}}\cdot[A_\Gamma - k_1 B_\Gamma - k_2 C_\Gamma] = g \quad (12)$$

$$\frac{\alpha_{wE}}{\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{1+\frac{k_1}{4}+\frac{k_2}{8}}\cdot[A_E - k_1 B_E - k_2 C_E] = f \quad (13)$$

Dies sind die auf den induzierten Anstellwinkel $\alpha_{i\,\text{Ellipse}}$ bezogenen Abwindanteile vom gebundenen (g) und von den

Zahlentafel 1.

$\eta = \frac{2y}{b}$	A_Γ	B_Γ	C_Γ	A_E	B_E	C_E	A	B	C
0	∞	— ∞	— ∞	1	0,500	0,1250	∞	— ∞	— ∞
0,2	3,027	— 0,1268	— 0,0321	1,379	0,895	0,1967	4,406	0,758	0,1646
0,4	1,370	— 0,1356	— 0,0442	1,574	0,991	0,2352	2,944	0,855	0,1910
0,6	0,812	— 0,1134	— 0,0431	1,698	1,010	0,2516	2,510	0,897	0,2085
0,8	0,538	— 0,0908	— 0,0373	1,780	1,026	0,258	2,318	0,935	0,221
1,0	0,381	— 0,0720	— 0,0311	1,835	1,025	0,259	2,216	0,953	0,228
1,2	0,283	— 0,0577	— 0,0251	1,873	1,023	0,258	2,156	0,965	0,233
1,4	0,218	— 0,0465	— 0,0206	1,900	1,020	0,257	2,118	0,974	0,236
∞	0	0	0	2	1	0,250	2,000	1,000	0,250

freien (f) Wirbeln. Ihre Berechnung ist sehr einfach, sobald die Werte k_1 und k_2 eines Flügelumrisses bekannt sind. (Siehe Zahlentafel 2).

Im Folgenden werden die obenstehenden Ausdrücke immer mit f und g, ihre Summe mit h bezeichnet. Aus der anfangs erwähnten Arbeit von Helmbold entnimmt man folgende Formel zur Berechnung der Umrißform unverwundener Flügel:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{(1 + k_1 \xi^2 + k_2 \xi^4) \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \frac{c'_{ap} \cdot t_0}{4 b} \cdot \left[3\left(k_1 - \frac{k_2}{2}\right)\xi^2 + 5 k_2 \cdot \xi^4\right]} \qquad (14)$$

$$= \frac{\Gamma(\xi)/\Gamma_0}{1 - \frac{c'_{ap} \cdot t_0}{4 b} \cdot \left[3\left(k_1 - \frac{k_2}{2}\right)\xi^2 + 5 k_2 \cdot \xi^4\right]} \qquad (15)$$

Man erkennt an den Formeln (14) und (15), daß ein bestimmter Umriß, z. B. ein Trapez bestimmter Zuspitzung, für jede Flügelstreckung andere Werte von k_1 und k_2 annimmt. Eine Ausnahme hiervon macht nur der elliptische Umriß.

2. Beispiele.

Es sollen nun einige spezielle Umrißformen untersucht werden. Für den elliptischen Umriß ist $k_1 = k_2 = 0$ und damit:

$$f = A_E; \quad g = A_\Gamma; \quad f + g = h = A \quad . \; . \; . \; (16)$$

In der Zahlentafel 2 sind einige Umrißformen und die zugehörigen k_1- und k_2-Werte zusammengestellt. In den Bildern 1 bis 4 sind die Umrisse gezeichnet und in Bild 5 der Abwindverlauf auf der Längsachse zum Vergleich für alle angeführten Flügel dargestellt.

Die Zahlentafeln 2 und 3 und die Bilder zeigen positive k_1 und k_2 für völlige Umrisse, negative Werte für spitze Umrisse. Es lassen sich auch »Doppeltrapeze« annähern (positives k_1, negatives k_2). Die meisten praktisch vorkommenden Flügel liegen dem Umriß und damit auch dem Abwindverlauf nach zwischen den beiden am Ende der Zahlentafeln aufgeführten trapezähnlichen Formen. Danach liegt der Abwind praktischer Umrisse mindestens bei etwa 90% und höchstens 120% des Abwinds des elliptischen Umrisses, vom Verwindungsanteil abgesehen. Der Abwind des unverwundenen Ellipsenflügels läßt sich folgendermaßen in geschlossener Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha_{w\Gamma}}{\alpha_i} &= g = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Y_0 - Y_1}{\eta \cdot \sqrt{1 + \eta^2}}\,; \\ \frac{\alpha_{wE}}{\alpha_i} &= f = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Y_0 \cdot \eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

$$\frac{\alpha_{w\Gamma+E}}{\alpha_i} = h = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E \cdot \sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} \qquad \text{(Bild 6).}$$

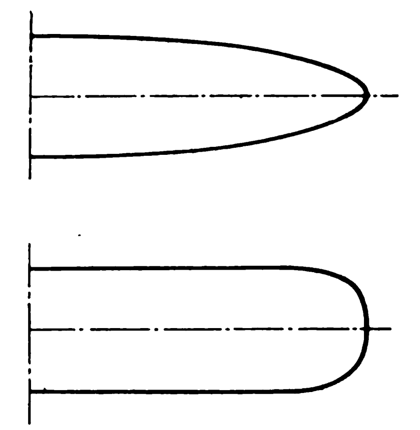


Bild 1. Tragflügelumrisse bei Betzscher Zirkulationsverteilung
Ellipse: $k_1 = 0$; $k_2 = 0$; $b/t_0 = c'_{ap} = 5{,}5$. $\lambda = 7{,}00$.
Rechteck I: $k_1 = 0{,}32$; $k_2 = 0{,}24$; $b/t_0 = c'_{ap} = 5{,}5$. $\lambda = 5{,}71$.

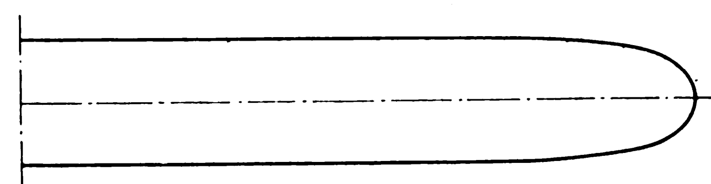


Bild 2. Tragflügelumrisse bei Betzscher Zirkulationsverteilung.
Rechteck II: $k_1 = 0{,}39$; $k_2 = 0{,}35$; $b/t_0 = 2\,c'_{ap} = 11{,}0$. $\lambda = 11{,}55$.

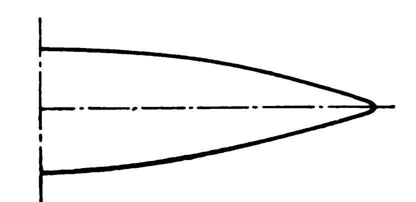


Bild 3. Tragflügelumrisse bei Betzscher Zirkulationsverteilung.
Parabel: (Annäherung der Funktion $t/t_0 = 1 - \xi^2$).
$k_1 = -0{,}3$; $k_2 = -0{,}2$; $b/t_0 = c'_{ap} = 5{,}5$. $\lambda = 8{,}19$.

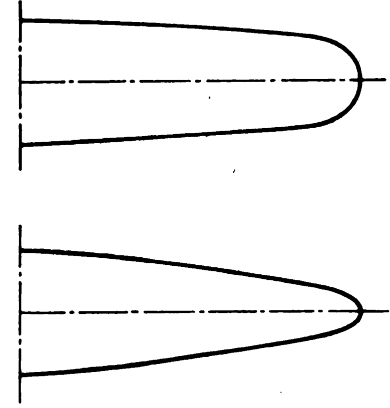


Bild 4. Tragflügelumrisse bei Betzscher Zirkulationsverteilung.
Überelliptisches Trapez: $k_1 = 0$; $k_2 = 0{,}4$; $b/t_0 = c'_{ap} = 5{,}5$. $\lambda = 6{,}44$.
Unterelliptisches Trapez: $k_1 = -0{,}4$; $k_2 = 0{,}4$; $b/t_0 = c'_{ap} = 5{,}5$. $\lambda = 7{,}78$.

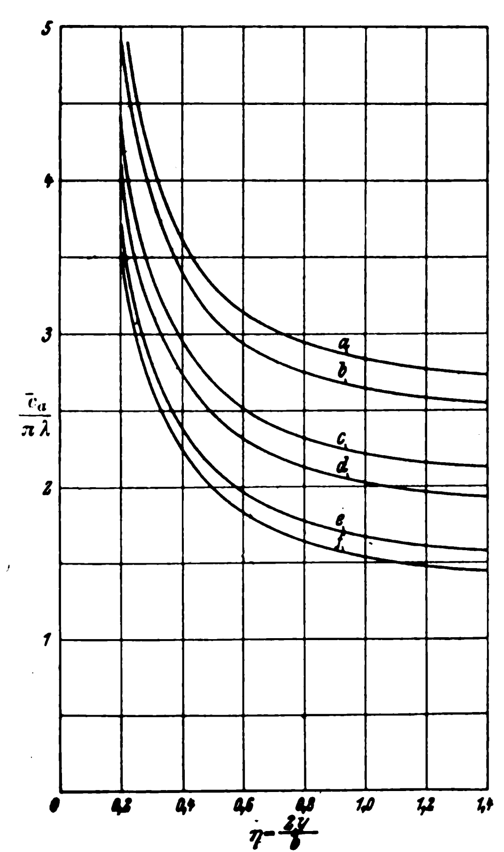


Bild 5. Einfluß der Umrißform auf den Abwind.
a) Parabel, d) Überell. Trapez,
b) Unterell. Trapez, e) Rechteck I,
c) Ellipse, f) Rechteck II.

Zahlentafel 2.

Nr.	Flügelumriß	k_1	k_2	$\frac{c'_{ap} \cdot t_0}{b}$	$\frac{\lambda \cdot t_0}{b}$	$\lambda_{(c'_{ap} = 5,5)}$
1	Ellipse: $t/t_0 = \sqrt{1 - \xi^2}$	0	0	beliebig		
2	Rechteck I mit abgerundeten Ecken	0,32	0,24	1	0,964	5,71
3	Rechteck II mit abgerundeten Ecken	0,39	0,35	$\frac{1}{2}$	0,953	11,55
4	Parabel (Näherung für: $t/t_0 = 1 - \xi^2$)	−0,3	−0,2	1	0,672	8,19
5	Überelliptisches Trapez mit abgerundeten Ecken	0	+0,4	1	0,854	6,44
6	Unterelliptisches Trapez mit abgerundeten Ecken	−0,4	0,4	1	0,707	7,78

Zahlentafel 3. Umrißkoordinaten t/t_0.

$\xi = \frac{2x}{b}$	Ellipse	Rechteck I	Rechteck II	Parabel	Überell. Trapez	Unterell. Trapez
0	1	1	1	1	1	1
0,3	0,9539	1,010	1,000	0,913	0,950	0,890
0,4	0,9165	1,001	1,002	0,842	0,916	0,819
0,5	0,8660	1,003	1,003	0,752	0,883	0,741
0,6	0,800	1,000	1,003	0,638	0,851	0,662
0,7	0,7141	1,008	1,001	0,507	0,821	0,587
0,8	0,6000	1,002	0,974	0,364	0,784	0,503
0,9	0,4359	0,905	0,852	0,202	0,694	0,395
0,95	0,3123	0,745	0,682	0,132	0,568	0,302
0,98	0,1990	0,526	0,468	0,076	0,398	0,202
1,0	0	0	0	0	0	0

(Die Werte dieser und der übrigen elliptischen Integrale siehe Anhang.)

Etwas umständlich ist die Bestimmung der Streckung. Es ist:

$$\lambda = \frac{b^2}{F} = \frac{b}{t_0} \int_0^1 \frac{t(\xi)}{t_0} \, d\xi .$$

Das Integral, die Völligkeit $\lambda \cdot \frac{t_0}{b}$ (s. Zahlentafel 2), wird am besten graphisch bestimmt.

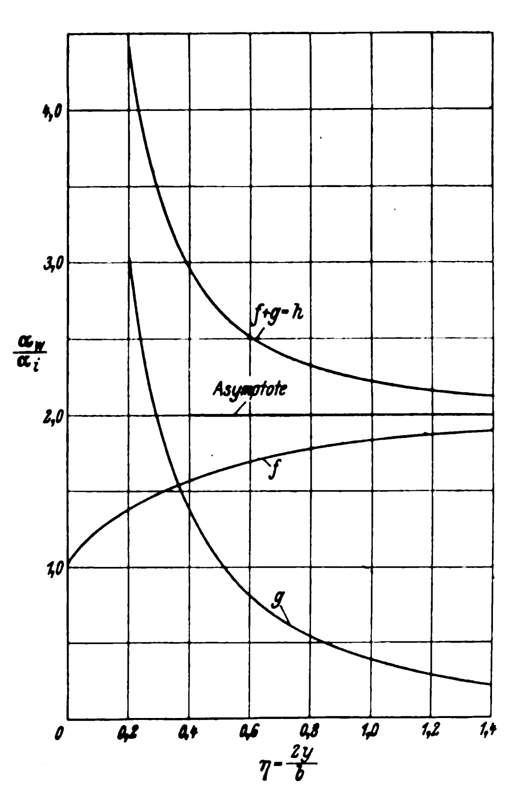


Bild 6. Der unverwundene Ellipsenflügel: ($\Delta\vartheta = 0$)

$\alpha_i = \frac{c_a}{\pi\lambda}$, $\lambda = \frac{4b}{\pi \cdot t_0}$

Anteil:
g = des gebundenen Wirbels,
f = der freien Wirbel.

III. Abwindanteil der Verbindung eines Tragflügels.

Der Verwindungsanteil der Zirkulation ist nach Helmbold:

$$\Gamma_\vartheta(\xi) = \Gamma_I \cdot \sqrt{1 - \xi^2}\,(1 + k_I \xi^2 + k_{II} \cdot \xi^4 \ldots) \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Konstanten k_I und k_{II} bestimmen also den Verwindungsverlauf. Die Bedingung, daß der Gesamtauftrieb der Verwindung gleich Null sein muß ($\overline{c}_{a\vartheta} = 0$), ergibt zwischen den beiden Verwindungskonstanten die Beziehung:

$$k_{II} = -8 \cdot \left(1 + \frac{k_I}{4}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Für $k_{II} = 0$ ist also $k_I = -4$ und
für $k_I = 0$ ist also $k_{II} = -8$.

Diese beiden Sonderfälle des Verwindungsverlaufs sind einfach zu berechnen, besonders in der folgenden Anwendung auf den Ellipsenflügel. (Es können natürlich auch allgemeine Verwindungen berechnet werden, bei denen k_I und k_{II} beide von Null verschieden sind.)

1. Der parabolisch verwundene Ellipsenflügel. $k_I = -4$, $k_{II} = 0$.

Nach Helmbold ergibt sich für diesen Fall der Verwindungsverlauf als Parabel:

$$\vartheta(\xi) = \Delta\vartheta\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right) \qquad \Delta\vartheta = \text{Gesamtverwindungswinkel} = \vartheta(1) - \vartheta(0)$$

$$c_{a\vartheta}(\xi) = \Delta c_a\left(\frac{1}{4} - \xi^2\right) \qquad \Delta c_a = \text{Auftriebsabfall von der Flügelmitte bis zu den Enden}$$

Außerdem ist: $\Delta c_a = \dfrac{c'_{ap} \cdot \Delta\vartheta}{1 + 3 \cdot \dfrac{c'_{ap}}{\pi\lambda}}$.

Aus $c_{a\vartheta}(\xi)$ ergibt sich für $\xi = 0$:

$$c_{aI} = \frac{\Delta c_a}{4} .$$

Nach den Formeln (9) und (10) ist der Abwindanteil:

$$w_{\Gamma\vartheta} = \frac{\Gamma_I}{2b} \cdot (A_\Gamma + 4 B_\Gamma)$$

und

$$w_{\Gamma\vartheta} = \frac{\Gamma_I}{2b} \cdot (A_E + 4 B_I)$$

Setzt man für den Ellipsenflügel $\lambda = \dfrac{4b}{\pi \cdot t_0}$ ein, so ergibt sich hieraus schließlich:

$$\frac{\Gamma_I}{2b} = \frac{c_{aI} \cdot v \cdot t_0}{4b} = \frac{v \cdot \Delta c_a}{4\pi\lambda} .$$

$$g_\vartheta = \frac{\alpha_{w\Gamma\vartheta}}{\dfrac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{4} A_\Gamma + B_\Gamma ; \quad f_\vartheta = \frac{\alpha_{wE\vartheta}}{\dfrac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{4} A_E + B_E \quad . \; . \; . \quad (20)$$

$$h_\vartheta = \frac{\alpha_{w\vartheta}}{\dfrac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{4} A + B \qquad \text{(Bild 7)}$$

Die parabolische Verwindung ist nächst der linearen die einfachste und kommt der Forderung nach einem abkippsicheren Flügel entgegen. (Zahlentafel 4.)

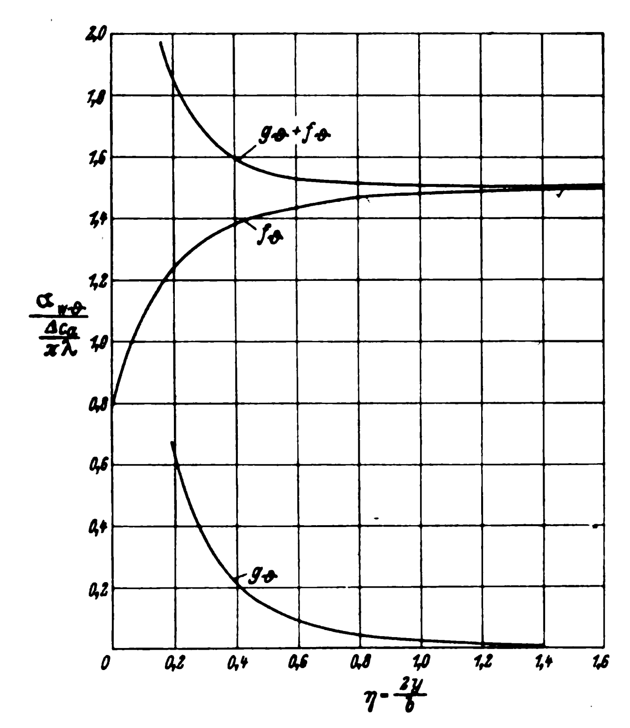


Bild 7. Der parabolisch verwundene Ellipsenflügel: Abwindanteil der Verwindung ($\Delta\vartheta$).
g_ϑ = Anteil des gebundenen Wirbels,
f_ϑ = Anteil der freien Wirbel,
$\Delta c_a = \frac{\Delta\vartheta \cdot c'_{ap}}{1 + 3\,\frac{c'_{ap}}{\pi\lambda}}$; $\lambda = \frac{b^2}{F} = \frac{4\,b}{\pi \cdot t_0}$.

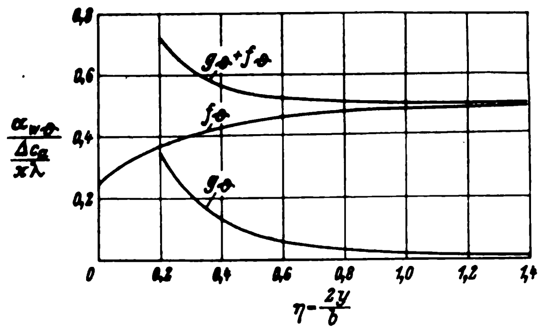


Bild 8 Der endverwundene Ellipsenflügel: Abwindanteil der Verwindung ($\Delta\vartheta$).
g_ϑ = Anteil des gebundenen Wirbels,
f_ϑ = Anteil der freien Wirbel,
$\Delta c_a = \frac{\Delta\vartheta \cdot c'_{ap}}{1 + \frac{7}{2}\cdot\frac{c'_{ap}}{\pi\lambda}}$; $\lambda = \frac{b^2}{F} = \frac{4\,b}{\pi \cdot t_0}$.

Zahlentafel 4. Abwindwerte für den Ellipsenflügel.

$\eta = \frac{2y}{b}$	Umrißanteil			Parabolische Verw.			Endverwindung		
	f	g	h	f_ϑ	g_ϑ	h_ϑ	f_ϑ	g_ϑ	h_ϑ
0	1	∞	∞	0,750	∞	∞	0,25	∞	∞
0,2	1,379	3,027	4,406	1,240	0,6195	1,860	0,3691	0,3463	0,7154
0,4	1,574	1,370	2,944	1,385	0,2069	1,591	0,4319	0,1271	0,5590
0,6	1,698	0,812	2,510	1,435	0,0896	1,524	0,4639	0,0584	0,5223
0,8	1,780	0,538	2,318	1,471	0,0437	1,515	0,4805	0,0300	0,5105
1,0	1,835	0,381	2,216	1,484	0,0233	1,507	0,4884	0,0165	0,5049
1,2	1,873	0,283	2,156	1,491	0,0130	1,504	0,4921	0,0103	0,5024
1,4	1,900	0,218	2,118	1,495	0,0080	1,503	0,4945	0,0066	0,5011
	2	0	2	1,5	0	1,5	0,5	0	0,5

2. Der endverwundene Ellipsenflügel.

$$k_I = 0; \quad k_{II} = -8.$$

$$\vartheta(\xi) = \Delta\vartheta\left[\frac{1 - 8\,\xi^4}{8 + 28\cdot\frac{c'_{ap}}{\pi\lambda}} + \frac{1 + 6\,\xi^2 - 20\,\xi^4}{\frac{4\,\pi\lambda}{c'_{ap}} + 14}\right] \quad \text{Verwindungswinkel}$$

$$c_{a\vartheta}(\xi) = \Delta c_a\left(\frac{1}{8} - \xi^4\right);$$

$$\Delta c_a = \frac{c'_{ap}\cdot\Delta\vartheta}{1 + \frac{7}{2}\,\frac{c'_{ap}}{\pi\lambda}} = 8\,c_{a_I}.$$

Entsprechend der Formel (20) wird der Abwindanteil der sog. Endverwindung:

$$\left.\begin{aligned} g_\vartheta &= \frac{\alpha_{w\Gamma\vartheta}}{\frac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{8}\cdot A_\Gamma + C_\Gamma \\ f_\vartheta &= \frac{\alpha_{wE\vartheta}}{\frac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{8}\,A_E + C_E \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

$$h_\vartheta = \frac{\alpha_{w\vartheta}}{\frac{\Delta c_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{8}\,A + C \qquad \text{(Bild 8)}$$

Die Formeln (20) und (21) sind in Zahlentafel 4 berechnet und in den Bildern 7 und 8 dargestellt.

Es zeigt sich, daß die Kurven sich sehr schnell ihren Asymptoten nähern. Für die praktisch am meisten vorkommenden Werte von $\eta > 0{,}8$ kann man daher schon mit viel größerer Genauigkeit als beim Umrißanteil die festen Asymptotenwerte allgemein verwenden. Die Formeln lauten also genau:

$$\alpha_w = \frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}(f + g) + \frac{\Delta c_a}{\pi\lambda}\cdot(f_\vartheta + g_\vartheta) = \frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}\,h + \frac{\Delta c_a}{\pi\lambda}\cdot h_\vartheta \quad \ldots (22)$$

und angenähert für:

a) parabolische Verwindung:

$$\alpha_w = \frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}\cdot h + 1{,}5\cdot\frac{\Delta c_a}{\pi\lambda} \quad \ldots\ldots (22\text{a})$$

b) Endverwindung:

$$\alpha_w = \frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}\,h + 0{,}5\,\frac{\Delta c_a}{\pi\lambda} \quad \ldots\ldots (22\text{b})$$

Für alle Überschlagsrechnungen dürfte die Formel 22a in Verbindung mit den h-Werten von Zahlentafel 4 bei normalen Flügeln genügen.

IV. Abwind bei ganz aufgerolltem Wirbelband.

Das freie Wirbelband rollt sich in einiger Entfernung vom Flügel in zwei konzentrierte Wirbel auf, die sich am Ort der Schwerpunkte der ursprünglichen Wirbelstärkenverteilungen anordnen, so daß ihr Abstand b' kleiner ist als die Spannweite b. Es wird also:

$$b' = \frac{1}{\Gamma_0}\cdot\int_{-b/2}^{b/2}\Gamma\,dx = b\cdot\int_0^1\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma_0}\,d\xi = k\cdot b \quad \ldots\ldots (23)$$

$$k = \int_0^1\frac{\Gamma(\xi)}{\Gamma_0}\,d\xi = \int_0^1\sqrt{1 - \xi^2}\,(1 + k_1\,\xi^2 + k_2\,\xi^4\ldots)\,d\xi \quad (24)$$

$$k = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{8} + \ldots\right) \quad \ldots\ldots (24)$$

(Einzelintegrale siehe Anhang.)

Dieser Wert wird dann in die Abwindformel des Hufeisenwirbels mit der Spannweite b' eingeführt und lautet dann für den Umrißanteil:

$$\frac{\alpha_w}{\frac{\bar{c}_a}{\pi\lambda}} = \frac{1}{2\,k^2}\cdot\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k^2}{\eta^2}}\right) \quad \ldots\ldots (25)$$

V. Anhang: Berechnung der elliptischen Integrale.

Aus Formel (7) ergeben sich folgende Einzelintegrale (J_Γ):

$$\left.\begin{aligned}
J_{\Gamma 1} &= 2\,k_1 \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2+\eta^2}}\,\xi^2\,d\xi \\
J_{\Gamma 2} &= 4\,k^2 \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2+\eta^2}}\,\xi^4\,d\xi \\
J_{\Gamma 3} &= \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}} \\
J_{\Gamma 4} &= k_1 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}} \\
J_{\Gamma 5} &= k_2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^6\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (26)$$

und aus Formel (8) ergeben sich folgende Einzelintegrale (J_K):

$$\left.\begin{aligned}
J_{K1} &= 2\,k_1 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi \\
J_{K2} &= 4\,k_2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2}\,\xi^2\,d\xi \\
J_{K3} &= \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
J_{K4} &= k_1 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
J_{K5} &= k_2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
J_{K6} &= 2\,k_1\,\eta \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}\,d\xi \\
J_{K7} &= 4\,k_2\,\eta \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2+\eta^2}}\,\xi^2\,d^2 \\
J_{K8} &= \eta \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}} \\
J_{K9} &= k_1\,\eta \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}} \\
J_{K10} &= k_2 \cdot \eta \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^4\,d\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)\,(1-\xi^2)}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (27)$$

Man setzt:

$$\xi = \cos\varphi \qquad \sqrt{1-\xi^2} = \sin\varphi$$
$$d\xi = -\sin\varphi\,d\varphi.$$

Dann kann ein Teil der Integrale ohne weiteres berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned}
J_{K1} &= 2\,k_1 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = 2\,k_1 \cdot \frac{\pi}{2} \\
J_{K2} &= 4\,k_2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = 4\,k_2 \cdot \frac{\pi}{8} \\
J_{K3} &= \int_0^{\pi} d\varphi = \pi \\
J_{K4} &= k_1 \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = k_1 \cdot \frac{\pi}{2} \\
J_{K5} &= k_2 \cdot \int_0^{\pi} \cos^4\varphi\,d\varphi = k_2 \cdot \frac{3}{8}\,\pi
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (28)$$

Die übrigen Ausdrücke sind elliptische Integrale. Mit der Substitution $\eta = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ führt man den Modul der elliptischen Integraltypen ein. Die Integrale nehmen nun folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{J_{K8}}{\eta} &= 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{K9}}{k_1\,\eta} &= J_{\Gamma 3} = 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{K10}}{k_2\,\eta} &= \frac{J_{\Gamma 4}}{k_1} = 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{\Gamma 5}}{k_2} &= 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{K6}}{2\,k_1\eta} &= 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{\Gamma 1}}{2\,k_1} &= \frac{J_{K7}}{4\,k_2\,\eta} = 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} \\
\frac{J_{\Gamma 2}}{4\,k_2} &= 2\,k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (29)$$

Man führt jetzt ein:

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi;\quad \cos^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$$
$$\cos^6\varphi = 1 - 3\sin^2\varphi + 3\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$$

und setzt zur Vereinfachung, wie schon bei Formel (8) angegeben:

$$Y_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

Nun nehmen die Integrale (29) folgende Formen an:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{J_{K8}}{\eta} = 2\,k\,Y_0; \qquad \frac{J_{K9}}{k_1\,\eta} = J_{\Gamma 3} = 2\,k \cdot (Y_0 - Y_1) \\
&\frac{J_{K10}}{k_2\,\eta} = \frac{J_{\Gamma 4}}{k_1} = 2\,k\,(Y_0 - 2\,Y_1 + Y_2) \\
&\frac{J_{\Gamma 5}}{k_2} = 2\,k\,(Y_0 - 3\,Y_1 + 3\,Y_2 - Y_3) \\
&\frac{J_{K6}}{2\,k_1\,\eta} = 2\,k \cdot Y_1; \qquad \frac{J_{\Gamma 1}}{2\,k_1} = \frac{J_{K7}}{4\,k_2\,\eta} = 2\,k\,(Y_1 - Y_2) \\
&\frac{J_{\Gamma 2}}{4\,k_2} = 2\,k\,(Y_1 - 2\,Y_2 + Y_3)
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Das allgemeine Integral (30) muß also für $\mu = 0, 1, 2$ und 3 gelöst werden. Das Integral Y_0 ist identisch mit dem elliptischen Normalintegral F. Nach einer von Serret-Scheffers[3]) angegebenen Rekursionsformel ist:

$$(2\mu - 1)\, k^2 \cdot Y_\mu - (2\mu - 2)\,(1 + k^2) \cdot Y_{\mu-1} + (2\mu - 3) \cdot Y_{\mu-2} = \sin^{2\mu-3}\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

mit

$$Y_{\mu-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\mu-2}\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

und

$$Y_{\mu-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\mu-4}\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

(Da es sich hier immer um die vollständigen Integrale mit den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ handelt, ist die rechte Seite von (32) immer Null.)

Außerdem ist

$$Y_1 = \frac{F - E}{k^2} = \frac{Y_0 - E}{k^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

$$\left(\text{mit } E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi\right).$$

Da E ebenso wie F als Normalform bekannt ist, kann Y_1 berechnet werden. Setzt man nun in Formel (32) $\mu = 2$, so ergibt sich:

$$Y_2 = \frac{1}{3\,k^2}\left[2\,(1 + k^2)\, Y_1 - Y_0\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Mit $\mu = 3$ ergibt sich:

$$Y_3 = \frac{1}{5\,k^2}\left[4\,(1 + k^2)\, Y_2 - 3\, Y_1\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Damit sind alle Integrale der Formen (26) bis (31) berechenbar. Setzt man wieder rückwärts ein $k = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}$, so ergeben sich die Abwindformeln in folgender Form:

$$w_\Gamma = \frac{\Gamma_0}{2\,b} \cdot \frac{2}{\pi\,\eta\,\sqrt{1 + \eta^2}} \left[(Y_0 - Y_1) - k_1\,(-Y_0 + 4\,Y_1 - 3\,Y_2) - k_2\,(-Y_0 + 7\,Y_1 - 11\,Y_2 + 5\,Y_3)\right] \quad . \; . \quad (36)$$

$$w_E = \frac{\Gamma_0}{2\,b} \cdot \frac{1}{\pi}\left[\pi + \frac{2\,\eta\,Y_0}{\sqrt{1 + \eta^2}} - k_1\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\,\eta\,(-Y_0 + 3\,Y_1)}{\sqrt{1 + \eta^2}}\right) - k_2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\,\eta\,(-Y_0 + 6\,Y_1 - 5\,Y_2)}{\sqrt{1 + \eta^2}}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad (37)$$

Hieraus folgen die Formeln (9) und (10) mit den dort angegebenen Zusammenfassungen. Die Integrale Y_μ und die anderen in (36) und (37) auftretenden Teilfunktionen von η sind in Zahlentafel 5 zusammengestellt:

Zahlentafel 5.

η	k	E	$F \equiv Y_0$	Y_1	Y_2	Y_3	$\frac{1}{\eta \cdot \sqrt{1+\eta^2}}$	$\frac{2\,\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$
0	1	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0,2	0,9806	1,0489	3,0364	2,0671	1,7586	1,5802	4,9030	0,3922
0,4	0,9285	1,1344	2,4281	1,5006	1,2220	1,0672	2,3213	0,7428
0,6	0,8575	1,2202	2,1310	1,2387	0,9828	0,8447	1,4292	1,0290
0,8	0,7809	1,2931	1,9604	1,0943	0,8543	0,7275	0,9761	1,2494
1,0	0,7071	1,3506	1,8541	1,0070	0,7779	0,6586	0,7071	1,4142
1,2	0,6402	1,3947	1,7845	0,9512	0,7300	0,6164	0,5335	1,5365
1,4	0,5812	1,4283	1,7368	0,9133	0,6975	0,5877	0,4151	1,6274
∞	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{32}$	0	2

Da in allen elliptischen Integralen η nur quadratisch vorkommt, nehmen sie für negative η dieselben Werte an, wie für die entsprechenden positiven. Mit Hilfe dieser Überlegung und analoger Betrachtungen über die Teilfunktionen $\frac{1}{\eta \cdot \sqrt{1 + \eta^2}}$ und $\frac{2\,\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$ sind die Rekursionsformeln für $(A, B, C)_{\Gamma, E}$ bei negativem η aufgestellt worden.

[3]) Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, II. Bd.

Schrifttum.

[1] A. Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik.

[2] H. Muttray, Untersuchung über die Größe des Abwindes hinter Tragflügeln mit rechteckigem und elliptischem Umriß. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 28.

[3] H. Multhopp, Die Berechnung des Abwindes hinter Tragflügeln. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938), S. 463.

[4] H. B. Helmbold, Einige einfache Formeln aus der Tragflügeltheorie. Luftf.-Forschg.

[5] H. Glauert: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. (Übersetzt von H. Holl), Julius Springer 1929.

[6] Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 2. Band.

Zur Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes I*).

Von Udo Wegner, Heidelberg.

Eine neue Methode zur Berechnung der Knickfestigkeit eines mehrfeldrigen, elastisch gestützten geraden Stabes mit feldweise veränderlichem Trägheitsmoment unter der Wirkung axialer feldweise veränderlicher Stabkräfte wird entwickelt. Diese gestattet auch, in einfacher Weise mittels einer Störungsrechnung für Matrizen den Einfluß geringer Änderungen der elastischen Stützung auf die Knicksicherheit nachzuweisen.

Gliederung.

I. Einführung.

Das Problem der Berechnung der Knickfestigkeit eines mehrfeldrigen, elastisch gestützten geraden Stabes mit feldweise veränderlichem Trägheitsmoment unter der Wirkung axialer feldweise veränderlicher Stabkräfte ist schon häufig nach verschiedenen Methoden behandelt worden[1]). Jedoch sind die bekannten Methoden, insbesondere für eine große Zahl von Feldern, recht umständlich. Ein Verfahren, das für praktische Zwecke gut brauchbar ist, wurde von F. und H. Bleich[2]) methodisch entwickelt. Eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens sowie methodische Ergänzungen hat A. Schleusner[3]) in einem Forschungsheft des Stahlbaues gegeben, in dem er vor allem auch auf die rechnerischen Schwierigkeiten in der Durchführung dieser Methode hinweist. Die Methode von F. und H. Bleich ist eine Variationsmethode. Zur Lösung der Variationsaufgabe wird das Ritzsche Verfahren benutzt. Als Annäherungsfunktionen verwendet man hierbei die Eigenfunktionen eines Stabes gleicher Dimensionierung unter Fortlassung der Zwischenstützen, so daß es notwendig ist, die Eigenfunktionen für dieses Problem zu bestimmen. A. Schleusner begnügt sich mit der Bestimmung von einigen Eigenfunktionen, von denen er zeigt, daß der daraus gewonnene Knicksicherheitsfaktor eine außerordentlich gute Näherung darstellt. Besonders wertvoll bei der Arbeit von Schleusner ist der Hinweis, daß die rechnerischen Schwierigkeiten in der Bestimmung der Eigenfunktionen des Hilfsproblems liegen, d. h. bei dem Stab ohne Zwischenstützen. Die übrigen Schritte erfordern dann nur noch einen geringeren Rechenaufwand.

II. Entwicklung des benutzten Verfahrens.

Im folgenden soll nun eine ganz andere Methode entwickelt werden, die die Bestimmung der Eigenfunktionen des Stabes ohne Zwischenstützen vermeidet. Man hat hier nur die kleinste positive Wurzel einer transzendenten Gleichung aufzusuchen, die bei der Entwicklung einer Determinante entsteht, deren Grad gleich der Anzahl der Zwischenstützen ist. Das Intervall, in dem die kleinste Wurzel liegt, kann man fast unmittelbar angeben und kann dann den Wert für diese Wurzel nach den bekannten interpolatorischen Verfahren verbessern. Die im folgenden auseinandergesetzte Methode hat den Vorzug, daß sie gestattet, mittels einer gewissen Störungsrechnung[4]) für Matrizen dem Einfluß der Stützen hinsichtlich ihrer Elastizität Rechnung zu tragen. Führt man die Stützenwiderstände bzw. deren reziproke Werte als Störungsparameter ein, so hat man bei Anwendung dieser Methode die Möglichkeit, mittels der Störungsrechnung bei großen und kleinen Stützenwiderständen den Einfluß der Stützen wiederzugeben. Wir gehen bei der Behandlung des oben formulierten Problems von der gebräuchlichen Fragestellung aus: Wie groß dürfen die Stabkräfte höchstens werden, wenn der Stab bei gegebenen Stützenwiderständen nicht ausknicken soll. Der Übergang zu der von F. und H. Bleich gewählten Problemstellung: Wie stark müssen die Stützenwiderstände mindestens sein, wenn der Stab bei gegebenen Stabkräften nicht ausknicken soll, läßt sich bei der zu schildernden Methode ohne weiteres vornehmen. Wir erläutern die Methode an dem auch von A. Schleusner gewählten Falle.

Es sei ein an beiden Enden gelenkig gelagerter Stab auf sieben Stützen vorgegeben. Die Endstützen *0* und *6* seien fest, die fünf dazwischen liegenden Stützen elastisch angenommen. Diese elastischen Stützen haben die Stützenwiderstände A_ν ($\nu = 1, \ldots, 5$). Das Trägheitsmoment sei in der νten Öffnung J_ν, die Stabkraft daselbst $S_\nu \cdot J_\nu$ und S_ν seien innerhalb jeder Öffnung, der Elastizitätsmodul E innerhalb des ganzen Stabes, konstant. Die Feld- und nach den obigen Voraussetzungen auch die Öffnungsweiten werden mit $l_1, l_2, \ldots, l_6$ bezeichnet. Mit M_ν benennen wir das Stützenmoment an der νten Stütze und mit η_ν die Senkung der Stützen. Innerhalb der einzelnen Öffnungen sind die Querkräfte Q_ν konstant. Aus der Gleichgewichtsbedingung für die Vertikalkräfte an der νten Stütze folgt die Relation:

$$A_\nu \eta_\nu = Q_{\nu+1} - Q_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, 5). \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$\frac{1}{A_\nu}$ wollen wir mit b_ν bezeichnen. Die Gleichgewichtsbedingung an der νten Stütze für die Momente lautet:

$$M_\nu = M_{\nu-1} - \lambda S_\nu (\eta_\nu - \eta_{\nu-1}) - Q_\nu l_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, 6). \; . \; . \quad (2)$$

wenn wir bei allen Stabkräften den Parameter λ als Knicksicherheitsfaktor einführen. Knicksicherheit wird für alle Werte von $\lambda > 0$ eintreten, die unterhalb des kleinsten Wertes von λ liegen, der mit einer Ausknickung verträglich ist.

Setzen wir $\Delta\eta_\nu = \eta_\nu - \eta_{\nu-1}$ und $\Delta M_\nu = M_\nu - M_{\nu-1}$, so kann die Relation (2) mit Hilfe dieser Symbole folgendermaßen geschrieben werden:

$$Q_\nu = -\frac{\Delta M_\nu}{l_\nu} - \lambda \frac{S_\nu}{l_\nu} \Delta \eta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, 6). \; . \; . \quad (3)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (1) ein, so folgt:

$$A_\nu \eta_\nu = Q_{\nu+1} - Q_\nu = \Delta Q_{\nu+1}$$
$$= -\Delta\left(\frac{1}{l_{\nu+1}} \Delta M_{\nu+1}\right) - \lambda \Delta\left(\frac{S_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} \Delta \eta_{\nu+1}\right)$$

oder, da $\frac{1}{A_\nu} = b_\nu$ ist:

$$\eta_\nu = -b_\nu \Delta\left(\frac{1}{l_{\nu+1}} \Delta M_{\nu+1}\right) - \lambda b_\nu \Delta\left(\frac{S_{\nu+1}}{l_{\nu+1}} \Delta \eta_{\nu+1}\right). \quad (4)$$

*) A 2222. Herrn Major Professor Dr. Doetsch zum 50. Geburtstag am 29. 11. 1942 in herzlicher Freundschaft und Dankbarkeit zugeeignet.

[1]) B. R. Mayer: Die Knickfestigkeit. Berlin 1921. J. Ratzersdorfer: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Wien 1936.

[2]) F. und H. Bleich: Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes. Stahlbau Bd. 10 (1937).

[3]) A. Schleusner: Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues. Heft 1 (1938).

[4]) Anwendung auf praktische Beispiele sowie Vertiefung dieser Methode werden im II. Teil durchgeführt.

Eine nochmalige Anwendung des Δ-Prozesses liefert eine Differenzengleichung 2. Ordnung für $\Delta\eta_\nu$. Diese lautet:

$$\Delta\eta_\nu = -\Delta\left(b_\nu\Delta\left(\frac{1}{l_{\nu+1}}\Delta M_{\nu+1}\right)\right) - \lambda\Delta\left(b_\nu\Delta\left(\frac{S_{\nu+1}}{l_{\nu+1}}\Delta\eta_{\nu+1}\right)\right). \quad (5)$$

Schreiben wir die zweiten Differenzen für $\Delta\eta_\nu$ aus, so ergibt sich ein dreigliedriges Gleichungssystem, das die folgende Gestalt besitzt:

$$\lambda b_{\nu-1}\frac{S_{\nu-1}}{l_{\nu-1}}\Delta\eta_{\nu-1} + \Delta\eta_\nu\left(1-\lambda\frac{S_\nu}{l_\nu}(b_\nu+b_{\nu-1})\right)$$
$$+\lambda b_\nu\frac{S_{\nu+1}}{l_{\nu+1}}\Delta\eta_{\nu+1} = -\Delta\left(b_\nu\Delta\left(\frac{1}{l_{\nu+1}}\Delta M_{\nu+1}\right)\right)$$
$$(\nu = 1, \ldots, 6).$$

Dabei ist $b_0 = b_6 = 0$ und $M_{-1} = M_0 = M_6 = M_7 = 0$ zu setzen. Ersetzen wir $\frac{S_\nu}{l_\nu}\Delta\eta_\nu$ durch z_ν und schreiben das Gleichungssystem aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
c_{11}z_1 + c_{12}z_2 &= -\Delta\left(b_1\Delta\left(\frac{1}{l_2}\Delta M_2\right)\right)\\
c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 &= -\Delta\left(b_2\Delta\left(\frac{1}{l_3}\Delta M_3\right)\right)\\
c_{32}z_2 + c_{33}z_3 + c_{34}z_4 &= -\Delta\left(b_3\Delta\left(\frac{1}{l_4}\Delta M_4\right)\right)\\
c_{43}z_3 + c_{44}z_4 + c_{45}z_5 &= -\Delta\left(b_4\Delta\left(\frac{1}{l_5}\Delta M_5\right)\right)\\
c_{54}z_4 + c_{55}z_5 + c_{56}z_6 &= -\Delta\left(b_5\Delta\left(\frac{1}{l_6}\Delta M_6\right)\right)\\
c_{65}z_5 + c_{66}z_6 &= -\Delta\left(b_6\Delta\left(\frac{1}{l_7}\Delta M_7\right)\right).
\end{aligned} \quad \ldots (6)$$

Dabei können wir die Elemente der symmetrischen, dreigliedrigen Beiwertmatrix $C = (c_{ik})$ in einfacher Weise angeben. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}
c_{\nu\nu} &= \frac{l_\nu}{S_\nu} - \lambda(b_\nu + b_{\nu-1}) && (\nu = 1, \ldots, 6)\\
c_{k,k+1} &= b_k\lambda && (k = 1, \ldots, 5)\\
c_{i,i-1} &= b_{i-1}\lambda && (i = 2, \ldots, 6).
\end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

Sonst ist $c_{kl} = 0$.

Diese Matrix C kann als Differenz einer Diagonalmatrix[5])

$$D_{66} = \left\|\begin{matrix}
\frac{l_1}{S_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{l_2}{S_2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{l_3}{S_3} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{l_4}{S_4} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_5}{S_5} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_6}{S_6}
\end{matrix}\right\| \quad \ldots\ldots (8)$$

und einer dreigliedrigen symmetrischen Matrix λF_{66} geschrieben werden, wobei F_{66} in der $k$ten Zeile die folgenden drei von Null verschiedenen Elemente:

$$\left.\begin{aligned}
f_{k,k-1} &= -b_{k-1}\\
f_{kk} &= b_{k-1} + b_k\\
f_{k,k+1} &= -b_k\\
&(k = 1, \ldots, 6)
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

enthält. F_{66} hängt also nur von den Stützenwiderständen ab. Die Elemente von F_{66} werden um so kleiner sein, je größer die Stützenwiderstände sind, d. h. je unelastischer die Stützung ist. Im Falle vollkommen unelastischer Stützen wird $F_{66} = (0)$.

Schreibt man nun in dem Gleichungssystem (6) die dritten Differenzen der Momente auf der rechten Seite aus und beachtet, daß $M_{-1} = M_0 = M_6 = M_7 = 0$ ist, so erhält man für den Momentvektor $\mathfrak{M}_{51}$ mit den fünf Komponenten $M_1, M_2, \ldots, M_5$ ein lineares viergliedriges System mit einer rechteckigen Matrix aus 6 Zeilen und 5 Spalten. Diese Matrix sei Γ_{65} genannt. Sie besitzt die folgende Gestalt:

$$\Gamma_{65} = \left\|\begin{matrix}
\gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0\\
\gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 & 0\\
\gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & 0\\
0 & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45}\\
0 & 0 & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55}\\
0 & 0 & 0 & \gamma_{64} & \gamma_{65}
\end{matrix}\right\| \quad \ldots\ldots (10)$$

Die Werte der Elemente γ_{ik} sind leicht anzugeben. Aus der allgemeinen Beziehung:

$$\begin{aligned}
\Delta\left(b_\nu\Delta\left(\frac{1}{l_{\nu+1}}\Delta M_{\nu+1}\right)\right)
&= \frac{b_\nu}{l_{\nu+1}}M_{\nu+1} - M_\nu\left(\frac{b_\nu}{l_{\nu+1}} + \frac{b_\nu + b_{\nu-1}}{l_\nu}\right)\\
&+ M_{\nu-1}\left(\frac{b_\nu + b_{\nu-1}}{l_\nu} + \frac{b_{\nu-1}}{l_{\nu-1}}\right) - \frac{b_{\nu-1}}{l_{\nu-1}}M_{\nu-2}
\end{aligned} \quad \ldots (11)$$

ergeben sich, wenn wir für $\nu = 1, \ldots, 6$ einsetzen, die folgenden Werte:

$\underline{\nu = 1.}$ $\gamma_{11} = -\left(\frac{b_1}{l_2} + \frac{b_1}{l_1}\right)$; $\gamma_{12} = \frac{b_1}{l_2}$.

$\underline{\nu = 2.}$ $\gamma_{21} = \frac{b_2 + b_1}{l_2} + \frac{b_1}{l_1}$; $\gamma_{22} = -\left(\frac{b_2}{l_3} + \frac{b_2 + b_1}{l_2}\right)$;

$\gamma_{23} = \frac{b_2}{l_3}$.

$\underline{\nu = 3.}$ $\gamma_{31} = -\frac{b_2}{l_2}$; $\gamma_{32} = \frac{b_3 + b_2}{l_3} + \frac{b_2}{l_2}$;

$\gamma_{33} = -\left(\frac{b_3}{l_4} + \frac{b_3 + b_2}{l_3}\right)$; $\gamma_{34} = \frac{b_3}{l_4}$.

$\underline{\nu = 4.}$ $\gamma_{42} = -\frac{b_3}{l_3}$; $\gamma_{43} = \frac{b_4 + b_3}{l_4} + \frac{b_3}{l_3}$;

$\gamma_{44} = -\left(\frac{b_4}{l_5} + \frac{b_4 + b_3}{l_4}\right)$; $\gamma_{45} = \frac{b_4}{l_5}$.

$\underline{\nu = 5.}$ $\gamma_{53} = -\frac{b_4}{l_4}$; $\gamma_{54} = \frac{b_5 + b_4}{l_5} + \frac{b_4}{l_4}$;

$\gamma_{55} = -\left(\frac{b_5}{l_6} + \frac{b_5 + b_4}{l_5}\right)$.

$\underline{\nu = 6.}$ $\gamma_{64} = -\frac{b_5}{l_5}$; $\gamma_{65} = \frac{b_5}{l_6} + \frac{b_5}{l_5}$.

Die Matrix Γ_{65} hängt linear und homogen nur von den Größen b_ν ab. Daraus ergibt sich, daß bei sehr unelastischer Stützung auch Γ_{65} angenähert gleich Null ist. Da Γ_{65} ebenso wie die Matrix F_{66} linear und homogen von den b_ν abhängt, können wir die Störungsrechnung der Eigenwerte einfach anwenden.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{z}_{61}$ den Vektor, der aus den sechs Komponenten z_ν besteht, so haben wir die folgende Relation zwischen $\mathfrak{z}_{61}$ und $\mathfrak{M}_{51}$:

$$(D_{66} - \lambda F_{66})\,\mathfrak{z}_{61} = -\Gamma_{65}\,\mathfrak{M}_{51} \quad \ldots\ldots (12)$$

(Die bei den Matrizen angehängten Indizes bezeichnen den Typus der Matrizen, d. h. die Anzahl der Zeilen und Spalten, aus denen sie zusammengesetzt sind.)

Aus (12) folgt, wenn allgemein die zu einer Matrix A reziproke Matrix mit A^{-1} bezeichnet wird:

$$\mathfrak{z}_{61} = -(D_{66} - \lambda F_{66})^{-1}\,\Gamma_{65}\,\mathfrak{M}_{51}. \quad \ldots\ldots (13)$$

Eine weitere Beziehung zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{z}_{61}$ und $\mathfrak{M}_{51}$ finden wir aus den Stetigkeitsbedingungen an den Stützen für die Tangenten der elastischen Linie. Diese können wir leicht auf Grund bekannter Überlegungen[6]) herleiten.

Bezeichnet x_ν, y_ν einen Punkt der Mittellinie des Balkens, und ersetzt man das Moment, wie dies in der technischen Biegelehre üblich ist, durch $E J_\nu y_\nu''$, so lautet die Differentialgleichung der Biegelinie:

$$y_\nu'' + \frac{\varrho_\nu^2}{l_\nu^2}y_\nu - \frac{\varrho_\nu^2}{\lambda S_\nu l_\nu^2}(M_{\nu-1} - Q_\nu x_\nu + \lambda S_\nu \eta_{\nu-1}) = 0, \quad (14)$$

[5]) Im folgenden werden Matrizen aus drucktechnischen Gründen durch zwei dünne gleichlange Striche abgegrenzt und nicht, wie es sonst üblich ist, durch große runde Klammern.

[6]) Vgl. loc. cit. [2]) und [3]).

wobei

$$\varrho_\nu = l_\nu \sqrt{\frac{\lambda S_\nu}{E J_\nu}}$$

ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung läßt sich in der folgenden Form darstellen:

$$y_\nu = \bar{A}_\nu \sin \frac{\varrho_\nu x_\nu}{l_\nu} + \bar{B}_\nu \cdot \cos \frac{\varrho_\nu x_\nu}{l_\nu} + \frac{1}{\lambda S_\nu}(M_{\nu-1} - Q_\nu x_\nu + \lambda S_\nu \eta_{\nu-1}). \quad \ldots \quad (15)$$

Die Integrationskonstanten $\bar{A}_\nu$ und $\bar{B}_\nu$ ergeben sich dabei aus $y_\nu(0) = \eta_{\nu-1}$, $y_\nu(l_\nu) = \eta_\nu$. Eliminiert man noch Q_ν mittels (2), so nimmt die Gleichung der elastischen Linie im Felde ν die folgende Gestalt an:

$$y_\nu \lambda S_\nu = \frac{M_{\nu-1}\cos\varrho_\nu - M_\nu}{\sin\varrho_\nu} \sin\frac{\varrho_\nu x_\nu}{l_\nu} - M_{\nu-1}\cos\frac{\varrho_\nu x_\nu}{l_\nu} - [M_{\nu-1} - M_\nu - \lambda S_\nu(\eta_\nu - \eta_{\nu-1})]\frac{x_\nu}{l_\nu} + (M_{\nu-1} + \lambda S_\nu \eta_{\nu-1})$$

$$(\nu = 1, \ldots, 6). \quad \ldots \quad (16)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß $\varrho_\nu \neq 0$ ist. Die Fälle, in denen $\varrho_\nu = 0$ und $\varrho_\nu = k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$) ist, müssen gesondert betrachtet bzw. durch Grenzübergang erledigt werden. Führt man die Abkürzungen

$$\psi'_\nu = \frac{l_\nu}{E J_\nu}\,\frac{\varrho_\nu\cos\varrho_\nu - \sin\varrho_\nu}{\varrho_\nu^2 \sin\varrho_\nu}; \quad \psi''_\nu = \frac{l_\nu}{E J_\nu}\,\frac{\sin\varrho_\nu - \varrho_\nu}{\varrho_\nu^2\sin\varrho_\nu} \quad (17)$$

ein, so folgt aus $y'_\nu(l_\nu) = y'_{\nu+1}(0)$ ($\nu = 1, \ldots, 5$) die Stetigkeitsbedingung an der νten Stütze, deren Gesamtheit wir bei Einführung der Matrizenschreibweise die folgende einfache Form geben können:

$$\Psi_{55}\,\mathfrak{M}_{51} = H_{55}\,\mathfrak{y}_{51} \quad \ldots \quad (18)$$

Dabei ist $\mathfrak{y}_{51}$ der Vektor, der aus den Komponenten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_5$ besteht, Ψ_{55} und H_{55} bezeichnen die Matrizen:

$$\Psi_{55} = \begin{vmatrix} \psi_1'+\psi_2' & \psi_2'' & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2'' & \psi_2'+\psi_3' & \psi_3'' & 0 & 0 \\ 0 & \psi_3'' & \psi_3'+\psi_4' & \psi_4'' & 0 \\ 0 & 0 & \psi_4'' & \psi_4'+\psi_5' & \psi_5'' \\ 0 & 0 & 0 & \psi_5'' & \psi_5'+\psi_6' \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$H_{55} = \begin{vmatrix} \frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_3} & \frac{1}{l_3}+\frac{1}{l_4} & -\frac{1}{l_4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_4} & \frac{1}{l_4}+\frac{1}{l_5} & -\frac{1}{l_5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l_5} & \frac{1}{l_5}+\frac{1}{l_6} \end{vmatrix} \quad (20)$$

Nun besteht aber der folgende Zusammenhang:

$$H_{55}\,\mathfrak{y}_{51} = T_{56}\,\mathfrak{z}_{61},$$

wobei

$$T_{56} = \begin{vmatrix} \frac{1}{S_1} & -\frac{1}{S_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_2} & -\frac{1}{S_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_3} & -\frac{1}{S_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_4} & -\frac{1}{S_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_5} & -\frac{1}{S_6} \end{vmatrix} \quad (21)$$

ist, wie man sofort durch Ausmultiplizieren bestätigt, wenn man für $\mathfrak{z}_{61}$ die Komponenten $\frac{S_\nu}{l_\nu}\,\Delta\eta_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, 6$) einsetzt. Aus

$$\Psi_{55}\,\mathfrak{M}_{51} = H_{55}\,\mathfrak{y}_{51} = T_{56}\,\mathfrak{z}_{61}$$

und

$$\mathfrak{z}_{61} = -(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65}\,\mathfrak{M}_{51}$$

folgt

$$(\Psi_{55} + T_{56}(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65})\,\mathfrak{M}_{51} = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann bestehen, wenn die folgende 5reihige Determinante verschwindet:

$$\Delta = |\Psi_{55} + T_{56}(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65}| = 0, \quad \ldots \quad (22)$$

d. h. für den kleinsten positiven Wert λ, für den die Determinante Δ verschwindet, kann erst ein Ausknicken eintreten. Somit liefert die kleinste positive Wurzel der transzendenten Gleichung

$$|\Psi_{55} + T_{56}(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65}| = 0$$

die Knickbedingung. Ist λ berechnet, so kann man sofort auch den Momentvektor $\mathfrak{M}_{51}$ angeben, der sich aus einem homogenen, linearen Gleichungssystem ergibt.

III. Sonderfälle.

a) Sind alle Stützen unelastisch, so ist $\Gamma_{65} = 0$, und damit reduziert sich die obige Knickdeterminante auf

$$|\Psi_{55}| = 0. \quad \ldots \quad (23)$$

Dies ist aber gerade die Knickbedingung für den Stab mit gelenkig fest gestützten Enden und unelastischen Zwischenstützen[7]).

b) Wir wollen jetzt den Fall betrachten, bei dem der Stab gelenkig fest gestützte Enden und keine Zwischenstützen besitzt. Diesen erhalten wir, wenn wir $b_1, b_2, \ldots, b_5 \to \infty$ gehen lassen. Wir setzen $b_1 = b_2 = \ldots = b_5 = b$ und lassen $b \to \infty$ gehen. Dann wird im allgemeinen die Matrix F_{66}^{-1} gegen Null streben. Es ist:

$$(D_{66} - \lambda F_{66})^{-1} = F_{66}^{-1}(D_{66}F_{66}^{-1} - \lambda E_{66})^{-1} = -\lambda E_{66} F_{66}^{-1} + \ldots$$

E_{66} ist die sechsreihige, quadratische Einheitsmatrix. Damit ergibt sich:

$$T_{56}(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65} = -\lambda\,T_{56}F_{66}^{-1}\,\Gamma_{65} + \ldots$$

Für $b \to \infty$ wird, falls $\frac{1}{b}F_{66}$ eine von Null verschiedene Determinante besitzt, $F_{66}^{-1}\,\Gamma_{65}$ gegen eine Matrix mit konstanten Elementen streben, die wir einmal Z_{65} nennen wollen. Die Knickdeterminante lautet dann:

$$|\Psi_{55} - \lambda\,T_{56}Z_{65}| = 0. \quad \ldots \quad (24)$$

Wie schon erwähnt, gilt dies im allgemeinen, wenn die Öffnungen verschiedene Längen haben. Im Fall, daß $l_\nu = l$ ist, können wir nicht in dieser Weise vorgehen. Hier muß der Grenzübergang ganz vorsichtig durchgeführt werden. Für $l_\nu = l$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$) wird nämlich:

$$Z_{65} = \frac{1}{l}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Die reziproke Matrix, die zu Anfang steht, existiert aber nicht, da die Determinante dieser Matrix, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt, den Wert Null hat.

Um nun in diesem Falle ebenfalls zum Ziele zu gelangen, müssen wir folgendermaßen vorgehen, wenn wir, um große Rechnungen zu vermeiden, noch voraussetzen, daß alle Stabkräfte gleich S sind. (Wir haben es also hier mit einem einfachen Eulerschen Knickfall, dem der gelenkigen Lagerung an beiden Enden zu tun.) Der Fall, daß die Stabkräfte verschieden sind, bringt auch keine weiteren rechnerischen Schwierigkeiten mit sich. Es fallen sogar gewisse Entwicklungsschwierigkeiten in diesem Fall fort. Setzt man $\frac{l}{S} = v$, $b_\nu = b$ ($\nu = 1, \ldots, 6$), so wird

[7]) Vgl. loc. cit. [3]) S. 2.

$$(D-\lambda F)_{66}^{-1} = \left\| \begin{matrix} v-b\lambda & b\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b\lambda & v-2b\lambda & b\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\lambda & v-2b\lambda & b\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\lambda & v-2b\lambda & b\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b\lambda & v-2b\lambda & b\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\lambda & v-b\lambda \end{matrix} \right\|^{-1}$$

oder

$$(D-\lambda F)_{66}^{-1} = \frac{1}{b\lambda} \left\| \begin{matrix} z-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & z-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z-1 \end{matrix} \right\|^{-1},$$

wobei $\frac{v}{b\lambda} = z$ ist. Die reziproke Matrix dieser dreigliedrigen Matrix kann aber sehr leicht, z. B. nach dem v. Leweschen Zahlenrechteck aufgestellt werden. Bezeichnen wir die Elemente der reziproken Matrix mit β_{ik}, so ergeben sich, wenn wir noch $z-2=t$ setzen und die folgenden Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned}
P_6(t) &= t^6 + 2t^5 - 4t^4 - 8t^3 + 3t^2 + 6t, \\
P_6(z) &= z^6 - 10z^5 + 36z^4 - 56z^3 + 35z^2 - 6z, \\
P_5(t) &= t^5 + t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 3t + 1, \\
P_5(z) &= z^5 - 9z^4 + 28z^3 - 35z^2 + 15z - 1, \\
P_4(t) &= t^4 + t^3 - 3t^2 - 2t + 1, \\
P_4(z) &= z^4 - 7z^3 + 15z^2 - 10z + 1, \\
P_3(t) &= t^3 + t^2 - 2t - 1, \\
P_3(z) &= z^3 - 5z^2 + 6z - 1, \\
P_2(t) &= t^2 + t - 1, \\
P_2(z) &= z^2 - 3z + 1, \\
P_1(t) &= t + 1, \\
P_1(z) &= z - 1, \\
P_0(z) &= 1,
\end{aligned}$$

für β_{ik} die Werte:

$$\beta_{11} = \beta_{66} = \frac{P_5(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{56} = \beta_{65} = \beta_{21} = \beta_{12} = -\frac{P_4(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{64} = \beta_{46} = \beta_{31} = \beta_{13} = \frac{P_3(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{63} = \beta_{36} = \beta_{41} = \beta_{14} = -\frac{P_2(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{62} = \beta_{26} = \beta_{51} = \beta_{15} = \frac{P_1(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{61} = \beta_{16} = -\frac{1}{P_6(z)},$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \beta_{45} = \beta_{54} = -\frac{P_1(z)\,P_3(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{24} = \beta_{42} = \beta_{35} = \beta_{53} = \frac{P_1(z)\,P_2(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{34} = \beta_{43} = -\frac{P_2^2(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{25} = \beta_{52} = -\frac{P_1^2(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{33} = \beta_{44} = \frac{P_2(z)\,P_3(z)}{P_6(z)},$$

$$\beta_{22} = \beta_{55} = \frac{P_1(z)\,P_4(z)}{P_6(z)}.$$

Jetzt bilde man

$$T_{56}(D-\lambda F)_{66}^{-1} = \frac{1}{b\lambda S P_6(z)} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} P_5 & -P_4 & P_3 & -P_2 & P_1 & -1 \\ -P_4 & P_1P_4 & -P_1P_3 & P_1P_2 & -P_1^2 & P_1 \\ P_3 & -P_1P_3 & P_2P_3 & -P_2^2 & P_1P_2 & -P_2 \\ -P_2 & P_1P_2 & -P_2^2 & P_2P_3 & -P_1P_3 & P_3 \\ P_1 & -P_1^2 & P_1P_2 & -P_1P_3 & P_1P_4 & -P_4 \\ -1 & P_1 & -P_2 & P_3 & -P_4 & P_5 \end{matrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{b\lambda S P_6(z)} \left\| \begin{matrix} (P_4+P_5) & -P_4(1+P_1) & P_3(1+P_1) & -P_2(1+P_1) & P_1(1+P_1) & -(1+P_1) \\ -(P_3+P_4) & P_1(P_3+P_4) & -P_3(P_1+P_2) & P_2(P_1+P_2) & -P_1(P_1+P_2) & (P_1+P_2) \\ (P_2+P_3) & -P_1(P_2+P_3) & P_2(P_2+P_3) & -P_2(P_2+P_3) & P_1(P_2+P_3) & -(P_2+P_3) \\ -(P_1+P_2) & P_1(P_1+P_2) & -P_2(P_1+P_2) & P_3(P_1+P_2) & -P_1(P_3+P_4) & (P_3+P_4) \\ (1+P_1) & -P_1(1+P_1) & P_2(1+P_1) & -P_3(1+P_1) & P_4(1+P_1) & -(P_4+P_5) \end{matrix} \right\|$$

oder wenn man die Entwicklungen nach z einsetzt, nimmt die letzte Matrix die folgende Gestalt an:

$$\left| \begin{matrix}
z^5 - 8z^4 + 21z^3 - 20z^2 + 5z & -z^5 + 7z^4 - 15z^3 + 10z^2 - z & z^4 - 5z^3 + 6z^2 - z & -z^3 + 3z^2 - z & z^2 - z & -z \\
-z^4 + 6z^3 - 10z^2 + 4z & z^5 - 7z^4 + 16z^3 - 14z^2 - 4z & -z^5 + 7z^4 - 16z^3 + 13z^2 - 2z & z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 2z & -z^3 + 3z^2 - 2z & z^2 - 2z \\
z^3 - 4z^2 + 3z & -z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 3z & z^5 - 7z^4 + 16z^3 - 13z^2 + 3z & -z^5 + 7z^4 - 16z^3 + 13z^2 - 3z & z^4 - 5z^3 + 7z^2 - 3z & -z^3 + 4z^2 - 3z \\
-z^2 + 2z & z^3 - 3z^2 + 2z & -z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 2z & z^5 - 7z^4 + 16z^3 - 13z^2 + 2z & -z^5 + 7z^4 - 16z^3 + 14z^2 - 4z & z^4 - 6z^3 + 10z^2 - 4z \\
z & z - z^2 & z^3 - 3z^2 + z & -z^4 + 5z^3 - 6z^2 + z & z^5 - 7z^4 - 15z^3 - 10z^2 + z & -z^5 + 8z^4 - 21z^3 + 20z^2 - 5z
\end{matrix} \right|$$

Somit wird:

$$T_{56}\,(D-\lambda F)^{-1}_{66} = \frac{z}{b\,\lambda\,S\,(-6\,z+\dots+z^6)} \left\|\begin{matrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{matrix}\right\| + \text{höhere Potenzen von } z.$$

Beachten wir, daß für z die folgende Beziehung $z = \frac{v}{b\,\lambda}$ besteht, so ergibt sich, wenn man für die Matrix zur Abkürzung den Buchstaben P_{56} einführt:

$$\lim_{b\to\infty} T_{56}\,(D-\lambda F)^{-1}_{66}\,\Gamma_{65} = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{v}{b\,\lambda}}{S\,b^2\,\lambda^2\left(-\frac{6\,v}{b\,\lambda}+\dots+\frac{v^6}{b^6\,\lambda^6}\right)} \left\{P_{56}+\dots\right\}\Gamma_{65}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{v\,b^5\,\lambda^5}{S\,b\,\lambda\,(-6\,v\,b^5\,\lambda^5+\dots+v^6)} \left\{P_{56}+\dots\right\} \frac{b}{l} \left\|\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|$$

oder, wenn wir die hier auftretende Matrix mit Φ_{65} bezeichnen:

$$\lim_{b\to\infty} T_{56}\,(D-\lambda F)^{-1}_{66}\,\Gamma_{65} = \lim_{b\to\infty} \frac{v\,\lambda^4}{S\,l\left(-6\,v\,\lambda^5+\dots+\frac{v^6}{b^5}\right)} P_{56}\,\Phi_{65}+\dots = -\frac{1}{6\,S\,l\,\lambda}\,P_{56}\,\Phi_{65}.$$

Nun hat aber $P_{56}\,\Phi_{65}$ die Gestalt:

$$P_{56}\,\Phi_{65} = \left\|\begin{matrix} -12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{matrix}\right\|.$$

Setzen wir die gefundenen Werte ein, so können wir die Knickdeterminante in der folgenden Form schreiben:

$$\Delta = \left|\left\|\begin{matrix} 2\,\psi' & \psi'' & 0 & 0 & 0 \\ \psi'' & 2\,\psi' & \psi'' & 0 & 0 \\ 0 & \psi'' & 2\,\psi' & \psi'' & 0 \\ 0 & 0 & \psi'' & 2\,\psi' & \psi'' \\ 0 & 0 & 0 & \psi'' & 2\,\psi' \end{matrix}\right\| - \frac{1}{\lambda\,l\,S} \left\|\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{matrix}\right\|\right| \quad \dots\dots (25)$$

mit

$$\psi' = \frac{l}{E\,J}\,\frac{\varrho\cos\varrho-\sin\varrho}{\varrho^2\sin\varrho},$$

$$\psi'' = \frac{l}{E\,J}\,\frac{\sin\varrho-\varrho}{\varrho^2\sin\varrho}, \quad \dots\dots (26)$$

$$\varrho = l\sqrt{\frac{\lambda\,S}{E\,J}}.$$

Die letzte Gleichung liefert für die Knicklast $\lambda\,S$:

$$\lambda\,S = \varrho^2\,\frac{E\,J}{l^2}.$$

Die Determinante ergibt beim weiteren Ausrechnen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\,\psi'+\frac{2\,l}{\varrho^2\,E\,J} & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 0 & 0 & 0 \\ \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 2\,\psi'+\frac{2\,l}{\varrho^2\,E\,J} & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 0 & 0 \\ 0 & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 2\,\psi'+\frac{2\,l}{\varrho^2\,E\,J} & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 0 \\ 0 & 0 & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 2\,\psi'+\frac{2\,l}{\varrho^2\,E\,J} & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} \\ 0 & 0 & 0 & \psi''-\frac{l}{\varrho^2\,E\,J} & 2\,\psi'+\frac{2\,l}{\varrho^2\,E\,J} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{l}{E\,J\,\varrho\sin\varrho} \begin{vmatrix} 2\cos\varrho & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2\cos\varrho & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\cos\varrho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2\cos\varrho & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\cos\varrho \end{vmatrix}.$$

Die Determinante $\varDelta$ können wir dann aber in der Form

$$\varDelta = \frac{l}{E\,J\,\varrho \sin \varrho} \begin{vmatrix} w & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & w & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & w & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & w & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & w \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei

$$w = 2 \cos \varrho$$

ist. Dies liefert schließlich:

$$\varDelta = \frac{l}{E\,J\,\varrho \sin \varrho}\, w\,(w^2 - 1)\,(w^2 - 3) = 0 \ . \ . \ . \quad (27)$$

Hierbei darf $\varrho \sin \varrho$ nicht gleich Null werden. Die Werte $\varrho = 0$ und $\sin \varrho = 0$ müssen, wie erwähnt durch getrennte Überlegungen erledigt werden. Sämtliche Wurzeln der transzendenten Gleichung (27) ergeben sich aus den folgenden Gleichungen:

$$2 \cos \varrho = 0,$$
$$2 \cos \varrho = 1,$$
$$2 \cos \varrho = -1,$$
$$2 \cos \varrho = \sqrt{3},$$
$$2 \cos \varrho = -\sqrt{3}.$$

Die sich daraus für ϱ ergebenden Werte innerhalb des Intervalles mit den Grenzen 0 und 2π lauten:

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{6},\ \frac{3\pi}{6},\ \frac{4\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \ldots\ \frac{11\pi}{6}.$$

Rechnet man noch den durch gesonderte Betrachtung zu erledigenden Wert $\varrho = \pi$ und 2π hinzu, so erhalten wir für ϱ, das notwendig von Null verschieden sein muß, die Werte $\varrho = \frac{k\pi}{6}$ $(k = 1, 2, \ldots, 12)$. Wegen der Periodizität der Kosinusfunktion entsprechen also sämtlichen Werten von ϱ im äquidistanten Abstande von $\frac{\pi}{6}$, beginnend mit $\varrho = \frac{\pi}{6}$, Knicklasten. Beachtet man, daß $l = L/6$ ist, wobei L die Gesamtlänge des Stabes bezeichnet, so sind die Knicklasten aus der folgenden Formel

$$\lambda\,S = k^2\,\frac{\pi^2 E\,J}{L^2} \quad (k = 1, 2, \ldots 12, 13, \ldots) \ . \ . \quad (28)$$

zu errechnen. Die hier gewonnenen Werte stimmen mit den Eulerschen Knicklasten überein.

c) Aus den bisherigen Ausführungen erkennt man auch, wie sich die Knickdeterminante ändert, wenn wir von einer allseits festen Stützung zu einer kleinen Lockerung übergehen. Setzen wir $b = \varepsilon$ und meinen damit eine kleine Größe erster Ordnung, so ist offenbar:

$$(D - \lambda F)_{66}^{-1} = D_{66}^{-1}\,(E_{66} - \lambda\,D_{66}^{-1}\,F_{66} + \ldots .)$$

konvergent. Wir können, da $\Gamma_{65} = \varepsilon\,Z_{65}$ ist, wobei Z_{65} eine Matrix mit konstanten Elementen, die nur von den Abmessungen des Systems abhängen, bezeichnet, für

$$T_{56}\,(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65} \sim \varepsilon\,T_{56}\,D_{66}^{-1}\,Z_{65} = \varepsilon\,\Xi_{55}$$

setzen. Der Knickwert bestimmt sich dann aus der Determinante

$$|\Psi_{55} + \varepsilon\,\Xi_{55}| = 0,$$

wobei Ξ_{55} eine fünfreihige Matrix ist, die von λ unabhängig ist. Hat man die Determinante $|\Psi_{55}|$ ausgerechnet, so kann man feststellen, wie sich die Koeffizienten dieser transzendenten Gleichung mit ε ändern.

IV. Beispiel[8]).

Wir betrachten einen Stab auf sieben Stützen, dessen Gesamtlänge $L = 36$ m betragen möge. Für die übrigen Größen seien die folgenden Zahlenwerte vorgegeben:

$$l = L/6 = 6 \text{ m} = 0{,}6 \cdot 10^3 \text{ cm},$$
$$E = 2{,}15 \cdot 10^3\,t\,\text{cm}^{-2},$$

$S_1 = 134\,t$; $S_2 = 262\,t$; $S_3 = 391\,t$; $S_4 = 512\,t$; $S_5 = 653\,t$; $S_6 = 941\,t$.

$J_1 = 43{,}4 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$; $J_2 = 43{,}4 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$; $J_3 = 65{,}1 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$; $J_4 = 92{,}8 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$; $J_5 = 92{,}8 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$; $J_6 = 112{,}2 \cdot 10^3\,\text{cm}^4$.

$A_0 = \infty$; $A_1 = 15{,}12\,t\,\text{cm}^{-1}$; $A_2 = 10{,}3\,t\,\text{cm}^{-1}$; $A_3 = 7{,}55\,t\,\text{cm}^{-1}$; $A_4 = 5{,}78\,t\,\text{cm}^{-1}$; $A_5 = 17{,}2\,t\,\text{cm}^{-4}$; $A_6 = \infty$.

Mit Hilfe dieser Werte müssen wir die Knickdeterminante $\varDelta$ aufstellen und den kleinsten positiven Wert von λ bestimmen.

Wir berechnen zunächst die folgenden in der Knickdeterminante (vgl. Formel (22)) vorkommenden Matrizen:

[8]) Die für dieses Beispiel verwendeten Zahlenwerte wurden in der gleichen Weise gewählt wie bei Schleusner (vgl. loc. cit. 3) S. 2).

1. $\underline{D_{66}}$:

$$D_{66} = \begin{Vmatrix} 4{,}477612 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}290076 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}534527 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}171875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}918836 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}637620 \end{Vmatrix}$$

2. $\underline{F_{66}}$:

$$F_{66} = \begin{Vmatrix} 0{,}066138 & -0{,}066138 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}066138 & 0{,}163225 & -0{,}097087 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}097087 & 0{,}229537 & -0{,}132450 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}132450 & 0{,}305460 & -0{,}173010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}173010 & 0{,}231150 & -0{,}058140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}058140 & 0{,}058140 \end{Vmatrix}$$

3. $\underline{T_{56}}$:

$$T_{56} = \begin{Vmatrix} 0{,}746269 \cdot 10^{-2} & -0{,}381679 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}381679 \cdot 10^{-2} & -0{,}255754 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}255754 \cdot 10^{-2} & -0{,}195313 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}195313 \cdot 10^{-2} & -0{,}153139 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}153139 \cdot 10^{-2} & -0{,}106270 \cdot 10^{-2} \end{Vmatrix}$$

4. $\underline{\Gamma_{65}}$:

$$\Gamma_{65} = \begin{Vmatrix} -0{,}220460 \cdot 10^{-3} & 0{,}110230 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}382272 \cdot 10^{-3} & -0{,}433853 \cdot 10^{-3} & 0{,}161812 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -0{,}161812 \cdot 10^{-3} & 0{,}544373 \cdot 10^{-3} & 0{,}603312 \cdot 10^{-3} & 0{,}220750 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & -0{,}220750 \cdot 10^{-3} & 0{,}729850 \cdot 10^{-3} & -0{,}797450 \cdot 10^{-3} & 0{,}288350 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & -0{,}288350 \cdot 10^{-3} & 0{,}673600 \cdot 10^{-3} & -0{,}482150 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}096900 \cdot 10^{-3} & 0{,}193800 \cdot 10^{-3} \end{Vmatrix}.$$

5. Benutzen wir für die weitere Rechnung nun den von Schleusner gefundenen Wert $\lambda = 6{,}03$[9][10]), so können wir die zur Aufstellung der Matrix Ψ_{55} notwendigen Werte ϱ_ν sowie die zugehörigen Größen ψ_ν' und ψ_ν'' berechnen. Die sich ergebenden Werte seien in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt:

ν	ϱ_ν	ψ_ν'	ψ_ν''
1	1,765626	$-0{,}278131 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}164945 \cdot 10^{-5}$
2	2,468860	$-0{,}432400 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}312478 \cdot 10^{-5}$
3	2,462568	$-0{,}286385 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}206487 \cdot 10^{-5}$
4	2,360216	$-0{,}182424 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}126934 \cdot 10^{-5}$
5	2,665467	$-0{,}261100 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}203825 \cdot 10^{-5}$
6	2,909974	$-0{,}391763 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}342963 \cdot 10^{-5}$

Die Matrix Ψ_{55} lautet damit:

$$\Psi_{55} = \begin{Vmatrix} -0{,}710530 \cdot 10^{-5} & -0{,}312478 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}312478 \cdot 10^{-5} & -0{,}718784 \cdot 10^{-5} & -0{,}206487 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}206487 \cdot 10^{-5} & -0{,}468809 \cdot 10^{-5} & -0{,}126934 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}126934 \cdot 10^{-5} & -0{,}443524 \cdot 10^{-5} & -0{,}203825 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}203825 \cdot 10^{-5} & -0{,}652863 \cdot 10^{-5} \end{Vmatrix}.$$

Bilden wir jetzt die Matrix $T_{56}\,(D - \lambda F)_{66}^{-1}\,\Gamma_{65}$ und addieren deren Elemente zu den entsprechenden der Matrix Ψ_{55}, so ergibt sich die Knickdeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8{,}40018 & -3{,}05527 & 1{,}45304 & -0{,}07305 & -1{,}29526 \\ -3{,}05527 & -4{,}97358 & -5{,}76031 & 0{,}15024 & 2{,}66404 \\ 1{,}45304 & -5{,}76031 & -0{,}83850 & -1{,}88789 & -1{,}39558 \\ 0{,}07305 & 0{,}15024 & -1{,}88789 & -3{,}04250 & -3{,}27418 \\ -1{,}29526 & 2{,}66406 & -1{,}39558 & -3{,}27418 & -5{,}29726 \end{vmatrix} \cdot 10^{-30}.$$

Berechnung dieser Determinante liefert den Wert

$$\Delta = +\,1867{,}13 \cdot 10^{-30},$$

so daß $\lambda = 6{,}03$ bei der zu erwartenden Genauigkeit eine Wurzel der Knickdeterminante darstellt. Für alle Werte $\lambda < 6{,}03$ ist Knickfestigkeit vorhanden, für alle Werte $\lambda \geq 6{,}03$ dagegen wird ein Ausknicken des Stabes eintreten.

[9]) Vgl. loc. cit. [8]) S. 50.

[10]) Es soll hier nur gezeigt werden, wie gut der von Schleusner errechnete Wert von λ ist, und eine Zusammenstellung der im einzelnen durchzuführenden Schritte gegeben werden, wenn man einen Annäherungswert für die kleinste Wurzel kennt. Im Teil II werden dann weitere aus praktischen Problemen sich ergebende Beispiele durchgerechnet.

Das Verhalten der Pendel-Neigungsmesser im bewegten Flugzeug*).

Von K. Magnus, Darmstadt.

Das Verhalten von Pendelgeräten, wie sie zur Anzeige von Quer- und Längsneigung eines Flugzeuges vorgeschlagen worden sind und zum Teil auch verwendet werden, wird für verschiedene stationäre und instationäre Flugzustände untersucht. Dabei zeigt sich, daß die Pendelanzeige in bestimmten Fällen unabhängig von der Neigung des Flugzeuges ist und ausschließlich von dem auf das Flugzeug wirkenden Luftwiderstand abhängt. Dadurch kann bei besonders widerstandsarmen Flugzeugen die Anzeige derartiger Pendelgeräte vollkommen verfälscht werden. Dieser grundsätzliche Fehler läßt sich durch Änderung der Gerätedaten nicht beheben, da er in der Natur des Meßverfahrens begründet ist.

Gliederung.

I. Einleitung.

Es gibt eine große Anzahl von sog. Neigungsmessern, die auf dem Pendelprinzip beruhen, sowohl für die Längsneigung als auch für die Querneigung eines Flugzeuges. Bekannt geworden sind u. a. Flüssigkeitspendel in U-Rohren und zwischen parallelen Glasplatten, ferner starre Pendel, die so in das Flugzeug eingebaut werden, daß sie nur einen Freiheitsgrad besitzen. Am bekanntesten ist die auch heute noch gebräuchliche Querneigungslibelle, bei der eine Kugel in einem gebogenen Glasrohr rollt, das zur Erzielung einer Dämpfung mit einer geeigneten Flüssigkeit gefüllt ist.

Daß alle diese Geräte nicht die wirkliche, d. h. absolute, Neigung des Flugzeuges anzeigen, ist bekannt. Man bezeichnet sie daher auch häufig als »relative Neigungsmesser«, im Gegensatz zu den Kreiselneigungsmessern, die als »absolute Neigungsmesser« verwendet werden können. Da jedoch über die Anzeige der »relativen Neigungsmesser« vielfach Unklarheiten bestehen, soll im folgenden ihr Verhalten für verschiedene Flugzustände untersucht werden.

Die Betrachtnugen gelten für alle diejenigen Geräte, deren »Ersatzsystem« ein mathematisches Pendel bildet. Sie gelten aber auch mit praktisch ausreichender Genauigkeit für physische Pendel, wenn man von gewissen Bedingungen, die die Form und Lage des Trägheitsellipsoids betreffen, absieht. Insbesondere fallen hierunter auch die bei Kreiselhorizonten, Lotzentralen und Vertikanten sowie auch bei Selbststeuerungen vielfach angewendeten Steuerpendelchen, deren Aufgabe meist darin besteht, die Achsenrichtung eines Kreisels zu überwachen, die aber auch bei Steuerungen als selbständiges Geberorgan verwendet werden.

Ziel der Untersuchungen ist, die Bewegungsgleichungen aufzustellen und aus ihnen das Verhalten der Pendelgeräte abzuleiten. Dabei muß von der allgemeinsten Form der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes relativ zu einem bewegten Bezugssystem (Flugzeug) Gebrauch gemacht werden. Die Bewegungen des Bezugssystems sollen jedoch keinerlei beschränkenden Voraussetzungen unterliegen.

*) P 51 5.

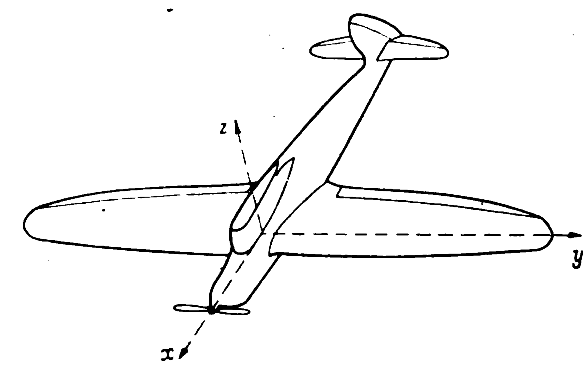


Bild 1. Lage des Koordinatensystems im Flugzeug.

II. Die allgemeine Bewegungsgleichung für ein Pendel.

Zur Beschreibung der Bewegungen der Pendelgeräte wählen wir ein flugzeugfestes Koordinatensystem nach Bild 1. Die x-Achse falle in die Flugzeuglängsachse, positiv nach vorn; die y-Achse falle mit der Querachse zusammen und sei positiv nach links; dann fällt die z-Achse mit der Hochachse zusammen und muß positiv nach oben gezählt werden.

Dieses Koordinatensystem soll nun irgendwelche Bewegungen gegen ein Inertialsystem ausführen. Dabei kann in allen Fällen, in denen die Drehgeschwindigkeit der Erde auf den Bewegungsvorgang ohne wesentlichen Einfluß ist, ein erdfestes System als Vergleichssystem genommen werden. Wenn die Drehung der Erde nicht vernachlässigt werden darf, so hat man lediglich den Vektor der Erddrehung vektoriell zur Systemdrehung gegenüber dem erdfesten System zu addieren. Für die vorliegenden Fälle jedoch würde eine Berücksichtigung der Erddrehung nur eine unnötige Komplizierung der Rechnungen bedeuten, von der hier abgesehen werden soll.

Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes, der sich gegenüber dem System xyz, von dem aus seine Bewegungen beobachtet werden, mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegt, sind in den meisten Lehrbüchern der Mechanik zu finden. Dreht sich das xyz-System gegenüber einem Inertialsystem Σ (Bild 2) mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und bewegt sich sein Ursprungspunkt 0 gegenüber Σ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, so lauten die Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt m, dessen Ort A im xyz-System durch den Vektor $\mathfrak{r}$ gekennzeichnet sein soll, in Vektorform:

$$m\,\mathring{\mathfrak{v}} = \mathfrak{P} - 2\,m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}] - m\,[\mathring{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{r}] - m\,[\mathfrak{u}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] - m\,\mathring{\mathfrak{v}}_0 - m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}_0] \quad \ldots (1)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die Trägheitskraft des Massenpunktes. Auf der rechten Seite treten neben der eingeprägten Kraft $\mathfrak{P}$ noch die durch die Bewegungen des Bezugssystems bedingten Zusatzkräfte auf, und zwar die Corioliskraft $2\,m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}]$, die Zusatzkraft infolge beschleu-

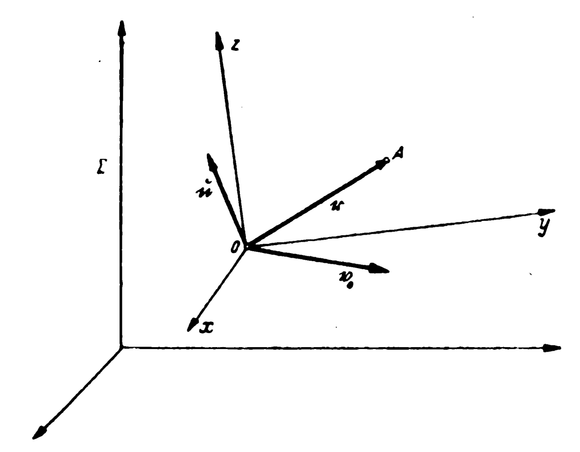


Bild 2. Zur Ableitung der allgemeinen Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt.

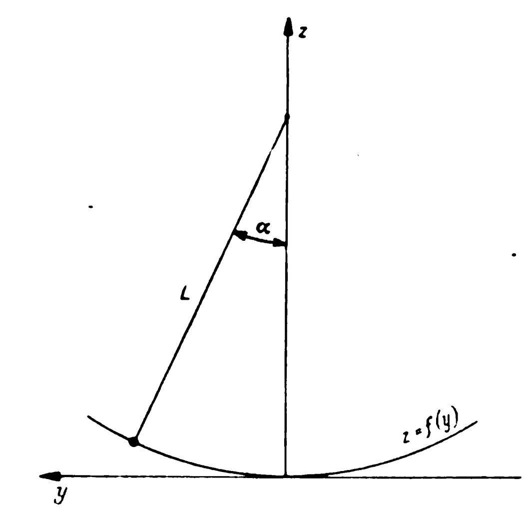


Bild 3. Zur Ableitung der Pendelgleichung.

nigter Drehung des xyz-Systems $m[\overset{\circ}{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{r}]$, die Zentrifugalkraft $m[\mathfrak{u}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}[]$ und die durch die beschleunigte Bewegung des Ursprunges 0 bedingte Trägheitskraft $m(\dot{\mathfrak{v}}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}_0])$. Alle in (1) vorkommenden Ableitungen sind dabei im xyz-System zu nehmen, was in (1) in vielfach gebräuchlicher Weise durch einen über den abgeleiteten Vektor gesetzten Ring angedeutet ist. Für unsere Zwecke ist es jedoch zweckmäßiger, die zeitlichen Änderungen der Flugzeugbewegung nicht vom Flugzeug selbst, sondern vom Inertialsystem aus zu beurteilen. Das kann durch eine leichte Umformung von (1) geschehen. Zwischen der im Inertialsystem Σ genommenen zeitlichen Ableitung $\dot{\mathfrak{a}}$ (üblicherweise durch einen darübergesetzten Punkt gekennzeichnet) irgendeines Vektors $\mathfrak{a}$ und der zeitlichen Änderung $\overset{\circ}{\mathfrak{a}}$ desselben Vektors im xyz-System besteht ja die Beziehung:

$$\dot{\mathfrak{a}} = \overset{\circ}{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{a}] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wendet man diese auf die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_0$ der Eigenbewegung des xyz-Systems gegenüber Σ an, so bekommt man aus (1) die etwas bequemere Form:

$$m\,\overset{\circ}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{P} - 2\,m\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}] - m\,[\dot{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{r}] - m\,[\mathfrak{u}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]] - m\,\dot{\mathfrak{v}}_0 \quad \ldots \quad (3)$$

Wir ersparen uns hier die Komponentenzerlegung dieser Vektorgleichung, da wir sie später bei den Anwendungen ohnehin durchführen werden.

Die weiterhin betrachteten Pendelgeräte besitzen nur einen Freiheitsgrad, bewegen sich also nur in einer Ebene, so daß zur Berechnung nur zwei Komponentengleichungen von (3) gebraucht werden. Und zwar kommen für die Querneigungsanzeiger nur die y- und z-Komponenten in Frage, für die Längsneigungsanzeiger dagegen nur die x- und z-Komponenten. Es stehen somit je zwei Gleichungen zur Verfügung. Da jedoch noch eine Zwangsbedingung besteht — der Massenpunkt besitzt, da er sich auf einer Kurve bewegt, nur einen Freiheitsgrad —, lassen sich die beiden Gleichungen auf eine reduzieren.

Die Zwangsbedingung besteht beim Querneigungsmesser darin, daß z als Funktion von y vorgegeben ist. Bewegt sich der Massenpunkt z. B. auf einem Kreisbogen, wie dies bei einem Pendel mit festem Drehpunkt stets der Fall ist, so lautet die Zwangsbedingung (s. Bild 3):

$$(L - z)^2 = L^2 - y^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

L ist dabei die Pendellänge. Wenn nun der von der y-Richtung und der Bewegungsrichtung eingeschlossene Winkel mit α bezeichnet wird (α ist bei fester Pendellänge einfach gleich dem Pendelausschlag), so hat man:

$$\operatorname{tg}\alpha = + \frac{dz}{dy} = \frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}.$$

Wenn wir uns nun im folgenden auf kleine Ausschläge des Neigungsmessers beschränken, kann man mit praktisch ausreichender Genauigkeit setzen:

$$\alpha = \frac{y}{L}.$$

Bezeichnen wir nun die Koordinate in der Bewegungsrichtung des Pendels mit $\bar{y}$, so setzt sich eine Kraft in der Bewegungsrichtung aus den y- und z-Komponenten der Kräfte wie folgt zusammen:

$$K_{\bar{y}} = K_y \cos\alpha + K_z \sin\alpha \approx K_y + K_z \frac{y}{L}.$$

Die Bewegungsgleichung wird nun erhalten, wenn man alle auf der rechten Seite von (3) stehenden Kräfte in dieser Weise nach der Bewegungsrichtung zerlegt. Wir erhalten:

$$m\ddot{y} = \Sigma K_y + \Sigma K_z \frac{y}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dabei ist der Einfachheit halber wieder y an Stelle von $\bar{y}$ geschrieben. Das ist ohne Gefahr einer Verwechslung zulässig, da sich beide Variable nur durch Größen unterscheiden, die von zweiter Ordnung klein sind.

In ganz entsprechender Weise bekommt man als Bewegungsgleichung für ein Längsneigungspendel:

$$m\ddot{x} = \Sigma K_x + \Sigma K_z \frac{x}{L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Verwendung der Gl. (5) und (6) unter Berücksichtigung der Grundgleichung (3) für die Berechnung der Pendelbewegung soll nun für eine Reihe von willkürlich angenommenen Flugzuständen gezeigt werden. Dieses Vorgehen ist den Verhältnissen der Wirklichkeit gerade entgegengesetzt. Während man dort aus einer gegebenen Anzeige auf den Flugzustand schließen möchte, soll hier der Flugzustand vorgegeben und die zugehörige Anzeige gesucht werden. Dieser Weg ist für die Rechnung zweckmäßiger und einfacher.

Die Berechnung der einzelnen Fälle soll jedesmal von der Grundgleichung (3) ausgehen; die darin auf der rechten Seite stehenden Kräfte werden bestimmt, in die Gl. (5) bzw. (6) eingesetzt, und diese dann weiter behandelt. Dieses Verfahren ist in den zuerst zu behandelnden einfachen Fällen nicht so anschaulich und auch etwas umständlicher als die unmittelbare Aufstellung der Gleichung an Hand des Kräftebildes. Jedoch ist das schematische Vorgehen stets dann zu empfehlen, wenn bei schwierigeren Aufgaben die Zahl der in Betracht kommenden Kräfte so groß wird, daß ein Kräfteplan unübersichtlich wird und damit die Gefahr besteht, daß einzelne Glieder vergessen werden.

III. Der Pendel-Querneigungsmesser.

Als Querneigungsmesser kommt vor allem die bereits erwähnte Libelle in Frage, auf die die Rechnungen insofern besonders gut anzuwenden sind, weil die Libellenkugel eine weitgehende Näherung an einen Massenpunkt darstellt.



A. Böen bei waagerecht liegendem Flugzeug.

Im einfachsten Fall sei zunächst angenommen, daß das Flugzeug keine Drehbewegungen, sondern nur Schiebebewegungen ausführt. Dieser Fall kann bei vollautomatisch gesteuerten Flugzeugen eintreten, bei denen die Automatik für Einhaltung der Achsenrichtungen sorgt. Außerdem sei das Flugzeug im Gleichgewicht, d. h. Auftrieb und Schwere, Widerstand und Schraubenzug sollen sich gegenseitig ausgleichen. Wenn dann das Flugzeug in eine Böe gerät, so wird das Kräftegleichgewicht gestört. Die dann vorhandene resultierende Kraft kann zerlegt werden in eine Kraft durch den Schwerpunkt und ein Moment. Die resultierende Kraft erzeugt eine Beschleunigung, während das Moment durch die Automatik ausgeglichen wird, da ja nach Voraussetzung die Achsenrichtungen konstant bleiben sollen.

Da sich die Libelle nur in der yz-Ebene bewegt, so kommen für die folgenden Untersuchungen nur die y- und z-Komponenten b_y und b_z der Beschleunigung in Frage. Die x-Komponente b_x wird sich lediglich in einem verstärkten Seitendruck der Libellenkugel gegen die Glaswandung auswirken.

Als äußere Kräfte $\mathfrak{P}$ kommen hier in Frage:

$$P_y = -f(\dot{y}),$$
$$P_z = -m\,g.$$

Die Kraft P_y ist durch die Dämpfung der Libellenkugel bedingt; sie ist eine Funktion der Geschwindigkeit. In der z-Richtung wirkt nur die Schwerkraft, wenn man von dem kleinen Anteil der Dämpfungskraft in der z-Richtung absieht. Die Gl. (3) ergibt jetzt für die y- und z-Komponenten der Kräfte:

$$\Sigma K_y = -f(\dot{y}) - m\,b_y,$$
$$\Sigma K_z = -m\,g - m\,b_z.$$

Damit bekommt man aus (5) die Bewegungsgleichung für die Kugel:

$$\ddot{y} + \frac{f(\dot{y})}{m} + (g + b_z)\frac{y}{L} = -b_y \quad \ldots\ldots (7)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt ein gedämpftes Einschwingen in die Gleichgewichtslage:

$$y_0 = -\frac{L\,b_y}{g + b_z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Solange die Komponente b_z klein gegen die Erdbeschleunigung ist, geht der Libellenausschlag der Beschleunigungskomponente b_y proportional. Bei merklichem Einfluß von b_z wird für $b_z < 0$ die Gleichgewichtslage vergrößert, für $b_z > 0$ verkleinert. Für den Fall $b_z < 0$ und $|b_z| > |g|$ wird die Gleichgewichtslage sogar instabil, wie man aus der Vorzeichenumkehr der Rückführglieder in der Gl. (7) schließen kann. Dieser Fall wird jedoch im wirklichen Flug nur kurzzeitig auftreten können. Ebenfalls instabil wird die Gleichgewichtslage bei einer Vorzeichenumkehr von g, also im Rückenflug. Dann wandert die Libellenkugel bis zum Anschlag nach einer Seite aus.

Infolge der Beschleunigungen des Flugzeuges mit den Komponenten b_y und b_z wirkt auf das Flugzeug eine der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtete Trägheitskraft mit den Komponenten $-Mb_y$ und $-Mb_z$. Diese Trägheitskraft setzt sich mit der Schwerkraft $-Mg$ zu einer resultierenden Gesamtkraft zusammen, die mit der Richtung der Erdbeschleunigung den Winkel α_l einschließt. Nach Bild 4 bekommt man für diesen Scheinlotwinkel α_l den Wert:

$$\operatorname{tg} \alpha_l = -\frac{b_y}{g + b_z}.$$

Man sieht, daß die Gleichgewichtslage der Libellenkugel nichts anderes ist als der mit der Pendellänge L multiplizierte Tangens des Scheinlotwinkels.

Will man den Einschwingvorgang der Libellenkugel in die Gleichgewichtslage untersuchen, so muß man Annahmen über die Art der Dämpfungsfunktion $f(\dot{y})$ treffen. Man wird näherungsweise die Dämpfung viskos, also der Geschwindigkeit proportional ansetzen können:

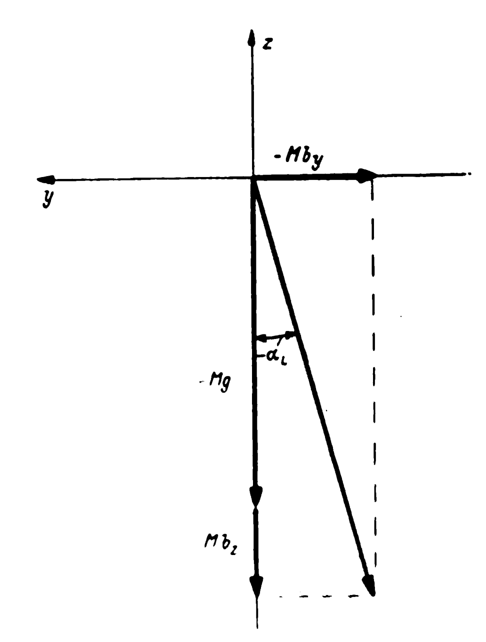


Bild 4. Der Scheinlotwinkel.

$$f(\dot{y}) = k\,\dot{y}.$$

Geht man damit in (7) ein, so läßt sich die Lösung ohne Schwierigkeiten sofort hinschreiben. Man bekommt eine Summe zweier Exponentialfunktionen mit reellem (aperiodisches Hineinkriechen) oder komplexem Argument (gedämpfte Schwingung). Am ausgeführten Gerät wird man die Kenngrößen meist so wählen, daß gerade der aperiodische Grenzfall verwirklicht wird. Er ist gekennzeichnet durch die Bedingung:

$$\frac{L\,k^2}{4\,m^2\,(g + b_z)} = 1.$$

Da in dieser Bedingung die Beschleunigungskomponente b_z vorkommt, so wird die Abstimmung jedesmal beim Auftreten von Böen gestört, und zwar wird für $b_z > 0$ (Böe mit Vertikalkomponente nach oben) die Schwingung in das periodische Gebiet kommen, für $b_z < 0$ (Böe mit Vertikalkomponente nach unten) wird sie aperiodischer werden.

B. Geradeausflug bei hängendem Flugzeug.

Die Voraussetzung, daß Hochachse und Schwerebeschleunigung richtungsgleich sein sollen, wollen wir nun fallen lassen und eine beliebige Abweichung beider Richtungen voneinander zulassen. Der Winkel zwischen Hochachse und Schwererichtung projiziert sich auf die xz-Ebene als Steig- oder Sinkwinkel, auf die yz-Ebene als Hängewinkel φ. Der Steigwinkel ist für unsere Betrachtungen ohne Einfluß und kann unberücksichtigt bleiben. Über den Hängewinkel treffen wir die für den Geradeausflug plausible Annahme, daß er so klein sein soll, daß man seinen Kosinus gleich eins setzen und an Stelle des Sinus den Winkel selbst nehmen kann.

In der y-Richtung wirkt jetzt erstens die Dämpfungskraft und zweitens eine Komponente der Schwerkraft von der Größe $-mg \sin \varphi \approx -mg\varphi$, in der z-Richtung wirkt eine Schwerkraftkomponente von der Größe $-mg \cos \varphi \approx -mg$. Die entsprechende, auf das Flugzeug selbst wirkende Schwerkraftkomponente sei mit dem Auftrieb im Gleichgewicht, so daß keine resultierende Kraft in der z-Richtung, also auch keine Beschleunigung b_z für das Flugzeug vorhanden ist. Diese unwesentliche Vereinfachung erspart das weitere Mitschleppen des Gliedes mit b_z.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichung nach Gl. (5) ergibt nun:

$$\ddot{y} + \frac{f(\dot{y})}{m} + \frac{g}{L}\,y = -g\,\varphi - b_y \quad \ldots\ldots (9)$$



Die in dieser Gleichung auf der rechten Seite stehende Beschleunigungskomponente b_y muß auf Grund von flugmechanischen Annahmen für die seitliche Bewegung des Flugzeuges errechnet werden. Bezeichnen wir die Ortskoordinate des Flugzeuges in der y-Richtung mit η, ferner den in dieser Richtung wirkenden Seitenwiderstand mit W_y, so ergibt die Bedingung des Kräftegleichgewichtes für das Abrutschen die Gleichung:

$$M \ddot{\eta} + W_y(\dot{\eta}) = -M g \varphi \quad \ldots \ldots (10)$$

M ist dabei die Flugzeugmasse. Da $\ddot{\eta} = b_y$ die Beschleunigung des Flugzeuges in der y-Richtung ist, hat man:

$$b_y = -g \varphi - \frac{W_y(\dot{\eta})}{M}.$$

Setzt man dies in (9) ein, so fällt das Glied $g\varphi$ heraus. Es bleibt:

$$\ddot{y} + \frac{f(\dot{y})}{m} + \frac{g}{L} y = \frac{W_y}{M} \quad \ldots \ldots (11)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine gedämpfte Schwingung um die Gleichgewichtslage:

$$y_0 = \frac{W_y L}{M g} \quad \ldots \ldots \ldots (12)$$

Die Einstellung der Libelle hängt also nur von dem jeweils auf das Flugzeug wirkenden Seitenwiderstand und nicht von dem Hängewinkel φ ab. Setzt man den Seitenwiderstand W_y der Abrutschgeschwindigkeit $\dot{\eta}$ proportional, so bekommt man für den zeitlichen Verlauf von W_y eine Exponentialfunktion, die für $t = 0$ vom Werte Null asymptotisch bis zum Werte $Mg\varphi$ ansteigt. Setzt man dies in (12) ein, so sieht man, daß die Libelle zur Zeit $t = 0$ noch keinen Ausschlag zeigt, obwohl das Flugzeug bereits um den Winkel φ hängt. Die Schwerkraftkomponente wirkt in gleicher Weise auf Flugzeug und Libellenkugel, so daß das gesamte System Flugzeug + Libelle eine Beschleunigung erfährt ohne gegenseitige Lagenänderungen innerhalb des Systems. Erst wenn das Flugzeug infolge seiner Abrutschgeschwindigkeit einen Seitenwiderstand erfährt, kann die Libelle ausschlagen.

Über die Gleichgewichtslage (12) der Libelleneinstellung lagert sich nun der vom Gerät selbst stammende Einschwingvorgang, der je nach der Konstruktion in einem aperiodischen oder gedämpft periodischen Einschwingen in die Gleichgewichtslage y_0 besteht. Die Eigenschwingungszahl des Gerätes ist jedoch im allgemeinen so gering, daß sich die wirkliche Anzeige der Libelle von der angegebenen Gleichgewichtslage nur unwesentlich unterscheidet.

Es muß ausdrücklich betont werden, daß der zeitliche Verlauf der Libelleneinstellung ausschließlich von Kenngrößen des Flugzeuges abhängt. Man wird also durch Änderungen der Konstruktion des Gerätes den prinzipiellen Fehler der »kriechenden Einstellung« niemals vermeiden können.

C. Stationärer Kurvenflug.

Es soll kurz das Kräftegleichgewicht im besonders einfachen Fall des stationären Kurvenfluges betrachtet werden. Das Flugzeug fliege z. B. einen Linkskreis in horizontaler Ebene, d. h. der Vektor u der Drehgeschwindigkeit stehe vertikal und sei nach oben gerichtet. Außerdem sei das Flugzeug zunächst so weit schräg gelegt, daß seine Hochachse mit der resultierenden Beschleunigung richtungsgleich ist. Auftrieb und Gesamtbeschleunigungskraft sollen sich aufheben, so daß keine resultierende Kraft in Richtung der Hochachse auf das Flugzeug wirkt, also auch keine Beschleunigungskomponente b_z auftreten kann.

Die Schräglage φ des Flugzeuges errechnet sich aus Bild 5 zu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v u}{g} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

Von den auf der rechten Seite der Grundgleichung (3) stehenden Kräften kommen hier in Betracht: 1. die äußere Kraft $\mathfrak{P}$, 2. die Zentrifugalkraft. Die Corioliskraft steht senk-

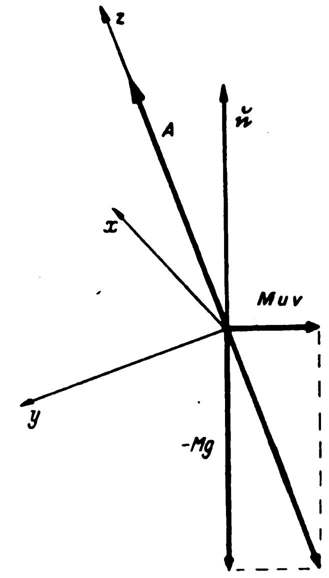


Bild 5. Die Kräfte im Kurvenflug.

recht auf der Bewegungsrichtung der Libellenkugel und kann deshalb nur einen seitlichen Druck der Kugel auf das Gehäuse hervorrufen. Das vierte Glied fällt wegen der Annahme eines stationären Kurvenfluges ($\dot{u} = 0$) fort; ebenso verschwindet die Translationsbeschleunigung wegen der Annahme des Gleichgewichts am Flugzeug.

Die in der y- und z-Richtung auftretenden Kräfte kann man nun wegen der Beziehung (13) wie folgt zusammenfassen:

$$P_y = -f(\dot{y}) - m g \sin \varphi - m u v \cos \varphi = -f(\dot{y}),$$
$$P_z = -m g \cos \varphi - m u v \sin \varphi = -m \sqrt{g^2 + (u v)^2}.$$

Die Bewegungsgleichung der Libelle wird damit:

$$\ddot{y} + \frac{f(\dot{y})}{m} + \frac{\sqrt{g^2 + (u v)^2}}{L} y = 0 \quad \ldots \ldots (14)$$

Da kein konstantes Glied in der Gleichung auftritt, geht die Libellenkugel nicht aus ihrer Nullage heraus. Wird sie gestört, so schwingt sie gedämpft wieder ein. Wegen der durch die Zentrifugalkraft vergrößerten Rückführkraft wird die Schwingung jedoch gedämpft periodisch sein, wenn sie für den Geradeausflug auf den aperiodischen Grenzfall abgestimmt war. Außerdem ist die Eigenfrequenz der Kugel vergrößert.

Liegt das Flugzeug bei stationärem Kurvenflug mit seiner Hochachse nicht in Richtung des Scheinlotes, so gelten dieselben Betrachtungen wie für den Fall des Geradeausfluges bei hängendem Flugzeug. Auftrieb und resultierende Beschleunigungskraft haben nicht dieselbe Richtung, so daß eine resultierende Seitenkraft übrigbleibt, die zum Schieben des Flugzeuges führt. In den Gleichungen hat man dann das Glied für die Translationsbeschleunigung zu berücksichtigen. Die Libellenanzeige hängt dann wieder ausschließlich von dem im Schieben auf das Flugzeug wirkenden Seitenwiderstand ab.

D. Einleiten einer Kurve.

Die bisherigen Betrachtungen haben bereits gezeigt, daß das Verhalten der Libelle nicht ohne Berücksichtigung der flugmechanischen Eigenschaften des Flugzeuges untersucht werden kann, in das sie eingebaut ist. Das Einleiten einer Kurve ist nun ein flugmechanisch komplizierter Vorgang, der auf verschiedene Arten durchgeführt werden kann. Wir werden auch hier zunächst eine Annahme über die Querlage des Flugzeuges treffen müssen und wollen verabreden, daß der Flugzeugführer das Flugzeug mit seiner Hochachse stets in die Richtung des Scheinlotes legt. Die Drehung des Flugzeuges setzt sich dann aus der Kurvendrehung (Vektor u_v steht vertikal) und der Drehung um die Längsachse (Vektor u_x in x-Richtung) zusammen. Dabei ist jedoch zu

beachten, daß die Gl. (3) nur für den Fall gelten, daß der resultierende Drehvektor durch den Ursprung des Koordinatensystems, also in unserem Fall durch den Schwerpunkt des Flugzeuges geht. Bei dem Vektor $\mathfrak{u}_v$ ist das nicht der Fall. Wir müssen ihn daher in den Schwerpunkt verschieben und haben zum Ausgleich dafür den Schwerpunkt selbst auf einer Kreisbahn zu führen. Die dazu notwendigen Beschleunigungen sind als Translationsbeschleunigungen in die Grundgleichungen einzusetzen. Ist v die Bahngeschwindigkeit des Flugzeuges, so hat die »Führungsbeschleunigung« den Wert $u_v v$, ihre Komponenten in Richtung der y- und z-Achse sind:

$$b_y = + u_v v \cos\varphi,$$
$$b_z = + u_v v \sin\varphi.$$

Diese Beschleunigung ist stets zum Krümmungsmittelpunkt der Kurvenbahn hin gerichtet.

Für den Scheinlotwinkel φ gilt die Bedingung (13), für die wir auch näherungsweise

$$\varphi \approx -\frac{u_v v}{g}$$

schreiben können, wenn wir uns im folgenden auf nicht zu große Scheinlotwinkel φ beschränken. Für die Drehgeschwindigkeitskomponenten um die Flugzeugachsen hat man nun die Werte:

$$u_x = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{g}\dot{u}_v,$$
$$u_y = -u_v \sin\varphi \approx -u_v\varphi = \frac{v}{g}u_v^2,$$
$$u_z = u_v \cos\varphi \approx u_v.$$

Die Drehbeschleunigungen sind:

$$\dot{u}_x = -\frac{v}{g}\ddot{u}_v,$$
$$\dot{u}_y = 2\frac{v}{g}u_v\dot{u}_v,$$
$$\dot{u}_z = \dot{u}_v.$$

Damit lassen sich nun die in der Grundgleichung (3) auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke in ihre Komponenten in Richtung der Flugzeugachsen zerlegen. Da für die Libellenbewegung nur die y- und z-Komponenten der Kräfte wichtig sind, genügt es, diese zu bestimmen. Man erhält:

1. Die äußeren Kräfte:
$$P_y = -f(\dot{y}) - mg\sin\varphi,$$
$$P_z = -mg\cos\varphi.$$
2. Die Corioliskräfte. Diese fallen heraus, da sie stets senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen.
3. Die Zentrifugalkräfte. Sie ergeben sich durch Aufspaltung des doppelten Vektorproduktes von (3) in seine Komponenten. Ist $\mathfrak{r}$ mit den Komponenten r_x, r_y und r_z der vom Flugzeugschwerpunkt zum Unterbringungsort des Gerätes gerichtete Entfernungsvektor, so hat man:
$$Z_y = m(u_y u_z r_z - u_z^2 r_y - u_x^2 r_y + u_x u_y r_x),$$
$$Z_z = m(u_x u_z r_x - u_x^2 r_z - u_y^2 r_z + u_y u_z r_y)$$
oder nach Einsetzen der Beschleunigungskomponenten:
$$Z_y = m\left[-r_x\frac{v^2}{g^2}\dot{u}_v u_v^2 - r_y\left(\frac{v^2}{g^2}\dot{u}_v^2 + u_v^2\right) + r_z\frac{v}{g}u_v^3\right],$$
$$Z_z = m\left[-r_x\frac{v}{g}u_v\dot{u}_v + r_y\frac{v}{g}u_v^3 - r_z\frac{v^2}{g^2}(\dot{u}_v^2 + u_v^4)\right].$$
4. Die Zusatzkraft durch Drehbeschleunigung:
$$B_y = m(\dot{u}_z r_x - \dot{u}_x r_z) = m\left(\dot{u}_v r_x + r_z\frac{v}{g}\ddot{u}_v\right),$$
$$B_z = m(\dot{u}_x r_y - \dot{u}_y r_x) = -m\left(r_y\frac{v}{g}\ddot{u}_v + r_x 2\frac{v}{g}u_v\dot{u}_v\right).$$

Für die Bewegungsgleichung bekommt man nun nach (5):

$$\ddot{y} + \frac{f(\dot{y})}{m} + \Big[g\cos\varphi - \frac{r_x v}{g}u_v\dot{u}_v + \frac{r_y v}{g}u_v^3 - \frac{r_z v^2}{g^2}(\dot{u}_v^2 + u_v^4) - \frac{r_y v}{g}\ddot{u}_v - \frac{2r_x v}{g}u_v\dot{u}_v + u_v v\sin\varphi\Big]\frac{y}{L}$$
$$= \Big[-g\sin\varphi + \frac{r_x v^2}{g^2}\dot{u}_v u_v^2 + r_y\left(\frac{v^2}{g^2}\dot{u}_v^2 + u_v^2\right) - \frac{r_z v}{g}u_v^3 - r_x\dot{u}_v - \frac{r_z v}{g}\ddot{u}_v - u_v v\cos\varphi\Big] \quad \ldots\ldots (15)$$

Das ist eine im allgemeinen nichtlineare Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten, denn die Drehgeschwindigkeit u_x und ihre Ableitungen sind ja irgendwelche Funktionen der Zeit. Es interessiert vor allem die Gleichgewichtslage der durch diese Gleichung gegebenen, im allgemeinen nichtharmonischen Schwingung. Um sie zu finden, ist $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ zu setzen. Dann bleiben nur die beiden eckigen Klammern von (15) stehen, die sich wegen (13) noch weiter vereinfachen lassen. Die Gleichgewichtslage wird:

$$y_0 = \frac{L\left[r_x\left(\frac{v^2}{g^2}\dot{u}_v u_v^2 - \dot{u}_v\right) + r_y\left(\frac{v^2}{g^2}\dot{u}_v^2 + u_v^2\right) - r_z\left(\frac{v}{g}u_v^3 + \frac{v}{g}\ddot{u}_v\right)\right]}{\sqrt{g^2 + (u_v v)^2 - r_x\frac{3v}{g}u_v\dot{u}_v + r_y\frac{v}{g}(u_v^3 - \ddot{u}_v) - r_z\frac{v^2}{g^2}(\dot{u}_v^2 + u_v^4)}} \quad \ldots\ldots (16)$$

Ist das Gerät im Flugzeugschwerpunkt ($r_x = r_y = r_z = 0$) untergebracht, so zeigt die Libelle keinen Ausschlag. Liegt das Gerät dagegen nicht im Schwerpunkt — was in den allermeisten Fällen zutreffen wird —, so kann man aus der Formel (16) keine Aussage treffen, ohne den Verlauf der Drehgeschwindigkeit u zu kennen. Um hier wenigstens näherungsweise den Libellenausschlag zu bestimmen, soll (16) in dimensionsloser Form aufgeschrieben und dann die Größenordnung der einzelnen Glieder betrachtet werden. Man bekommt für den dimensionslosen Ausschlag:

$$\frac{y_0}{L} = \frac{\frac{r_x\dot{u}_v}{g}(\varphi^2 - 1) + \frac{r_y u_v^2}{g} + \varphi^2\frac{r_y\dot{u}_v^2}{g u_v^2} - \varphi\left(\frac{r_z u_v^2}{g} + \frac{r_z\ddot{u}_v}{g u_v}\right)}{\sqrt{1 + \varphi^2 - 3\varphi\frac{r_x\dot{u}_v}{g} + \varphi\left(\frac{r_y u_v^2}{g} + \frac{r_y\ddot{u}_v}{g u_v}\right) - \varphi^2\left(\frac{r_z u_v^2}{g} + \frac{r_z\dot{u}_v^2}{g u_v^2}\right)}} \quad \ldots\ldots (17)$$

Die in dieser Formel auftretenden Glieder sind die in Beziehung zur Erdbeschleunigung gesetzten Beschleunigungen, die die Libellenkugel infolge der Kurvendrehgeschwindigkeit, der Kurvendrehbeschleunigung, Rollgeschwindigkeit und der Rollbeschleunigung erleidet. Diese Ausdrücke werden in der Praxis wohl stets kleiner als eins bleiben. Da wir außerdem die Betrachtungen auf den Fall kleiner Scheinlotwinkel φ beschränkt hatten, so werden die mit φ bzw. φ^2 multiplizierten Glieder im Nenner klein gegen die Wurzel sein, so daß sie für diese Näherungsbetrachtungen unberücksichtigt bleiben sollen.

Im Zähler werden die von φ freien Glieder am einflußreichsten sein, so daß man unter Vernachlässigung aller mit φ und φ^2 multiplizierten Glieder schreiben kann:

$$\frac{y_0}{L} \approx \frac{r_y u_v^2 - r_x\dot{u}_v}{g} \quad \ldots\ldots (18)$$

$r_y u_v^2$ ist die durch die Kurvendrehgeschwindigkeit hervorgerufene, gewiß sehr kleine Zentrifugalbeschleunigung am Hebelarm r_y. Sie wird meist gegen das Glied $r_x\dot{u}_v$ zu vernachlässigen sein, so daß der Ausschlag der Libelle im wesentlichen der Drehbeschleunigung verhältnisgleich sein wird.

Um den Einfluß der anderen Glieder zu überschlagen, wollen wir uns an einem möglichen Beispiel die Größenordnung der Verhältnisse $\dot{u}:u$ und $\ddot{u}:u$ klarmachen. Bild 6 zeigt den zeitlichen Verlauf der Drehgeschwindigkeit u_v sowie ihrer beiden ersten Ableitungen, wie sie etwa beim Einleiten einer Kurve auftreten. Dazu sind die beiden Verhältnisse $\dot{u}:u$ und $\ddot{u}:u$ gestrichelt eingetragen. Daraus er-

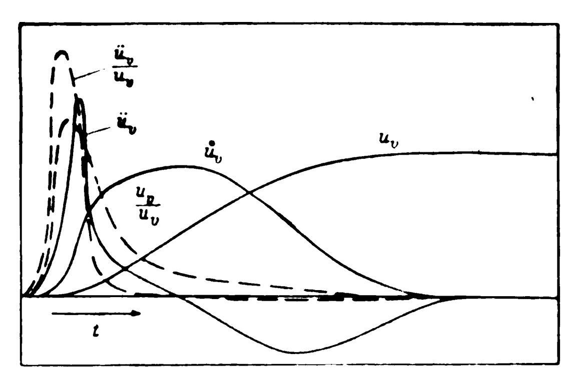


Bild 6. Die Drehgeschwindigkeit u_v und ihre zeitlichen Ableitungen.

sieht man, daß das Verhältnis $\dot{u}:u$ nur im Anfang von Bedeutung sein kann. Es tritt jedoch in (17) nur mit dem Faktor φ^2 multipliziert auf, der zu Beginn besonders klein ist. Dieses Glied wird also nicht viel ausmachen können. Das Verhältnis $\ddot{u}:u$ hat ebenfalls nur im Anfang einen großen Wert. Es tritt in (17) mit dem Faktor φ multipliziert auf, so daß es ebenfalls in seiner Wirkung stark gemindert wird. Das außerdem noch auftretende Glied $r_z u_v^2$, d. h. die durch die Kurvendrehgeschwindigkeit am Hebelarm r_z erzeugte Zentrifugalbeschleunigung wird an sich schon klein sein, ihr Einfluß auf die Libellenauslenkung wird unwesentlich sein, da sie mit der kleinen Größe φ multipliziert wird.

Die Libelle wird also beim Einleiten bzw. beim Beenden einer Kurve oder allgemein bei jeder Änderung der Drehgeschwindigkeit u einen Ausschlag zeigen, der der jeweiligen Drehbeschleunigung entspricht. Nur ganz im Anfang ist ein Zusatzausschlag zu erwarten, der von der Änderung der Drehbeschleunigung bzw. von der Rollbeschleunigung abhängt.

Liegt das Gerät über und vor dem Schwerpunkt ($r_x > 0$, $r_z > 0$), so wird die Libelle beim Einleiten einer Linkskurve nach rechts ausschlagen. Es kann aber auch vorkommen, daß die Kugel beim Einleiten einer Kurve zunächst kurz nach einer Seite rollt, um dann einen entgegengesetzten Ausschlag zu zeigen, bis die Drehgeschwindigkeit konstant geworden ist. Bei dem üblichen Libellengerät werden diese Ausschläge kaum stören, dagegen können sie für Stabilisierungspendel unangenehm werden, weil sie über die Steuerung zu Kopplungen zwischen Fluglage und Pendelausschlag führen können. Man muß also solche Pendel möglichst in der Nähe des Schwerpunktes unterbringen.

Bei diesen Betrachtungen war angenommen worden, daß der Pilot das Flugzeug mit seiner Hochachse ins Scheinlot legt. Ist das nicht der Fall, so besitzt die resultierende Kraft eine Querkomponente und verursacht dadurch ein Schieben. Die Libelle zeigt dann zusätzlich einen Ausschlag, der dem im Schieben auf das Flugzeug wirkenden Seitenwiderstand entspricht.

E. Taumelflug.

Der Taumelflug entsteht durch die aerodynamische Kopplung der Rollschwingungen (um die x-Achse) mit den Kursschwingungen (um die z-Achse). Die Berechnung der Libellenschwingungen im Taumelflug würde ein Eingehen auf den komplizierten flugmechanischen Vorgang erfordern und den Rahmen dieser Untersuchungen weit überschreiten. Es soll deshalb hier die Anwendung der Grundgleichung nur für einen Sonderfall gezeigt werden. Die Erweiterung der Rechnung auf allgemeinere Fälle erfordert dann keine prinzipiellen Änderungen des Rechnungsganges, sondern nur erhöhte Rechenarbeit.

Wir wollen annehmen, daß das Flugzeug durch eine Automatik so weit um die Kursachse (z-Achse) stabilisiert sei, daß die Kursschwingungen vernachlässigt werden können, und das Flugzeug reine Rollschwingungen ausführt. Dabei genügt es, die Rollschwingungen als sinusförmig anzunehmen,

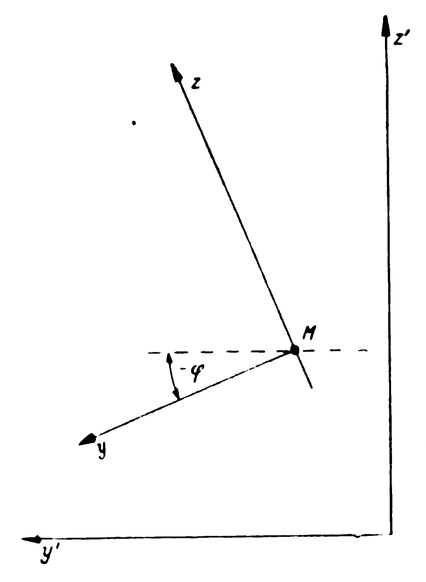


Bild 7. Zur Ableitung der Flugzeug-Bewegungsgleichungen.

anderenfalls hätte man zunächst eine Fourieranalyse der Schwingung vorzunehmen. Die Drehgeschwindigkeit des Flugzeuges besitzt dann lediglich eine Komponente in der x-Richtung, die in der Form

$$u_x = A \sin \nu t = \varphi_0 \nu \sin \nu t \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

angesetzt wird. Die anderen beiden Komponenten sollen verschwinden, d. h. es soll $u_y = u_z = 0$ gelten. Für den bei der Rechnung benötigten Rollwinkel φ und die Rollbeschleunigung $\ddot{\varphi} = \dot{u}_x$ bekommt man die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \int u_x\, dt = -\varphi_0 \cos \nu t \\ \dot{u}_x &= \frac{d u_x}{d t} = \varphi_0 \nu^2 \cos \nu t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Vor Aufstellung der in der Grundgleichung auftretenden Kräfte sei die Translationsbeschleunigung aus den für die Seitenbewegung des Flugzeuges geltenden Gleichungen errechnet. Zu diesem Zweck kann das Flugzeug als Massenpunkt angesehen werden, dessen Bewegungen am besten von einem Inertialsystem $x'y'z'$ betrachtet werden. Die Achsen $x'y'z'$ sollen den flugzeugfesten Achsen parallel sein, wenn das Flugzeug seine Gleichgewichtslage einnimmt. In der x- bzw. x'-Richtung bewege sich das Flugzeug mit gleichbleibender Geschwindigkeit fort, so daß es genügt, den Bewegungsvorgang in der $y'z'$-Ebene zu betrachten (Bild 7).

Wenn man den Widerstand des Flugzeuges linear ansetzt — ein Fall, der sich rechnerisch am einfachsten behandeln, aber doch schon alles Wesentliche des Problems erkennen läßt —, so kann man für kleine Winkel φ näherungsweise setzen:

$$\left.\begin{aligned} W_{y'} &\approx -c_1 \dot{y}' \\ W_{z'} &\approx -c_2 \dot{z}' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

Diese Näherung gilt um so besser, je kleiner der Rollwinkel ist.

Durch die Neigung des Flugzeuges fallen Auftriebsvektor und Schwerevektor nicht mehr in dieselbe Wirkungslinie und ergeben dadurch eine seitliche Resultierende in Richtung der flugzeugfesten y-Achse von der Größe:

$$P = -M g \varphi = + M g \varphi_0 \cos \nu t.$$

Die Komponenten dieser Kraft in den y'- und z'-Richtungen sind:

$$\begin{aligned} P_{y'} &= P \cos \varphi \approx M g \varphi_0 \cos \nu t, \\ P_{z'} &= P \sin \varphi \approx -M g \varphi_0^2 \cos^2 \nu t. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen des Flugzeuges im raumfesten System lauten nun:



$$\left.\begin{aligned} M\ddot y' + c_1 \dot y' &= M g \varphi_0 \cos \nu t \\ M \ddot z' + c_2 \dot z' &= -M g \varphi_0^2 \cos^2 \nu t = -\frac{M g \varphi_0^2}{2}(1-\cos 2\nu t) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die Lösung dieses inhomogenen Systems mit konstanten Koeffizienten läßt sich sofort angeben. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \dot y' &= C_1 e^{-\frac{c_1}{M}t} \left\{ + \frac{g\varphi_0}{\nu\left[1+\left(\frac{c_1}{M\nu}\right)^2\right]} \left(\frac{c_1}{M\nu}\cos 2\nu t + \sin 2\nu t\right)\right\} \\ \dot z' &= C_2 e^{-\frac{c_2}{M}t} \\ &\quad - \frac{g\varphi_0^2}{\nu\left[4+\left(\frac{c_2}{M\nu}\right)^2\right]} \left(\frac{c_2}{2\nu M}\cos 2\nu t + \sin 2\nu t\right) - \frac{M g \varphi_0^2}{2 c_2 \nu^2} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Die ersten Ausdrücke dieser Lösung mit den noch beliebig wählbaren Konstanten C_1 und C_2 dienen dazu, die Lösung den jeweils gegebenen Anfangsbedingungen anzupassen. Diese Glieder klingen mit der Zeit ab und sind für den eingeschwungenen Zustand, der hier allein betrachtet werden soll, ohne Einfluß. Wir setzen deshalb $C_1 = C_2 = 0$. Für die Diskussion der Lösung (23) ist es zweckmäßig, die dimensionslosen Größen

$$\frac{c_1}{M} = \mu_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{2M} = \mu_2$$

einzuführen. Damit geht (23) über in:

$$\left.\begin{aligned} \dot y' &= \frac{g}{\nu}\,\frac{\varphi_0}{1+\mu_1^2}\,(\mu_1 \cos \nu t + \sin \nu t) \\ \dot z' &= -\frac{g}{4\nu}\,\frac{\varphi_0^2}{\mu_2} - \frac{g}{4\nu}\,\frac{\varphi_0^2}{1+\mu_2^2}\,(\mu_2 \cos 2\nu t + \sin 2\nu t) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Die Bahnkurve selbst bekommt man daraus durch einmalige Integration nach der Zeit:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{g}{\nu^2}\,\frac{\varphi_0}{1+\mu_1^2}\,(\mu_1 \sin \nu t - \cos \nu t) + y_0 \\ z' &= -\frac{g}{4\nu}\,\frac{\varphi_0^2}{\mu^2}\,t - \frac{g}{8\nu^2}\,\frac{\varphi_0^2}{1+\mu_2^2}\,(\mu_2 \sin 2\nu t - \cos 2\nu t) + z_0' \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Die y'-Koordinate schwankt um eine feste Gleichgewichtslage, während bei der z'-Koordinate ein mit der Zeit linear anwachsendes Glied auftritt. Das Flugzeug verliert also durch das Rollen dauernd an Höhe. Während in der Lösung für y' der maximale Rollwinkel φ_0 nur linear als Faktor eingeht, wächst die z'-Koordinate mit φ_0^2. Der Höhenverlust geht also quadratisch mit dem Rollwinkel.

Die Gl. (25) ist in Bild 8 für zwei verschiedene Rollwinkelamplituden ($\varphi_0 = 5{,}7^0$ und $\varphi_0 = 11{,}4^0$) bei einer Rollschwingungsdauer von 10 s ausgewertet worden. Für die dimensionslosen Kennwerte sind die im Bild angeschriebenen Zahlen eingesetzt worden. Dabei bedeutet z. B. $\mu_1 = 0{,}215$ bei der angegebenen Rollgeschwindigkeit, daß das Flugzeug beim seitlichen Abrutschen nach 5 s die halbe Endgeschwindigkeit erreicht. Ganz entsprechend bedeutet $\mu_2 = 1{,}104$, daß das Flugzeug bei einer in der Richtung der Hochachse wirkenden Kraft nach 0,5 s die halbe Endgeschwindigkeit erreicht hat.

Für die Berechnung der Libellenbewegung werden nun die Beschleunigungen in Richtung der flugzeugfesten y- und z-Achsen benötigt. Diese können für den Fall kleiner Rollwinkelamplituden näherungsweise gleich $\ddot y'$ und $\ddot z'$ angenommen werden. Die Beschleunigungskoordinate $\ddot z'$ ist, wie man aus (24) durch Differentiation leicht erkennen kann, von zweiter Ordnung klein. Da b_z in die Bewegungsgleichung

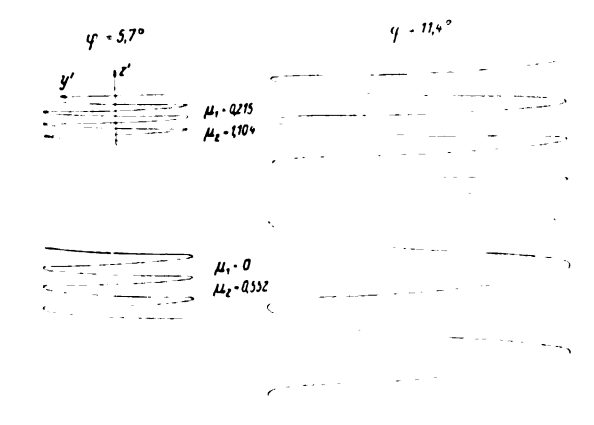


Bild 8. Bahnkurven des Flugzeuges im Taumelflug.

der Libelle nur mit dem Faktor y/L multipliziert eingeht, der seinerseits von erster Ordnung klein ist, so wird der Einfluß der Komponente b_z also von dritter Ordnung klein bleiben und soll in der weiteren Rechnung vernachlässigt werden.

Für die Beschleunigungskomponente b_y bekommt man durch Differentiation von (24):

$$b_y = \ddot y' = \frac{g\varphi_0}{1+\mu_1^2}(\cos \nu t - \mu_1 \sin \nu t) \quad . \; . \; . \quad (26)$$

Damit ist das letzte Glied in der Grundgleichung (3) bestimmt. Die anderen Glieder ergeben für die hier interessierenden y- und z-Komponenten die Werte:

1. Die äußeren Kräfte:

$$P_y = -f(\dot y) - m g \sin \varphi,$$
$$P_z = -m g \cos \varphi.$$

2. Die Corioliskräfte: Sie fallen auch diesmal heraus, wie in allen zuvor betrachteten Fällen.
3. Die Zentrifugalkräfte:

$$Z_y = -m u_x^2 r_y = -m r_y \varphi_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t,$$
$$Z_z = -m u_x^2 r_z = -m r_z \varphi_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t.$$

4. Die Zusatzkraft durch Rollbeschleunigung:

$$B_y = -m \dot u_x r_z = m r_z \varphi_0 \nu^2 \cos \nu t,$$
$$B_z = m \dot u_x r_y = m r_y \varphi_0 \nu^2 \cos \nu t.$$

Nunmehr kann die Bewegungsgleichung für die Libellenkugel hingeschrieben werden. Nach Division durch m hat man:

$$\begin{aligned} \ddot y &+ \frac{f(\dot y)}{m} + [g\cos\varphi - r_z \varphi_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t + r_y \varphi_0 \nu^2 \cos \nu t]\,\frac{y}{L} \\ &= -g \sin\varphi + r_y \varphi_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t + r_z \varphi_0 \nu^2 \cos \nu t \\ &\quad + \frac{g\varphi_0}{1+\mu_1^2}(\mu_1 \sin \nu t - \cos \nu t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27) \end{aligned}$$

Das ist eine Bestimmungsgleichung mit periodischen Koeffizienten. Wir werden uns darauf beschränken, die Gleichgewichtslage der durch (27) charakterisierten Schwingung zu diskutieren. Setzen wir den Sinus des Rollwinkels φ gleich dem Winkel, und den Kosinus gleich eins, so bekommen wir die Gleichgewichtslage:

$$y_0 = \frac{L\left[g\varphi_0 \cos \nu t + r_y \nu^2 \varphi_0^2 \sin^2 \nu t + r_z \nu^2 \varphi_0 \cos \nu t + \frac{g\varphi_0}{1+\mu_1^2}(\mu_1 \sin \nu t - \cos \nu t)\right]}{g - r_z \nu^2 \varphi_0^2 \sin^2 \nu t + r_y \nu^2 \varphi_0 \cos \nu t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Diese Gleichgewichtslage soll zunächst für den Fall untersucht werden, daß das Gerät im Schwerpunkt untergebracht ist, also $r_y = r_z = 0$ ist. Dann bleibt von (28):

$$y_0 = L\left[\varphi_0 \cos \nu t + \frac{\varphi_0}{1+\mu_1^2}(\mu_1 \sin \nu t - \cos \nu t)\right] \quad . \quad (29)$$



Das erste Glied dieses Ausdruckes $y_0 = L\,\varphi_0 \cos \nu t$ ist gerade die »richtige« Anzeige der Querlage, wie man sofort durch Vergleich mit (20) sieht. Der Fehler der Libellenanzeige wird demnach durch das zweite Glied angegeben. (29) läßt sich durch Zusammenfassen der beiden Kreisfunktionen umschreiben in:

$$y_0 = \frac{L\,\varphi_0\,\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}} \cos\left(\nu t - \operatorname{arctg}\frac{1}{\mu_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Daraus übersieht man leicht die Grenzfälle: Hat das Flugzeug einen unendlich großen Seitenwiderstand ($\mu_1 = \infty$), so zeigt die Libelle die Querlage richtig an. Je kleiner der Seitenwiderstand wird, um so mehr hinkt die Querlagenanzeige der wirklichen Querlage nach und ist außerdem in der Amplitude zu klein. Bei sehr kleinem Seitenwiderstand gibt die Libelle einen sehr kleinen, in der Phase fast um 90° verschobenen Ausschlag. Im Grenzfall verschwindenden Seitenwiderstandes geht die Libellenkugel nicht aus ihrer Nullage heraus. Bild 9 zeigt die Gleichgewichtslagen der Libelle in ihrer zeitlichen Abhängigkeit für verschiedene Werte der dimensionslosen Größe μ_1.

Um die Größenordnung von μ abzuschätzen, sei ein Zahlenbeispiel gebracht: Die Dauer einer vollen Rollschwingung betrage 10 s, das ergibt $\nu = 0{,}628/\mathrm{s}$. Der Seitenwiderstand sei so groß, daß das Flugzeug bei festgehaltener Schräglage nach 5 s die halbe Endgeschwindigkeit des Abrutschens erreicht. Mit diesen Zahlwerten errechnet sich $\mu_1 = 0{,}215$. Wie aus Bild 9 zu sehen ist, würde die Libellenanzeige unter diesen Umständen auch nicht annähernd den wirklichen Verlauf der Querlage angeben. Es sei hier ausdrücklich betont, daß die Kenngröße μ_1 ausschließlich von den Daten des Flugzeuges, nicht aber vom Gerät abhängt. Es handelt sich also dabei um ein im Prinzip begründetes Verhalten, das Schwerependel in bestimmten Flugzuständen zur Anzeige von Querneigungen unbrauchbar macht.

Bisher sind nur die Gleichgewichtslagen der Libelle besprochen worden. Darüber lagert sich aber noch der durch die Trägheit und die Dämpfung bedingte Einschwingvorgang des Gerätes selbst. Da jedoch die Eigenschwingungszahlen der Libelle weit über den im Flugzeug vorkommenden Rollfrequenzen liegen, so wird dieser Einschwingvorgang an dem Verhalten der Libelle nichts Wesentliches ändern.

Läßt man die Voraussetzung fallen, daß das Gerät im Schwerpunkt des Flugzeuges untergebracht ist, so hat man die Gleichgewichtslage in der allgemeinen Form (28) zu untersuchen. Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, daß die mit r_y und r_z multiplizierten Glieder im allgemeinen klein gegen die übrigen Glieder sind. Legt man z. B. Rollschwingungen von 10° Amplitude und 10 s Schwingungsdauer zugrunde, so hat man bei Abständen r_y und r_z von der Größenordnung 100 cm für die im Nenner vorkommenden Ausdrücke die Werte: $r_z \varphi_0^2 \approx 1\,\mathrm{gr/cm^2}$ bzw. $r_y \varphi_0 \approx 6\,\mathrm{gr/cm^2}$. Diese kann man unbedenklich gegen $g = 1000\,\mathrm{gr/cm^2}$ vernachlässigen. Im Zähler hat das erste die Größe $g\varphi_0 \approx 175\,\mathrm{gr/cm^2}$. Die Zusatzglieder mit r_y und r_z sind auch dagegen als klein anzusehen. Nur im Fall sehr geringen Seitenwiderstandes können diese Glieder von Einfluß sein, weil dann das letzte Glied des Zählers in die Größenordnung des ersten Gliedes kommt, aber entgegengesetztes Vorzeichen besitzt.

IV. Der Pendel-Längsneigungsmesser.

Bei der Behandlung des Längsneigungspendels wird in ähnlicher Weise vorgegangen werden wie bei der Behandlung des Querneigungsanzeigers. Es wird das Verhalten des Gerätes für eine Reihe von willkürlich angenommenen Flugzuständen untersucht. Dabei werden stets einige vereinfachende flugmechanische Annahmen, z. B. über die Größe des Anstellwinkels oder das Widerstandsgesetz des Flugzeuges getroffen werden. Diese an sich willkürlichen Annahmen sollen die Bestimmung der sonst sehr verwickelten flugmechanischen Vorgänge erleichtern, da das Gewicht dieser Untersuchungen nicht auf der flugmechanischen Seite, sondern auf der Relativmechanik der Bordgeräte liegt.

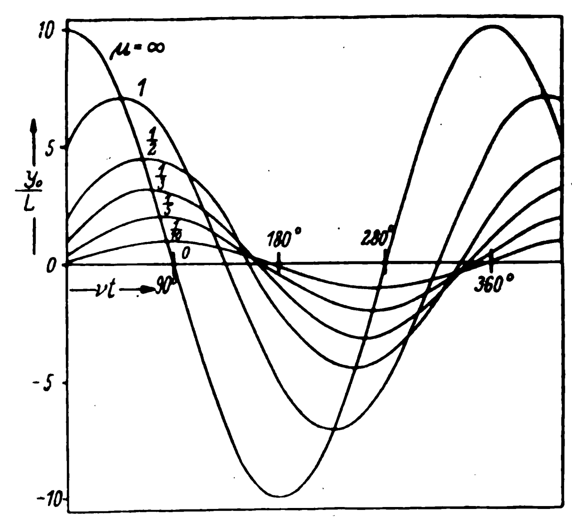


Bild 9. Anzeige des Querneigungsmessers bei verschiedenen Widerstandswerten des Flugzeuges.

A. Geradeausflug bei gesteigertem Schraubenzug.

Das Flugzeug fliege unter ständiger Beibehaltung seiner Achsenrichtungen geradeaus. Es herrscht dann bei ungestörtem Flug Gleichgewicht zwischen den am Flugzeug angreifenden Kräften Schraubenzug, Gewicht, Auftrieb und Widerstand. Wird nun der Schraubenzug plötzlich um einen bestimmten Betrag geändert, so wird das Gleichgewicht gestört und das Flugzeug erleidet eine Beschleunigung bzw. Bremsung, deren Richtung vor allem in die x-Achse fällt. Durch die erhöhte (verminderte) Geschwindigkeit ändert sich aber auch der Auftrieb, so daß auch eine Beschleunigungskomponente in der z-Richtung auftritt. Zunächst sind die Beschleunigungen des Flugzeuges zu bestimmen, weil die dazugehörigen Trägheitskräfte in die Bewegungsgleichungen für das Längsneigungspendel eingehen.

Mit dem Schraubenzug S (Komponenten in der x- bzw. z-Richtung S_x bzw. S_z), dem Widerstand W, dem Auftrieb A und der Flugzeugmasse M bekommt man in einem raumfesten Koordinatensystem $x'y'z'$, dessen Achsenrichtungen in der Normallage mit denen des flugzeugfesten Systems xyz übereinstimmen sollen:

$$\left.\begin{aligned} M\,\ddot{x}' &= -W + S_x \\ M\,\ddot{z}' &= -M g + A + S_z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Wird nun der Schraubenzug plötzlich um den Betrag $S\sigma$ vergrößert, so hat man an Stelle von S_x nun $S_x\,(1+\sigma)$ und an Stelle von S_z nun $S_z\,(1+\sigma)$ zu setzen. Nimmt man an, daß die Luftkräfte quadratisch mit der Fluggeschwindigkeit anwachsen, so kann man setzen:

$$A = A_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2; \qquad W = W_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2$$

mit

$$v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{z}'^2 \approx \dot{x}'^2,$$

da die Vertikalgeschwindigkeit im allgemeinen klein gegen die Fortbewegungsgeschwindigkeit ist, so daß ihr Quadrat gegen das Quadrat von $\dot{x}'$ vernachlässigt werden kann. Im Gleichgewichtsfall gilt:

$$A_0 + S_z = M g,$$
$$S_x = W_0.$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen bekommt man nun aus (31) für die x'-Richtung die Gleichung:

$$\ddot{x}' + \frac{S_x}{M\,v_0^2}\,\dot{x}'^2 = \frac{S_x}{M}\,(1+\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Diese Gleichung hat für die Anfangsbedingungen $\dot{x}' = v_0$ für $t = 0$ die Lösung:

$$\dot{x}' = v_0 \sqrt{1+\sigma}\; \frac{(1+\sqrt{1+\sigma})\, e^{\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} + (1-\sqrt{1+\sigma})}{(1+\sqrt{1+\sigma})\, e^{\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} - (1-\sqrt{1+\sigma})} \quad \ldots \quad (33)$$

In die Bewegungsgleichung des Längsneigungspendels geht die Beschleunigungskomponente $b_x = \ddot{x}'$ ein, die man durch Differentiation von (33) erhält:

$$b_x = \frac{4\,\frac{S_x}{M}\,\sigma\,(1+\sigma)\, e^{\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t}}{\left[(1+\sqrt{1+\sigma})\, e^{\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} + \sqrt{1+\sigma} - 1\right]^2} \quad \ldots \quad (34)$$

Wenn man sich nun auf den Fall nicht zu großer Änderungen des Schraubenzuges (d. h. $\sigma \ll 1$) beschränkt, dann kann im Nenner der Ausdruck $(\sqrt{1+\sigma} - 1)$ gegen den noch dazu mit der e-Funktion multiplizierten Ausdruck $(\sqrt{1+\sigma} + 1)$ als klein vernachlässigt werden. Man kommt so zu dem handlicheren Ausdruck für die Beschleunigung:

$$b_x = \frac{4\,\frac{S_x}{M}\,\sigma\,(1+\sigma)}{(1+\sqrt{1+\sigma})^2}\, e^{-\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} \quad \ldots \quad (35)$$

Die Beschleunigungskomponente $b_z = \ddot{z}'$ kann nun auch sofort aus der zweiten der Gl. (31) bestimmt werden. Man erhält:

$$b_z = \frac{1}{M}\left\{A_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + S_z\,(1+\sigma) - M g\right\} = \frac{1}{M}\left\{A_0 \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1\right] + S_z\right\}.$$

Der in eckigen Klammern stehende Ausdruck hat, wie man aus (33) ersehen kann, für $t = 0$ den Wert Null, und für $t = \infty$ den Wert σ. Führt man zur Abkürzung eine Funktion

$$\delta(t) = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1\right]; \qquad \delta(t=0) = 0, \quad \delta(t=\infty) = 1$$

ein, so hat man:

$$b_z = \ddot{z}' = \frac{\sigma}{M}(A_0\delta + S_z) \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

Damit sind die Beschleunigungen des Systems xyz gegenüber dem System $x'y'z'$ bekannt. Für die in der Grundgleichung (3) stehenden äußeren Kräfte kommen hier in Frage: In der x-Richtung die Dämpfungskraft $P_x = -f(\dot{x})$, in der z-Richtung die Schwerkraft $P_z = -mg$. Damit erhält man aus (6) die Bewegungsgleichung für das Längsneigungspendel:

$$\ddot{x} + \frac{f(\dot{x})}{m} + \left[g - \frac{\sigma}{M}(A_0\delta + S_z)\right]\frac{x}{L} = \frac{\frac{4 S_x \sigma}{M}\sqrt{1+\sigma}}{(1+\sqrt{1+\sigma})^2}\, e^{-\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} \quad \ldots \quad (37)$$

Diese Gleichung hat keine konstanten Koeffizienten, da δ eine Funktion der Zeit ist. Vernachlässigt man jedoch das Glied mit dem kleinen Faktor σ/M gegenüber der Erdbeschleunigung, so kann man bei Annahme einer linearen Pendeldämpfung die strenge Lösung angeben. Sie setzt sich aus der erzwungenen und aus der freien Schwingung zusammen. Ohne die Lösung erst anzuschreiben, kann man sofort aussagen, daß die freie Schwingung nur im Anfang des Bewegungsvorganges Einfluß haben kann, da sie stark gedämpft ist und ihre Frequenz weit über den Frequenzen der erzwungenen Schwingungen liegt. So wurde bei einem von der Firma Askania gebauten Pendel-Längsneigungsmesser eine Schwingungszeit von etwa 0,5 s für die freie Schwingung beobachtet, während die Abklingzeit des Erregergliedes von (37) bei schnellen Flugzeugen nach min zählt. Die Anzeige des Längsneigungsmessers erhält man deshalb in sehr guter Annäherung, wenn man in (37) die Ableitungen

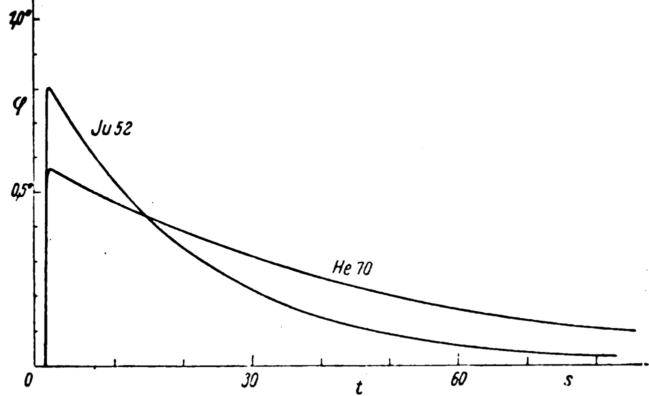


Bild 10. Anzeige des Längsneigungsmessers nach einer plötzlichen Steigerung des Schraubenzuges.

von x gleich Null setzt, also die Eigenschwingungen des Systems vernachlässigt. Damit erhält man:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{4 S_x \sigma \sqrt{1+\sigma}}{[M g - \sigma(A_0\delta + S_z)]\,(1+\sqrt{1+\sigma})^2}\, e^{-\frac{2 S_x}{M v_0}\sqrt{1+\sigma}\, t} \quad \ldots \quad (38)$$

oder für kleine σ angenähert:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{S_x \sigma}{M g}\, e^{-\frac{2 S_x}{M v_0} t} \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

Um eine Übersicht zu bekommen, ist die Formel (38) für den Fall einer plötzlichen Steigerung des Schraubenzuges um 10% (d. h. = 0,1) ausgewertet worden. Dabei sind für die Leistungsbelastung und die Geschwindigkeit die Werte für die beiden Flugzeuge Ju 52 und He 70 eingesetzt worden. Gleichzeitig ist der Einschwingvorgang des Gerätes unter Verwendung der an einem Askania-Längsneigungsmesser gemessenen Daten berücksichtigt. Das Ergebnis zeigt Bild 10. Der Maximalausschlag beträgt bei der Ju 52 etwa 0,8, bei der He 70 etwa 0,6°, die Halbwertszeiten sind etwa 16 (für Ju 52) und 33 (für He 70) s. Der Einschwingvorgang des Gerätes ist praktisch innerhalb von 0,5 s beendet.

B. Ziehen und Drücken.

Zieht oder drückt der Pilot das Flugzeug um einen Winkel ϑ, so liegen ganz ähnliche Verhältnisse vor wie in dem zuvor behandelten Fall bei gesteigertem Schraubenzug. Die Schwerkraft besitzt dann in der x-Richtung eine Komponente $Mg \sin\vartheta$, in der z-Richtung eine Komponente $Mg \cos\vartheta$. Bei kleinen Winkeln kann man den Sinus gleich dem Winkel und den Kosinus gleich eins setzen. Dann ändert sich an der Bewegungsgleichung des Flugzeuges in der ebenfalls um den Winkel ϑ geneigten z'-Richtung nichts (s. Gl. (31)) während man in der x'-Richtung wieder zu der Gl. (32) kommt, wenn man dort an Stelle von σ nun $\frac{M g \vartheta}{S_x}$ setzt. Die Lösungen des vorigen Abschnittes können sofort übertragen werden, wenn man nur immer für σ den genannten Wert einsetzt. Nur bei der Bestimmung des Pendelausschlages muß man die geänderten Anfangsbedingungen berücksichtigen. Für $t = 0$ gilt jetzt $x = 0$, für $t = \infty$ ist $x = L\vartheta$. Das hat zur Folge, daß der Einschwingvorgang des Gerätes praktisch überhaupt nicht zur Geltung kommt. Das Pendel schwingt aus der Nullage nach der e-Funktion der Gl. (38) in die Endlage $x = L\vartheta$ ein. Der zeitliche Verlauf des Einschwingens hat sich gegenüber dem in B 1 behandelten Fall nicht wesentlich geändert, da die unter der Wurzel stehende Größe

$$\sigma = \frac{M g \vartheta}{S_x}$$

im allgemeinen bei kleinen Winkeln ϑ kleiner als eins ist. Zum Beispiel bekommt man für eine Ju 52 bei einem Längsneigungswinkel von 5,7° (d. h. $\vartheta = 0{,}1$) etwa den Wert

$\sigma = 0{,}6$. Bei einer Neigung von 1^0 hat man etwa $\sigma = 0{,}1$. Das entspricht nach (33) einer 5 proz. Geschwindigkeitserhöhung.

C. Einleiten einer horizontalen Kurve.

Das Verhalten des Querneigungsmessers beim Einleiten einer horizontalen Kurve ist im Abschnitt III D behandelt worden. Hier soll für denselben Flugzustand das Verhalten des Längsneigungsmessers untersucht werden. Es werden dieselben Annahmen wie dort zugrunde gelegt, nur muß noch ausdrücklich betont werden, daß die x-Achse stets Bahntangente sein soll, so daß keine x-Komponente der Führungsbeschleunigung auftritt, d. h. es soll $b_x = 0$ sein.

Die in der Grundgleichung auf der rechten Seite auftretenden Kräfte sind für die z-Komponente bereits berechnet worden. In der x-Richtung erhält man die Kräfte:

1. Die äußere Kraft durch die Pendeldämpfung:

$$P_x = -f(\dot{x}).$$

2. Die Corioliskraft fällt auch hier heraus.
3. Die Zentrifugalkraft:

$$Z_x = m\,(r_y u_x u_y - r_x u_y^2 - r_x u_z^2 + r_z u_x u_z)$$
$$= m\left[-r_x\left(\frac{v^2}{g^2} u_v^4 + u_v^2\right) - r_y \frac{v^2}{g^2} \dot{u}_v u_v^2 - r_z \frac{v}{g} u_v \dot{u}_v\right].$$

4. Die Zusatzkraft durch Drehbeschleunigung:

$$B_x = m\,(\dot{u}_x r_z - \dot{u}_z r_x) = m\left(-r_y \dot{u}_v + r_z \frac{2v}{g} u_v \dot{u}_v\right).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung:

$$g \cos\varphi + u_v v \sin\varphi = \sqrt{g^2 + (u_v v)^2}$$

bekommt man nunmehr aus (6) die Bewegungsgleichung für das Längsneigungspendel:

$$\ddot{x} + \frac{f(\dot{x})}{m} + \left[\sqrt{g^2 + (u_v v)^2} - r_x \frac{3v}{g} u_v \dot{u}_v + r_y \frac{v}{g}(u_v^3 - \ddot{u}_v) - r_z \frac{v^2}{g^2}(\dot{u}_v^2 + u_v^4)\right]\frac{x}{L} = r_x\left(\frac{v^2}{g^2} u_v^4 + u_v^2\right)$$
$$- r_y\left(\frac{v^2}{g^2} \dot{u}_v u_v^3 - \dot{u}_v\right) + r_z \frac{v}{g} u_v \dot{u}_v \left(2 - \frac{v}{g} u_v\right) \quad \ldots \quad (40)$$

Es wäre unnötige Arbeit, wollte man diese nichtlineare Differentialgleichung mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten lösen. Auch hier gilt, daß der Einschwingungsvorgang so schnell erfolgt, daß er den Verlauf des Pendelausschlages praktisch nicht beeinflußt. Es genügt also, die Gleichgewichtslage aus (40) zu bestimmen. Mit Einführung der kleinen Größe

$$\varphi = \frac{u_v v}{g}$$

kann man die Gleichgewichtslage in dimensionsloser Form schreiben:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{\dfrac{r_x u_v^2}{g} + \dfrac{r_y \dot{u}_v}{g} + \varphi^2 \dfrac{r_x u_v^2}{g} - \varphi^2 \dfrac{r_y u_v}{g} + \varphi \dfrac{2 r_z \dot{u}_v}{g} - \varphi^2 \dfrac{r_z \dot{u}_v}{g}}{\sqrt{1 + \varphi^2} - \varphi \dfrac{3 r_x \dot{u}_v}{g} + \varphi\left(\dfrac{r_y u_v^2}{g} - \dfrac{r_y \ddot{u}_v}{g u_v}\right) - \varphi^2\left(\dfrac{r_z \dot{u}_v^2}{g u_v^2} + \dfrac{r_z u_v^2}{g}\right)} \quad \ldots \quad (41)$$

Auch hier kann man zeigen, daß die einzelnen Brüche in Zähler und Nenner im allgemeinen klein gegen eins sein werden, ihr Einfluß auf den Anzeigevorgang des Gerätes ist aber gänzlich unbedeutend, wenn diese Brüche außerdem noch mit der kleinen Größe φ oder gar φ^2 multipliziert sind. Behält man daher nur die von φ freien Glieder bei, so kommt man zu einer Näherungsformel:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{r_x u_v^2 + r_y \dot{u}_v}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Die beiden in dieser Formel vorkommenden Glieder entstehen durch die am Hebelarm r_x durch die Kurvendrehung erzeugte Zentrifugalkraft sowie durch die Beschleunigung des Geräteortes infolge der Drehbeschleunigung. Um die Größe des Pendelausschlages zu bestimmen, seien kurze Überschlagsrechnungen gebracht. Mettler (Ing. Arch. Bd. 9 (1938), S. 341) hat den Vorgang des Einleitens einer Kurve berechnet und bekommt bei einer allerdings sehr engen Kurve Werte von $u_v = 0{,}5$/s und $\dot{u}_v = 0{,}16$/s². Nimmt man für die Komponenten des Geräteabstandes vom Flugzeugschwerpunkt die Werte $r_x = 2$ m und $r_y = 0{,}5$ m an, so bekommt man damit einen Maximalausschlag des Längsneigungsmessers um $3{,}3^0$. Bei denselben Daten zeigt nach Formel (18) der Querneigungsmesser einen Maximalausschlag von $2{,}6^0$. Diese Werte sind aber sicher zu hoch, da derartig große Drehgeschwindigkeiten und Drehbeschleunigungen nur in Ausnahmefällen vorkommen dürften.

Für einen Drei-Minuten-Kreis ist $u_v = 0{,}035$/s. Diese Drehgeschwindigkeit kann bei harter Ruderbetätigung und wendigem Flugzeug in einer Sekunde erreicht sein, d. h. es ist $\dot{u}_v = 0{,}035$/s². Bei gleichen Werten für den Geräteabstand vom Schwerpunkt wie oben bekommt man damit Maximalauslenkungen von $0{,}1^0$ für den Längsneigungsanzeiger und $0{,}4^0$ für den Querneigungsanzeiger. Diese Werte sind für Schauinstrumente ohne Belang, können jedoch bei Steuerpendeln wichtig sein, wenn dadurch deren Ansprech-Schwellwerte überschritten werden.

D. Taumelflug.

Bei der Behandlung des Taumelfluges im Abschnitt III E hatte sich gezeigt, daß der Querneigungsmesser die richtige Querneigung sowohl der Größe als auch der Phase nach falsch anzeigt. Es bleibt zu untersuchen, ob auch der Längsneigungsmesser im Taumelflug Fehler gibt.

Bei den früher getroffenen Annahmen tritt keine Beschleunigung des Flugzeuges in seiner x-Richtung auf ($b_x = 0$), außerdem sind die x-Komponenten der Zentrifugalkraft und der Zusatzkraft durch Drehbeschleunigung Null. Die x-Komponente der äußeren Kraft (Pendeldämpfung) hat $\dot{x}$ als Faktor. Es bleibt demnach kein von der Koordinate x oder einer ihrer Ableitungen freies Glied auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung für das Längsneigungspendel stehen, so daß die Gleichung selbst homogen wird. Die Gleichgewichtslage des Längsneigungspendels bleibt dann dauernd Null, es treten keine Fehler auf.

E. Schwingungen um die Querachse.

Bei der Bewegung des Flugzeuges in seiner Symmetrieebene, auch kurz Längsbewegung genannt, gibt es vor allem zwei Schwingungsarten: kurzzeitige Schwingungen des Anstellwinkels, bei denen sich die Fluggeschwindigkeit praktisch nicht ändert, sowie langperiodische Schwingungen der Geschwindigkeit, bei denen der Anstellwinkel näherungsweise konstant bleibt (Phygoidenbewegung). Diese Schwingungen werden auch als »Anstellwinkelschwingung« und »Geschwindigkeitsschwingung« bezeichnet. Bei beiden Bewegungen führt das Flugzeug Schwingungen um seine Querachse aus, die allerdings bei der Anstellwinkelschwingung stark gedämpft sind. Diese Schwingung klingt daher schnell ab. Wichtiger ist die Geschwindigkeitsschwingung, die praktisch ungedämpft verläuft.

Bei der folgenden Berechnung des Verhaltens des Längsneigungsmessers bei Schwingungen des Flugzeuges um seine Querachse soll nun so vorgegangen werden, daß die Drehbewegung des Flugzeuges um die Querachse als bekannt und von der Form

$$u_y = \vartheta_0\, \nu \sin \nu t$$

vorausgesetzt wird. Derartige harmonische Schwingungen können zum Beispiel durch den Unempfindlichkeitsgrad einer Höhen-Selbststeuerung hervorgerufen werden. Durch das Vorgehen von u_y wird von den drei Gleichungen, die zur Berechnung der Flugzeuglängsbewegung zur Verfügung stehen (2 Kraft- und 1 Momentengleichung), die Momentengleichung ausgeschaltet, so daß nur die beiden Kraftgleichungen bleiben. Für Drehwinkel und Drehbeschleunigung um die Querachse bekommt man:

$$\vartheta = -\vartheta_0 \cos \nu t; \qquad \dot{u}_y = \vartheta_0\, \nu^2 \cos \nu t \quad \ldots \quad (43)$$

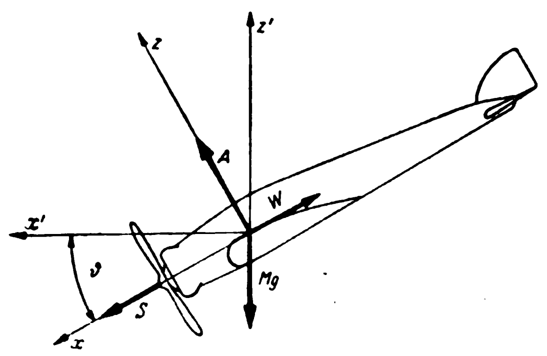


Bild 11. Zur Berechnung der Flugzeug-Längsbewegung.

Bevor die Grundgleichung für das Längsneigungspendel bei diesem Flugzustand aufgestellt wird, muß zunächst die Eigenbewegung des Flugzeuges bzw. seine Beschleunigungen in Richtung der Hoch- und der Längsachse bestimmt werden. Nimmt man vereinfachend an, daß der Schraubenzug nur in Richtung der x-Achse wirkt und daß der Anstellwinkel bei der zu untersuchenden langperiodischen Schwingung konstant ist und hier gleich Null gesetzt werden kann, so hat man in einem raumfesten $x'z'$-Koordinatensystem mit vertikaler z'-Achse und horizontaler x'-Achse (Bild 11) die folgenden Bewegungsgleichungen für das Flugzeug:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}' &= S\cos\vartheta + A\sin\vartheta - W\cos\vartheta \\ M\ddot{z}' &= -S\sin\vartheta - Mg + A\cos\vartheta + W\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Dabei sind die Luftkräfte quadratisch von der Geschwindigkeit abhängig:

$$A = A_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^2; \quad W = W_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \quad \text{mit} \quad v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{z}'^2.$$

Ferner gelten für $\vartheta = 0$ die Gleichgewichtsbedingungen:

$$A_0 = Mg; \quad W_0 = S.$$

Da die Lösungen des Gleichungssystems (44) allgemein nicht in geschlossener Form angebbar sind, so werden wir uns hier nur auf den Fall kleiner Längsneigungswinkel beschränken. Es wird gesetzt:

$$\sin\vartheta = \vartheta = -\vartheta_0\cos\nu t,$$
$$\cos\vartheta = 1.$$

Ferner kann bei kleinen Winkeln die Geschwindigkeitskomponente in der z'-Richtung nicht sehr groß werden, man wird ihr Quadrat deshalb gegen das Quadrat der Geschwindigkeitskomponente in der x'-Richtung vernachlässigen können und kann somit näherungsweise die Fluggeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit in der x'-Richtung setzen:

$$v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{z}'^2 \approx \dot{x}'^2.$$

Mit diesen Vernachlässigungen entkoppeln sich die Gl. (44) und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' + \frac{1}{M v_0^2}(W_0 + A_0\vartheta_0\cos\nu t)\,\dot{x}'^2 &= \frac{S}{M} \\ \ddot{z}' = \frac{1}{M v_0^2}(A_0 - W_0\vartheta_0\cos\nu t)\,\dot{x}'^2 &+ \frac{S\vartheta_0}{M}\cos\nu t - g \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Die erste dieser Gleichungen soll zunächst behandelt werden. Ist sie gelöst, so läßt sich z' aus der zweiten Gleichung durch einfache Quadraturen bestimmen. $(45)_1$ ist eine sog. Riccatische Differentialgleichung, deren Lösung sich nicht in geschlossener Form angeben läßt. Um wenigstens eine Näherungslösung zu bekommen, machen wir für die gesuchte Größe $\dot{x}'$ einen Reihenansatz nach Potenzen der kleinen Größe ϑ:

$$\dot{x}' = v_0 + \vartheta_0 v_1 + \vartheta_0^2 v_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\vartheta_0^i v_i \quad . \ . \ (46)$$

v_0 ist dabei die konstante mittlere Fluggeschwindigkeit. Damit bekommt man für die in der Differentialgleichung vorkommenden Größen:

$$\ddot{x}' = \vartheta_0\dot{v}_1 + \vartheta_0^2\dot{v}_2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\vartheta_0^i\dot{v}_i$$
$$\dot{x}'^2 = v_0^2 + 2v_0v_1\vartheta_0 + (v_1^2 + 2v_0v_2)\,\vartheta_0^2 + \ldots$$

Geht man mit diesen Ansätzen in die Gl. $(45)_1$ ein und ordnet gleichzeitig nach Potenzen von ϑ, so bekommt man:

$$\left[\frac{W_0}{M} - \frac{S}{M}\right] + \vartheta_0\left[\dot{v}_1 + \frac{A_0}{M}\cos\nu t + \frac{2W_0}{M}\frac{v_1}{v_0}\right]$$
$$+ \vartheta_0^2\left[\dot{v}_2 + \frac{2A_0}{M}\frac{v_1}{v_0}\cos\nu t + \frac{W_0}{M}\frac{v_1^2 + 2v_0v_2}{v_0^2}\right]$$
$$+ \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Die erste, von ϑ_0 freie Klammer dieser Gleichung ist auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen Null. Soll die übrigbleibende Gleichung für verschiedene Schwingungsamplituden ϑ_0 gültig sein, so muß jede Klammer für sich verschwinden. Daraus ergeben sich Bestimmungsgleichungen für die Funktionen v_1, v_2 usw., die sich schrittweise lösen lassen. Für v_1 hat man die lineare inhomogene Gleichung:

$$\dot{v}_1 + \frac{2W_0}{Mv_0}v_1 = -\frac{A_0}{M}\cos\nu t \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

mit der Lösung:

$$v_1 = -\frac{A_0 v_0}{(M\nu v_0)^2 + (2W_0)^2}(2W_0\cos\nu t + M\nu v_0\sin\nu t) \quad (49)$$

Um die allgemeine Lösung zu bekommen, muß man dazu noch die Lösung der homogenen Gleichung addieren. Diese besteht in einer mit der Zeit abklingenden e-Funktion, die hier fortgelassen werden soll, da nur der eingeschwungene Zustand von Interesse ist.

Mit der Lösung (49) hat man nun in die Bestimmungsgleichung für v_2 einzugehen und bekommt damit eine ähnliche lineare inhomogene Gleichung für v_2, wie es die Gl. (48) für v_1 ist. Man übersieht sofort, daß als Erregerglieder Ausdrücke mit den Frequenzen 2ν vorkommen, da v_1 in der mit ϑ_0^2 multiplizierten Klammer von (47) nur als Quadrat bzw. mit dem Faktor $\cos\nu t$ multipliziert auftritt. Die Funktion v_2 wird daher neben den abklingenden Eigenschwingungen nur Frequenzen von der Größe 2ν enthalten. Entsprechend werden in v_3 Frequenzen von der Größe 3ν auftreten und so fort. Der Reihenansatz kann daher auch als Fourierreihe für die gesuchte Geschwindigkeit $\dot{x}'$ aufgefaßt werden.

Da es bei dem vorliegenden Problem nur auf eine Näherungslösung der Gl. $(45)_1$ ankommt, so verzichten wir auf die Ausrechnung der höheren Glieder der Reihe und begnügen uns mit den ersten beiden Gliedern von (46). Aus $(45)_2$ bekommt man dann mit dem Ansatz (46) unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ϑ_0 für die Beschleunigung in der Vertikalrichtung:

$$\ddot{z}' = \frac{2\vartheta_0 A_0}{Mv_0}v_1.$$

Zur Auswertung ist es zweckmäßig, die für die weitere Rechnung benötigten Beschleunigungen in der x'- und z'-Richtung in dimensionsloser Form mit Hilfe der Größe

$$\lambda = \frac{2W_0}{M\nu v_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

und der Beziehung:

$$\frac{A_0}{M} = g$$

anzuschreiben; gleichzeitig lassen sich die auf der rechten Seite von (49) stehenden Kreisfunktionen noch zusammenfassen:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= -\frac{\vartheta_0 g}{\sqrt{1+\lambda^2}}\cos(\nu t + \operatorname{arctg}\lambda) \\ \ddot{z}' &= -\frac{2\vartheta_0 g^2}{\nu v_0\sqrt{1+\lambda^2}}\sin(\nu t + \operatorname{arctg}\lambda) \end{aligned}\right\} \ldots \quad (51)$$

Aus diesen Beschleunigungen setzen sich die in den Bewegungsgleichungen für das Längsneigungspendel auftretenden Beschleunigungen b_x und b_z wie folgt zusammen:



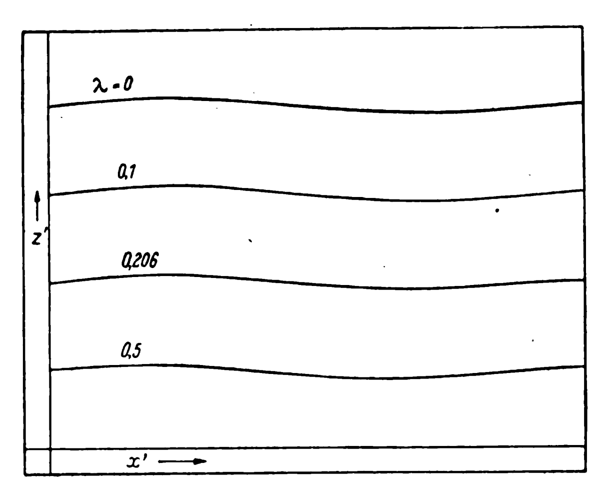


Bild 12. Bahnkurven des Flugzeuges bei Schwingungen um die Querachse.

$$b_x = \ddot{x} = \ddot{x}' \cos\vartheta + \ddot{z}' \sin\vartheta \approx \ddot{x}',$$
$$b_z = \ddot{z} = \ddot{z}' \cos\vartheta - \ddot{x}' \sin\vartheta \approx \ddot{z}'.$$

Die bei diesen Näherungen vernachlässigten Größen sind klein von zweiter Ordnung, da sie ϑ_0^2 als Faktor haben. Man kann also unmittelbar die Werte (51) als Beschleunigungen in die Grundgleichung übernehmen. Zuvor soll jedoch noch eine kurze Bemerkung über die Bahnkurve des Flugzeuges Erwähnung finden. Man findet die Parameterdarstellung der Bahnkurve durch zweimalige Integration von (51) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen zu:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\vartheta_0 g}{\nu^2 \sqrt{1+\lambda^2}} \cos(\nu t + \operatorname{arctg} \lambda) + v_0 t \\ z' &= -\frac{2 \vartheta_0 g^2}{\nu^3 v_0 \sqrt{1+\lambda^2}} \sin(\nu t + \operatorname{arctg} \lambda) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (52)$$

Die Bahn des Flugzeuges entsteht danach durch Überlagerung einer elliptischen Schwingung mit der geradlinigen Fortbewegung. Die Bahnkurve bekommt dadurch Ähnlichkeit mit der Form der durch kreisförmige Orbitalbewegung entstehenden Wasserwellen. In Bild 12 ist die Formel (51) für eine Schwingungsdauer von 30 s (d. h. $\nu = 0{,}209$) und eine Amplitude von 5,7° (d. h. $\vartheta_0 = 0{,}1$) für vier verschiedene Werte der dimensionslosen Größe λ ausgewertet worden. Die Höhenunterschiede des Flugzeuges betragen bei diesen sehr flachen Wellenphygoiden insgesamt 54 bis 60 m, während die in der Fortbewegungsrichtung auftretenden Schwankungen ± 20 bis ± 22 m betragen.

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen können die in der Grundgleichung auftretenden Kräfte bestimmt werden:

1. Die äußeren Kräfte:
$$P_x = -f(\dot{x}) + m g \sin\vartheta \approx -f(\dot{x}) - m g \vartheta_0 \cos\nu t,$$
$$P_z = -m g \cos\vartheta \approx -m g.$$
2. Die Corioliskräfte fallen wie bisher heraus.
3. Die Zentrifugalkräfte:
$$Z_x = -m u_y^2 r_x = -m r_x \vartheta_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t,$$
$$Z_z = -m u_y^2 r_z = -m r_z \vartheta_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t.$$
4. Die Zusatzkräfte durch Drehbeschleunigung:
$$B_x = m \dot{u}_y r_z = m r_z \vartheta_0 \nu^2 \cos\nu t,$$
$$B_z = -m \dot{u}_y r_x = -m r_x \vartheta_0 \nu^2 \cos\nu t.$$

Damit bekommt man in üblicher Weise aus (6) die Bewegungsgleichung für das Längsneigungspendel:

$$\ddot{x} + \frac{f(\dot{x})}{m} + [g - r_z \vartheta_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t - r_x \vartheta_0 \nu^2 \cos\nu t - b_z] \frac{x}{L}$$
$$= [-g \vartheta_0 \cos\nu t + r_x \vartheta_0^2 \nu^2 \sin^2 \nu t - r_z \vartheta_0 \nu^2 \cos\nu t - b_x] \quad (53)$$

Wir werden uns auch hier damit begnügen, die Gleichgewichtslage der durch (53) gegebenen Schwingung zu diskutieren. In dimensionsloser Form bekommt man folgende Gleichgewichtslage:

$$\frac{x_0}{L} = \frac{-\vartheta_0 \cos\nu t - \frac{b_x}{g} - \vartheta_0 \frac{r_z \nu^2}{g} \cos\nu t + \vartheta_0^2 \frac{r_x \nu^2}{g} \sin^2 \nu t}{1 - \frac{b_z}{g} - \vartheta_0 \frac{r_x \nu^2}{g} \cos\nu t - \vartheta_0^2 \frac{r_z \nu^2}{g} \sin^2 \nu t} \quad \ldots (54)$$

Darin sind für b_x und b_z die Werte aus den Gl. (51) einzusetzen. Um das Ergebnis einigermaßen übersehen zu können, sei zunächst eine kurze Abschätzung der einzelnen Glieder von (54) gebracht. Für die bei der Geschwindigkeitsschwingung auftretenden Frequenzen und die normalerweise vorkommenden Werte für den Geräteabstand vom Flugzeugschwerpunkt haben die Ausdrücke

$$\frac{r_x \nu^2}{g} \text{ und } \frac{r_z \nu^2}{g}$$

Werte, die sicher kleiner als 0,01 sind. Da diese Glieder außerdem noch mit der kleinen Größe ϑ_0 bzw. ϑ_0^2 multipliziert sind, so kann man sie im Nenner unbedenklich gegen eins vernachlässigen. Aber auch im Zähler werden diese Glieder ohne wesentlichen Einfluß sein. Das außerdem im Nenner stehende Glied b_z/g hat, wie man aus (51) ersieht, ebenfalls einen Wert, der klein gegen eins ist, und kann für eine überschlägige Betrachtung außer acht bleiben. Behält man somit nur die wichtigsten Glieder bei, so bekommt man:

$$\frac{x_0}{L} = -\vartheta_0 \cos\nu t - \frac{b_x}{g} = -\vartheta_0 \cos\nu t$$
$$+ \frac{\vartheta_0}{1+\lambda^2} (\cos\nu t - \lambda \sin\nu t) \quad \ldots (55)$$

Das erste Glied gibt gerade die richtige Anzeige der Längsneigung an, das zweite, durch die Beschleunigung verursachte Glied bezeichnet also den Fehler der Längsneigungsanzeige. Die Formel (55) entspricht genau der Formel (29), die für die Anzeige des Querneigungsmessers beim Taumelflug abgeleitet war. Man hat nur an Stelle des Längsneigungswinkels ϑ_0 den Querneigungswinkel φ_0 zu setzen und an Stelle der dimensionslosen Größe λ den Beiwert μ_1. Alle für die Anzeige des Querneigungsmessers im Taumelflug abgeleiteten Betrachtungen können sofort übertragen werden. Wir können somit als Ergebnis feststellen, daß der Längsneigungsmesser bei Schwingungen des Flugzeuges um seine Längsachse die Längsneigung sowohl der Größe als auch der Phase nach falsch anzeigt. Der Fehler wird um so größer, je kleiner der Beiwert λ ist. Für $\lambda = 0$ zeigt der Längsneigungsmesser überhaupt nichts an, für $\lambda = \infty$ zeigt er richtig an. Der Beiwert λ selbst geht direkt proportional der Leistungsbelastung und umgekehrt proportional der Fluggeschwindigkeit und der Frequenz der Geschwindigkeitsschwingung. Für eine Ju 52 bekommt man bei einer Längsschwingungsperiode von 30 s den Wert $\lambda = 0{,}2$. Aus Bild 9, das nach dem zuvor Gesagten auch für diesen Fall gültig ist, sieht man, daß bei diesem Wert die Anzeige des Längsneigungsmessers nicht annähernd der wirklichen Längsneigung entspricht. Diese Fehler des Längsneigungsmessers lassen sich auch hier nicht durch andere Konstruktion des Gerätes vermeiden, da sie ausschließlich von dem Flugzeug selbst und seinen flugmechanischen Eigenschaften abhängen.

Die bisherigen Betrachtungen galten für die langperiodische Geschwindigkeitsschwingung. Bei der Ableitung der Gleichungen war wesentlich von der Voraussetzung Gebrauch gemacht worden, daß sich der Anstellwinkel bei der Schwingung nicht ändert. Aus diesem Grunde lassen sich die Betrachtungen nicht ohne weiteres auf die wesentlich schneller verlaufende Schwingung übertragen, bei der sich vor allem der Anstellwinkel ändert, während die Schwankungen in der Geschwindigkeit gering bleiben. Aus Überschlagsrechnungen kann man ersehen, daß bei diesen Schwingungen die Beschleunigungen b_x und b_z um mindestens eine Größenordnung kleiner sind als im Fall der Geschwindigkeits-

schwingung. Andererseits aber sind infolge der wesentlich höheren Frequenz die Zentrifugalkräfte und Zusatzkräfte durch Drehbeschleunigung um mindestens eine Größenordnung größer geworden. Man wird daher in erster ganz grober Näherung die Beschleunigungen b_x und b_z unberücksichtigt lassen und nur die anderen in der Grundgleichung auftretenden Kräfte einsetzen. Man kann dann die Formel (54) auch für diesen Fall anwenden und bekommt daraus unter Beibehaltung der wichtigsten Glieder (Ausdrücke mit ϑ_0^2 als Faktor werden vernachlässigt):

$$\frac{x_0}{L} = -\vartheta_0 \cos \nu t \left(1 + \frac{r_z \nu^2}{g}\right) \quad . \; . \; . \; . \; (56)$$

Die Anzeige des Längsneigungsmessers ist dann zwar der Phase nach richtig, aber die Größe der Anzeige ist verfälscht, und zwar um so mehr, je größer die Vertikalkomponente des Geräteabstandes vom Flugzeugschwerpunkt ist. Diese Fehler werden durch periodische Beschleunigungen des Geräteortes infolge der Drehungen des Flugzeuges um seinen Schwerpunkt verursacht. Liegt das Gerät oberhalb des Schwerpunktes, so ist die Anzeige zu groß, liegt es unterhalb des Schwerpunktes, so ist sie zu klein und kann sogar nach der falschen Seite gehen, also eine Phasenverschiebung von 180° zeigen. Dazu wären jedoch bei einem Wert von $r_z = 1$ m schnelle Schwingungen von einer Schwingungsdauer unter 2 s notwendig.

V. Zusammenfassung.

Das Verhalten von Pendelgeräten mit einem Freiheitsgrad, wie sie in den verschiedensten Ausführungen zur Anzeige von Quer- und Längsneigungen im Flugzeug verwendet werden, wird für eine Reihe von Flugzuständen untersucht. Dabei zeigt sich, daß ein Querneigungspendel besonders bei hängendem oder rollendem Flugzeug, ein Längsneigungspendel vor allem bei beschleunigtem oder stampfendem Flugzeug Anzeigen liefert, die in keiner Weise den wirklich vorhandenen Neigungen entsprechen. Vielmehr hängt die Anzeige ganz wesentlich von den auf das Flugzeug wirkenden Widerstandskräften ab, die sich bei instationären Bewegungen asymptotisch den Endwerten nähern, die für den neuen Gleichgewichtszustand notwendig sind. Entsprechend nähert sich die Anzeige der Pendelgeräte erst asymptotisch ihren Endwerten. Dieses »Kriechen« ist ein prinzipieller Fehler aller Pendel-Neigungsmesser, der sich auch durch Änderung der Gerätedaten nicht beeinflussen läßt. Er hängt vielmehr ausschließlich von den Kennwerten des Flugzeuges ab.

Führt das Flugzeug Rollschwingungen (bzw. Stampfschwingungen) aus, so ist die Anzeige des Querneigungsmessers (bzw. Längsneigungsmessers) sowohl in der Größe als auch in der Phase um so mehr gegenüber der richtigen Neigung verfälscht, je geringer die Widerstandskräfte sind, die das Flugzeug bei diesen Bewegungen erfährt.

